ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
(Τάξεις: Α΄, Β΄, Γ΄)

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΙΔΙΚΟΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ:

Παπασταυρίδης Σταύρος, Ομότιμος Καθηγητής Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών (Συντονιστής)
Ζαχαριάδης Θεοδόσιος, Καθηγητής Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών
Κολεζά Ευγενία, Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Πατρών
Μπάραλος Γώργιος, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
Πολύζος Γεώργιος, τ. Μον. Πάρεδρος Παιδαγωγικού Ιντιτούτου
Σβέρκος Ανδρέας, τ. Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
Σκούρας Αθανάσιος, Σύμβουλος Α΄ ΥΠΑΙΘ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗΣ ΕΠΟΠΤΕΙΑΣ:

Φερεντίνος Σπύρος, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03

ΕΚΠΟΝΗΣΗΣ:

Βερύκιος Πέτρος, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
Βλάχου Αγγελική, Εκπαιδευτικός Δημόσιου τομέα ΠΕ03
Βροντάκης Εμμανουήλ, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικού τομέα ΠΕ03
Γλένης Σπυρίδων, Εκπαιδευτικός Δημοσίου Τομέα ΠΕ03
Δεληγιάννη Ειρήνη, Εκπαιδευτικός Δημοσίου Τομέα ΠΕ03
Δουκάκης Σπυρίδων, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικού τομέα ΠΕ03
Καμπούκος Κυριάκος, Εκπαιδευτικός Δημόσιου τομέα ΠΕ03
Κασκαντάμης Μιχαήλ, Εκπαιδευτικός Δημόσιου τομέα ΠΕ03
Κοντογούρη Ευανθία, Εκπαιδευτικός Δημόσιου τομέα ΠΕ03
Κόσυβας Γεώργιος, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
Μαστορίδης Ελευθέριος, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
Μπαμπίλη Αμαλία-Χριστίνα, Εκπαιδευτικός Δημόσιου τομέα ΠΕ03
Νικολόπουλος Ηρακλής, Εκπαιδευτικός Δημόσιου τομέα ΠΕ03
Παπαδόπουλος Ηλίας, Εκπαιδευτικός Δημόσιου τομέα ΠΕ03
Πούλος Γεώργιος, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
Σαράφης Ιωάννης, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικού Τομέα ΠΕ03
Σιαννής Φώτιος, Επίκ. Καθηγητής Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών
Σιώπη Καλλιόπη, Εκπαιδευτικός Δημόσιου Τομέα ΠΕ03
Στάμπολας Ιωάννης, Εκπαιδευτικός Δημόσιου Τομέα ΠΕ03
Στουραΐτης Κωνσταντίνος, Εκπαιδευτικός Δημόσιου Τομέα ΠΕ03

«ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών»
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ»

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Σωτήριος Γκλαβάς
Πρόεδρος του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης
Γεωργία Φέρμελη
Σύμβουλος Α΄ Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Το παρόν συγχρηματοδοτήθηκε από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και εθνικούς πόρους στο πλαίσιο της πράξης **«ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών»** του Επιχειρησιακού Προγράμματος **«Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση»**

Μαθηματικά
Α΄ και Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου
και της ομάδας προσανατολισμού των Θετικών
Σπουδών της Β΄ και Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου

Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής
Γ΄ τάξης
της ομάδας προσανατολισμού των Οικονομικών-
Πολιτικών-Κοινωνικών και Παιδαγωγικών
Σπουδών Γενικού Λυκείου

1. Η ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΜΑΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Είναι αυτονόητη αλήθεια ότι αντίληψη μας για τα μαθηματικά θα επηρεάσει καίρια την αντίληψη μας για την μαθηματική παιδεία. [1]

Για αυτό τον λόγο επιχειρούμε να συνοψίσουμε την αντίληψη μας για τα Μαθηματικά, στον βαθμό που επιβάλλεται, αλλά και επιτρέπεται από τους σκοπούς του παρόντος κειμένου.

Δεν υπάρχει γενικά αποδεκτός ορισμός των Μαθηματικών, κάτι που δεν ξαφνιάζει γιατί τα Μαθηματικά είναι ένα πολύ ευρύ επιστημονικό πεδίο με όλων των ειδών τις διασυνδέσεις, με όλες τις μορφές γνώσης, με ένα συνεχώς εξελισσόμενο περιεχόμενο και έναν πολυδιάστατο τρόπο σκέψης.

Αναζητώντας, για τις ανάγκες του παρόντος κειμένου μια σύντομη, λειτουργική περιγραφή, θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα Μαθηματικά είναι η γενική μελέτη των κανονικοτήτων (μοτίβα, πάττερν) και των σχέσεών των. [2]

Οι σκοποί των μαθηματικών σε πρώτη φάση είναι η διαμόρφωση εικασιών επί αυτών των κανονικοτήτων και η απόδειξη αυτών.

Σε δεύτερη φάση, ο σκοπός τους, όπως και άλλων επιστημών και με την βοήθεια άλλων επιστημών, είναι η κατανόηση των φαινομένων που αντιλαμβανόμαστε με τις αισθήσεις και το μυαλό μας.

Ο σκοπός αυτός έχει τρεις κύριους υποσκοπούς:

α) την εξήγηση των φαινομένων

β) τη πρόβλεψη

γ) την τεχνολογία αξιοποίησης της γνώσης στον έλεγχο της φύσης.

Η μέθοδος τους έχει ως κεντρικό άξονα το Αριστοτέλειο (η Ευκλείδειο) κουαρτέτο: Λογική, Ορισμοί, Αξιώματα, Προτάσεις.[3]

Αυτή η αναζήτηση γενικών κανονικοτήτων οδηγεί στην ανάπτυξη εννοιών, γενικεύσεων και συμπερασμάτων, που βελτιώνουν την κατανόησή μας για τον κόσμο και που μπορούν να-εφαρμοστούν για την επίλυση προβλημάτων, καθαρά μαθηματικών ή από τις άλλες επιστήμες.

Τα Μαθηματικά, όπως και οι λοιπές επιστήμες, έχουν έναν ιδιαίτερο τρόπο σκέψης που χαρακτηρίζεται από διαδικασίες όπως εκτίμηση, διερεύνηση, ανακάλυψη, ταξινόμηση, γενίκευση, αφαίρεση, συμπερασματολογία κλπ. Συνδυάζουν ακρίβεια και ελευθερία σκέψης, τυπικό συλλογισμό και διαίσθηση κλπ.

Τα μαθηματικά έχουν μία μοναδικότητα μέσα σε όλες τις επιστήμες: Παίρνουν από όλες και δίνουν σε όλες. Φυσικά μεταξύ των επιστημών υπάρχουν πολλές αλληλοεπιδράσεις, όμως αυτή την συνολική αλληλεπίδραση την έχουν μόνο τα μαθηματικά και η αλληλοεπίδραση αυτή είναι καθοριστική στην ανθρώπινη γνώση.

Μετά από αυτές τις γενικότητες, προχωρούμε σε κάποιες πιο ειδικές παρατηρήσεις.

---

(1) Ο σημαντικός μαθηματικός René Frédéric Thom (1923 –2002), (βραβείο Fields 1958), έγραψε: «All mathematical pedagogy, even if scarcely coherent, rests on a philosophy of mathematics» (μτφ. Κάθε παιδαγωγική των μαθηματικών, ακόμα και αν έχει λίγη λογική συνέπεια, στηρίζεται σε κάποια φιλοσοφία των μαθηματικών). (Βλέπε Ernest Paul, Mathematics Education and Philosophy: An International Perspective, σελ. 1)

(2) Ας δούμε ένα παράδειγμα. Οι θετικοί ακέραιοι προκύπτουν από θεωρήσεις κοπαδιών ζώων, δένδρων σε έναν αγρό κλπ. Τα κοπάδια μπορούν να ενωθούν, όπως και οι αγροί και να οδηγηθούμε στην πρόσθεση των θετικών ακεραίων. Φυσικά αυτά που τώρα περιγράφουμε έτσι απλά, έλαβαν χώρα στα βάθη της προϊστορίας σε διάρκεια πιθανότατα εκατοντάδων αιώνων. Εξ άλλου θεωρήσεις της κίνησης σε μεταγενέστερους αιώνες, ξεκινώντας από τις έννοιες της ταχύτητας, επιτάχυνσης, δύναμης κλπ, μας οδηγούν στην γενικότερη έννοια α του διανύσματος. κλπ κλπ

(3) Το σχήμα αυτό οργάνωσης της γνώσης γενικώς διατυπώνεται στο Αναλυτικά Πρότερα του Αριστοτέλη. Στα Στοιχεία του Ευκλείδη έχουμε την πρώτη μείζονα εφαρμογή του σχήματος αυτού, η οποία επηρέασε καθοριστικά τον τρόπο σκέψης της νεώτερης επιστήμης.

1.2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η Μαθηματική Απόδειξη είναι ο τρόπος με τον οποίον τα μαθηματικά επιβεβαιώνουν μία αλήθεια. Η ιστορική βάση της Μαθηματικής απόδειξης (και της επιστήμης της ΛΟΓΙΚΗΣ γενικότερα) βρίσκονται στον Αριστοτέλη (βλ. ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΠΡΟΤΕΡΑ), και γενικώς θεωρείται από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του πολιτισμού και ειδικότερα εκ των βάσεων της σημερινής επιστήμης.

Όμως φοβούμεθα ότι σε πολλούς αποφοίτους του λυκείου μας δίδεται η εντύπωση ότι η μαθηματική απόδειξη είναι κάτι ανιαρό ή περιττό ή απάνθρωπο ή ασύλληπτο κλπ

Η μαθηματική απόδειξη **προφανώς βασίζεται (και ΔΕΝ έρχεται σε αντίθεση)** με την καθημερινή εμπειρία του ανθρώπου, στον διάλογο που γίνεται σε παρέες και σε δημόσιους χώρους, στον πολιτικό διάλογο στην βουλή, στην επιχειρηματολογία συμβολαιογραφικών και νομικών κειμένων, στον δικανικό διάλογο κλπ[4]. Πηγαίνει όμως παραπέρα από αυτά. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Αν κάποιος επιχειρήσει να μετρήσει το άθροισμα των γωνιών τριγώνου με το μοιρογνωμόνιο, με το GeoGebra κλπ , θα καταλήγει σε αθροίσματα που πλησιάζουν πάρα πολύ τις δύο ορθές, όμως ποτέ δεν θα είναι κανείς απόλυτα σίγουρος ότι είναι πάντα ακριβώς δύο ορθές. Περαιτέρω, αν υπάρχει ήδη αβεβαιότητα για το τρίγωνο, πολύ δύσκολα προχωρεί κανείς να τολμήσει να κάνει σκέψεις και εικασίες για ν-γωνα γενικά, ή σκέψεις γύρω από την γεωμετρία του σύμπαντος κλπ.

Εν ολίγοις, η μαθηματική απόδειξη ναι μεν στηρίζεται σε όλη την υπόλοιπη ανθρώπινη εμπειρία**,** όμως είναι μία εκλέπτυνση της σκέψης **που εξασφαλίζει βεβαιότητα και γενίκευση.**

Όμως, ενώ η θέση αυτή έχει ευρεία αποδοχή, μάλλον δεν προκύπτει αβίαστα στον μαθητή από την παρουσίαση μιας «αδιατάρακτης» σειράς όρων του γνωστού κουαρτέτου ΑΞΙΩΜΑΤΑ-ΟΡΙΣΜΟΙ-ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ[5]. Ο συγγραφέας του βιβλίου και ο καθηγητής στην τάξη θα πρέπει σε επιλεγμένα σημεία να «διαταράξει» την ροή και να παρέμβει και να σχολιάσει ανάλογα κλπ

Θα πρέπει να αποφεύγονται αποδείξεις τις οποίες ο μαθητής αδυνατεί να κατανοήσει το πώς ανακαλύφθηκαν, π.χ. η απόδειξη του τύπου του ΗΡΩΝΑ[6].

Ο τονισμός αποδείξεων προτάσεων του τύπου «1>0» ή «τόξο κύκλου έχει μοναδικό μέσον», είναι μάλλον ανιαρές για τον μαθητή και δεν αναδεικνύουν στην αξία της μαθηματικής απόδειξης[7]. Η αξία της μαθηματικής απόδειξης θα αναδειχθεί μέσω θεωρημάτων που περιέχουν κάτι το ενδιαφέρον και απροσδόκητο, π.χ. το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού πολυγώνου είναι 4 ορθές. κλπ κλπ

1.2. ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Η Αξιωματική Μέθοδος είναι ο τρόπος οργάνωσης της Μαθηματικής γνώσης. Η ιστορική βάση της ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ της γνώσης γενικότερα, βρίσκεται στον Αριστοτέλη (βλ. ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΥΣΤΕΡΑ), και γενικώς θεωρείται από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του πολιτισμού και ειδικότερα εκ των θεμελιωδών στοιχείων της σημερινής επιστήμης. Φυσικά η πρώτη μείζων υλοποίηση που επηρέασε όλες τις μεταγενέστερες είναι τα ΣΤΟΙΧΕΙΑ του Ευκλείδη (c. 300 π.Χ.).

Πρέπει να περάσει το μήνυμα στην μαθητή ότι κάθε μαθηματική περιοχή (και ασφαλώς κάθε επιστημονική περιοχή) ΔΕΝ είναι «λίθοι τε καὶ πλίνθοι καὶ ξύλα καὶ κέραμος ἀτάκτως μὲν ἐρριμμένα»[8], τουτέστιν, ΔΕΝ είναι απλά και μόνον « μια ντουζίνα ορισμοί, ίσως μισή ντουζίνα αξιώματα, καμιά εξηνταριά θεωρήματα και καμιά

[4] Είναι στενή η σχέση των ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ του Ευκλείδη με την αθηναϊκή δημοκρατία και γεωμετριών που (κακώς, κατά την άποψη μας) ονομάζονται ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ με τον Διαφωτισμό και την Γαλλική Επανάσταση.

[5] Είναι αυτό που πολλοί το ονομάζουν «μετωπική διδασκαλία».

[6] . Αυτό δεν αποκλείει την αναφορά του τύπου του ΗΡΩΝΑ και την χρήση του στην λύση ασκήσεων η και την απόδειξη άλλων θεωρημάτων. Οπωσδήποτε γενικά ΔΕΝ πρέπει να δημιουργούνται κενά στην οργάνωση της ύλης.

[7] Φυσικά ένα βιβλίο θα περιέχει και τέτοιου είδους αποδείξεις χάριν της εσωτερικής οργάνωσης και ενότητας της ύλης. Επίσης τέτοιου είδους αποδείξεις μπορεί να είναι χρήσιμες ως «προπόνηση» για τις πράγματι σημαντικές αποδείξεις που θα ακολουθήσουν. Όμως δεν θα είναι αυτές τα σημεία εστιασμού για την ανάδειξη του ανώτερου ρόλου της μαθηματικής απόδειξης .

χιλιάδα ασκήσεις»!. Όλα αυτά είναι ωραία και καλά και ενδιαφέροντα και οπωσδήποτε αποτελούν ένα επίπεδο γνώσης. Όμως δεν αποτελούν, (όπως θεωρεί ο ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ), την ολοκλήρωση της γνώσης. Μας χρειάζεται και ο ΣΚΟΠΟΣ (ΤΕΛΟΣ, κατά τον ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ). Π.χ. Στα ΣΤΟΙΧΕΙΑ του ΕΥΚΛΕΙΔΗ διαφαίνονται, ανάλογα με την οπτική του μελετητή, διάφοροι σκοποί, π.χ. η απόδειξη των λεγομένων στερεών του Πλάτωνα κλπ

Στην δική μας περίπτωση αποβλέπουμε σε διδακτικό βιβλίο και διδασκαλία στην τάξη, όπου θα πρέπει να διακρίνονται στην ολότητα του βιβλίου η στα τμήματα του, σκοπός η σκοποί προς τους οποίους οδηγούμεθα. Π.χ. ένας σκοπός της ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ είναι να υπολογίζουμε διάφορα ενδιαφέροντα μήκη, γωνίες κλπ στο τρίγωνο κλπ, από την γνώση όσον το δυνατόν ολιγότερων δεδομένων. Άλλο παράδειγμα είναι η ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, που μεταξύ άλλων, αποβλέπει σε μέθοδο μέσω της ΣΥΜΒΟΛΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ, που λύνει σχετικά εύκολα πάρα πολλά εξαιρετικής δυσκολίας προβλήματα της ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ. κλπ κλπ. Το βιβλίο θα πρέπει να τα κάνει αυτά, ορατά στον μαθητή.

Η ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ αποτελεί μία οργάνωση της γνώσης που σήμερα θεωρείται περίπου το χρυσό δισκοπότηρο πρακτικώς για όλες τις επιστήμες[9]. Στα μαθηματικά του λυκείου η αξιωματικότης κυρίως αφορά την ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, όμως κατά κάποιο τρόπο διέπει και τα λοιπά μαθηματικά του λυκείου και αυτό, κατά κάποιο τρόπο, πρέπει τελικά να περάσει από ΠΣ στο ΒΙΒΛΙΟ και στον ΚΑΘΗΓΗΤΗ.

1.3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΣ

Μεταξύ των αποδεικτικών μεθόδων που χρησιμοποιούν τα μαθηματικά, υπάρχουν δύο τουλάχιστον αποδεικτικές μέθοδοι, που ναι μεν μπορούν να εφαρμοσθούν οπουδήποτε, όμως είναι χαρακτηριστικές κυρίως της διδασκαλίας των μαθηματικών και αξίζουν ιδιαίτερης μνείας. Αυτές είναι η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ και η ΕΙΣ ΑΤΟΠΟΝ ΑΠΑΓΩΓΗ. Σημαντικό είναι επίσης και το θέμα του ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ.

Σε αυτά τα τρία ζητήματα αναφερόμεθα κατωτέρω.

1.3.1. ΕΙΣ ΑΤΟΠΟΝ ΑΠΑΓΩΓΗ [10]

Η εις άτοπο απαγωγή είναι αντικείμενο μεγάλης μελέτης στα μαθηματικά, στην λογική, στην φιλοσοφία κλπ. Κατά καιρούς διάφοροι μελετητές θεώρησαν ότι δεν θα πρέπει να χρησιμοποιείται διότι ίσως δεν είναι τελείως ασφαλής μέθοδος. Όμως η μαθηματική κοινότητα στο σύνολό της το απέρριψε κυρίως διότι, εάν απεκλείετο από τα αποδεικτικά εργαλεία η εις ΑΤΟΠΟΝ ΑΠΑΓΩΓΗ, τότε πολλά ιστορικά κομμάτια των μαθηματικών δεν μπορούσαν να εκτεθούν ή η διαχείριση τους γινότανε «περίεργη» ή εξαιρετικά δύσκολη, (π.χ. η θεωρία των παραλλήλων της ευκλείδειας γεωμετρίας). ..

Θα πρέπει ο μαθητής να συνειδητοποιήσει την δύναμη και τις ιδιαιτερότητες της μεθόδου αυτής.

---

[8] Η πλήρης φράση, που την λέει ο Σωκράτης, είναι η «καλὸν δὲ καὶ τὸ τακτικὸν εἶναι· πολὺ γὰρ διαφέρει στράτευμα τεταγμένον ἀτάκτου, ὥσπερ λίθοι τε καὶ πλίνθοι καὶ ξύλα καὶ κέραμος ἀτάκτως μὲν ἐρριμμένα οὐδὲν χρήσιμά ἐστιν, ἐπειδὰν δὲ ταχθῇ κάτω μὲν καὶ ἐπιπολῆς τὰ μήτε σηπόμενα μήτε τηκόμενα, οἵ τε λίθοι καὶ ὁ κέραμος, ἐν μέσῳ δὲ αἵ τε πλίνθοι καὶ τὰ ξύλα, ὥσπερ ἐν οἰκοδομίᾳ συντίθεται, τότε γίγνεται πολλοῦ ἄξιον κτῆμα, οἰκία.» και αναφέρεται στα ΑΠΟΜΝΗΜΟΝΕΥΜΑΤΑ του ΞΕΝΟΦΩΝΤΟΣ, βιβλίο 3, κεφ. 1, παραγ.7, γραμμ. 4 .

[9] Δεν χρησιμοποιούν όλες οι επιστήμες την ίδια ορολογία. Π.χ. οι φυσικοί μιλάνε για «αρχές». Επίσης δεν έχουν επιτύχει όλες οι επιστήμες να υιοθετήσουν την Αξιωματική Μέθοδο, όμως προς την κατεύθυνση αυτή είναι η γενική τάση.

[10] Η ΕΙΣ ΑΤΟΠΟΝ ΑΠΑΓΩΓΗ στα λατινικά είναι REDUCTIO AD ABSURDUM και με αυτόν τον όρο αναφέρεται συνήθως στην διεθνή βιβλιογραφία.

Υπάρχει και μία λογοτεχνική εκφορά στο διήγημα Conan Doyle, The Sign of the Four, ch. 6 (1890) (ΤΟ ΣΗΜΑ ΤΩΝ ΤΕΣΣΑΡΩΝ). Ο ΣΕΡΛΟΚ ΧΟΛΜΣ αποτείνεται, ως συνήθως κάπως συγκαταβατικά, στον Δρ ΓΟΥΑΤΣΟΝ: Πόσες φορές θα στο πώ ! Όταν απαλείψεις το αδύνατον, αυτό που απομένει είναι η αλήθεια, όσο παράξενη και αν φαίνεται ! (How often have I said to you that when you have eliminated the impossible, whatever remains, however improbable, must be the truth?)

Γενικώς η εις άτοπον απαγωγή είναι εννοιολογικά δυσκολότερη στην κατανόηση και την εφαρμογή της από την «ευθεία» απόδειξη. Όμως μας δίνει αποδείξεις σε καταστάσεις που η δεν υπάρχουν ευθείες αποδείξεις ή οι ευθείες αποδείξεις είναι εξαιρετικά δύσκολες. Εξ άλλου όπου υπάρχουν διαθέσιμες αποδείξεις και ευθείες και δια της εις άτοπον απαγωγή, συνήθως οι ευθείες αποδείξεις απαιτούν μεν μεγαλύτερη επιδεξιότητα στην χρήση των διαθεσίμων εργαλείων, αφ ετέρου δεν δίνουν περισσότερη πληροφόρηση επί του υπό εξέτασιν θέματος.

Έκφραση των ανωτέρω φαινομένων βρίσκει κανείς, μεταξύ άλλων, και στα κατωτέρω παραδείγματα.

α) Αν α, β, γ είναι θετικοί πραγματικοί και $α^2 + β^2 = γ^2$, να αποδειχθεί ότι α+β>γ. Δεν είναι δύσκολο να δοθούν αποδείξεις και με την εις ΑΤΟΠΟΝ ΑΠΑΓΩΓΗ και άνευ αυτής. Ο μαθητής μπορεί να κληθεί να σχολιάσει: Ποια είναι καλλίτερη; Ευκολότερη; Ποιά μας δίνει περισσότερες πληροφορίες;

β) Το άρρητον του $2^{1/2}$. Με την ΕΙΣ ΑΤΟΠΟΝ ΑΠΑΓΩΓΗ έχουμε αποδείξεις λυκειακού επιπέδου, ενώ άνευ αυτής οι αποδείξεις είναι εξαιρετικά δύσκολες (βλ. http://en.wikipedia.org/wiki/Square_root_of_2#Proofs_of_irrationality).

γ) Υπάρχουν αριθμοί α, β θετικοί πραγματικοί άρρητοι, τέτοιοι ώστε ο $α^β$ να είναι ρητός ? (βλ. http://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_excluded_middle). Χωρίς την εις άτοπο απαγωγή η απόδειξη απαιτεί πολύ προχωρημένες γνώσεις. Με την εις ΑΤΟΠΟΝ ΑΠΑΓΩΓΗ, υπάρχει προκλητικά απλή απόδειξη. Η βασική ιδέα είναι ως ακολούθως: Έστω $α=2^{1/2}$ και $β=α^α$. Προφανώς ισχύει $β^α=2$.

Η ευθεία απόδειξη ξεκινάει από τον ισχυρισμό ότι ο α είναι άρρητος, κάτι που είναι εξαιρετικά δύσκολο να αποδειχθεί. Αντιθέτως η εις άτοπο απαγωγή εξετάζει ξεχωριστά τις δυνατότητες ο α άρρητος η όχι, και η απόδειξη έπεται σχεδόν άμεσα.

Τελικά κάθε μία μέθοδος έχει «ένα συν και ένα πλην». Το «συν» της εις άτοπον απαγωγής είναι ότι δίνει μία πολύ εύκολη απόδειξη. Το «πλην» της είναι ότι δεν μας δίνει συγκεκριμένο παράδειγμα αριθμών α, β που να ικανοποιούν το ζητούμενο, απλώς μας αποδεικνύει ότι κάπου υπάρχουν. Τα αντίθετα συν και πλην υπάρχουν στην ευθεία απόδειξη.

Είναι η άποψή μας ότι το διδακτικό βιβλίο θα πρέπει να τα τονίζει αυτά τα λεπτά σημεία, ότι η εις άτοπο απαγωγή ναι μεν ευκολύνει τις αποδείξεις ή και δίνει αποδείξεις εκεί που δεν θα υπήρχαν, όμως η ευκολία αυτή έχει «κόστος». Η εμφύσηση αυτών των ιδεών στον μαθητή, δεν θα επιτευχθεί μέσω της γνωστής «αδιατάρακτης» σειράς όρων του γνωστού κουαρτέτου ΑΞΙΩΜΑΤΑ-ΟΡΙΣΜΟΙ-ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ. Ο συγγραφέας του βιβλίου και ο καθηγητής στην τάξη θα πρέπει σε επιλεγμένα σημεία να «διαταράξει» την ροή και να επιμείνει να σχολιάσει αναλόγως κλπ. Δεν θα πρέπει αυτό να θεωρείται «χάσιμο χρόνου».

1.3.2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Η μέθοδος της επαγωγής έχει πολύ μεγάλη ιστορία στα μαθηματικά την φιλοσοφία την λογική κλπ. Εμείς στα μαθηματικά του λυκείου θα περιορισθούμε κυρίως σε αυτό που λέγεται Μαθηματική Επαγωγή η Τελεία Επαγωγή. Είναι μία πολύ δυνατή μέθοδος, αλλά αυτή η δύναμις θα πρέπει να γίνει φανερή στον μαθητή μέσω ουσιαστικών αποδείξεων, όπου δεν διαφαίνεται άλλου είδους απόδειξη. Π.χ. Το να τονίσουμε την μέθοδο για να αποδείξουμε ότι π.χ. το άθροισμα των γωνιών κυρτού πολυγώνου είναι (2ν-2) ορθές, κατά την άποψη μας δεν πείθει για την αξία η τον μηχανισμό της μεθόδου. Καταλληλότερα παραδείγματα προς τονισμό της σημασίας της μεθόδου είναι το άθροισμα $1^3+2^3+3^3+ν^3 = \left(\frac{ν(ν+1)}{2}\right)^2$ ή το διώνυμο του Νεύτωνα κλπ.

Επίσης πρέπει να διερευνηθεί και η «αδυναμία» της μεθόδου, ότι δηλαδή αν δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων το συμπέρασμα, τότε τα πράγματα μπορούν να γίνουν πολύ πιο δύσκολα.

Η ως άνω παρατήρηση αντανακλά μία γενικότερη κατάσταση στα μαθηματικά (και στην γνώση γενικότερα): Αν ξέρουμε ότι κάποιος άλλος έχει αποδείξει το συγκεκριμένο θεώρημα, και εμείς πρέπει να το αποδείξουμε, τότε τα πράγματα είναι αρκετά ευκολότερα. Αν εμείς ξεκινάμε και θέτουμε ερωτήματα και ψάχνουμε απαντήσεις, τότε το πεδίο είναι πολύ πιο ευρύ, αόριστο και ίσως και χαοτικό. Ο μαθητής θα πρέπει να εκτεθεί στις διαφοροποιήσεις αυτών των καταστάσεων. Δηλαδή είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσει ο μαθητής ότι δεν είναι μόνον η Απόδειξη σημαντική αλλά και η διαδικασία της Ανακάλυψης είναι εξ ίσου απαραίτητη.

1.3.3. ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σημαντικό κομμάτι στην κατανόηση των μαθηματικών προτάσεων είναι και το ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ένα θεώρημα μας δείχνει μέχρι που μπορούμε να προχωρήσουμε. Το αντιπαράδειγμα μας δείχνει, (κατά κάποιο τρόπο), που πρέπει να σταματήσουμε, προετοιμάζοντας έτσι τον δρόμο για την επόμενη εικασία κλπ. Για παράδειγμα δεν επιτρέπεται γενικώς να πολλαπλασιάζουμε ανισότητες κατά μέλη, αφού $-3<4$ και $-6<2$, αλλά $(-3)(-6)>8$, άρα χρειάζονται κάποιοι περιορισμοί κλπ

1.4.ΑΝΑΛΥΣΗ-ΣΥΝΘΕΣΗ

Κάθε γνώση, σε γενικές γραμμές έχει δύο στάδια: ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ-ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΣΗ. Αμφότερα είναι εξ ίσου απαραίτητα[11]. Στα μαθηματικά την επιβεβαίωση την ονομάζουμε απόδειξη και παραδοσιακά εκεί δίνουμε την μεγάλη έμφαση. Προφανώς και η διαδικασία της ανακάλυψης είναι εξ ίσου σπουδαία. Εδώ το μεγαλύτερο βάρος πέφτει στον καθηγητή στην τάξη. Προφανώς το ζήτημα είναι τεράστιο. Εδώ θα περιορισθούμε στον σχολιασμό της μεθόδου της Ανάλυσης-Σύνθεσης, που αποτελεί το κύριο εργαλείο για να συμπεριλάβουμε και την πορεία της ανακάλυψης στην μαθηματική γνώση του μαθητή. Τονίζουμε ότι η μέθοδος Ανάλυση-Σύνθεση δεν αφορά μόνον τις γεωμετρικές κατασκευές και τους γεωμετρικούς τόπους, αλλά αφορά όλα μαθηματικά, αφορά και είναι εφαρμόσιμη σε κάθε γνώση. «Ατυχώς», όπως οι πλείστες των μεγάλων ιδεών η δεν τυποποιούνται η δεν έχουν τυποποιηθεί μέχρι τούδε[12].

Σε παλαιότερες δεκαετίες εδιδάσκετο η μέθοδος ΑΝΑΛΥΣΗ-ΣΥΝΘΕΣΗ στα σχολεία μας, αλλά μεταγενέστερα εξέλειπε, θύμα και αυτή (όπως πολλά άλλα πολύτιμα στοιχεία της σωστής διδασκαλίας) του εξεταστικού μας συστήματος.

Είναι η άποψή μας ότι πρέπει αυτή η πτυχή να επανέλθει στα βιβλία και την διδασκαλία, επιλέγοντας συγκεκριμένα κατάλληλα θεωρήματα και αναλύοντας αυτά συγκεκριμένα. . [13]

---

[11] Ενδιαφέρουσες είναι οι σχετικές απόψεις των Jacques Hadamard (1865 –1963) και Hermann Weyl (1885 – 1955) που αναφέρονται και σχολιάζονται στην σελίδα 1026 του βιβλίου του MORRIS KLINE, Mathematical Thought from Ancient to Modem Times Volume 3. Και οι τρείς υποστηρίζουν την άποψη ότι η «άμορφη» και άτυπη διαδικασία της ανακάλυψης είναι γενικώς πολύ πιό σημαντική από την «τυποποιημένη» απόδειξη.

[12] Για παράδειγμα η Συμβολική Άλγεβρα του 16ου αιώνα έδωσε μια τυποποιημένη διαδικασία, η οποία σε μεγάλο βαθμό τυποποιεί τις αποδείξεις της Ευκλείδειας-Απολλώνιας Γεωμετρίας, και περαιτέρω έδωσε και τον Απειροστικό Λογισμό. Ενα άλλο παράδειγμα είναι η μαθηματική απόδειξη. Η μαθηματική απόδειξη σε κάποια ημι-εμπειρική μορφή υπάρχει μεγαλουργώντας από την εποχή της κλασσικής αρχαίας Ελλάδας. Όμως ακριβής τυποποιημένος ορισμός διαμορφώνεται μόνον στις αρχές του 20ου αιώνα. Σε αντίθεση, η διαδικασία της ανακάλυψης του «σωστού» θεωρήματος και τις απόδειξής του, σήμερα τουλάχιστον ευρίσκονται μακράν κάθε εννοίας τυποποίησης.

[13] Η πρώτη μείζων ιστορική αναφορά για την μέθοδο της ΑΝΑΛΥΣΗΣ-ΣΥΝΘΕΣΗΣ, που έχει φθάσει σε εμάς, βρίσκεται στον Πάππο τον Αλεξανδρέα (c. 290 – c. 350 μ.Χ.). Για λεπτομέρειες επ' αυτού βλέπε Ivor Thomas, Greek Mathematics, Loeb Editions 1941, σελίδα 596. Ο Πάππος υποστηρίζει την άποψη ότι Ευκλείδης, Απολλώνιος κλπ με την μέθοδο ΑΝΑΛΥΣΗΣ-ΣΥΝΘΕΣΗΣ ανεκάλυπταν τις αποδείξεις τους, τις οποίες μετά δημοσίευαν με την «τυποποιημένη» απόδειξη. Την θέση αυτή για την πρωταρχική σημασία της ΑΝΑΛΥΣΗΣ-ΣΥΝΘΕΣΗΣ αποδέχεται και η ευρωπαϊκή αναγέννηση. Αμφότεροι οι François Viète (1540 – 1603) και René Descartes (1596 – 1650), που πιστώνονται για καθοριστική συνεισφορά στις δύο πρώτες μείζονες μαθηματικές ανακαλύψεις της αναγεννώμενης Ευρώπης, κάνουν ευθεία αναφορά στον ΠΑΠΠΟ και στην άμεση επίδραση των ιδεών του στους ίδιους προσωπικά. Ο Descartes, ο οποίος θεωρείται από πολλούς ως ο «πατήρ» της νεώτερης φιλοσοφίας, στο διάσημο έργο του «Λόγος περί της Μεθόδου» (Discours de la méthode) (1637), συμπεριλαμβάνει την «ανάλυση» ως μία των τεσσάρων αρχών επί των οποίων στηρίζεται κάθε γνώση. Σημειωτέον ότι θεμελιώδες για τα μαθηματικά έργο "Η Γεωμετρία» (La geometrie), (όπου εκτίθεται αυτό που σήμερα ονομάζεται Αναλυτική Γεωμετρία) εμφανίζεται ως «παράρτημα» αλλά και «εφαρμογή» του Discours de la méthode. Ο όρος ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ προέρχεται ευθέως από αυτή την σύνδεση. Σημειώνουμε σχετικώς και μία υπερφίαλη υπερβολή του Descartes (που δεν είναι άλλωστε η μοναδική που έχει κάνει), «κατηγορεί» τους Ευκλείδη, Απολλώνιο κλπ γιά «ανεντιμότητα» διότι κατ αυτόν απέκρυψαν σκόπιμα τις βαθύτερες μεθόδους τους, με σκοπό να μας εντυπωσιάσουν παρουσιάζοντας μόνον την τυποποιημένη απόδειξη, που συχνά είναι ακατανόητης προέλευσης. Ασφαλώς και δεν

1.5. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ και ΘΕΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Η μαθηματική επιστήμη τροφοδοτεί ουσιαστικά όλες τις άλλες επιστήμες, και χωρίς αυτήν όλη η ανθρώπινη γνώση θα ήταν εξαιρετικά περιορισμένη. Μάλιστα είναι η μόνη επιστήμη που έχει αυτόν τον ρόλο. Όμως και αντιστρόφως τα μαθηματικά παίρνουν από όλες τις άλλες επιστήμες και αυτή η εκπληκτική διπλή σύνθεση τους δίνει την μεγάλη αξία που έχουν [14] . Στο ίδιο πνεύμα και με χιουμοριστική διάθεση σχολιάζει ο Pafnuty Lvovich Chebyshev [15].

Φοβάμαι ότι αυτή η διπλή σύνθεση πολύ λίγο φαίνεται στην εκπαίδευση μας.

Υπάρχουν πολλά σημεία στα μαθηματικά του λυκείου που αυτό θα μπορούσε να εμφανιστεί με επιτυχία.

Νομίζω ότι ένα από τα σημαντικότερα είναι αυτό που στο πανεπιστήμιο ονομάζουμε Άθροισμα Riemann.

Άθροισμα Riemann είναι αμφίστομο:

α) Από την μία πλευρά μπορεί να υπολογισθεί, συνήθως μέσω του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού[16].

β) Από την άλλη πλευρά συνδέεται πολύ συχνά και με ουσιώδεις έννοιες πλέον εμπειρικών επιστημών, π.χ. εμβαδά, όγκος, κέντρο βάρους, ροπή αδρανείας κλπ

Αντίστοιχα σχόλια μπορούν να γίνουν και για την σχέση παράγωγος-ταχύτητα κλπ[17]

Φυσικά υπάρχουν και πολλές άλλες ανάλογες τέτοιες καταστάσεις που ο συγγραφέας και ο καθηγητής πρέπει να επιλέξουν αξιοποιήσουν.

1.6. Η «Η ΠΑΡΑΛΟΓΗ ΕΦΑΡΜΟΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»!

Στα ανωτέρω τονίσαμε κατά κόρον την εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών στον φυσικό κόσμο και στα φαινόμενα της κοινωνίας που οργανώνει ο άνθρωπος. Όμως η ιστορία αναμφίβολα μας διδάσκει ότι σε όλες οι μεγάλες μαθηματικές ανακαλύψεις, δεν υπήρχε πρόθεση εκ μέρους του ερευνητή-μαθηματικού να λύσει κάποιο πρακτικό πρόβλημα. Φυσικά ο μαθηματικός έχει αισθήσεις με τις οποίες επικοινωνεί με το περιβάλλον και ζει σε μία κοινωνία η οποία τον επηρεάζει ποικιλοτρόπως. Όμως πέραν αυτού του γενικού πλαισίου, τα κίνητρα του είχαν πολλές αναλογίες με τα κίνητρα ενός ποιητή, γλύπτη, ζωγράφου κλπ[18].

υπάρχει θέμα για τους ιστορικούς των μαθηματικών, κάτι τέτοια ξεσπάσματα τους προκαλούν θυμηδία, αλλά μια και ο Descartes είναι αυτός που είναι, θυμάμαι κάτι που λέγαν στο χωριό μου ότι τα πολύ ψηλά βουνά ενίοτε έχουν και ... βαθιές χαράδρες. ΕΝ ΠΑΣΕΙ περιπτώσει τα ως άνω ιστορικά στοιχεία τονίζουν την τεράστια σημασία της ΑΝΑΛΥΣΗΣ-ΣΥΝΘΕΣΗΣ, και ασφαλώς πρέπει οπωσδήποτε να επηρεάσουν την διδασκαλία μας.

[14]Σε ένα, κατά την άποψη μας, σημαντικό κείμενο, (βλέπε http://michel.delord.free.fr/kline62.html), που το υπογράφουν πολλοί πολύ σημαντικοί αμερικανοί (θεωρητικοί κατά το πλείστον) μαθηματικοί, που γράφτηκε σαν επίκριση κατά της μεταρρύθμισης των λεγομένων NEW MATHEMATICS (MATHEMATIQUE MODERN, ΝΕΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ) στην δεκαετία του 60, περιέχεται και το παρακάτω απόσπασμα : Mathematics and science. In its cultural significance as well as in its practical use, mathematics is linked to the other sciences and the other sciences are linked to mathematics. which is their language and their essential instrument. Mathematics separated from the other sciences loses one of its most important sources of interest and motivation.

[15] Ο Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894) Ρώσος μαθηματικός του 19[ου] αιώνα θεωρείται ο πατέρας των σύγχρονων ρωσικών μαθηματικών. Τα μαθηματικά του ήσαν θεωρητικής φύσης, εμπνευσμένα πολλά από αυτά από εν δυνάμει εφαρμογές. Γράφει το εξής αμίμητο : "To isolate mathematics from the practical demands of the sciences is to invite the sterility of a cow shut away from the bulls." (Το να απομονώσουμε τα μαθηματικά από τις πρακτικές απαιτήσεις των επιστημών, είναι σα να προκαλούμε στείρωση στην αγελάδα, απομονώνοντας στην από τον ταύρο»! (βλέπε GEORGE F. SIMMONS, DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH APPLICATIONS AND HISTORICAL NOTES, McGRAW-HILL 1972, p. 210).

[16] Το οποίον προφανώς ΔΕΝ θα αποδειχθεί αλλά θα διατυπωθεί και θα χρησιμοποιηθεί σε εφαρμογές, ασκήσεις κλπ όπου δεί.

[17] Νομίζω ότι με αυτόν τον τρόπο θα ενισχυθεί η και διδασκαλία του Απειροστικού στα ΑΕΙ, όπου θα γίνει μετάβαση σε ένα πλέον αφηρημένο επίπεδο

[18] Χαρακτηριστική είναι η δήλωση του καθηγητή του πανεπιστημίου Πρίνστον (PRINCETON), Manjul Bhargava, ο οποίος το 2014 ετιμήθη με το βραβείο Fields : The mathematics that has been the most applicable and important to society over the years has been the mathematics that scientists found while searching for beauty; and eventually all beautiful and elegant mathematics tends to find applications, (μτφ. Τα μαθηματικά που μέσα στα χρόνια είχαν την μεγαλύτερη εφαρμοσιμότητα και σημασία για την κοινωνία, ήσαν τα μαθηματικά που οι επιστήμονες ανακάλυψαν αναζητώντας την ομορφιά. Τελικά όλα τα μαθηματικά που έχουν ομορφιά και φινέτσα τείνουν να βρίσκουν εφαρμογές).

Το θέμα αυτό τονίζει η διάσημη και συνθηματολογική δήλωση του καθηγητή του Πρίνστον Eugene Wigner (1902 –1995, βραβείο Nobel στην φυσική 1963). Στην πασίγνωστη δημοσίευση του το 1960, «Η ΠΑΡΑΛΟΓΗ ΕΦΑΡΜΟΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΙΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΤΗΣ ΦΥΣΗΣ»! ("The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Richard Courant lecture in mathematical sciences delivered at New York University, May 11, 1959". Communications on Pure and Applied Mathematics, 1960, 13: 1–14.), περιγράφει αυτό το φαινόμενο, δηλαδή την φαινομένη διάσταση των μαθηματικών ως πρόθεση ομορφιά-ποίηση και της πανσπερμίας εφαρμογών πρακτικώς σε κάθε ανθρώπινη γνώση.
Για παράδειγμα οι εφαρμογές της θεωρίας αριθμών στην κρυπτογραφία, της λογικής στην πληροφορική, των μιγαδικών αριθμών στη ρευστομηχανική. Το πεδίο της Τοπολογίας μας προσφέρει ένα ακόμα παράδειγμα. Ξεκίνησε με τον Euler και για 250 χρόνια αποτελούσε μια καθαρά θεωρητική περιοχή για να βρει αργότερα εφαρμογές στο DNA, στο σχηματισμό των γαλαξιών και στη ρομποτική. Η θεωρία της γενικής σχετικότητας του Einstein, βασίστηκε σε αφηρημένες έννοιες της γεωμετρίας που είχαν αναπτυχθεί πριν από μισό αιώνα. Αντίστροφα, προσπαθώντας να επιλύσουν το πρόβλημα του να βρουν δίκαιες χρεώσεις για τη χρήση υπεραστικών κλίσεων οι μαθηματικοί έκαναν σημαντικές ανακαλύψεις σχετικά με τη θεωρία δικτύων. Κλπ, κλπ, ων ουκ έστιν αριθμός !
Πρόκειται για ένα φαινόμενο που ενώ η μέχρι τούδε ιστορία επιβεβαιώνει, όμως (πέραν γενικολόγων υποθέσεων) δεν έχουμε κάποια αποτελεσματική εξήγηση μέχρι τούδε.

1.7. ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Υπάρχουν φυσικές διαδικασίες που (σε δεδομένο επίπεδο γνώσης του ανθρώπου) έχουν (πρακτικώς) προβλέψιμη εξέλιξη. Π.χ. οι κινήσεις των πλανητών του πλανητικού μας συστήματος, φαινόμενα εκλείψεων, το φαινόμενο του βρασμού ύδατος κατά την θέρμανση του στους 100^0 , κλπ. Προφανώς η δυνατότητα αυτής της πρόβλεψης εξαρτάται από το επίπεδο γνώσης του παρατηρητή[19]. Υπάρχουν όμως και άλλες διαδικασίες, που παρ' όλον ότι ενδεχομένως εξηγούνται με αιτιοκρατικές θεωρίες, εντούτοις λόγω της πολυπλοκότητας των, ΔΕΝ μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια την εξέλιξή τους. Π.χ. Το φαινόμενο της βροχής κατά τις επόμενες ημέρες ή των σεισμικών δονήσεων κατά τα επόμενα έτη, ή την επιβίωση διαγνωσθέντος καρκινοπαθούς κλπ. Με άλλα λόγια, στην μεγάλη πλειοψηφία των φαινομένων που πρακτικώς εξετάζουμε, η έννοια της τύχης συναρτάται με το επίπεδο γνώσεων που έχουμε την δεδομένη στιγμή. Εάν αυτές οι διαδικασίες (για τις οποίες σήμερα τουλάχιστον) δεν έχουμε δυνατότητα ακριβούς πρόβλεψης, ικανοποιούν όμως κάποιες κανονικότητες, τότε η θεωρία των πιθανοτήτων μπορεί να μας δώσει κάποιο «μέτρο» πρόβλεψης, που υστερεί βεβαίως της βεβαίας πρόβλεψης, όμως εξακολουθεί να έχει χρησιμότητα και να μας οδηγήσει στην λήψη επωφελών προφυλακτικών μέτρων κλπ. Π.χ.
«Υπάρχει πιθανότητα 0,7±0.1, να συμβεί σεισμός τουλάχιστον 7,6 ρίχτερ, στην περιοχή του Αγίου Φραγκίσκου (ΗΠΑ), μέχρι το 2030». Μία τέτοια πρόβλεψη θα επηρεάσει τα νομοθετικά μέτρα που αφορούν την ανθεκτικότητα των κτιρίων.
«Υπάρχει πιθανότητα 40% να βρέξει αύριο στην Αθήνα». Μία τέτοια πρόβλεψη μπορεί να οδηγήσει κάποιους να πάρουν ομπρέλα η κάποιους άλλου να αναβάλουν την εκδρομή τους.
« στην κατηγορία αυτού του ασθενούς το προσδόκιμο επιβίωσης είναι περίπου 6 χρόνια»¨ Ένας τέτοιος ισχυρισμός μπορεί να οδηγήσει κάποιον ασθενή να οργανώσει την ζωή του έτσι ώστε να ξεπεράσει το προσδοκώμενο. κλπ κλπ
Τα στοχαστικά μαθηματικά (δηλ. Πιθανότητες και Στατιστική), (στην άμεση προοπτική), έχουν την μεγαλύτερη εφαρμοσιμότητα από τα λοιπά μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες που διδάσκουμε στο λύκειο. Έχουν όμως και κάποιες διαφορές από τα λοιπά μαθηματικά και αυτό απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή στην συνολική υποστήριξη που το ΥΠΑΙΘ θα πρέπει να δώσει στην διδασκαλία τους. Π.χ. Είναι δύσκολο να αξιολογηθούν σωστά με εξετάσεις κλειστές με θέματα κλειστού τύπου. Επίσης η σωστή διδασκαλία και αξιολόγηση συχνά θα απαιτήσει υπολογιστικά μέσα. κλπ

[19] Είναι γνωστόν ότι ήδη από το 2500 π.χ. Κινέζοι και Βαβυλώνιοι προσπαθούσαν να προβλέψουν με ηλιακές εκλείψεις, που συνδέονταν με καλή υγεία, επιτυχίες κλπ . Όμως συχνά η πρόβλεψη ήταν εσφαλμένη και μάλιστα το. 2300 π.χ. ένα τέτοιο λάθος στην Κίνα οδήγησε στον αποκεφαλισμό δύο αστρολόγων-αστρονόμων, (βλ. http://image.gsfc.nasa.gov/poetry/ask/a11846.html,).

1.8. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ και ΙΣΤΟΡΙΑ

Η ιστορία μας είναι κεντρικό ζήτημα για όλους μας. Είναι πασίγνωστη και γενικώς αποδεκτή η ρήση του φιλοσόφου George Santayana (1863 –1952) ότι "Those who cannot remember the past are condemned to repeat it" (όσοι δεν μπορούν να θυμούνται το παρελθόν είναι καταδικασμένοι να το επαναλαμβάνουν).

Ειδικότερα για την διδασκαλία των μαθηματικών η σύνδεση των μαθηματικών με την ιστορία των μαθηματικών και με την περιρρέουσα ιστορία της ανθρωπότητας, συνιστάται τουλάχιστον για τους δύο παρακάτω λόγους

α) Έχει αποδειχθεί ότι κάνει το μάθημα πιο ευχάριστο με συνέπεια οι μαθητές να το βλέπουν με καλύτερη διάθεση και αυτό να επηρεάζει την απόδοσή τους.

β) Εξηγεί ότι τα μαθηματικά είναι μέρος του πολιτισμού γενικώς (όχι μόνον της τεχνολογίας)[20], συμβάλλει στην κατανόηση του ρόλου τους στην ιστορία και την κοινωνία, συμβάλλοντας έτσι στο να γίνει ο μαθητής καλλίτερος πολίτης που είναι σε θέση να παρακολουθεί-κατανοεί τις εξελίξεις και να παρεμβαίνει σε αυτές.

Σε αυτό το πνεύμα νομίζουμε ότι το διδακτικό βιβλίο θα πρέπει να διανθίζεται με ιστορικά σχόλια που συνδέουν το μαθηματικό υλικό με τους δημιουργούς του και την ιστορία της -κοινωνίας που τους γέννησε.

Εδώ υπάρχει κάτι που πρέπει να επισημάνουμε. Έχουν τοποθετηθεί στα μαθηματικά βιβλία μας από την δεκαετία του 1980, ιστορικά σημειώματα σε σελίδες ξεχωριστές από το καθαρά μαθηματικό υλικό. Η ιστορία μας έχει δείξει ότι η πρακτική αυτή στην πράξη εξοβέλισε την ιστορία των μαθηματικών από τα μαθηματικά.

Νομίζουμε ότι κατ αρχάς θα πρέπει τα ιστορικά ζητήματα να διαπραγματεύονται μέσα στην συνολική ροή του βιβλίου. Επίσης πιστεύουμε ότι τα ιστορικά ζητήματα θα πρέπει «αναμιγνύονται» με το μαθηματικό υλικό.

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Σε κάποιο σημείο θα αποδειχθεί ότι ο $2^{1/2}$ είναι άρρητος και ότι αυτή η ανακάλυψη από τους Πυθαγορείους προκάλεσε κρίση στα μαθηματικά κλπ. Εδώ είναι μία καλή ευκαιρία να συγκριθούν οι έννοιες του άρρητος τότε και τώρα, όπως επίσης να συζητηθεί γιατί αυτό προκάλεσε «κρίση» τότε, κλπ

Έχει σημασία να τονισθεί ότι Τα Μαθηματικά έχουν ιστορικότητα. Εξελίσσονται μέσα στον ιστορικό χρόνο και όχι αναγκαστικά κατά ευθύγραμμο τρόπο. Για παράδειγμα:

- Η Γεωμετρία των Στοιχείων ήταν ένα μεγάλο ξεκίνημα με πέντε αξιώματα που έχει μία ολοκλήρωση μετά 22 αιώνες με τα 20 αξιώματα του Χίλμπερτ.
- Οι αρνητικοί αριθμοί πρωτοεμφανίζονται, σε κάποια μορφή στην Κίνα κατά τον 2ο μΧ. αιώνα. Ακολουθούν κάποιοι αιώνες προόδου στην κατανόηση τους σε Κίνα, Ινδία Ισλάμ, Ευρώπη αλλά μέχρι τα μέσα του 17ου αιώνα η ύπαρξή τους είχε και στοιχεία αμφιβολίας.[21]
- Η ιδέα του μιγαδικού αριθμού πρωτοεμφανίζεται στον 16ο αιώνα στην προσπάθεια λύσης εξισώσεων τρίτου βαθμού[22]. Για δυόμισι αιώνες η έννοια ήταν σε καθεστώς αμφιβολίας[23]. Μετά από μία σειρά μαθηματικών ανακαλύψεων η αποδοχή τους αυξάνει και παγιώνεται στις αρχές του 19ου αιώνα με την απόδειξη του λεγομένου θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας.[24]

---

[20] Για περισσότερα επί αυτού βλέπε http://www.blod.gr/lectures/Pages/viewlecture.aspx?LectureID=1089

(21) Π.χ. Οι δύο σημαντικότεροι μαθηματικοί του πρώτου ημίσεως του 17ου αιώνα Pierre de Fermat (1601/1607 - 1665) και René Descartes (1596-1650) (που θεμελίωσαν την Αναλυτική Γεωμετρία), δεν χρησιμοποιούν αρνητικές συντεταγμένες και τις αρνητικές λύσεις εξισώσεων τις αποκαλούσαν «λάθος λύση».

(22) Έχει γραφτεί αρκετές φορές ότι οι μιγαδικοί αριθμοί εισήχθησαν για την λύση εξισώσεων δευτέρου βαθμού. Αυτό είναι ιστορικό λάθος. Όπως η αναπλαισίωση του ζητήματος - πέραν του τι έγινε στην ιστορία - μπορεί να βοηθήσει την διδασκαλία του θέματος.

(23) Η όλη διαδικασία μας άφησε έναν από τους πλέον ατυχείς όρους στα μαθηματικά: φανταστικός αριθμός.

(24) Με παράδειγμα τους αρνητικούς και μιγαδικούς αριθμούς αξίζει να κάνουμε ένα σχόλιο. Η γενική πρακτική στα Λύκεια παγκοσμίως είναι η γραμμική ανάπτυξη της ύλης, π.χ. πρώτα ξεκαθαρίζουμε τι είναι αρνητικός και μετά ορίζουμε τους μιγαδικούς. Στην πραγματική ιστορία η πορεία κατανόησης τους για μεγάλο διάστημα είχε και τα δύο παράλληλα συγχρόνως.

- Η έννοια της συνάρτησης σήμερα είναι θεμελιώδης έννοια των μαθηματικών. Η έννοια αυτή που κάποια στιγμή την συναντάμε στα βιβλία του Λυκείου ως έναν απλό ορισμό τριών γραμμών, έχει «δαρβινικού» τύπου εξέλιξη ίσως τριών αιώνων μέχρι τα μέσα του 19ου αιώνα οπότε καταλήξαμε στο σύντομο ορισμό που έχουμε σήμερα.[(25)]

1.9. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΣ

Ενώ είναι γενικώς αποδεκτό ότι τα μαθηματικά είναι εκ των ων ουκ άνευ για τις θετικές επιστήμες, τεχνολογία κλπ., όμως γενικώς δεν θεωρείται ότι παίζουν μεγάλο ρόλο στον πολιτισμό. Επί τροχάδην εξηγούμε ότι η άποψη αυτή είναι απλά λάθος[26].

- Η έμπνευση για την φιλοσοφία και του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη προήλθε από τα Μαθηματικά της εποχής τους.
- Βασικά στοιχεία της φιλοσοφίας του Descartes προήλθαν από τα Μαθηματικά της εποχής του.[(27)]
- Το magnum opus του Baruch Spinoza (1632 – 1677) έχει τίτλο Ethica Ordine Geometrico Demonstrata (Η ΗΘΙΚΗ ΑΠΟΔΕΔΕΙΓΜΕΝΗ ΜΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΤΡΟΠΟ).
- Από το βιβλίο του Ευκλείδη ΟΠΤΙΚΑ, έμαθε η ευρωπαϊκή αναγέννηση να ζωγραφίζει με σωστή προοπτική.[(28)]
- Τα επιτεύγματα της επιστημονικής επανάστασης με κορύφωση τον νόμο της παγκόσμιας έλξης και της κίνησης των πλανητών, κατά γενική εκτίμηση επηρέασε βαθειά, τις αντιλήψεις για την θρησκεία, ηθική, πολιτική, κλπ. Παραδειγματικά αναφέρουμε τους François-Marie Arouet Voltaire (1694 –1778), και ο Denis Diderot (1713 – 1784).[(29)]
- Έχει επισημανθεί από ιστορικούς ότι η Αμερικανική Διακήρυξη της Ανεξαρτησίας (04 ΙΟΥΛΙΟΥ 1776), έχει γραφτεί στο Ευκλείδειο ύφος Αξιώματα-Θεώρημα-Απόδειξη.[(30)]
- Ο πρόεδρος των ΗΠΑ Abraham Lincoln (1809 – 1865) ως υποψήφιος πρόεδρος είχε δηλώσει ότι έχει μελετήσει τα πρώτα έξη κεφάλαια των Στοιχείων και ότι αυτό τον έκανε καλύτερο δικηγόρο.
- Κλπ, κλπ, κλπ.

Αυτά είναι στοιχεία που κατά κάποιο τρόπο θα πρέπει να εκφρασθούν στην διδασκαλία.

1.10. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΚΟΙΝΩΝΙΑ

Είναι χαρακτηριστικό ότι σήμερα, τα Μαθηματικά ως ένα επιστημονικό πεδίο φαίνεται αποκομμένο από την καθημερινή ζωή και τις κοινωνικο-πολιτισμικές του ρίζες,

---

[(25)] Η απλότητα του ορισμού εγκλείει μία μεγάλη διδακτική παγίδα, ότι είναι ευκολονόητη έννοια. Εδώ θέλει πολύ μεγάλη προσοχή.
[26] Για περισσότερα επί αυτού βλέπε http://www.blod.gr/lectures/Pages/viewlecture.aspx?LectureID=1089
[(27)] Κυρίως το σύγγραμμα του έπαιξε κεντρικό ρόλο στον αλγεβρικό λογισμό, το Artem analyticem isagoge, (ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΤΕΧΝΗ), του François Viète (1540 – 1603),
[(28)] Η τεχνική αυτή ήταν γνωστή στην αρχαία Ελλάδα, αλλά κατά τον μεσαίωνα, γενικώς ξεχάστηκε.
[(29)] Εδώ αξίζει να αναφερθεί ο εκ των κορυφαίων μαθηματικών της εποχής του Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717 –1783), που προσωπικά ο ίδιος έπαιξε ρόλο αποφασιστικό ρόλο στο θεμελιακό πολιτικό έργο του Διαφωτισμού, Encyclopédie (Εγκυκλοπαίδεια), ως ένας εκ των δύο εκδοτών (φυσικά μαζί με τον Diderot).
[(30)] Είναι γνωστό ότι ο κύριος συγγραφέας του κειμένου Thomas Jefferson (1743 – 1826) είχε μελετήσει τα Στοιχεία.

δίνοντας την εντύπωση ότι είναι ανεξάρτητο χρόνου, αξιών και κουλτούρας. Η σχεδόν αποκλειστική αναφορά στο ‘τυπικό’ και ‘αφηρημένο’, καθιστά δύσκολη μια συζήτηση γύρω από τη σχέση των Μαθηματικών με την κοινωνία και τον πολιτισμό. Η θεώρηση αυτή έχει αντίκτυπο και στον τρόπο διδασκαλίας τους, ιδιαίτερα στο επίπεδο του Λυκείου.

Εντούτοις, η σύγχρονη επιστήμη των Μαθηματικών εξελίχθηκε στο πέρασμα του χρόνου ενσωματώνοντας στοιχεία και τρόπους σκέψης από πολλές κοινωνίες και πολιτισμούς. Πολύ συχνά μέσα στην ιστορία τα μαθηματικά και η γνώση γενικότερα χρησιμοποιούντο από διάφορες ελίτ για τους δικούς της σκοπούς. Πιστεύουμε ότι, μέσω της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, τα Μαθηματικά και ο τρόπος σκέψης των Μαθηματικών πρέπει να γίνει κτήμα όλο και περισσοτέρων μαθητών, ώστε να συμβάλουν στο να γίνουν αύριο ενεργοί πολίτες, να μπορούν να παρακολουθούν τις εξελίξεις να μετέχουν και παρεμβαίνουν σε αυτές.

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό οι μαθητές να αντιληφθούν τα Μαθηματικά ως μια συνεχώς εξελισσόμενη επιστήμη που αναπτύσσεται σε ένα συγκεκριμένο κοινωνικο-πολιτισμικό πλαίσιο.

Ειδικότερα κάνουμε τα παρακάτω σχόλια.

<u>Τα μαθηματικά συνδέονται στενά με την κοινωνία που τα αναπτύσσει (η επιλέγει να μην τα αναπτύξει)</u>.

- Η αρχαία Ελλάδα έχει ένα κλίμα γενικού διαλόγου και κριτικής (ακόμα και εκεί που δεν υπήρχε δημοκρατία). Στον Όμηρο ο Διομήδης επικρίνει ευθέως και με δριμύτητα τον αρχιστράτηγο Αγαμέμνονα. Στην Αντιγόνη του Σοφοκλή ο βασιλιάς Κρέων δέχεται σοβαρές επικρίσεις από το περιβάλλον του, τις οποίες αγνοεί με αποτέλεσμα την καταστροφή του. Η υπόκλιση δεν εκτελούνταν προς βασιλείς και τυράννους, αλλά μόνον προς τους θεούς. Στην Αθήνα του 5^{ου} αιώνα ο πολίτης στα δικαστήρια πρέπει να πείσει 500 η ακόμα 1000 ενόρκους μιλώντας προς αυτούς, ενώ στην Πνύκα με τον λόγο πρέπει να πείσει πολλές χιλιάδες συμπατριωτών του. Ένα τέτοιο περιβάλλον ευνοεί Μαθηματικά εξαιρετικά εκλεπτυσμένης επιχειρηματολογίας, όπως είναι τα Μαθηματικά των Στοιχείων.

Αντίστοιχά στην Περσία, στην αυλή του βασιλιά ο αυλικοί δεν έπρεπε να κοιτάνε κατ ευθείαν προς αυτόν και όσοι ήσαν στο ίδιο δωμάτιο έπρεπε να καλύπτουν με ύφασμα το στόμα τους ώστε να μην ενοχλεί τον βασιλιά η αναπνοή τους. Ίσως αυτό να εξηγεί εν μέρει ότι τα μαθηματικά τους δεν είχαν πολύ σαφή επιχειρηματολογία.

- Στις αρχές του 19^{ου} αιώνα η δυτική Ευρώπη προκύπτει ιστορικά από τον διαφωτισμό και την γαλλική επανάσταση. Παλαιά εδραιωμένα πιστεύω έχουν καταρριφθεί.[31] Ένα τέτοιο περιβάλλον ευνοεί τις ιδέες της μη-ευκλειδείου γεωμετρίας.[32]
- Η αρχαία Ρώμη και η Ισπανία του 16^{ου} και 17^{ου} αιώνα όταν ήταν η μεγαλύτερη δύναμις της Ευρώπης, ΔΕΝ παρήγαγαν ενδιαφέροντα μαθηματικά. Οι κοινωνίες αυτές έθεσαν άλλους στόχους.

2. Η ΑΝΤΙΛΗΨΗ ΜΑΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΣΚΟΠΟΥΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΣΤΟΧΟΥΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Βασικός σκοπός της Μαθηματικής Εκπαίδευσης είναι **να μυήσει τους μαθητές στις βασικές αρχές, στον τρόπο σκέψης, στη γλώσσα της μαθηματικής επιστήμης και την διασύνδεσή της με τον κόσμο της εμπειρίας,** και να τους προετοιμάσει με αυτόν τον τρόπο για την ακαδημαϊκή τους εξέλιξη και την ενήλικη ζωή. Αυτός ο σκοπός επιδιώκεται μέσω της διδασκαλίας των Μαθηματικών.

Συγκεκριμένα, ***μέσω της διδασκαλίας των Μαθηματικών***, επιδιώκεται οι μαθητές να δύνανται:

---

[31] Π.χ. η αντίληψη ότι τον βασιλιά τον διορίζει ο θεός.

[32] Ο όρος Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία, (που εισήγαγε ο Johann Carl Friedrich Gauss (1777 –1855)) είναι άκρως ατυχής. Η Μη Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι κυρίως εξέλιξη της Ευκλείδειας, (όχι τόσο η ανατροπή της). Ιστορικά καταλληλότερος όρος είναι ίσως το Νέα Ευκλείδεια.

A) Να διατυπώνουν και να απαντούν ερωτήσεις μέσα και μέσω των Μαθηματικών και

B) Να διαχειρίζονται με άνεση και αποτελεσματικότητα τη μαθηματική γλώσσα και τα μαθηματικά εργαλεία.

Τα ανωτέρω Α) και Β), μπορούν να αναλυθούν περαιτέρω. Συγκεκριμένα:

Α) Η δυνατότητα των μαθητών να διατυπώνουν και να απαντούν ερωτήσεις μέσα και μέσω των Μαθηματικών, αναλύεται στις ικανότητες για:

(i) Μαθηματική σκέψη

Οι μαθητές που είναι ικανοί για 'μαθηματική σκέψη' έχουν ένα ή περισσότερα από τα παρακάτω χαρακτηριστικά: κατανοούν το πεδίο εφαρμογής και τους περιορισμούς μιας μαθηματικής έννοιας, το ρόλο της γενίκευσης, τη διαφορά μεταξύ των διαφόρων τύπων μαθηματικών αποφάνσεων (ορισμοί, αξιώματα, θεωρήματα, υποθέσεις, συμπεράσματα) τη διαφορά μεταξύ 'ικανής' και 'αναγκαίας' συνθήκης, κλπ. Πολλοί ερευνητές ταυτίζουν την ικανότητα για μαθηματική σκέψη με την εννοιολογική κατανόηση. Η εννοιολογική κατανόηση αναφέρεται στην ικανότητα κάποιου να συνδέει μαθηματικές έννοιες και ιδέες και να γνωρίζει περισσότερα από μεμονωμένα γεγονότα και μεθόδους. Οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να συστηματοποιούν τη γνώση τους με ένα λογικό τρόπο και να μαθαίνουν νέες ιδέες συνδέοντάς τες με την προηγούμενη γνώση τους. Με αυτόν τον τρόπο είναι ικανοί για 'μεταφορά γνώσης' από ένα πλαίσιο σε ένα άλλο.

Για παράδειγμα, ένας μαθητής εκδηλώνει μαθηματική σκέψη, όταν στο ερώτημα *«να διερευνηθεί η εξίσωση ημx=α»*, μπορεί να επισημάνει , χρησιμοποιώντας τις τιμές του ημιτόνου, ότι η εξίσωση έχει λύση μόνο όταν $-1\leq \alpha \leq 1$ ή, ερμηνεύοντας τη λύση ως τετμημένη του σημείου τομής της ημιτονοειδούς καμπύλης $y=\eta\mu x$ και της ευθείας y=α, να απαντήσει ότι η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις όταν $-1\leq \alpha \leq 1$.

Ομοίως, ένας μαθητής εκδηλώνει μαθηματική σκέψη, όταν για τη λύση της εξίσωσης $|x-2| + |x-6| =4$ δεν χρησιμοποιεί τη διαδικασία ρουτίνας διακρίνοντας διαστήματα μεταβολής του x, αλλά επισημαίνει ότι στην εξίσωση αυτή αναζητούμε τις τιμές του x των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τους αριθμούς 2 και 6 είναι τέσσερις μονάδες. Επομένως η εξίσωση έχει λύση κάθε αριθμό του διαστήματος [2, 6].

(ii) Μαθηματικό συλλογισμό

Οι μαθητές που είναι ικανοί για 'μαθηματικό συλλογισμό' έχουν ένα ή περισσότερα από τα παρακάτω χαρακτηριστικά: κατανοούν και αξιολογούν μια μαθηματική επιχειρηματολογία (μια σειρά λογικών επιχειρημάτων) και, ιδιαίτερα, κατανοούν την έννοια της απόδειξης και μπορούν να αναγνωρίσουν σε μια απόδειξη τις κεντρικές ιδέες. Είναι ικανοί να παράγουν επιχειρήματα και αντεπιχειρήματα, παραδείγματα και αντιπαραδείγματα, και να κατανοούν λογικές διατυπώσεις του τύπου «αν-τότε», «αν και μόνον αν» κτλ. Για παράδειγμα, αν κάποιος ισχυρισθεί ότι «Κάθε περιττός είναι σύνθετος» και παραθέσει ως απόδειξη την:

«Ισχύει $n = ((n+1)/2)^2-((n-1)/2)^2$*. Επειδή ο n είναι περιττός οι αριθμοί* $(n+1)/2 = k$ *και* $(n-1)/2 = m$ *είναι ακέραιοι, οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται:* $n=. k^2 - m^2 = (k - m)(k + m)$ *και άρα ο αριθμός n είναι σύνθετος»*,

ο μαθητής που είναι ικανός για μαθηματικό συλλογισμό θα μπορεί να παρατηρήσει ότι το επιχείρημα είναι λανθασμένο, διότι είναι $k -m = 1$ και $k +m = n$, οπότε ο αριθμός n γράφεται: n = 1 n, από το οποίο όμως δεν συνάγεται ότι ο n είναι σύνθετος.

Η έμφαση στο μαθηματικό τρόπο συλλογισμού και τη μαθηματική απόδειξη βοηθά τους μαθητές να εμβαθύνουν στη φύση των μαθηματικών αντικειμένων. Ενισχύει επίσης και την κριτική σκέψη τους, μέσα από την οργανωμένη, αναλυτική, επαρκώς τεκμηριωμένη προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών. Όσο οι μαθητές διερευνούν, εικάζουν και διατυπώνουν συμπεράσματα σχετικά με έννοιες και σχέσεις, έχουν την ευκαιρία να διακρίνουν μεταξύ επαγωγικού και παραγωγικού συλλογισμού, εκτιμώντας το ρόλο του τελευταίου στη διατύπωση γενικεύσεων και κανονικοτήτων. Παραδείγματα από την ιστορία των Μαθηματικών για το ρόλο της απόδειξης ως θεμέλιος λίθος των Μαθηματικών θα μπορούσαν να ενισχύσουν την κατανόηση των μαθητών.

(iii) Επίλυση προβλήματος

Ένα μαθηματικό πρόβλημα είναι ένας ιδιαίτερος τύπος μαθηματικής ερώτησης, που απαιτεί διερεύνηση προκειμένου να απαντηθεί. Το να μπορούμε να χαρακτηρίσουμε μια μαθηματική ερώτηση ως πρόβλημα, εξαρτάται από το σε ποιόν απευθύνεται. Κατά καιρούς έχουν προταθεί διάφορες ταξινομήσεις μαθηματικών προβλημάτων: κλειστά, ανοιχτά, πεδία διερεύνησης κλπ. Η ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων εμπεριέχει την ικανότητα ευέλικτης διαχείρισης μιας βάσης γνώσεων (:στρατηγική ικανότητα), τη ικανότητα για συστηματική αναζήτηση (:ευρετική ικανότητα) και μεταγνωστικές δεξιότητες.

Η επίλυση προβλήματος συνδέεται με τη διδασκαλία των Μαθηματικών με τρεις τρόπους:

α) Μπορούμε να διδάξουμε συγκεκριμένες στρατηγικές επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, ανεξαρτήτως περιεχομένων (teaching about problem solving),

β) Μπορούμε να διδάξουμε Μαθηματικά με στόχο την ικανότητα των μαθητών να επιλύουν προβλήματα (teaching for problem solving) και, τέλος,

γ) Μπορούμε να διδάξουμε Μαθηματικά μέσω επίλυσης προβλημάτων (teaching via problem solving).

Εντούτοις, πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι δεν διδάσκονται όλα τα μαθηματικά περιεχόμενα μέσω της επίλυσης προβλημάτων. Κάποιες γνώσεις (για παράδειγμα κάποιες συμβάσεις που αφορούν τη χρήση συμβόλων και ορολογίας), πρέπει να δοθούν στους μαθητές, προκειμένου να μπορέσουν στη συνέχεια οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν τη γλώσσα των Μαθηματικών.

Β) Η δυνατότητα των μαθητών να διαχειρίζονται με άνεση και αποτελεσματικότητα τη μαθηματική γλώσσα και τα μαθηματικά εργαλεία αναλύεται στις ικανότητες για:

(i) Αναπαράσταση εννοιών, διαδικασιών και σχέσεων

Αυτή η ικανότητα περιλαμβάνει τη κατανόηση του τρόπου χρήσης και του τρόπου σύνδεσης των διαφόρων μορφών αναπαράστασης που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά (φυσική γλώσσα, σύμβολα, εικόνες, διαγράμματα, γραφήματα, πίνακες) την αναγνώριση των πλεονεκτημάτων και περιορισμών τους και την ευελιξία επιλογής της κατάλληλης αναπαράστασης σε σχέση με τις απαιτήσεις του προβλήματος που επιλύει. Στο Λύκειο μιλάμε συνήθως για αριθμητικές, γεωμετρικές, γραφικές, αλγεβρικές και λεκτικές αναπαραστάσεις ή για αναπαραστάσεις με χρήση κατάλληλων λογισμικών. Είναι σημαντικό οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία να εκφράζονται μέσω πολλαπλών αναπαραστάσεων, καθεμιά από τις οποίες θα ‘φωτίσει’ και διαφορετικές πτυχές της μαθηματικής έννοιας ή διαδικασίας. Η χρήση, επομένως, διαφόρων μορφών αναπαράστασης συνεισφέρει στην κατανόηση και στην αναγνώριση σχέσεων μεταξύ διαφορετικών μορφών έκφρασης.

Για παράδειγμα, μια συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί με διάφορους τρόπους: με πίνακα, με γράφημα, με εξίσωση, ως σύνολο διατεταγμένων ζευγών. Ενδεικτικά, αναφέρουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = 3x - 7$, μπορεί να αναπαρασταθεί και ως:

- $y = 3x-7$
- το σύνολο των λύσεων μιας εξίσωσης $2y-6x+14 = 0$.
- ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών, $\{(x, y) | x = t, y = 3t - 7, t \in \mathbf{R}\}$.
- μια ευθεία σε ένα καρτεσιανό επίπεδο που περνάει από τα σημεία Α(2,−1) και Β(0,−7).
- ένας πίνακας τιμών.

Κάθε μορφή αναπαράστασης δίνει διαφορετική πληροφορία για τη συνάρτηση. Ακόμα και οι διαφορετικές μορφές εξίσωσης που αναπαριστούν μια συνάρτηση, δίνουν μια ξεχωριστή πληροφορία. Για παράδειγμα

- Η μορφή $Ax + By = C$, όπου $A \neq 0$, δίνει τα σημεία τομής (C/A, 0) και (0, C/B) της ευθείας που παριστάνει με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, αντιστοίχως.
- Η μορφή $y - y_1 = m(x - x_1)$, δίνει την κλίση m της ευθείας που παριστάνει και τις συντεταγμένες (x_1, y_1) ενός σημείου της.
- Η μορφή $y = mx + b$, δίνει την κλίση m της ευθείας που παριστάνει και το σημείο τομής της (0, b) με τον κατακόρυφο άξονα .

(ii) Επικοινωνία, κάνοντας σωστή χρήση του μαθηματικού συμβολισμού και της τυπικής γλώσσας των Μαθηματικών

Επικοινωνία είναι η διαδικασία έκφρασης μαθηματικών ιδεών προφορικά, γραπτά και με χρήση διαφόρων μορφών αναπαράστασης. Μέσω της επικοινωνίας δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να ξανασκεφτούν τον τρόπο συλλογισμού τους, να τον συγκρίνουν με εκείνον των συνομιλητών τους, να διαλευκάνουν ιδέες και να εντοπίσουν παρανοήσεις. Για να είναι εφικτή η επικοινωνία πρέπει να διασφαλισθούν τέσσερεις τουλάχιστον προϋποθέσεις: Να υπάρχει το μαθηματικό 'ερέθισμα' (:πρόβλημα, τρόπος λύσης προς σχολιασμό, εναλλακτική στρατηγική κλπ), να υπάρχει το γλωσσικό υπόβαθρο (: η κοινή γλώσσα επικοινωνίας, στη συγκεκριμένη περίπτωση η γλώσσα των Μαθηματικών), να υπάρχει ένα περιβάλλον που ευνοεί την επικοινωνία, (για παράδειγμα: που δεν ποινικοποιεί τις λανθασμένες ιδέες) και να υπάρχει από την πλευρά του καθηγητή η απαραίτητη γνώση για τη δημιουργία μιας 'μαθηματικής συζήτησης' (: για παράδειγμα να μπορεί να θέτει διαφόρων τύπων ερωτήσεις που παρακινούν τους μαθητές να σκεφτούν). Δεν αποτελούν όλες οι συζητήσεις στην τάξη διαδικασίες επικοινωνίας, γι' αυτό και απαιτούνται ιδιαίτερες γνώσεις εκ μέρους των εκπαιδευτικών προκειμένου να λειτουργήσουν ως ενορχηστρωτές μιας γόνιμης μαθηματικής συζήτησης.

Η ικανότητα επικοινωνίας μέσα και μέσω των Μαθηματικών προϋποθέτει την ικανότητα αποκωδικοποίησης και χρήσης των μαθηματικών συμβολισμών και της τυπικής μαθηματικής γλώσσας. Λόγω του ότι τα μαθηματικά σύμβολα και η μαθηματική γλώσσα είναι διαφορετικές μορφές αναπαράστασης, η ικανότητα 'μετάφρασης' από τη μια μορφή στην άλλη αποτελεί επίσης προϋπόθεση για τη μαθηματική επικοινωνία. Γενικά, η ικανότητα επικοινωνίας περιλαμβάνει τη δυνατότητα κατανόησης και παραγωγής μαθηματικών συμβολισμών και αποφάνσεων που διατυπώνονται από άλλους, αλλά και τη δυνατότητα έκφρασης ενός ατόμου μαθηματικά, με διάφορους τρόπους.

(iii) Ικανότητα χρήσης των μαθηματικών εργαλείων περιλαμβανομένων των εργαλείων των ΤΠΕ

Θεωρούμε αυτονόητο ότι η υλοποίηση του Π.Σ. των Μαθηματικών θα πρέπει να διέπεται από την αντίληψη της μέγιστης δυνατής αξιοποίησης των τεχνολογίας της πληροφορίας και της επικοινωνίας ΤΠΕ, εκεί όπου αυτές αυξάνουν την αποτελεσματικότητα στην επίτευξη των προδιαγεγραμμένων στόχων. Πρέπει να υπογραμμισθεί, όμως, ότι η χρήση της τεχνολογίας δεν πρέπει να επηρεάζει τους βασικούς στόχους της Μαθηματικής Εκπαίδευσης σε ότι αφορά τις επιδιωκόμενες ικανότητες. Οι ψηφιακές τεχνολογίες επιτρέπουν νέες προσεγγίσεις για την εξήγηση και την παρουσίαση των Μαθηματικών, και επιτρέπουν τη σύνδεση των διαφόρων μορφών αναπαράστασης, ενισχύοντας με αυτόν τον τρόπο την κατανόηση. Επιπλέον, μπορούν πολλές φορές να κάνουν τα Μαθηματικά πιο προσιτά, και να ενισχύουν τη δυνατότητα των εκπαιδευτικών να κάνουν τα Μαθηματικά ενδιαφέροντα σε περισσότερους μαθητές.

Είναι προφανές ότι όλες οι προηγούμενες ικανότητες συνδέονται μεταξύ τους και αλληλοσυμπληρώνονται. Για παράδειγμα, η ικανότητα αναπαράστασης συνδέεται άμεσα με την ικανότητα επικοινωνίας και την ικανότητα για μαθηματικό συλλογισμό.

Στην παρουσίαση των μαθηματικών ικανοτήτων, αλλά και γενικότερα αναφερόμενοι στους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών, χρησιμοποιούμε συχνά την έκφραση: «ο μαθητής έχει, (ή πρέπει να) κατανοήσει...». Η «κατανόηση» ως στόχος της Μαθηματικής Εκπαίδευσης είναι σχετικά ασαφής. Υποστηρίζουμε ότι ένας μαθητής έχει 'κατανοήσει' όταν μπορεί:

- Να εξηγήσει, χρησιμοποιώντας λογικούς συλλογισμούς, επιχειρήματα, αποδείξεις
- Να ερμηνεύσει, χρησιμοποιώντας αναπαραστάσεις, αναλογίες, μεταφορές, παραδείγματα, αντιπαραδείγματα
- Να εφαρμόσει όσα ξέρει, σε οικείες και μη οικείες καταστάσεις
- Να δει τα πράγματα με προοπτική/κριτική ματιά
- Να έχει ενσυναίσθηση-να μπορεί δηλαδή να αναζητήσει λόγους και αιτίες στις σκέψεις και τους τρόπους δράσης των άλλων-και
- Να έχει αυτογνωσία- να μπορεί δηλαδή να αναστοχάζεται κριτικά στις δικές του δράσεις και συμπεριφορές.

Όλες οι προηγούμενες ικανότητες που αναλύσαμε, θα βοηθήσουν το μαθητή να δράσει στο μέλλον ως συνειδητός και σκεπτόμενος πολίτης. Να είναι, δηλαδή, ικανός:

- Να αξιολογεί, να διαχειρίζεται αποτελεσματικά και να επικοινωνεί με σαφήνεια πληροφορίες,
- Να λαμβάνει τις βέλτιστες αποφάσεις ακόμα και σε περιπτώσεις αβεβαιότητας,

- Να διατυπώνει τεκμηριωμένες κρίσεις και επιχειρήματα
- Να διατυπώνει ερωτήσεις με σαφήνεια και να επιλύει προβλήματα.

Έτσι λοιπόν οι σκοποί της μαθηματικής εκπαίδευσης αναλύονται σε έξι ικανότητες.

Στόχοι περιεχομένου των Μαθηματικών

Οι στόχοι περιεχομένου προσδιορίζουν αυτό που οι μαθητές επιδιώκεται να ξέρουν και να μπορούν να κάνουν μετά τη διδασκαλία ενός συγκεκριμένου περιεχομένου. Η διατύπωση των στόχων περιεχομένου πρέπει, κατ' αρχήν και κατ' αρχάς να γίνεται με σαφή και «μετρήσιμο» τρόπο, ώστε να διευκολύνεται η διαδικασία της αξιολόγησης και να είναι κατανοητός ο στόχος κατά ομοιογενή τρόπο από όλους τους ενεχομένους, συγγραφέα διδακτικού βιβλίου, διδάσκοντα καθηγητή, μαθητές κλπ.

Η διατύπωση των στόχων περιεχομένου συνίσταται να γίνεται με κατάλληλα «ρήματα» (η μικρές φράσεις που περιέχουν ρήμα). Όπως αναφέρουμε και πιο πάνω, η γενική σύσταση είναι τα ρήματα να είναι «μετρήσιμα».

Όμως υπάρχουν καταστάσεις αυξημένης πολυπλοκότητας, όπου ίσως δεν μπορεί να διατυπωθεί ο στόχος με μετρήσιμο τρόπο. Τέτοια παραδείγματα είναι οι στόχοι «Να έχει διαίσθηση», να «διερευνηθεί» κλπ. Όμως συνιστάται, κατά το δυνατόν, να αποφεύγονται τέτοιοι στόχοι.

Παραδείγματα ρημάτων που ΔΕΝ είναι μετρήσιμα, είναι τα: κατανοώ, αναλύω, αξιολογώ, συνθέτω, έχω ικανότητα, έχω εξυπνάδα, έχω στρατηγική σκέψη, καταλαβαίνω, μαθαίνω, είμαι εξοικειωμένος, είμαι ενήμερος, γνωρίζω, κλπ

Αντιθέτως μετρήσιμα, (μεταξύ πολλών άλλων), που καλύπτουν την πλειονότητα των ενδεχομένων διδακτικών καταστάσεων, είναι τα παρακάτω:

αναγνωρίζω, αναφέρω, παραθέτω, επιλέγω, θυμάμαι, εντοπίζω, ονομάζω, περιγράφω, αναγνωρίζω, επιλέγω, ορίζω,

εξηγώ, ερμηνεύω, δίνω παραδείγματα, δείχνω/αναπαριστώ, επαναπροσδιορίζω, αναθεωρώ, μεταφράζω, συνοψίζω, ταξινομώ,

αξιοποιώ, αποφασίζω , γενικεύω, λύνω ένα πρόβλημα, κάνω χρήση, κάνω προεκτάσεις, εξηγώ – ερμηνεύω, κωδικοποιώ, οργανώνω , συστηματοποιώ, υπολογίζω, μετράω,

διακρίνω, κατηγοριοποιώ, διαφοροποιώ, ταυτοποιώ, παρατηρώ, υποθέτω, αναδεικνύω, αποκωδικοποιώ, αναλύω κατάσταση σε επί μέρους μέρη, κάνω ανασκόπηση, συσχετίζω, κατατάσσω,

αποδεικνύω, επικυρώνω, εκτιμώ, εξετάζω, ιεραρχώ, συγκρίνω, συμπεραίνω, επαληθεύω, ελέγχω ,

αναακαλύπτω, δημιουργώ, επινοώ, επιλύω, εισάγω, αναπαριστώ, βελτιώνω, συνδέω, συνδυάζω, συνθέτω, διαμορφώνω, αναπτύσσω-κατασκευάζω, παράγω , σχεδιάζω,

Α΄ Λυκείου, Άλγεβρα

Εισαγωγή

Η άλγεβρα αποτελεί το σκελετό και τη γλώσσα των μαθηματικών. Αυτό ισχύει τόσο σε επίπεδο μαθηματικής επιστήμης όσο και σε επίπεδο διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο. Το Πρόγραμμα Σπουδών (ΠΣ) της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου αναπτύσσεται ως επέκταση του ΠΣ της μαθηματικής εκπαίδευσης στο πλαίσιο του Γυμνασίου. Παρουσιάζονται, καταρχάς μέσω μιας διαισθητικής προσέγγισης, και στη συνέχεια εισάγονται σε πιο «αυστηρό» μαθηματικό πλαίσιο σημαντικές, για τη μετέπειτα μαθηματική εξέλιξη των μαθητών έννοιες, όπως αυτή της συνάρτησης, της πιθανότητας, κ.α. Επιδιώκεται η εμβάθυνση στις έννοιες και τις σχέσεις που τις συνδέουν, και δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη μαθηματική διερεύνηση, επιχειρηματολογία και αιτιολόγηση. Γίνεται μια πρώτη προσπάθεια να αναδειχθεί ο ρόλος της απόδειξης ως ισχυρού τρόπου αποδοχής της αλήθειας ενός μαθηματικού ισχυρισμού. Τα παραπάνω αποτελούν στοιχεία απαραίτητα τόσο σε άλλους κλάδους των μαθηματικών (πχ γεωμετρία, αναλυτική γεωμετρία, ανάλυση) καθώς και σε άλλες επιστήμες (πχ Φυσική, Χημεία).

Κεντρικοί στόχοι που διατρέχουν το Πρόγραμμα Σπουδών είναι:

- η ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού, της ικανότητας παρακολούθησης και παραγωγής μαθηματικής επιχειρηματολογίας και απόδειξης,
- η ανάπτυξη της ικανότητας χρήσης της μαθηματικής γλώσσας (ορολογίας, συμβόλων κοκ) και των πολλαπλών αναπαραστάσεων (αριθμητικών, γραφικών, λεκτικών, συμβολικών), ως απαραίτητων μέσων ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης και επικοινωνίας,
- η ανάπτυξη της ικανότητας χρήσης των μαθηματικών εργαλείων («παραδοσιακών» και ψηφιακών).

Η επίτευξη των παραπάνω στόχων επιδιώκεται μέσω της επίλυσης προβλημάτων και της ενεργού εμπλοκής των μαθητών στη μαθηματική δραστηριότητα. Η επίλυση προβλημάτων, τόσο από τον πραγματικό κόσμο όσο και από τον κόσμο των μαθηματικών και των άλλων επιστημών, δίνει νόημα στη χρήση αλγεβρικών μεθόδων και αναδεικνύει την ισχύ τους στη μοντελοποίηση φαινομένων. Η εμπλοκή των μαθητών στη μαθηματική δραστηριότητα εκδηλώνεται με τη ενεργητική συμμετοχή τους στη μαθηματική συζήτηση στην τάξη, στη δημιουργία και έλεγχο εικασιών, στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος, στην ανάπτυξη διαφόρων τρόπων σκέψης (επαγωγική, παραγωγική), κ.α.

Η ευχέρεια στον αλγεβρικό λογισμό και η εννοιολογική κατανόηση είναι δύο σημαντικές διαδικασίες που πρέπει να αναπτύσσονται παράλληλα. Η άλγεβρα εμπεριέχει κυρίως την κατανόηση εννοιών, κάτι που πάντα προκαλούσε μεγάλες δυσκολίες αλλά και αποτελούσε μοχλό εξέλιξης, όπως φαίνεται από την ιστορία των μαθηματικών. Προτείνεται να αποφευχθεί η ακραία εξάσκηση σε ζητήματα τεχνικής.

Το πρόγραμμα σπουδών αποτελεί ένα «χάρτη πορείας» για τον εκπαιδευτικό, όπως εξάλλου ο οδηγός για τον εκπαιδευτικό και το σχολικό βιβλίο. Ο εκπαιδευτικός, ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της τάξης του, είναι εκείνος που θα κάνει τις καταλληλότερες επιλογές και όσον αφορά στις δραστηριότητες, και όσον αφορά στο βαθμό εμβάθυνσης στις έννοιες και τις διαδικασίες.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ (σύνολο 75 ώρες)	**ΣΤΟΧΟΙ Οι μαθητές να μπορούν να:**	**ΣΧΟΛΙΑ-ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ**
1. Σύνολα (3 ώρες)		
	1.1.1. Εξετάζουν αν ένα αντικείμενο ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο και εκφράζουν αυτή τη σχέση συμβολικά. 1.1.2. Αναπαριστούν τα σύνολα με διάφορους τρόπους	Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ1, Δ2.

	(αναγραφή, περιγραφή στοιχείων, διαγράμματα Venn). 1.1.3. Αναγνωρίζουν και εφαρμόζουν σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων με χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων (και λεκτικά με κατάλληλη χρήση των συνδέσμων «ή» και «και»).	Αναπαριστούν ένα σύνολο με διαφορετικούς τρόπους, προκειμένου να μην ταυτίζουν το σύνολο με μια μόνο αναπαράστασή του. Να συζητηθούν η σχέση του υποσυνόλου και οι πράξεις της τομής, της ένωσης, του συμπληρώματος και της διαφοράς συνόλων. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ1, Δ2.
2. Πραγματικοί Αριθμοί (22 ώρες)		
2.1. Πραγματικοί αριθμοί (1 ώρα)	2.1.1. Διακρίνουν τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις τους και ταξινομούν συγκεκριμένους αριθμούς στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (N, Z, Q, R-Q). 2.1.2. Διερευνούν την έννοια της «πυκνότητας» και της «διαδοχικότητας» στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών.	Βρίσκουν ρητές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$ και εικάζουν ότι μπορεί να μην είναι ρητός. Η απόδειξη είναι αφορμή για μια πρώτη συζήτηση για την απαγωγή σε άτοπο. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ3. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ4.
2.2. Πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς (8 ώρες)	2.2.1. Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των πράξεων των πραγματικών αριθμών στην απόδειξη προτάσεων. 2.2.2. Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των πράξεων των πραγματικών αριθμών στην επίλυση εξισώσεων 1ου βαθμού. Επιλύουν προβλήματα με εξισώσεις 1ου βαθμού. 2.2.3. Εφαρμόζουν διάφορες αποδεικτικές μεθόδους (ευθεία απόδειξη, απαγωγή σε άτοπο, αντιπαράδειγμα) για να δείξουν την ισχύ αλγεβρικών προτάσεων.	Για παράδειγμα, αποδεικνύουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες των αναλογιών. Οι μαθητές εξετάζουν για τις διάφορες τιμές των α και β πότε η εξίσωση αx = β έχει μία λύση, πότε είναι αδύνατη και πότε είναι ταυτότητα. Οι μαθητές επιλύουν τύπους από φυσική/ χημεία, όπως πχ s = vt ως προς v ή t ή εξισώσεις/ ισότητες όπως η αx+βy = γ ως προς y ή x. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ5. Διακρίνουν την ισοδυναμία από τη συνεπαγωγή. Αιτιολογούν με αντιπαραδείγματα γιατί δεν ισχύει η ισοδυναμία σε ορισμένες περιπτώσεις. Χρησιμοποιούν κατάλληλα τους συνδέσμους «ή» και «και». Συζητούν το νόημα της συνεπαγωγής (π.χ. της $\alpha=\beta \Rightarrow \alpha^2=\beta^2$) διατυπώνουν το αντίστροφο και διερευνούν την ισχύ του (και με χρήση αντιπαραδείγματος). Για να προσεγγίσουν οι μαθητές καλύτερα τη μέθοδο της

		απόδειξης με απαγωγή σε άτοπο, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και μη μαθηματικά παραδείγματα. Στη διεύθυνση: https://www.youtube.com/watch?v=sVUMAqMmy7o αναπτύσσεται ένα κλασικό επιχείρημα του Γαλιλαίου. Ως μαθηματικό παράδειγμα θα μπορούσε να αποδειχθεί ότι το άθροισμα ρητού και άρρητου είναι άρρητος. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ6.
2.3. Διάταξη στους πραγματικούς αριθμούς (5 ώρες)	2.3.1. Διερευνούν τις ιδιότητες της διάταξης και εντοπίζουν ομοιότητες και διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας. Αναπαριστούν στον άξονα των πραγματικών αριθμών σύνολα που προσδιορίζονται από ανισοτικές σχέσεις και τα συμβολίζουν χρησιμοποιώντας διαστήματα. 2.3.2. Χρησιμοποιούν τη διάταξη και τις ιδιότητές της για να επιλύσουν ανισώσεις 1ου βαθμού. Επιλύουν προβλήματα με ανισώσεις 1ου βαθμού.	Μέσω της πρότασης $\alpha<\beta \Rightarrow \alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$ διαπιστώνουν ότι μεταξύ δύο ρητών υπάρχουν άπειροι ρητοί αριθμοί. Διαπιστώνουν τη σημασία του αντιπαραδείγματος στην απόρριψη μαθηματικών ισχυρισμών (π.χ. ότι η διαίρεση κατά μέλη, ανισοτήτων με θετικούς όρους, δεν ισχύει). Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ5, Δ7.
2.4. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού (5 ώρες)	2.4.1. Συνδέουν τον αλγεβρικό ορισμό της απόλυτης τιμής με τη γεωμετρική της ερμηνεία. 2.4.2. Διερευνούν τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής και τις ερμηνεύουν γεωμετρικά (όσες είναι δυνατόν).	Με αφετηρία τον ορισμό της απόλυτης τιμής ως απόστασης, καταλήγουν στον αλγεβρικό ορισμό. Είναι σημαντικό να αναγνωρίζουν την $\|\alpha - \beta\|$ ως την απόσταση των αριθμών α και β πάνω στον άξονα. Στη διεύθυνση: http://photodentro.edu.gr/lor/handle/8521/1886 μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με τη γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ8. Είναι σημαντικό οι μαθητές να αναπτύξουν στρατηγικές απόδειξης των ιδιοτήτων: $\lvert\alpha\cdot\beta\rvert=\lvert\alpha\rvert\cdot\lvert\beta\rvert, \left\lvert\frac{\alpha}{\beta}\right\rvert=\frac{\lvert\alpha\rvert}{\lvert\beta\rvert}, \lvert\alpha+\beta\rvert\le\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$ καθώς και των ισοδυναμιών: $\lvert x\rvert=\theta \Leftrightarrow x=\pm\theta$, $\lvert x\rvert<\theta \Leftrightarrow -\theta<x<\theta$, $\lvert x\rvert>\theta \Leftrightarrow \{x<-\theta$ ή $x>\theta\}$

	2.4.3. Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής στην επίλυση απλών εξισώσεων, ανισώσεων και προβλημάτων.	Να δοθούν προς επίλυση απλές ασκήσεις όπως: να επιλυθεί η εξίσωση: $\lvert x-7\rvert=2$ ή η ανίσωση $\lvert x-7\rvert<2$ ή «να βρείτε τους αριθμούς, που η απόστασή τους από το 7 να είναι ίση (μικρότερη) από 2 μονάδες.» Προτείνεται η δραστηριότητα Δ8.
2.5. Ρίζες πραγματικών αριθμών (3 ώρες)	2.5.1. Αναγνωρίζουν τη ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού ως τη μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^{\nu}=\alpha$. 2.5.2. Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες γινομένου και πηλίκου ν-οστών ριζών. 2.5.3. Επιλύουν απλές εξισώσεις της μορφής $x^{\nu}=\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)	Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α ορίζεται ως ο μοναδικός μη αρνητικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $x^{\nu}=\alpha$. Είναι σημαντικό οι μαθητές να εμπλακούν στη διαδικασία απόδειξης των ιδιοτήτων των ριζών: $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$, $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ και $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}$ Προτείνεται η δραστηριότητα Δ9. Οι μαθητές διερευνούν τη λύση απλών εξισώσεων όπως οι: $x^3=8$, $x^3=-8$, $x^4=8$, $x^4=-16$. Επιλύουν τύπους από τη Φυσική όπως π.χ. ο $s=\frac{1}{2}\alpha t^2$, ως προς t και ο $V=\frac{4}{3}\pi R^3$, ως προς R.
3. Συναρτήσεις (15 ώρες)		
3.1. Γενικά περί συναρτήσεων (6 ώρες)	3.1.1. Αναγνωρίζουν την έννοια της συνάρτησης μέσα από καταστάσεις συμμεταβολής και αντιστοίχισης διαφόρων ειδών και αποδίδουν νόημα στον ορισμό της συνάρτησης. 3.1.2. Επιχειρηματολογούν αν μία σχέση ή αντιστοιχία είναι συνάρτηση ή όχι. Χρησιμοποιούν κατάλληλα το συμβολισμό και την ορολογία.	Να επισημανθεί η διάκριση μεταξύ εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής, ο ρόλος του πεδίου ορισμού και η δυνατότητα διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης. Να συζητηθεί η περίπτωση συναρτήσεων που δεν έχουν τύπο ή/και των οποίων δεν μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική παράσταση. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ10, Δ11. Εξετάζουν αν μια γραμμή σε σύστημα συντεταγμένων είναι γραφική παράσταση συνάρτησης. Μέσω παραδειγμάτων να οδηγηθούν οι μαθητές στον

		ορισμό της συνάρτησης ένα προς ένα. Να επισημανθεί ότι υπάρχουν και συναρτήσεις που δεν είναι ένα προς ένα. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ12, Δ13.
	3.1.3. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια συναρτήσεων.	Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ11, Δ14, Δ15.
	3.1.4. Συνδέουν διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση).	Να δοθούν παραδείγματα που να αναδεικνύουν τη διαφορετική λειτουργικότητα κάθε αναπαράστασης. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ15.
	3.1.5. Αντλούν πληροφορίες από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης για το πεδίο ορισμού, το πλήθος των ριζών, το πρόσημο των τιμών της. Ερμηνεύουν αλγεβρικά τα σημεία τομής της με τους άξονες.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ16.
	3.1.6. Ερμηνεύουν μία δεδομένη γραφική παράσταση συνάρτησης για να επιλύσουν ένα πρόβλημα.	
3.2. Μελέτη βασικών συναρτήσεων. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$ (3 ώρες)	3.2.1. Διερευνούν το ρόλο των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha x+\beta$.	Να συζητηθεί ότι για κάθε μοναδιαία μεταβολή του x έχουμε σταθερή μεταβολή του y, που εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ17.
	3.2.2. Διερευνούν και διατυπώνουν συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία συναρτήσεων της μορφής $f(x)=\alpha x+\beta$.	Είναι σημαντικό οι μαθητές να προσεγγίσουν διαισθητικά την έννοια της μονοτονίας μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα και να καταλήξουν στη συμβολική διατύπωση.
	3.2.3. Χρησιμοποιούν την $f(x)=\alpha x+\beta$ στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων.	Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ16, Δ18, Δ19.

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$ (3 ώρες)	3.2.4. Αναπαριστούν γραφικά και διερευνούν τις συναρτήσεις $g(x)=x^2$ και $h(x)=-x^2$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες. Γενικεύουν τα συμπεράσματά τους για τη συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$.	Είναι σημαντικό οι μαθητές να προσεγγίσουν διαισθητικά τις έννοιες των ακρότατων, της άρτιας και της περιττής. Ως παράδειγμα περιττής συνάρτησης, μπορούν να συζητηθεί η $g(x)=\frac{1}{x}$. Στη διεύθυνση: http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1729?locale= μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με το ρόλο του συντελεστή α της $f(x)=\alpha x^2$. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ20.
Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (3 ώρες)	3.2.5. Αναπαριστούν γραφικά συγκεκριμένες συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ μέσω μετατοπίσεων της $g(x)=\alpha x^2$. Μέσω της γραφικής παράστασης διερευνούν συγκεκριμένες συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες.	Μελετώντας απλές συναρτήσεις όπως οι $f(x)=(x-2)^2$ και $g(x)=x^2+4$ αναγνωρίζουν τη σημασία των μετατοπίσεων. Γράφουν με συμπλήρωση τετραγώνου π.χ. την $f(x)=3x^2-12x+16$ στη μορφή $f(x)=3(x-2)^2+4$ και μέσω μετατοπίσεων της $g(x)=3x^2$ χαράσσουν τη γραφική της παράσταση. Στη συνέχεια μέσω αυτής προσδιορίζουν τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ21, Δ22.
4. Εξισώσεις και Ανισώσεις 2ου βαθμού (10 ώρες)		
4.1. Εξισώσεις 2ου βαθμού (5 ώρες)	4.1.1. Αναγνωρίζουν ότι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με τον άξονα x΄x είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$.	
	4.1.2. Επιλύουν εξισώσεις 2ου βαθμού με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου και με τον τύπο των λύσεων.	Μέσα από παραδείγματα με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου οι μαθητές καταλήγουν σε συμπεράσματα για το ρόλο της διακρίνουσας και στον τύπο λύσεων. Για την πληρότητα του θέματος, να συζητηθεί η απόδειξη του τύπου των λύσεων.
	4.1.3. Παραγοντοποιούν το τριώνυμο εφόσον γνωρίζουν τις	

	ρίζες του. 4.1.4. Επιλύουν απλές εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού. 4.1.5. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση εξισώσεων 2ου βαθμού.	 Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ23, Δ24.
4.2. Ανισώσεις 2ου βαθμού (5 ώρες)	4.2.1. Χρησιμοποιούν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ στην επίλυση της ανίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ (ή της $\alpha x^2+\beta x+\gamma<0$). 4.2.2. Διερευνούν αλγεβρικά το πρόσημο του τριωνύμου και χρησιμοποιούν τα συμπεράσματα στην επίλυση ανισώσεων 2ου βαθμού και απλών ανισώσεων που ανάγονται σε ανισώσεις 2ου βαθμού. 4.2.3. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση ανισώσεων 2ου βαθμού.	Είναι σημαντικό να συνδεθεί η αλγεβρική με τη γραφική επίλυση της ανίσωσης. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ25. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ14, Δ23, Δ26.
5. Συστήματα (7 ώρες)		
5.1. Γραμμικά συστήματα 2×2 (3 ώρες)	5.1.1. Αναγνωρίζουν ότι η γραμμική εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma, \alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$ είναι εξίσωση ευθείας. Αναγνωρίζουν ότι οι λύσεις της είναι τα σημεία της ευθείας. Αναγνωρίζουν ότι το πλήθος λύσεων του γραμμικού συστήματος $\begin{cases}\alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1\\ \alpha_2 x+\beta_2 y=\gamma_2\end{cases}$ εξαρτάται από τη σχετική θέση των δυο ευθειών. 5.1.2. Επιλύουν γραμμικά συστήματα 2x2 γραφικά και αλγεβρικά.	Μέσω προβλημάτων νοηματοδοτείται το άπειρο πλήθος λύσεων της εξίσωσης. Αναγνωρίζουν αλγεβρικά και γραφικά ότι η γραμμική εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ $(\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0)$ έχει άπειρες λύσεις. Αντιστοιχίζουν τις λύσεις με ~~τα~~ σημεία της ευθείας. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ27. Η διερεύνηση θα γίνει με συγκεκριμένα παραδείγματα, γραφικά, μέσω αναλογιών των συντελεστών, μέσω ισοδύναμων εξισώσεων ή μέσω αναγωγής στη μορφή $y=\alpha x+\beta$. Στη διεύθυνση: http://photodentro.edu.gr/lor/handle/8521/2069 μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ28, Δ29.

	5.1.3. Αναγνωρίζουν και κατασκευάζουν γραμμικά συστήματα 2x2 με μία, καμία ή άπειρες λύσεις.	Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ28, Δ29.
5.2. Συστήματα 3×3 (1 ώρα)	5.2.1. Επιλύουν γραμμικά συστήματα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.	Η διαπραγμάτευση να γίνει μέσω προβλημάτων. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ30.
5.3. Μη γραμμικά συστήματα 2×2 (1 ώρα)	5.3.1. Επιλύουν μη γραμμικά συστήματα με δύο αγνώστους, αλγεβρικά και γραφικά.	Η διαπραγμάτευση να γίνει μέσω προβλημάτων. Στη διεύθυνση: http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5281 μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με τη γραφική επίλυση ενός μη γραμμικού συστήματος.
5.4. Επίλυση προβλημάτων με συστήματα (2 ώρες)	5.4.1. Μεταφράζουν ένα πρόβλημα στη μαθηματική γλώσσα χρησιμοποιώντας συστήματα. Επιλύουν το σύστημα και ερμηνεύουν τη λύση στο πλαίσιο του προβλήματος 5.4.2. Κατασκευάζουν δικά τους προβλήματα που επιλύονται με σύστημα.	Να δοθούν και προβλήματα με μη αποδεκτά αποτελέσματα (πχ αρνητική τιμή προϊόντος, αρνητική ηλικία, κλάσμα για αριθμό ατόμων). Προτείνεται η δραστηριότητα Δ28, Δ31.
6. Πιθανότητες (8 ώρες)		
6.1. Δειγματικός χώρος και ενδεχόμενα (2 ώρες)	6.1.1. Αναγνωρίζουν αν ένα πείραμα είναι πείραμα τύχης. 6.1.2. Προσδιορίζουν το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και ενδεχόμενα αυτού με διάφορους τρόπους (π.χ. δενδροδιαγράμματα, διαγράμματα Venn, πίνακες διπλής εισόδου).	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ32. Να αναδειχθεί ο ρόλος του δενδροδιαγράμματος και του πίνακα διπλής εισόδου ως τρόπων παρουσίασης ενός πειράματος τύχης. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ33.
6.2. Πράξεις με ενδεχόμενα (1 ώρα)	6.2.1. Μεταφράζουν διάφορες σχέσεις ενδεχομένων που είναι διατυπωμένες σε φυσική γλώσσα, στη γλώσσα των συνόλων και αντίστροφα.	Να εξεταστεί η ένωση, η τομή, και η διαφορά ενδεχομένων, το συμπληρωματικό ενδεχόμενο και τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα. Κατά τη μετάφραση είναι σημαντικός ο ρόλος των διαγραμμάτων Venn. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ34, Δ35.
6.3. Εισαγωγή στην έννοια της Πιθανότητας (3 ώρες)	6.3.1. Εκτιμούν την πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου με τη βοήθεια της σχετικής συχνότητας.	Συνδέουν ένα ενδεχόμενο, με τη βοήθεια της σχετικής συχνότητας, με έναν αριθμό που αποτελεί μέτρο της «προσδοκίας» πραγματοποίησής του και καταλήγουν στον κλασικό ορισμό της πιθανότητας. Στη διεύθυνση: http://www.shodor.org/interactivate/activities/Coin/

	6.3.2. Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τον κλασικό ορισμό.	μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με την έννοια της σχετικής συχνότητας. Στη διεύθυνση: http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5217?locale=el μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με το νόμο των μεγάλων αριθμών.
6.4. Λογισμός Πιθανοτήτων (2 ώρες)	6.4.1. Διατυπώνουν τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων τους αιτιολογούν με διαγράμματα Venn και τους χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.	Είναι σημαντικό οι μαθητές να εμπλακούν στη διαδικασία απόδειξης των: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ όταν $A \cap B = \varnothing$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $P(A') = 1 - P(A)$, $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ36.
7. Τριγωνομετρία (10 ώρες)		
7.1. Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας - Τριγωνομετρικός κύκλος (4 ώρες)	7.1.1. Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξειών γωνιών.	Μετά από μία σύντομη αναφορά στους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών (ημω, συνω, εφω, σφω) οξείας γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο, επιλύουν προβλήματα υπολογισμού αποστάσεων απρόσιτων σημείων (ιστορική αναφορά). Προτείνεται η δραστηριότητα Δ37.
	7.1.2. Ορίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας μ°, μ ∈ ˝ , τοποθετώντας την κατάλληλα στο σύστημα συντεταγμένων.	Καταλήγουν στις σχέσεις $ημ\left(k \cdot 360^{\circ} + ω\right) = ημω, k \in$ Ά κλπ.
	7.1.3. Ορίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου.	Διαπιστώνουν ότι ισχύουν οι ανισότητες $-1 \le ημω \le 1$, $-1 \le συνω \le 1$. Χρησιμοποιούν τον τριγωνομετρικό κύκλο για να προσδιορίσουν το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας και για να απαντήσουν σε ερωτήσεις όπως: Ποιες γωνίες έχουν ημίτονο ίσο με -1; Ποιες γωνίες έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$; Εισάγονται οι άξονες εφαπτομένων

		και συνεφαπτομένων. Στη διεύθυνση: http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5140?locale=el μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με τη χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ38.
7.2. Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες (2 ώρες)	7.2.1. Χρησιμοποιούν τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας, όταν ένας από αυτούς είναι γνωστός.	Είναι σημαντικό οι μαθητές να εμπλακούν στη διαδικασία απόδειξης των ταυτοτήτων: $ημ^2ω + συν^2ω = 1$, $εφω = \frac{ημω}{συνω}$, $σφω = \frac{συνω}{ημω}$. Ο προσδιορισμός του συνημιτόνου και του ημιτόνου μιας γωνίας από την εφαπτομένη της μπορεί να συζητηθεί ως δραστηριότητα. Να γίνουν παραδείγματα, όπου η σχέση $α^2 + β^2 = 1$ χρησιμοποιείται ως αναγκαία αλλά και ικανή συνθήκη για να είναι οι αριθμοί α, β το συνημίτονο και το ημίτονο αντίστοιχα κάποιας γωνίας. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ39.
7.3. Νόμος ημιτόνων - Νόμος συνημιτόνων (4 ώρες)	7.3.1. Υπολογίζουν γωνίες και πλευρές τριγώνων όταν δίνονται επαρκή στοιχεία τους.	Διερευνούν σχέσεις μεταξύ πλευρών και γωνιών σε ένα τρίγωνο και καταλήγουν στους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων, τους οποίους χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ40, Δ41.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δ1 (αντιστοιχεί στους στόχους 1.1.2, 1.1.3)

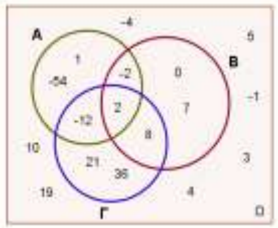
Έστω Ω = {1, 2, 3, …, 10} ένα βασικό σύνολο και τρία υποσύνολα αυτού Α = {1, 2, 4, 7, 8}, Β = {3, 4, 8, 10} και Γ = {2, 4, 5, 10}

α) Να παραστήσετε τα σύνολα Ω, Α, Β και Γ με διάγραμμα Venn.

β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους καθώς και με διαγράμματα Venn τα σύνολα:

i) $A \cup B$ ii) $B \cap \Gamma$ iii) $A \cup (B \cap \Gamma)$ iv) $(A \cap B) \cup \Gamma$ v) $A \cap B \cap \Gamma$

γ) Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς και ποιες ψευδείς;



i) 4∈A∪(B∩Γ) ii) 4∈A∩B∩Γ iii) 8 ∉B∩Γ iv) A ⊆A∪B

Δ2 (αντιστοιχεί στους στόχους 1.1.2, 1.1.3)

Στο σχήμα παριστάνονται με διάγραμμα Venn ένα βασικό σύνολο Ω και τρία υποσύνολά του Α, Β και Γ.

α) Ποιο είναι το πλήθος των στοιχείων των συνόλων Α, Β και Γ;

β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

i) A∪B ii) B∩Γ iii) A∪(B∩Γ) iv) A∩B∩Γ v) B′ vi) A - B vii) A∩B'

Δ3 (αντιστοιχεί στο στόχο 2.1.1)

Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές και ποιες λάθος;

i) 5,1∈˝ −¤ ii) $\frac{2}{3}$∈¥ iii) $\sqrt{10}$∈˝ iv) Ά⊄¥ v) $\sqrt{4}$∈¤ vi) −3∈¤ vii) ¥⊆˝ −¤ viii) ¤⊆˝ ix) ¥∪Ά=˝ x) ¥∩Ά=∅

Δ4 (αντιστοιχεί στο στόχο 2.1.2)

Απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

α) Πόσοι ρητοί αριθμοί είναι ανάμεσα στο $\frac{3}{8}$ και το $\frac{5}{8}$;

β) Υπάρχει ρητός αριθμός α μεγαλύτερος του $\frac{5}{8}$ με την ιδιότητα: «ανάμεσα στον $\frac{5}{8}$ και τον α να μην υπάρχει άλλος αριθμός»;

γ) Υπάρχει ο μικρότερος θετικός ρητός αριθμός; Αν ναι, ποιος είναι αυτός;

δ) Υπάρχει ο επόμενος ρητός αριθμός του 24,1; Αν ναι, ποιος είναι αυτός;

Δ5 (αντιστοιχεί στο στόχο 2.2.2 και 2.3.2)

Ένας έμπορος που πουλάει ξύλα για τζάκια και ξυλόσομπες, χρεώνει 180 ευρώ τον τόνο και 10 ευρώ επιπλέον για τα μεταφορικά.

α) Πόση ποσότητα ξυλείας (σε τόνους) θα αγοράσει ο Νίκος αν διαθέσει 150 ευρώ;

β) Αν ο έμπορος πουλάει τα ξύλα σε δεμάτια των 20 κιλών, πόσα τέτοια δεμάτια θα αγοράσει ο Νίκος αν δεν μπορεί να διαθέσει περισσότερα από 150 ευρώ για την αγορά;

Δ6 (αντιστοιχεί στο στόχο 2.2.3)

Η Ελένη και ο Κώστας παρατηρούν ότι το άθροισμα 3+11 είναι άρτιος και το γινόμενο 3×11 είναι περιττός. Κατόπιν αυτών:

Η Ελένη ισχυρίζεται ότι: αν το άθροισμα δύο φυσικών αριθμών είναι άρτιος, τότε το γινόμενό τους είναι περιττός.

Ο Κώστας ισχυρίζεται ότι: αν το γινόμενο δύο φυσικών αριθμών είναι περιττός, τότε το άθροισμά τους είναι άρτιος.

Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

α) οι ισχυρισμοί της Ελένης και του Κώστα λένε το ίδιο πράγμα;

β) Το γινόμενο δύο φυσικών είναι 1271. Αν υποθέσουμε ότι έχει δίκιο ο Κώστας ποια από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστή;

i) Το άθροισμα των δύο αριθμών είναι σίγουρα άρτιος.

ii) Το άθροισμα των δύο αριθμών είναι σίγουρα περιττός.

iii) Δεν είναι σίγουρο αν το άθροισμα είναι περιττός ή άρτιος μέχρι να μάθουμε ποιοι είναι οι αριθμοί.

γ) είναι σωστός ο ισχυρισμός της Ελένης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) είναι σωστός ο ισχυρισμός του Κώστα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ7 (αντιστοιχεί στο στόχο 2.3.2)

Η σχέση που συνδέει τους βαθμούς Κελσίου (°C) με τους βαθμούς Φαρενάιτ (°F) είναι η F = $\frac{9}{5}C+32$. Στη διάρκεια της νύχτας η θερμοκρασία στο Σικάγο των ΗΠΑ κυμάνθηκε από 41°F μέχρι 50°F. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε °C.

Δ8 (αντιστοιχεί στους στόχους 2.4.1, 2.4.3)

Δίνονται τα σημεία Α, Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με -2 < x < 7.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$

ii) $|x-7|$

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2|+|x-7|$

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

Δ9 (αντιστοιχεί στο στόχο 2.5.2)

Δίνεται η παράσταση: $(\sqrt[3]{2}+3)\cdot[(\sqrt[3]{2})^2-3\cdot\sqrt[3]{2}+9]$

α) Να υπολογίσετε την παράσταση με χρήση υπολογιστή τσέπης τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση χρησιμοποιώντας αλγεβρικές ιδιότητες.

γ) Να συγκρίνετε τις δυο μεθόδους ως προς την ακρίβεια του αποτελέσματος.

Δ10 (αντιστοιχεί στο στόχο 3.1.1)

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα ποσοστά ανεργίας (Α) στις ΗΠΑ που καταγράφηκαν σε συγκεκριμένα έτη (Ε). Ποια από τις μεταβλητές Ε και Α θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως ανεξάρτητη και ποια ως εξαρτημένη σε μια αντιστοιχία που θα παριστάνει συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

Έτος Ε	Ποσοστό ανεργίας (%) Α
1975	8,5
1980	7,1
1985	7,2
1990	5,6
1995	5,6

2000	4,0
2005	5,1
2008	5,8
2009	9,3
2010	10,0

Δ11 (αντιστοιχεί στους στόχους 3.1.1, 3.1.3)

Στο μπακάλικο της γειτονιάς, ένας χυμός πορτοκάλι κοστίζει 1,39 ευρώ το μπουκάλι των 75ml, ενώ ένας χυμός ροδάκινο κοστίζει 1,29 ευρώ το μπουκάλι των 75 ml. Η Μαρίνα αγόρασε 5 χυμούς ροδάκινο και ο Χρήστος αγόρασε συνολικά 7 χυμούς και από τα δύο είδη.

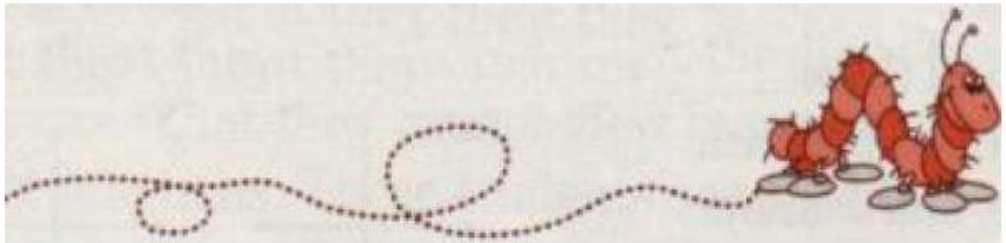
α) Πόσα χρήματα πλήρωσε η Μαρίνα;

β) Αν ο Χρήστος αγόρασε x χυμούς πορτοκάλι, να εκφράσετε το ποσό που πλήρωσε για τους 7 χυμούς ως συνάρτηση του x.

γ) Αν από τα 7 μπουκάλια που αγόρασε ο Χρήστος τα 3 είναι χυμός ροδάκινο, πόσα χρήματα πλήρωσε συνολικά;

Δ12 (αντιστοιχεί στο στόχο 3.1.2)

Μια κάμπια σέρνεται πάνω σε ένα χαρτί όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Εάν θέλαμε να προσδιορίσουμε τη θέση της κάμπιας πάνω στο χαρτί σε σχέση με το χρόνο, μπορεί η θέση να περιγραφεί ως μια συνάρτηση του χρόνου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

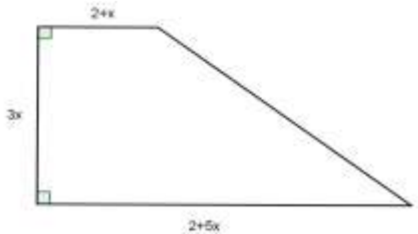
β) Μπορεί ο χρόνος να περιγραφεί ως μια συνάρτηση της θέσης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ13 (αντιστοιχεί στο στόχο 3.1.2)

Δώδεκα κράτη μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης έχουν φόρο επί των πωλήσεων 6%. Δηλαδή, για κάθε ευρώ που δαπανάται για αγορά σε ένα κατάστημα, θα πρέπει να αποδίδονται στο δημόσιο 6 λεπτά. Να περιγράψετε με λόγια και αναπαραστήσετε με διάφορους τρόπους (εξίσωση, πίνακα, γράφημα) τη σχέση ανάμεσα στο φόρο επί των πωλήσεων (σε ευρώ) και της τιμής αγοράς (σε ευρώ). Μπορεί ο φόρος επί των πωλήσεων να εκφραστεί ως συνάρτηση της τιμής αγοράς των προϊόντων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ14 (αντιστοιχεί στους στόχους 3.1.3, 4.2.3)

Στο διπλανό τραπέζιο (οι πλευρές του είναι σε m):



α) Να εκφράσετε την περίμετρό του Π ως συνάρτηση του x. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Π(x);

β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του Ε ως συνάρτηση του x. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Ε(x);

γ) Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του x, αν η περίμετρος του τραπεζίου είναι τουλάχιστον 39m και το εμβαδόν του το πολύ $99m^2$.

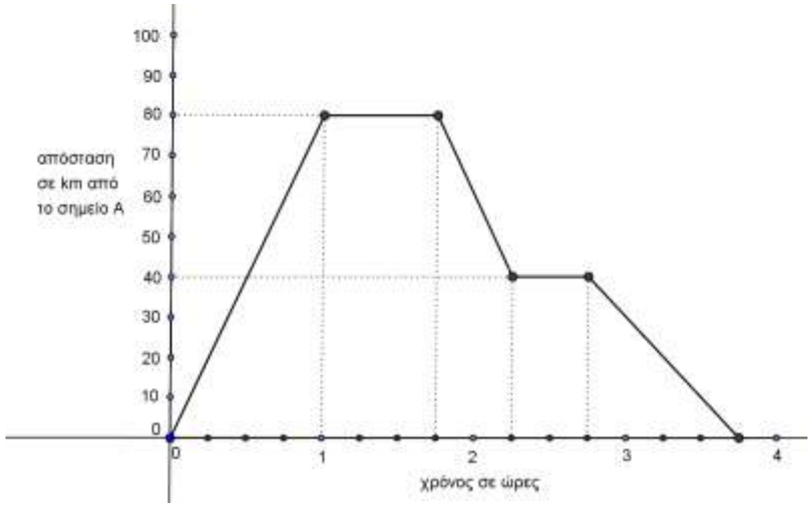
Δ15 (αντιστοιχεί στους στόχους 3.1.3, 3.1.4)

Αν με Δ παραστήσουμε μια δόση αμπικιλλίνης (η αμπικιλλίνη είναι μια χημική ουσία χρησιμοποιείται για τη θεραπεία αναπνευστικών λοιμώξεων) σε χιλιοστόγραμμα και με W παραστήσουμε το βάρος παιδιού σε κιλά, τότε η εξίσωση Δ = 50W δίνει έναν κανόνα για την εύρεση της μέγιστης ασφαλούς ημερήσιας δόσης του φαρμάκου της αμπικιλλίνης για παιδιά που ζυγίζουν λιγότερο από 10 κιλά.

α) Η εξίσωση εκφράζει συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.
β) Ποιες είναι οι λογικές επιλογές για ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή;
γ) Να δημιουργήσετε έναν πίνακα τιμών και μια γραφική παράσταση.

Δ16 (αντιστοιχεί στους στόχους 3.1.5, 3.2.3)

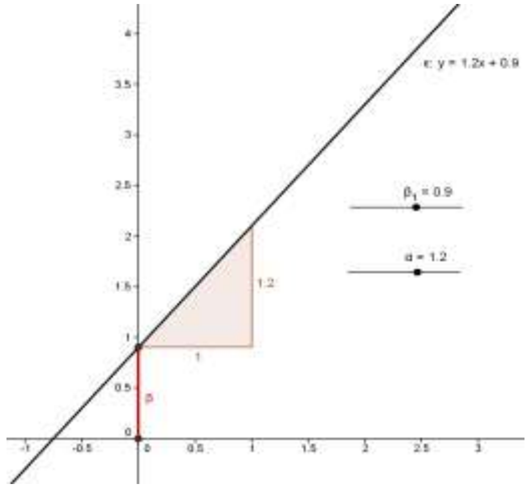
Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α, φθάνει στην πόλη Β και επιστρέφει ξανά στην Α. Το διπλανό διάγραμμα δείχνει την απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α κάθε χρονική στιγμή του ταξιδιού. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στα ερωτήματα:



α) Πόσες ώρες διήρκεσε το ταξίδι;
β) Πόσα χιλιόμετρα είναι η απόσταση μεταξύ των δύο πόλεων;
γ) Πόσες φορές το αυτοκίνητο έκανε στάση και για πόση ώρα;
δ) Πόσος χρόνος πέρασε μέχρι να κάνει την πρώτη στάση, τι απόσταση διήνυσε και ποια ήταν η ταχύτητά του σ' αυτό το χρονικό διάστημα;
ε) Σε τι απόσταση από την πόλη Α θα βρίσκεται: 45 λεπτά, 1 ώρα και 15 λεπτά, 1 ώρα και 33 λεπτά, 3 ώρες και 30 λεπτά και 4 ώρες από την στιγμή που ξεκίνησε;
στ) Το διάγραμμα περιγράφει συνάρτηση; Γιατί; Αν ναι, ποια είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή; Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης;

Δ17 (αντιστοιχεί στο στόχο 3.2.1)

Με χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας να μεταβάλετε τις τιμές στα α και β και να διερευνήσετε τις μεταβολές της ευθείας y=αx+β. Ποιος είναι ο ρόλος των παραμέτρων α και β στις μεταβολές της ευθείας.



Δ18 (αντιστοιχεί στο στόχο 3.2.3)

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες;

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

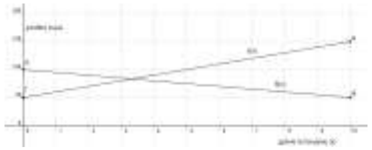
   i) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\frac{3}{4}x$.

   ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος (βi), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

Δ19 (αντιστοιχεί στο στόχο 3.2.3)

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(0, 100) και Β(10, 50) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης δ(x) των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ με Γ(0, 50) και Δ(10, 150) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων ε(x) της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



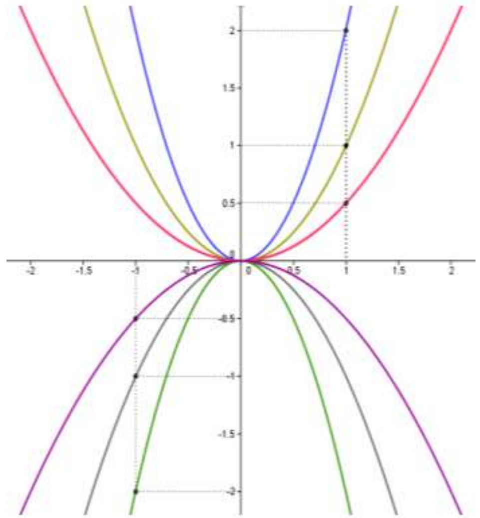
α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

β) i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων δ(x), ε(x) και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές.

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

Δ20 (αντιστοιχεί στο στόχο 3.2.4)

Στο διπλανό σύστημα αξόνων δίνονται έξι παραβολές.



α) Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις, που οι γραφικές παραστάσεις τους είναι οι παραβολές αυτές.

β) Τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία των συναρτήσεων του ερωτήματος (α); Μπορείτε να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας για τις συναρτήσεις αυτής της μορφής;

γ) Για κάθε μία από αυτές τις συναρτήσεις, υπάρχει τιμή της μεταβλητής x για την οποία η συνάρτηση παίρνει τη μεγαλύτερη ή τη μικρότερη τιμή της; Να εκφράσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας. Μπορείτε να γενικεύσετε αυτά τα συμπεράσματα για τις συναρτήσεις αυτής της μορφής;

δ) Έχει η καθεμιά από τις παρακάτω παραβολές άξονα ή κέντρο συμμετρίας; Να εκφράσετε αλγεβρικά τις συμμετρίες αυτές. Μπορείτε να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας για τις συναρτήσεις αυτής της μορφής;

ε) Από τι εξαρτάται το «άνοιγμα» μιας παραβολής και με ποιόν τρόπο;

Δ21 (αντιστοιχεί στο στόχο 3.2.5)

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων: $\phi(x) = x^2$, $f(x) = (x - 3)^2$, $g(x) = (x + 3)^2$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\phi(x) = x^2$					0				
$f(x) = (x - 3)^2$								0	
$g(x)=(x + 3)^2$		0							

β) Με βάση τον παραπάνω πίνακα τιμών, να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων φ, f και g.

γ) Ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ, δίνει τη γραφική παράσταση της f και ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ δίνει τη γραφική παράσταση της g;

Δ22 (αντιστοιχεί στο στόχο 3.2.5)

α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $y = x^2$ και $y = x^2 + \kappa$ για διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού κ. Πώς μπορούν να προκύψουν από τη γραφική παράσταση της $y = x^2$ οι άλλες γραφικές παραστάσεις;

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $y = x^2$ και $y = (x + \lambda)^2$ για διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ. Πώς μπορούν να προκύψουν από τη γραφική παράσταση της $y = x^2$ οι άλλες γραφικές παραστάσεις;

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$. Αφού τη γράψετε στη μορφή $f(x) = (x + \lambda)^2 + \kappa$, προσπαθήστε να την παραστήσετε γραφικά ξεκινώντας από την $y = x^2$ με βάση τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα προηγούμενα ερωτήματα.

δ) Σε ποιά διαστήματα η $f(x) = x^2 - 4x + 5$ είναι αύξουσα και σε ποιά φθίνουσα; Για ποιά τιμή του x παρουσιάζει η f ελάχιστη τιμή και ποιά είναι αυτή; Έχει η γραφική παράσταση της f άξονα συμμετρίας;

(Για την δραστηριότητα αυτή ενδείκνυται η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας).

Δ23 (αντιστοιχεί στους στόχους 4.1.5, 4.2.3)

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος y = 175 m;

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.

Δ24 (αντιστοιχεί στο στόχο 4.1.5)

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με (παράμετρο) $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ.

i) Να δείξετε ότι ο αριθμός -ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$

ii) Να δείξετε ότι $\rho \neq 0$ και ότι ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$

Δ25 (αντιστοιχεί στο στόχο 4.2.2)

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2-5x-6<0$.

β) Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών K=$\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\frac{46}{47}-6$ και M = $(\sqrt{37})^2-5\sqrt{37}-6$. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

γ) Αν α ∈(-6, 6), να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda=\alpha^2-5|\alpha|-6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ26 (αντιστοιχεί στο στόχο 4.2.3)

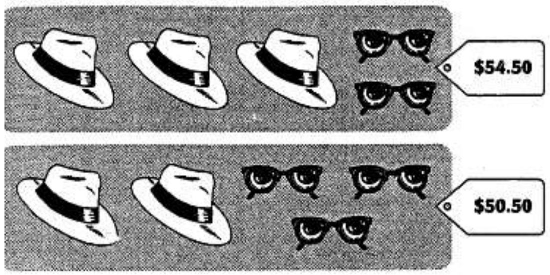
Ποιοι πραγματικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους; Ποιοι είναι μεγαλύτεροι κατά 1 από το τετράγωνό τους;

Δ27 (αντιστοιχεί στο στόχο 5.1.1)

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να ανταλλάξουμε ένα χαρτονόμισμα 20€ με κέρματα των 2€ και 1€. Να αναπαραστήσετε τις λύσεις με σημεία σε ένα σύστημα συντεταγμένων. Τι παρατηρείτε;

Δ28 (αντιστοιχεί στους στόχους 5.1.2, 5.1.3, 5.4.1)

Ένας ταξιδιώτης βρίσκει σε ένα πολυκατάστημα της Νέας Υόρκης την εξής προσφορά: τρία καπέλα και δυο ζευγάρια γυαλιά πωλούνται προς 54,50 δολάρια, ενώ δυο από τα ίδια καπέλα και τρία από τα ίδια ζευγάρια γυαλιά πωλούνται προς 50,50 δολάρια.



α) Χωρίς να υπολογίσετε την τιμή ενός καπέλου ή ενός ζεύγους γυαλιών, να εξηγήσετε ποιο είναι πιο ακριβό. Πόσο πιο ακριβό;

β) Να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους για να υπολογίσετε την τιμή ενός καπέλου και ενός ζεύγους γυαλιών.

Δ29 (αντιστοιχεί στους στόχους 5.1.2 ,5.1.3)

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} y=2x+4 \\ \alpha x+2y=8 \end{cases}$

α) Να βρείτε το συντελεστή του x ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις. Ο συντελεστής αυτός είναι ο μόνος που δίνει άπειρο αριθμό λύσεων σε αυτό το σύστημα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε ένα διαφορετικό συντελεστή για το x, έτσι ώστε το σύστημα να έχει ακριβώς μια λύση. Υπάρχουν άλλοι συντελεστές για το x τέτοιοι ώστε το σύστημα να έχει ακριβώς μια λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ30 (αντιστοιχεί στο στόχο 5.2.1)

Τρία τρόφιμα έχουν τα ακόλουθα θρεπτικά συστατικά ανά 100 gr.

	Θερμίδες	Πρωτεΐνη (σε gr)	Βιταμίνη C (σε milligrams)
Τρόφιμο Α	40	5	30
Τρόφιμο Β	200	2	10
Τρόφιμο Γ	400	4	300

Αν ένα γεύμα που αποτελείται από τα τρία τρόφιμα Α, Β και Γ πρέπει να περιλαμβάνει ακριβώς 660 θερμίδες, 25 gr πρωτεΐνης και 425 mgr βιταμίνης C, πόσα γραμμάρια από το κάθε είδος τροφίμου θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί;

Δ31 (αντιστοιχεί στο στόχο 5.4.1)

Η Άλκηστη και η Ελένη αγαπούν την πεζοπορία και βρίσκονται το καλοκαίρι στην Αμοργό. Αποφασίζουν να περπατήσουν ένα μονοπάτι περίπου 16 χιλιομέτρων που συνδέει τη Χώρα με τον όρμο της Αιγιάλης.

Η Άλκηστη ανηφορίζει το μονοπάτι από την Αιγιάλη για να συναντήσει την Ελένη που μένει στη Χώρα. Υπολογίζει ότι η ταχύτητά της είναι 2,4 χιλιόμετρα την ώρα. Την ίδια στιγμή, όμως, ξεκινά η Ελένη να κατηφορίζει το ίδιο μονοπάτι και υπολογίζει ότι η ταχύτητά της είναι 4 χιλιόμετρα την ώρα. Μια δεδομένη χρονική στιγμή σε κάποιο σημείο της διαδρομής συναντά την Άλκηστη.

α) Να ορίσετε μεταβλητές για το χρόνο, που πέρασε μέχρι να συναντηθούν, και για την απόσταση του σημείου συνάντησης από την Αιγιάλη.
β) Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.
γ) Σε πόση απόσταση από την Χώρα και ποια χρονική στιγμή θα συναντηθούν οι δυο κοπέλες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ32 (αντιστοιχεί στο στόχο 6.1.1)

Ποια από τα παρακάτω είναι πειράματα τύχης; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Μετράμε το χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών εκλείψεων του ηλίου.
β) Επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και καταγράφουμε το πλήθος των παιδιών της.
γ) Μία συγκεκριμένη ημέρα, μετράμε το πλήθος των πελατών ενός εμπορικού καταστήματος.
δ) Μετράμε το πλήθος των λεωφορείων που διέρχονται από μία στάση κατά τη διάρκεια ενός καθορισμένου χρονικού διαστήματος.
ε) Μετράμε το χρόνο που απαιτείται για να διανύσει ένα κινητό δεδομένη απόσταση s με δεδομένη σταθερή ταχύτητα ν.
στ) Υπολογίζουμε τον τόκο που θα λάβουμε μέσα σε δύο έτη για καταθέσεις ύψους α με προκαθορισμένο επιτόκιο β.

Δ33 (αντιστοιχεί στο στόχο 6.1.2)

Δύο φίλοι παίζουν το γνωστό παιχνίδι «πέτρα, ψαλίδι, χαρτί». Με χρήση δενδροδιαγράμματος ή πίνακα διπλής εισόδου να προσδιορίσετε όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος και να δημιουργήσετε έτσι το δειγματικό χώρο του πειράματος αυτού. Να προσδιορίσετε το ενδεχόμενο «ισοπαλία».

Δ34 (αντιστοιχεί στο στόχο 6.2.1)

Σε μια ομάδα 20 ατόμων, 4 από τις 7 γυναίκες και 2 από τους 13 άνδρες φορούν γυαλιά. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα αυτά. Να παραστήστε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέχθηκε:

α) να είναι γυναίκα ή να φοράει γυαλιά.
β) να μην είναι γυναίκα και να φοράει γυαλιά.

Δ35(αντιστοιχεί στο στόχο 6.2.1)

Από τους μαθητές ενός λυκείου κάποιοι μιλούν πολύ καλά τη γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή για να εκπροσωπήσει το σχολείο σε μια εκδήλωση του τμήματος Γαλλικής Φιλολογίας. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα Α: «ο μαθητής να είναι κορίτσι» και Β: «ο μαθητής μιλά πολύ καλά τη γαλλική γλώσσα», να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$ ii) $A \cap B$ iii) $B - A$ iv) $A - B$ v) A' vi) $A' \cup B$

Δ36 (αντιστοιχεί στο στόχο 6.4.1)

Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 32 μαθητές συμμετέχουν σε μια θεατρική ομάδα, 28 μαθητές συμμετέχουν στην ομάδα στίβου και 16 μαθητές συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:

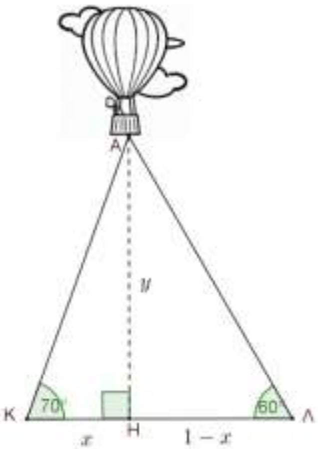
α) να συμμετέχει σε μια τουλάχιστον από τις δυο ομάδες;

β) να συμμετέχει μόνο σε μία από τις δυο ομάδες;

γ) να μη συμμετέχει σε καμία από τις δυο ομάδες;

δ) να λυθεί το ίδιο πρόβλημα αν δεν γνωρίζουμε τον αριθμό των μαθητών, αλλά γνωρίζουμε ότι το 28% των μαθητών συμμετέχει σε μια θεατρική ομάδα, το 20% συμμετέχει στην ομάδα στίβου και το 12% συμμετέχει και στις δύο ομάδες.

Δ37 (αντιστοιχεί στο στόχο 7.1.1)



Δύο φίλοι, ο Κώστας και ο Λουκάς βρίσκονται στα σημεία Κ, Λ σε απόσταση 1 km μεταξύ τους και παρατηρούν ένα αερόστατο το οποίο ίπταται στη θέση Α. Επικοινωνώντας με τα κινητά τους τηλέφωνα, προσπαθούν να υπολογίσουν το ύψος y του αερόστατου πάνω από το έδαφος. Ο Κώστας βλέπει το αερόστατο υπό γωνία 70° ενώ ο Λουκάς το βλέπει υπό γωνία 60° όπως φαίνεται διπλανό σχήμα.

α) Αν Η είναι η προβολή του Α στην ευθεία ΚΛ και x = ΚΗ, να δείξετε ότι ισχύει: $x = \dfrac{\varepsilon\varphi 60^\circ}{\varepsilon\varphi 60^\circ + \varepsilon\varphi 70^\circ}$

β) Να υπολογίσετε το ύψος y.

Δίνεται ότι: εφ60° = $\sqrt{3} \cong 1,732$ και εφ70° $\cong$2,747.

Σημείωση: Αυτή η μέθοδος εφαρμόστηκε στο παρελθόν για τον προσδιορισμό της απόστασης των πλησιέστερων στο ηλιακό μας σύστημα άστρων. Στην περίπτωση αυτή, Α είναι το άστρο και τα σημεία Κ, Λ αντιστοιχούν σε δύο αντιδιαμετρικές θέσεις της τροχιάς της Γης γύρω από τον Ήλιο (π.χ. θερινό ηλιοστάσιο - χειμερινό ηλιοστάσιο). Η ιδέα αυτής της μεθόδου εκτίμησης αστρονομικών αποστάσεων, η οποία ονομάζεται μέθοδος της παράλλαξης, οφείλεται στον Αρίσταρχο τον Σάμιο. Το πρόβλημα με τη μέθοδο της παράλλαξης είναι ότι, καθώς η απόσταση ΚΛ είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ΚΑ, η γωνία $K\hat{A}\Lambda$ είναι επίσης πολύ μικρή (υπολογίζεται σε δευτερόλεπτα της μοίρας) και, κατά συνέπεια, η ακρίβεια των μετρήσεων που απαιτείται είναι σχεδόν απαγορευτική.

Δ38 (αντιστοιχεί στο στόχο 7.1.3)

α) Δίνεται γωνία , με 0° ≤ ω < 360° που ικανοποιεί τις σχέσεις: ημω = $-\dfrac{1}{2}$ και συνω > 0. Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, να εξηγήσετε γιατί είναι μοναδική και να βρείτε το μέτρο της.

β) Να βρείτε όλες τις γωνίες φ με 0° ≤ φ < 360°, που ικανοποιούν τη σχέση ημφ = $-\frac{1}{2}$ και να τις σχεδιάσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Δ39 (αντιστοιχεί στο στόχο 7.2.1)

α) Υπάρχει γωνία θ με ημθ = $\frac{1}{4}$ και συνθ = $\frac{3}{4}$;

β) Υπάρχει γωνία θ με ημθ = $\frac{3}{5}$ και συνθ = $-\frac{4}{5}$;

Αν όχι, αιτιολογήστε. Αν ναι, να σχεδιάσετε μια τέτοια γωνία πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. Πόσες τέτοιες γωνίες μεταξύ 0° και 360° υπάρχουν;

Δ40 (αντιστοιχεί στο στόχο 7.3.1)

Ένα ελικόπτερο ξεκινάει από το ελικοδρόμιο Ε με κατεύθυνση 128° νοτιοανατολικά προς το σταθμό ανεφοδιασμού Α που απέχει 3,2 km από το Ε και από εκεί κατευθύνεται 66° βορειοανατολικά προς τη βάση του Β, που απέχει 4,7 km από το Α.

α) Να δείξετε ότι $E\hat{A}B$ = 118°.

β) Να βρείτε την απόσταση ΕΒ του ελικοδρόμιου Ε από τη βάση Β.

Δίνεται ότι: συν118°≅ -0,47

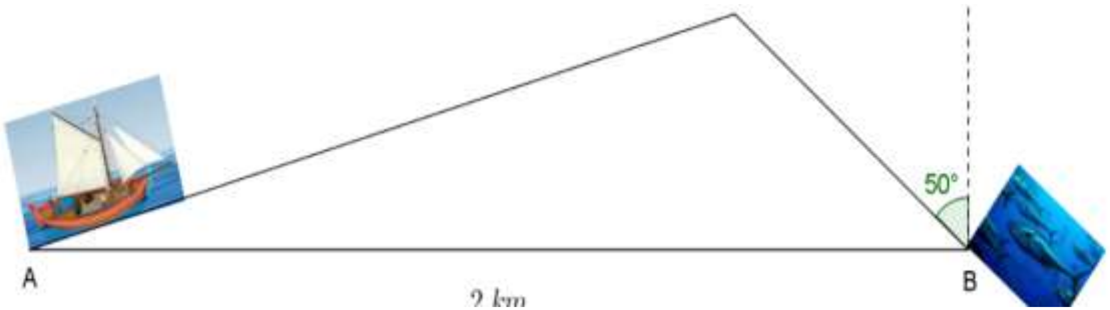
Δ41 (αντιστοιχεί στο στόχο 7.3.1)

Ένα ψαροκάικο εντοπίζει ένα κοπάδι ψαριών σε απόσταση 2 km ανατολικά, το οποίο κινείται σε κατεύθυνση 50° βορειοδυτικά με ταχύτητα 8 km/h.

α) Αν το καΐκι κινείται με ταχύτητα 20 km/h, να υπολογίσετε με προσέγγιση την κατεύθυνση στην οποία πρέπει να κινηθεί το καΐκι ώστε να συναντηθεί με το κοπάδι των ψαριών.

β) Να βρείτε, με προσέγγιση 1 min, σε πόσο χρόνο θα συναντηθεί το καΐκι με το κοπάδι.

Για τον υπολογισμό των γωνιών και των τριγωνομετρικών τους αριθμών, να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή.


50°
A
B
2 km

Α΄ Λυκείου, Γεωμετρία

Εισαγωγή

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία πρέπει να εμφανιστεί με έναν τρόπο που αφενός θα υιοθετεί τη γενική φιλοσοφία του Ευκλείδη και αφετέρου θα προσιδιάζει στις σύγχρονες ανάγκες του εκπαιδευτικού μας συστήματος. Η εν λόγω θέση κατατίθεται, προφανώς, με την επίγνωση ότι μια πλήρης αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι ανέφικτο να ενταχθεί σε Πρόγραμμα Σπουδών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.

Σε κάθε περίπτωση, οι στόχοι για τη διδασκαλία του συγκεκριμένου μαθήματος είναι οι δύο επόμενοι.

α) Η ανάδειξη της Μαθηματικής Απόδειξης ως συστοίχου χαρακτηριστικού ανθρωπίνων διαδικασιών: η Μαθηματική Απόδειξη δεν λειτουργεί μόνο στο πεδίο των Μαθηματικών, αλλά ενυπάρχει και σε διάφορες δραστηριότητες του ανθρωπίνου βίου, όπως, λόγου χάριν, σε πολιτικές επιχειρηματολογίες, σε δικανικά ζητήματα ή, ακόμα, σε συνήθεις διαλόγους της καθημερινότητας. Η Μαθηματική Απόδειξη, δηλαδή, ούτε αντιτίθεται ούτε συγκρούεται με «αποδείξεις» που απαντούν σε όλα αυτά, απλώς, έχοντας εκεί την ιστορική της απαρχή τις συστηματοποιεί δημιουργώντας πρότυπα.

β) Η παρουσίαση της Αξιωματικής Θεμελίωσης ως τρόπου οργάνωσης της ανθρώπινης γνώσης: όλη η επιστημονική σκέψη και παραγωγή, ουσιαστικά, στηρίζεται και ακολουθεί τις αρχές που έθεσαν ο Αριστοτέλης και ο Ευκλείδης. Μάλιστα, τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη αποτέλεσαν το πρώτο και σημαντικό παράδειγμα εφαρμογής αυτών των αρχών σε έναν μεγάλο επιστημονικό κλάδο˙ τα Μαθηματικά.

Όμως, με βάση αυτόν τον στόχο, έχει σημασία να διαφανεί και η ανάγκη συνεκτικότητας των «υλικών» που απαρτίζουν το σώμα των επιστημών και πιο συγκεκριμένα των Μαθηματικών. Δίνεται, δηλαδή, εδώ, η ευκαιρία να υπογραμμιστεί ότι όπως όλες οι επιστήμες, έτσι και τα Μαθηματικά προσβλέπουν σε συγκεκριμένους στόχους. Επομένως, τα Μαθηματικά δεν μπορεί να είναι κάποιες έννοιες, μερικά θεωρήματα και αρκετές ασκήσεις που ασύνδετα δεν συντείνουν πουθενά και «ὥσπερ λίθοι τε καὶ πλίνθοι καὶ ξύλα καὶ κέραμος ἀτάκτως μὲν ἐρριμμένα οὐδὲν χρήσιμά ἐστιν».

Ταυτόχρονα, επιδιώκεται εξοικείωση με την Στερεομετρία η οποία με τη χρησιμότητα που παρουσιάζει τόσο στην καθημερινότητα όσο και σε διαφόρους επιστημονικούς κλάδους, θα μπορούσε, ενδεχομένως, να θεωρηθεί και ως η κατ’ εξοχήν «Εφαρμοσμένη Γεωμετρία». Έτσι, η διδασκαλία της Στερεομετρίας στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση είναι σημαντικό να αποσκοπεί στην αντίληψη και Μαθηματική θεώρηση του χώρου στον όποιον ζούμε, υπάρχουμε και δημιουργούμε. Στην Στερεομετρία, με την οποίαν κλείνει ο Ευκλείδης τα «Στοιχεία», βρίσκεται και το, κατά πολλούς, επιστέγασμα της Γεωμετρίας του: η απόδειξη της ύπαρξης των πέντε κανονικών πολυέδρων, (τετραέδρου, κύβου, οκταέδρου, δωδεκαέδρου και εικοσαέδρου). Τα εν λόγω σώματα, γνωστά ως «Πλατωνικά Στερεά», αποτελούνται από τρίγωνα, τετράγωνα και πεντάγωνα και η ύπαρξή τους πιστοποιείται με την δυνατότητα κατασκευής τους ως εγγραψίμων σε σφαίρα: οι ακμές καθενός στερεού εκφράζονται συναρτήσει της ακτίνας περιγεγραμμένης σφαίρας.

Η διδακτική προσέγγιση των παραπάνω, υποβοηθείται με τη χρήση της τεχνολογίας η οποία επιταχύνει μαθησιακές διαδικασίες και ωθεί τον μαθητή να εμπλακεί ενεργά στο μάθημα, να πειραματιστεί, να δημιουργήσει και να ελέγξει εικασίες. Προτείνεται, λοιπόν, οι πειραματισμοί σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας και οι κατασκευές να γίνονται –εκεί όπου υπάρχει προστιθέμενη διδακτική και μαθησιακή αξία και, βεβαίως, όταν είναι λυσιτελές– από τους ίδιους τους μαθητές, ώστε να καταστούν ικανοί να διατυπώνουν εικασίες και να διερευνούν υποθέσεις ακόμα και εκτός σχολικής τάξης.

Ειδικότερα, η Γεωμετρία της Α Λυκείου περιλαμβάνει τα ακόλουθα κεφάλαια.

Κεφάλαιο 1: Βασικές Αρχές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως Αξιωματικό Σύστημα

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται η απόκτηση μιας πρώτης αντίληψης για την ιστορική εξέλιξη της θεωρητικής Γεωμετρίας και για τη βεβαιότητα που εξασφαλίζει ο παραγωγικός συλλογισμός.

Κεφάλαιο 2: Τα Βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

Με αφορμή τα βασικά γεωμετρικά σχήματα, επιδιώκεται η εξοικείωση με τις διάφορες αποδεικτικές διαδικασίες.

Κεφάλαιο 3: Παράλληλες Ευθείες

Αναδεικνύεται ο θεμελιακός χαρακτήρας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και δημιουργούνται χρηστικά εργαλεία για την πραγμάτευση επομένων κεφαλαίων.

Κεφάλαιο 4: Τρίγωνα

Προβάλλεται η διαδικασία αναγωγής προβλημάτων ισότητας ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών σε προβλήματα ισότητας τριγώνων.

Κεφάλαιο 5: Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια

Αναγνωρίζεται η αυθαιρεσία που διέπει ορισμούς και στοιχίσεις στα Μαθηματικά: τη θέση δοθέντος ορισμού καταλαμβάνει κριτήριο που έχει αποδειχθεί με αυτόν οπότε, ανασυντάσσονται συλλογισμοί και προτάσεις. Επιπροσθέτως, προσφέρεται η δυνατότητα να διατυπωθούν αρκετές προτάσεις επιδεκτικές σε έλεγχο μέσω αντιπαραδειγμάτων.

Κεφάλαιο 6: Ευθείες και Επίπεδα στο χώρο

Πραγματοποιείται η μετάβαση από την Επιπεδομετρία στη Στερεομετρία με την αντιπαραβολή αξιωμάτων, ορισμών, εννοιών και ιδιοτήτων.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ **(σύνολο 50 ώρες)**	**ΣΤΟΧΟΙ** **Οι μαθητές να μπορούν να:**	**ΣΧΟΛΙΑ-ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ**
1. Βασικές Αρχές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως Αξιωματικό Σύστημα (2 ώρες)		
1.1. Εισαγωγή στους σκοπούς της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (1 ώρα)	1.1.1. Εξηγούν την ανάγκη αποδεικτικών διαδικασιών.	Μέσω ενδεικτικών δραστηριοτήτων που στηρίζονται σε γνώσεις προηγουμένων τάξεων και στις οποίες υπεισέρχονται σφάλματα μετρήσεων (π.χ. μέτρηση κατακορυφήν γωνιών, εύρεση αθροίσματος γωνιών τριγώνου ή τετραπλεύρου), οι μαθητές να διαπιστώσουν τους περιορισμούς των μετρήσεων που αποτελούν σύστοιχο χαρακτηριστικό της πρακτικής γεωμετρίας. Μέσω κατάλληλων ερωτημάτων οι μαθητές να διαπιστώσουν την αναγκαιότητα της αποδεικτικής διαδικασίας. Είναι αναγκαία η ανάδειξη της βεβαιότητας και της καθολικής γενίκευσης στην οποία οδηγεί η μαθηματική αποδεικτική διαδικασία. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ1 και Δ2.

1.2. Οι κατά Ευκλείδη Όροι, Κοινές Έννοιες, Αιτήματα, Προτάσεις και η μεταγραφή τους στη σύγχρονη επιστημολογία (1 ώρα)	1.2.1. Αναγνωρίζουν το ρόλο και την αναγκαιότητα των ορισμών και των αξιωμάτων για τη θεμελίωση της Γεωμετρίας.	Είναι χρήσιμο να αναδειχθεί η ιστορική εξέλιξη της γεωμετρίας μέχρι να αποκρυσταλλωθεί στην Ευκλείδεια μορφή της. Ο στόχος 1.2.1 χρειάζεται να υποστηρίζεται διαρκώς κατά τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.
2. Τα Βασικά Γεωμετρικά Σχήματα (4 ώρες)		
2.1. Σχεδίαση και συμβολισμοί βασικών γεωμετρικών σχημάτων (1 ώρα)	2.1.1. Σχεδιάζουν, ονομάζουν και ορίζουν τα βασικά γεωμετρικά σχήματα. 2.1.2. Χρησιμοποιούν τους συμβατικούς συμβολισμούς για να αναφερθούν σε γεωμετρικά σχήματα.	Η σχεδίαση των γεωμετρικών σχημάτων να υλοποιείται με κανόνα και διαβήτη και, βεβαίως, όταν υπάρχει δυνατότητα, με τα εργαλεία που προσφέρουν τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας.
2.2. Υποθέσεις και Συμπεράσματα (3 ώρες)	2.2.1. Εντοπίζουν τις υποθέσεις και τα συμπεράσματα θεωρημάτων, λημμάτων, πορισμάτων κ.λπ. 2.2.2. Αποδεικνύουν απλές προτάσεις χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ευθείας απόδειξης. 2.2.3. Ανατρέπουν εικασίες με χρήση αντιπαραδειγμάτων. 2.2.4. Σχηματίζουν και διαφοροποιούν αντίστροφες και αντιθετοαντίστροφες προτάσεων που έχουν υποθέσεις και συμπεράσματα.	Οι στόχοι της παραγράφου διατρέχουν όλη την ύλη που ακολουθεί. Θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν τα θεωρήματα: «Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες», «Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφήν της γωνίας», «Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες μεταξύ τους». Να δοθούν ενδεικτικές δραστηριότητες ώστε οι μαθητές να βρίσκουν αντιπαράδειγμα για την ανατροπή των αντιστρόφων ισχυρισμών. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ3. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν παραδείγματα και από άλλες περιοχές των μαθηματικών, όπως τη Θεωρία Αριθμών (π.χ. το άθροισμα αρτίων αριθμών είναι άρτιος) καθώς και παραδείγματα από την καθημερινότητα. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ4 και Δ5.
3. Παράλληλες ευθείες (8 ώρες)		

3.1. Το 5ο αίτημα του Ευκλείδη ή αξίωμα των παραλλήλων (1 ώρα)	3.1.1. Γνωρίζουν την ύπαρξη άλλων Γεωμετριών πλην της Ευκλειδείου.	Να παρατεθεί ιστορικό σημείωμα για τη σημασία του 5ου αιτήματος στη δημιουργία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας καθώς και τον διάλογο που αυτό προκάλεσε μέχρι τον 19ο αιώνα και οδήγησε στην μη Ευκλείδεια αντίληψη για την Γεωμετρία.
3.2. Θεωρήματα - κριτήρια παραλληλίας (3 ώρες)	3.2.1. Αποφαίνονται για την παραλληλία ή μη δύο ευθειών του επιπέδου από τις σχέσεις των γωνιών που σχηματίζουν αυτές όταν τέμνονται από Τρίτη.	Να αποδειχτεί ένα από τα θεωρήματα παραλληλίας και τα υπόλοιπα να προκύψουν ως πορίσματα.
3.3. Άθροισμα γωνιών τριγώνου (3 ώρες)	3.3.1. Χρησιμοποιούν το θεώρημα για το άθροισμα γωνιών τριγώνου, στην απόδειξη προτάσεων.	Να αποδειχτεί το θεώρημα για το άθροισμα γωνιών τριγώνου. Η ανισοτική σχέση μεταξύ εξωτερικής γωνίας τριγώνου και της απέναντι εσωτερικής να αποδειχθεί με χρήση του προηγουμένου θεωρήματος. Με βάση την παραπάνω ανισοτική σχέση να αποδειχτεί η μοναδικότητα της καθέτου προς ευθεία που φέρεται από σημείο εκτός αυτής.
	3.3.2. Αποδεικνύουν τον τύπο για το άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου.	Οι μαθητές να οδηγηθούν στην ανάγκη απόδειξης του τύπου για το άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου μέσα από διαδικασίες παρατήρησης, πειραματισμού και διατύπωσης εικασιών. Στις ασκήσεις να συμπεριληφθούν το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου και το ότι δεν υπάρχει κυρτό ν-γωνο με περισσότερες από 3 οξείες γωνίες. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ6 και Δ7.
3.4. Γωνίες με πλευρές παράλληλες - κάθετες (1 ώρα)	3.4.1. Αναγνωρίζουν γωνίες με πλευρές κάθετες ή παράλληλες.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ8.
4. Τρίγωνα (12 ώρες)		
4.1. Ορισμός ισότητας τριγώνων και κριτήρια ισότητας τριγώνων (3 ώρες)	4.1.1. Διακρίνουν τον ορισμό από τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.	Να διαμορφώσουν οι μαθητές κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων με βάση τα γενικά κριτήρια ισότητας.

	4.1.2. Διακρίνουν πότε σχέσεις μεταξύ πλευρών και γωνιών τριγώνων αποτελούν κριτήριο ισότητας αυτών και πότε όχι.	Να επισημανθεί ότι για την ισότητα τριγώνων αρκούν λιγότερες συγκρίσεις από τις έξι που απαιτεί ο ορισμός.
4.2. Προτάσεις στα ισοσκελή τρίγωνα (2 ώρες)	4.2.1. Αξιοποιούν σε ένα τρίγωνο την ταύτιση δύο εκ των στοιχείων του (διχοτόμος, ύψος, διάμεσος, μεσοκάθετος) ως ικανής και αναγκαίας συνθήκης, ώστε να είναι ισοσκελές.	Να γίνει ιστορική αναφορά στην απόδειξη του Ευκλείδη που περιέχεται στα «Στοιχεία» και στο μεσαιωνικό χαρακτηρισμό ως «pons asinorum» (γέφυρα του όνου). Να αποδειχθεί το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων το οποίο αναφέρεται στην υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά, καθώς δεν προκύπτει άμεσα από τα κριτήρια.
4.3. Γεωμετρικοί τόποι, η περίπτωση της διχοτόμου γωνίας και της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος (2 ώρες)	4.3.1. Κατασκευάζουν με κανόνα και διαβήτη τη διχοτόμο γωνίας και τη μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος. 4.3.2. Αξιοποιούν τις ιδιότητες της διχοτόμου γωνίας και της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος στην επίλυση προβλημάτων.	Με αφορμή τη διχοτόμο να υπάρξει ιστορικό σημείωμα για την αδυναμία τριχοτόμησης γωνίας με κανόνα και διαβήτη.
4.4. Ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα (2 ώρες)	4.4.1. Διαπιστώσουν την αναγκαιότητα της τριγωνικής ανισότητας στην κατασκευή τριγώνου.	Από τις τρεις προφανείς ανισότητες $α < β + γ$, $β < γ + α$ και $γ < α + β$, προκύπτει η ισοδύναμη με αυτές διπλή ανισότητα $\|β - γ\| < α < β + γ$. Να γίνει ιστορική αναφορά για την τριγωνική ανισότητα και την θέση των Επικουρείων φιλοσόφων. Επίσης να σημειωθεί η λειτουργικότητα της τριγωνικής ανισότητας στην κατασκευή τριγώνων: γνωρίζοντας τα μήκη τριών ευθυγράμμων τμημάτων μπορούμε να αποφανθούμε εάν υπάρχει τρίγωνο το οποίο έχει τα συγκεκριμένα ευθύγραμμα τμήματα ως πλευρές. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ9.

	4.4.2. Εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων τις ανισοτικές σχέσεις που διέπουν πλευρές και γωνίες τριγώνου.	Ως εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας, να διερευνηθούν οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων. Για την παραπάνω διερεύνηση προτείνεται η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ10 και Δ11.
4.5. Προτάσεις σε χορδές, τόξα, αποστήματα και εφαπτομένη κύκλου (3 ώρες)	4.5.1. α) Διχοτομούν τόξο και β) Κατασκευάζουν την εφαπτομένη κύκλου σε σημείο του με κανόνα και διαβήτη.	
5. Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια (18 ώρες)		
5.1. Παραλληλόγραμμα: ορισμός, ιδιότητες, κριτήρια (3 ώρες)	5.1.1. Διακρίνουν τον ορισμό από τις ιδιότητες παραλληλογράμμων και από τα κριτήρια που εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο. 5.1.2. Πιστοποιούν το ισοδύναμο μεταξύ δοθέντος ορισμού και ενός εκ των προηγουμένων κριτηρίων.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ12.
5.2. Ειδικά παραλληλόγραμμα: Ορθογώνιο, Ρόμβος, Τετράγωνο (3 ώρες)	5.2.1. Ταξινομούν τα παραλληλόγραμμα με βάση τις ιδιότητές τους. 5.2.2. Ελέγχουν με αντιπαραδείγματα την αλήθεια αντιστρόφων προτάσεων σχετικές με τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων. 5.2.3. Διαπιστώνουν συμμετρίες (κεντρικές, αξονικές) σε παραλληλόγραμμα.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ13.
5.3. Εφαρμογές των παραλληλογράμμων (5 ώρες)	5.3.1. Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων στην επίλυση προβλημάτων.	Να αποδειχθούν με τη βοήθεια των ιδιοτήτων και των κριτηρίων των παραλληλογράμμων οι προτάσεις που αναφέρονται: (α) στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου, (β) στην ειδική περίπτωση του θεωρήματος Θαλή, δηλαδή,

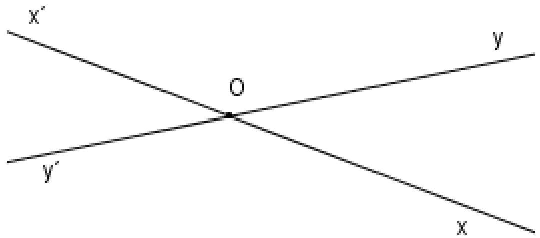
		να ορίζονται ίσα ευθύγραμμα τμήματα στις μη παράλληλες ευθείες και (γ) στη διάμεσο η οποία αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου και το πόρισμά της όταν μία γωνία του είναι 30^o. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ14.
5.4. Χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου: Έγκεντρο, Περίκεντρο, Ορθόκεντρο, Βαρύκεντρο (5 ώρες)	5.4.1. Εντοπίζουν τις θέσεις του περικέντρου και του ορθοκέντρου ανάλογα με το είδος του τριγώνου.	Η απόδειξη για το περίκεντρο μας οδηγεί στην απόδειξη για το ορθόκεντρο (το τρίγωνο που σχηματίζεται ενώνοντας τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου έχει τις μεσοκαθέτους του αρχικού ως ύψη). Να τονιστεί το σημαντικό της ύπαρξης εγκέντρου, περικέντρου, ορθοκέντρου, βαρυκέντρου: γενικώς, τρεις ευθείες, σε αντίθεση με τις δύο, δεν συντρέχουν, ενώ οι διχοτόμοι, οι μεσοκάθετοι, τα ύψη και οι διάμεσοι τριγώνου αποτελούν τριάδες ευθειών οι οποίες συντρέχουν. Μέσα από κατάλληλο πρόβλημα οι μαθητές να αναζητήσουν το σημείο που ισαπέχει από τρία σημεία, ώστε να ανακαλύψουν το περίκεντρο και στη συνέχεια να οδηγηθούν στη σχετική απόδειξη. Σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας οι μαθητές να προσδιορίσουν τις θέσεις του ορθόκεντρου και του περίκεντρου για τα διαφορετικά είδη τριγώνου και στη συνέχεια να σχεδιαστεί η ευθεία του Euler για την περίπτωση οξυγωνίου τριγώνου. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ15 και Δ16.
5.5. Τραπέζια (2 ώρες)	5.5.1. Αξιοποιούν την ιδιότητα της διαμέσου του τραπεζίου στην επίλυση προβλημάτων.	Να αποδειχθεί ότι: α) η διάμεσος τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ισούται με το ημιάθροισμά τους β) οι προσκείμενες στη βάση γωνίες ισοσκελούς τραπεζίου

		είναι ίσες. Να σχολιαστεί ότι ένα ισοσκελές τραπέζιο μπορεί να προκύψει ως εξής: σε ισοσκελές τρίγωνο από ένα σημείο μιας από τις ίσες πλευρές του, φέρουμε παράλληλη στη βάση.
6. Ευθείες και Επίπεδα στο χώρο (6 ώρες)		
6.1. Ευθείες και επίπεδα στο χώρο (3 ώρες)	6.1.1. Σχεδιάζουν τα βασικά στοιχεία του χώρου. 6.1.2. Αναγνωρίζουν σχετικές θέσεις ευθειών, επιπέδων, ευθειών και επιπέδων στο χώρο.	Να γίνει η μετάβαση από τις έννοιες της επίπεδης Γεωμετρίας σε αυτές της Γεωμετρίας του χώρου, για παράδειγμα: επίπεδη γωνία (σημείο, δυο ημιευθείες) και δίεδρη γωνία (ευθεία, δυο ημιεπίπεδα) ή ακόμα τετράγωνο στο επίπεδο και κύβος στο χώρο. Να τονιστεί η διαφορά μεταξύ παραλλήλων και ασυμβάτων ευθειών.
6.2. Θεωρήματα παραλληλίας - καθετότητας ευθειών και επιπέδων (3 ώρες)	6.2.1. Διακρίνουν: (α) παραλληλία ευθειών (β) παραλληλία ευθειών και επιπέδων (γ) παραλληλία επιπέδων. 6.2.2. Αναγνωρίζουν την καθετότητα: (α) ευθειών (β) επιπέδων (γ) ευθειών και επιπέδων. 6.2.3. Διαφοροποιούν: (α) τις κάθετες μεταξύ τους ευθείες από τις ορθογώνιες ευθείες και (β) την καθετότητα σε ευθεία του επιπέδου από την καθετότητα ευθείας στο επίπεδο.	Να αναγνωρίσουν το μεσοπαράλληλο επίπεδο ως γεωμετρικό τόπο, κατ’ αντιστοιχία με τη μεσοπαράλληλη δύο παραλλήλων ευθειών. Να προταθούν ασκήσεις οι οποίες ενισχύουν τη γεωμετρική εποπτεία. Να αποδειχθεί το κριτήριο καθετότητας ευθείας σε επίπεδο και το θεώρημα των τριών καθέτων. Να αναγνωρίσουν το μεσοκάθετο επίπεδο σε ευθύγραμμο τμήμα ως γεωμετρικό τόπο, κατ’ αντιστοιχία με την μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος. Να προταθούν ασκήσεις οι οποίες ενισχύουν τη γεωμετρική εποπτεία. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ17 και Δ18.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δ1 (Αντιστοιχεί στο στόχο 1.1.1)

Να πραγματοποιήσετε μέτρηση των ακόλουθων κατακορυφήν γωνιών.



Συγκρίνετε τα μέτρα των γωνιών που μετρήσατε με τη μέτρηση δύο συμμαθητών σας. Τι παρατηρείτε σε σχέση με τις μετρήσεις των συμμαθητών σας;

Δ2 (Αντιστοιχεί στο στόχο 1.1.1)

Πόσες ισότητες διαφορετικών κατακορυφήν γωνιών χρειάζονται, ώστε να μπορείτε να υποστηρίξετε ότι όλες οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους; Με ποιο τρόπο θα μπορούσατε να επιβεβαιώσετε ότι σε κάθε περίπτωση οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους;

Δ3 (Αντιστοιχεί στο στόχο 2.2.3)

Να καταγράψετε τον αντίστροφο ισχυρισμό των προτάσεων:

α) αν ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο, τότε είναι ισοσκελές και

β) αν δύο γωνίες είναι ορθές, τότε είναι ίσες και

να βρείτε ένα αντιπαράδειγμα για την ανατροπή τους.

Δ4 (Αντιστοιχεί στο στόχο 2.2.4)

Δίνεται η αληθής πρόταση: «αν δύο γωνίες είναι ορθές, τότε είναι ίσες». Ζητείται η διατύπωση της αντιθετοαντίστροφης και η πιστοποίηση της αλήθειάς της.

Δ5 (Αντιστοιχεί στο στόχο 2.2.4)

α) Δίνεται η αληθής πρόταση: «Αν ζω στην Ελλάδα, τότε ζω στην Ευρώπη». Να διατυπώσετε και να ελέγξετε ως προς την αλήθειά τους τις ακόλουθες προτάσεις:

- i) Αν ζω στην Ευρώπη, τότε ζω στην Ελλάδα.
- ii) Αν δεν ζω στην Ελλάδα, τότε δεν ζω στην Ευρώπη.
- iii) Αν δεν ζω στην Ευρώπη, τότε δεν ζω στην Ελλάδα.

β) Με αφορμή την ακόλουθη πρόταση: «Αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο τότε έχει δυο οξείες γωνίες», να διατυπώσετε αντίστοιχες προτάσεις με τις προτάσεις του ερωτήματος (α) και να πραγματοποιήσετε τους αντίστοιχους έλεγχους.

Δ6 (Αντιστοιχεί στο στόχο 3.3.2)

Σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας να κατασκευάσετε κυρτό πολύγωνο, να μετρήσετε τις γωνίες του και να βρείτε το άθροισμά του.

Μετακινείστε, τώρα, μία κορυφή του, έτσι ώστε το πολύγωνο να παραμένει κυρτό. Τι παρατηρείτε για το άθροισμα των γωνιών του.

Δ7 (Αντιστοιχεί στο στόχο 3.3.2)

Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα. Στη στήλη «Τρίγωνα» συμπληρώστε τον αριθμό των τριγώνων στα οποία χωρίζεται το πολύγωνο από διαγωνίους που άγονται από μία κορυφή του.

Αριθμός πλευρών	Τρίγωνα	Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου
4		
5		
6		
...		
ν		

Μπορείτε να προσδιορίσετε τον τύπο του αθροίσματος των γωνιών κυρτού ν-γώνου;

Δ8 (Αντιστοιχεί στο στόχο 3.4.1)

Σε ορθογώνιο τρίγωνο να φέρετε το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα και να εντοπίσετε ζεύγη ίσων γωνιών.

Δ9 (Αντιστοιχεί στο στόχο 4.4.1)

Να εξετάσετε αν κατασκευάζονται τρίγωνα με μήκη πλευρών τις τιμές των α, β, γ για τις περιπτώσεις του παρακάτω πίνακα:

α	β	γ
5	6	7
10	3	4
8	9	10
12	3	5

Δ10 (Αντιστοιχεί στο στόχο 4.4.2)

Αν δύο πλευρές τριγώνου έχουν μήκη 5 και 9:

α) δώστε ενδεικτικές τιμές για την τρίτη πλευρά.

β) βρείτε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές το μήκος της τρίτης πλευράς.

Δ11 (Αντιστοιχεί στο στόχο 4.4.2)

Δίνεται ευθεία ε και δύο σημεία Α, Β εκτός αυτής. Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ της ευθείας, για το οποίο:

α) το άθροισμα ΑΜ + ΒΜ γίνεται ελάχιστο και

β) η διαφορά ΑΜ - ΜΒ γίνεται μέγιστη

Να λύσετε το πρόβλημα στην περίπτωση που τα Α και Β βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας και στην περίπτωση που βρίσκονται προς την ίδια μεριά.

Υπάρχει σημείο Μ ώστε το άθροισμα να γίνει μέγιστο; Αιτιολογήστε.

Υπάρχει σημείο Μ ώστε η διαφορά να γίνει ελάχιστη; Αν ναι, ποιο;

Δ12 (Αντιστοιχεί στο στόχο 5.1.1)

Να επιλέξετε ένα από τα κριτήρια που καθιστούν ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο. Θεωρώντας το κριτήριο που επιλέξατε ως ορισμό να αποδείξετε τον παλιό ορισμό και τις ιδιότητες των παραλληλόγραμμων.

Δ13 (Αντιστοιχεί στο στόχο 5.2.1)

Δημιουργείστε διαγραμματική αναπαράσταση της ταξινομίας των παραλληλογράμμων (π.χ. με χρήση εννοιολογικού χάρτη, διαγράμματα Venn).

Σημείωση. Οι ταξινομήσεις, που αποτελούν θεμελιώδες χαρακτηριστικό όλων των επιστημών, έχουν πρόδρομο τον Αριστοτέλη. Ο Αριστοτέλης, δηλαδή, ήταν ο πρώτος που διατύπωσε μια γενική θεωρία ταξινομιών η οποία έμελλε να επηρεάσει καθοριστικά την μετέπειτα εξέλιξη της επιστήμης και γενικότερα το Δυτικό Πολιτισμό: οι κατηγοριοποιήσεις, π.χ., του Σουηδού Καρόλου Λινναίου (Carl von Linné, 1707-1778) για τα στοιχεία του φυσικού κόσμου έχουν σαφή Αριστοτελική δομή. Ο Αριστοτέλης, λοιπόν, εν πρώτοις, ομαδοποιεί ένα είδος αντικειμένων που έχουν κάτι κοινό μεταξύ τους και συναποτελούν το «Γένος» (Genus) και, εν συνεχεία, ασχολείται με τις υποκατηγορίες αυτού του «Γένους». Τις υποκατηγορίες αυτές τις αποκαλεί «Είδη» και σε αυτές εντάσσει αντικείμενα του «Γένους» τα οποία διακρίνονται από τα άλλα του «Γένους» με βάση κάποιο χαρακτηριστικό τους το οποίο το ονομάζει «Ειδοποιό Διαφορά» (Differentia Specifica): πᾶσα γὰρ εἰ δοποιὸς διαφορὰ μετὰ τοῦ γένους εἶ δος ποιεῖ (Τοπικά, 143b, 7-8).

Επίσης, ο Αριστοτέλης χρησιμοποιεί τον όρο «Προσεχές Γένος» (Genus Proximum) για να αναφερθεί στο αμέσως επόμενο σύνολο που περιέχει το «Γένος» το οποίον πραγματεύεται· κατ’ αναλογίαν, προκύπτει το «Προσεχές Είδος».

Επομένως, μια εφαρμογή της Αριστοτελικής ορολογίας στην ταξινόμηση των κυρτών τετραπλεύρων, θα αναφερθεί στο «Γένος» των κυρτών τετραπλεύρων, εντός του οποίου με «Ειδοποιό Διαφορά» το «απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες» θα εντοπίσει τα παραλληλόγραμμα, και με «Ειδοποιό Διαφορά» το «μία γωνία ορθή» τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Ακόμα, στην ίδια ταξινόμηση ως «Προσεχές Γένος» θα αναγνωριστούν τα κυρτά πολύγωνα και ως «Προσεχές Είδος» των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τα παραλληλόγραμμα.

Προφανώς, τα «Γένη» και τα «Είδη» οροθετούνται από τις ταξινομήσεις αυτές καθ’ αυτές: εάν, π.χ., επιχειρηθεί ταξινόμηση των παραλληλογράμμων, τότε τα παραλληλόγραμμα επέχουν θέση «Γένους» (και όχι «Είδους» όπως στην ταξινόμηση των κυρτών τετραπλεύρων), ενώ τα κυρτά τετράπλευρα θα αποτελούν το «Προσεχές Γένος» (και όχι το «Γένος» όπως στην ταξινόμηση των κυρτών τετραπλεύρων).

Δ14 (Αντιστοιχεί στο στόχο 5.3.1)

Να χωρίσετε με κανόνα και διαβήτη ευθύγραμμο τμήμα σε 3, 4 και 5 ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

Δ15 (Αντιστοιχεί στο στόχο 5.4.1)

α) i) Δίνονται δυο σημεία Α, Β. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από αυτά.

ii) Δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Β και Γ. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από αυτά.

β) Με τη βοήθεια ενός κέρματος να σχεδιάσετε έναν κύκλο. Βρείτε το κέντρο του κύκλου που σχεδιάσετε.

Δ16 (Αντιστοιχεί στο στόχο 5.4.1)

Να σχεδιάσετε σε ένα χαρτόνι ένα τρίγωνο και τις διαμέσους του. Κόψτε το χαρτόνι και προσπαθήστε να το ισορροπήσετε στηρίζοντας το στο στυλό σας. Σε ποια θέση πρέπει να τοποθετήσετε το στυλό σας ώστε να ισορροπεί το τρίγωνο.

Σχολιάστε την ορολογία «βαρύκεντρο» για το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου.

Δ17 (Αντιστοιχεί στους στόχους 6.1.2, 6.2.2)

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου που απέχουν ίσες αποστάσεις από:

α) δύο σημεία και

β) τρία σημεία.

Δ18 (Αντιστοιχεί στους στόχους 6.1.2, 6.2.2)

Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ σε ένα επίπεδο Π. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του χώρου που απέχουν ίσες αποστάσεις από τις πλευρές της γωνίας $x\hat{O}y$.

Β΄ Λυκείου, Άλγεβρα

Εισαγωγή

Η άλγεβρα αποτελεί το σκελετό και τη γλώσσα των μαθηματικών. Αυτό ισχύει τόσο σε επίπεδο μαθηματικής επιστήμης όσο και σε επίπεδο διδασκαλίας των μαθηματικών στο Λύκειο. Το Πρόγραμμα Σπουδών (ΠΣ) της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου αναπτύσσεται ως συνέχεια του ΠΣ της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου.

Παρουσιάζονται, καταρχάς μέσω μιας διαισθητικής προσέγγισης, και στη συνέχεια εισάγονται σε πιο «αυστηρό» μαθηματικό πλαίσιο σημαντικές, για τη μετέπειτα μαθηματική εξέλιξη των μαθητών, έννοιες όπως αυτή της τριγωνομετρικής συνάρτησης και εξίσωσης, της ακολουθίας, έννοιες της στατιστικής κ.α. Επιδιώκεται η εμβάθυνση στις έννοιες και τις σχέσεις που τις συνδέουν, δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη μαθηματική διερεύνηση, επιχειρηματολογία και αιτιολόγηση, και αναδεικνύεται η εφαρμογή των μαθηματικών στην ερμηνεία φαινομένων του πραγματικού κόσμου. Συνεχίζεται η προσπάθεια να αναδειχθεί ο ρόλος της απόδειξης ως ισχυρού τρόπου αποδοχής της αλήθειας ενός μαθηματικού ισχυρισμού. Παράλληλα, στο πλαίσιο της στατιστικής γίνεται προσπάθεια να αναπτυχθεί ο στοχαστικός, μη αιτιοκρατικός τρόπος σκέψης. Τα παραπάνω αποτελούν στοιχεία απαραίτητα τόσο σε άλλους κλάδους των μαθηματικών (πχ γεωμετρία, αναλυτική γεωμετρία, ανάλυση) όσο και σε άλλες επιστήμες (π.χ. Φυσική, Χημεία).

Κεντρικοί στόχοι που διατρέχουν το Πρόγραμμα Σπουδών είναι:

- η ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού, της ικανότητας παρακολούθησης και παραγωγής μαθηματικής επιχειρηματολογίας και απόδειξης,
- η ανάπτυξη της ικανότητας χρήσης της μαθηματικής γλώσσας (ορολογίας, συμβόλων κοκ) και των πολλαπλών αναπαραστάσεων (αριθμητικών, γραφικών, λεκτικών, συμβολικών), ως απαραίτητα μέσα ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης και επικοινωνίας,
- η ανάπτυξη της ικανότητας χρήσης των μαθηματικών εργαλείων («παραδοσιακών» και ψηφιακών).

Η επίτευξη των παραπάνω στόχων επιδιώκεται μέσω της επίλυσης προβλημάτων και της ενεργού εμπλοκής των μαθητών στη μαθηματική δραστηριότητα. Η επίλυση προβλημάτων, τόσο από τον πραγματικό κόσμο όσο και από τον κόσμο των μαθηματικών και των άλλων επιστημών, δίνει νόημα στη χρήση αλγεβρικών μεθόδων και αναδεικνύει την ισχύ τους στη μοντελοποίηση φαινομένων. Η εμπλοκή των μαθητών στη μαθηματική δραστηριότητα εκδηλώνεται με τη ενεργητική συμμετοχή τους στη μαθηματική συζήτηση στην τάξη, στη δημιουργία και έλεγχο εικασιών, στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος, στην ανάπτυξη διαφόρων τρόπων σκέψης (επαγωγική, παραγωγική), κ.α.

Η ευχέρεια στον αλγεβρικό λογισμό και η εννοιολογική κατανόηση είναι δύο σημαντικές διαδικασίες που πρέπει να αναπτύσσονται παράλληλα. Η άλγεβρα εμπεριέχει κυρίως την κατανόηση εννοιών, κάτι που πάντα προκαλούσε μεγάλες δυσκολίες αλλά και αποτελούσε μοχλό εξέλιξης, όπως φαίνεται από την ιστορία των μαθηματικών. Προτείνεται να αποφευχθεί η ακραία εξάσκηση σε ζητήματα τεχνικής.

Το πρόγραμμα σπουδών αποτελεί ένα «χάρτη πορείας» για τον εκπαιδευτικό, όπως εξάλλου ο οδηγός για τον εκπαιδευτικό και το σχολικό βιβλίο. Ο εκπαιδευτικός, ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της τάξης του, είναι εκείνος που θα κάνει τις καταλληλότερες επιλογές και όσον αφορά στις δραστηριότητες, και όσον αφορά στο βαθμό εμβάθυνσης στις έννοιες και τις διαδικασίες.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ **(σύνολο 75 ώρες)**	**ΣΤΟΧΟΙ** **Οι μαθητές να μπορούν να:**	**ΣΧΟΛΙΑ-ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ**

1. Τριγωνομετρία (14 ώρες)		
1.1. Τριγωνομετρικός κύκλος – Τριγωνομετρικοί αριθμοί τόξων / αριθμών (3 ώρες)	1.1.1. Χρησιμοποιούν το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης τόξων και γωνιών.	Να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην αντιστοίχηση των πραγματικών αριθμών με τα σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου, με βάση το μήκος του 2π, καθώς και στην περιοδικότητα αυτής της αντιστοίχησης. Επίσης, να τονιστεί η σύνδεση του μέτρου σε ακτίνια οποιασδήποτε γωνίας, που έχει κορυφή το κέντρο του τριγωνομετρικού κύκλου και αρχική πλευρά τον άξονα x΄x, με το μήκος του αντίστοιχου τόξου. Να γίνουν παραδείγματα στα οποία το μέτρο του τόξου εκφράζεται ως πολλαπλάσιο του π, αλλά και παραδείγματα στα οποία το μέτρο του τόξου εκφράζεται ως δεκαδικός αριθμός.
	1.1.2. Μεταφράζουν στο νέο πλαίσιο - των ακτινίων - όσα ήδη γνωρίζουν για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς.	Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ1, Δ2.
1.2. Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο (2 ώρες)	1.2.1. Χρησιμοποιούν τον τριγωνομετρικό κύκλο για την αναγωγή του υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε τόξου σε υπολογισμό τριγωνομετρικών αριθμών τόξου x με $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ Διατυπώνουν και χρησιμοποιούν τους σχετικούς τύπους.	Να γίνουν πολλά παραδείγματα, στα οποία η αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο να γίνεται με χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου, ώστε να αποφευχθεί η μηχανιστική απομνημόνευση των τύπων.
1.3. Τριγωνομετρικές εξισώσεις (4 ώρες)	1.3.1. Επιλύουν τριγωνομετρικές εξισώσεις της μορφής ημx=α, συνx=α , εφx=α, σφx=α με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου. Καταλήγουν στους γενικούς τύπους των λύσεων.	Είναι σημαντικό οι μαθητές να οδηγηθούν στην ανακάλυψη των γενικών τύπων, καθώς και να μπορούν να τοποθετήσουν τις λύσεις πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. Στη διεύθυνση: http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5141 μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με την εξίσωση ημx = α.

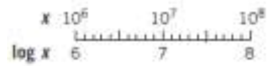
	1.3.2. Χρησιμοποιούν τους γενικούς τύπους των λύσεων για την επίλυση εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις της παραπάνω μορφής.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ3.
1.4. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις (5 ώρες)	1.4.1. Αναγνωρίζουν την περιοδικότητα ως βασικό χαρακτηριστικό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.	Προτείνεται η εισαγωγή στην περιοδικότητα να γίνει μέσα από παραδείγματα περιοδικών φαινομένων. Στα παραδείγματα των περιοδικών συναρτήσεων με τα οποία θα ασχοληθούμε εδώ, θα υπάρχει ένας ελάχιστος θετικός αριθμός Τ, ώστε να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του ορισμού. Αυτός ο ελάχιστος θετικός θα ονομάζεται περίοδος της συνάρτησης. Στη διεύθυνση: http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/11126 μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με τη μελέτη ενός περιοδικού φαινομένου.
	1.4.2. Μελετούν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και χαράσσουν τις γραφικές τους παραστάσεις.	Για τη χάραξη των γραφικών παραστάσεων προτείνεται η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ4.
	1.4.3. Ερμηνεύουν στο πλαίσιο των τριγωνομετρικών συναρτήσεων τις λύσεις τριγωνομετρικών εξισώσεων.	
	1.4.4. Μελετούν συναρτήσεις της μορφής f(x)=ρημ(ωx)+β, g(x)=ρσυν(ωx)+β, (όπου ρ, β, $\omega \in \mathbb{R}$) αναγνωρίζοντας το ρόλο των παραμέτρων, και χαράσσουν τη γραφική τους παράσταση.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ5.
2. Πολυωνυμικές και ρητές εξισώσεις και ανισώσεις (15 ώρες)		
2.1. Πολυωνυμικές και ρητές Συναρτήσεις (4 ώρες)	2.1.1. Αναγνωρίζουν τις πολυωνυμικές και τις ρητές συναρτήσεις.	Ορίζονται οι πολυωνυμικές συναρτήσεις και συνδέονται με τα ήδη γνωστά χαρακτηριστικά των πολυωνύμων (πχ. βαθμός, συντελεστές, ρίζες). Η σημασία των πολυωνυμικών συναρτήσεων αναδεικνύεται και στη μοντελοποίηση

		καταστάσεων και φαινομένων. Στις ρητές συναρτήσεις γίνεται φανερή η ανάγκη εύρεσης του πεδίου ορισμού. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ6.
	2.1.2. Μέσω της γραφικής παράστασης διερευνούν συγκεκριμένες πολυωνυμικές συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες.	Η χρήση λογισμικού διευκολύνει τη χάραξη γραφικών παραστάσεων. Συναρτήσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν είναι οι: $f(x)=x^3$, $f(x)=-x^3$, $f(x)=x^3 -3x$, $f(x)=x^4-2x^2$, $f(x)=x^3-3x^2-9x+11$. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ6,Δ7, Δ8,Δ9.
	2.1.3. Εντοπίζουν λύσεις εξισώσεων της μορφής f(x)=0 και f(x)=g(x) και ανισώσεων της μορφής f(x)>0 και f(x)>g(x) μέσω γραφικών παραστάσεων.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ9.
2.2. Πολυωνυμικές και ρητές εξισώσεις (5 ώρες)	2.2.1. Επιλύουν πολυωνυμικές εξισώσεις και απλές ρητές εξισώσεις με παραγοντοποίηση.	Στην αλγεβρική επίλυση εξισώσεων δίνεται έμφαση στο ρόλο της παραγοντοποίησης, και όχι στην ανάπτυξη πολύπλοκων τεχνικών παραγοντοποίησης. Είναι σημαντικό να αναδειχθεί η σύνδεση των πρωτοβάθμιων παραγόντων ενός πολυωνύμου με τις ρίζες του πολυωνύμου. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ11.
	2.2.2. Συνδέουν την εξίσωση με τη γραφική παράσταση μιας ή δύο συναρτήσεων.	Είναι σημαντικό να συνδέεται η λύση της εξίσωσης με τις τετμημένες των σημείων τομής μιας συνάρτησης με τον άξονα, όσο και με τις τετμημένες των σημείων τομής δυο συναρτήσεων. Στη διεύθυνση: http://photodentro.edu.gr/lor/handle/8521/1876?locale=en μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με τη σύνδεση εξισώσεων και γραφικών παραστάσεων.
	2.2.3. Επιλύουν προβλήματα που μοντελοποιούνται με πολυωνυμικές ή και ρητές εξισώσεις.	Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ10, Δ11, Δ12.

	2.2.4. Βρίσκουν ρίζα πολυωνυμικής συνάρτησης με προσέγγιση (μέσω διαισθητικής κατανόησης του θεωρήματος Bolzano).	Η διαδικασία διαδοχικών προσεγγίσεων μιας ρίζας είναι σημαντική τόσο γιατί αντιμετωπίζονται περισσότερες περιπτώσεις εξισώσεων, όσο και γιατί συνδέει τις αριθμητικές μεθόδους με τη γραφική αναπαράσταση. Χρησιμοποιείται επίσης σε εφαρμοσμένες επιστήμες και μάλιστα όταν δεν έχουμε αλγεβρικές μεθόδους επίλυσης. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ13.
2.3. Πολυωνυμικές και ρητές ανισώσεις (4 ώρες)	2.3.1. Επιλύουν πολυωνυμικές και ρητές ανισώσεις με παραγοντοποίηση. 2.3.2. Συνδέουν την ανίσωση με τη γραφική παράσταση μιας ή δύο συναρτήσεων. 2.3.3. Επιλύουν προβλήματα που μοντελοποιούνται με πολυωνυμικές ή και ρητές ανισώσεις.	Είναι σημαντικό η λύση της ανίσωσης να συνδέεται με το πρόσημο των τιμών της αντίστοιχης πολυωνυμικής συνάρτησης. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ12.
2.4. Εξισώσεις με ριζικά (2 ώρες)	2.4.1. Λύνουν απλές εξισώσεις με ριζικά.	Η επίλυση εξισώσεων με ριζικά να περιοριστεί σε απλές μορφές. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ14.
3. Πρόοδοι (12 ώρες)		
3.1. Ακολουθίες (2 ώρες)	3.1.1. Αναγνωρίζουν την ακολουθία ως αντιστοιχία των φυσικών στους πραγματικούς αριθμούς και χρησιμοποιούν τον κατάλληλο συμβολισμό. 3.1.2. Υπολογίζουν όρους ακολουθίας όταν δίνεται ο γενικός ή ο αναδρομικός τύπος.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ15.
3.2. Αριθμητική πρόοδος (4 ώρες)	3.2.1. Αναγνωρίζουν ακολουθίες με σταθερή διαφορά διαδοχικών όρων και ορίζουν την αριθμητική πρόοδο. 3.2.2. Υπολογίζουν το ν-οστό όρο και το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ16. Μέσα από δραστηριότητες καταλήγουν στους τύπους του ν-οστού όρου και του αθροίσματος των ν πρώτων όρων της

	3.2.3. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση της αριθμητικής προόδου.	αριθμητικής προόδου. Είναι σημαντικό οι μαθητές να εμπλακούν στη διαδικασία απόδειξης των τύπων. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ16.
3.3. Γεωμετρική πρόοδος (6 ώρες)	3.3.1. Αναγνωρίζουν ακολουθίες με σταθερό λόγο διαδοχικών όρων και ορίζουν τη γεωμετρική πρόοδο. 3.3.2. Υπολογίζουν το ν-οστό όρο και το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου.	Μέσα από δραστηριότητες καταλήγουν στους τύπους του ν-οστού όρου και του αθροίσματος των ν πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου. Είναι σημαντικό οι μαθητές να εμπλακούν στη διαδικασία απόδειξης των τύπων. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ17, Δ18.
	3.3.3. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση της γεωμετρικής προόδου.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ19.
4. Εκθετικές συναρτήσεις και Λογάριθμοι (14 ώρες)		
4.1. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών με εκθέτη πραγματικό αριθμό (3 ώρες)	4.1.1. Επεκτείνουν την έννοια της δύναμης πραγματικού αριθμού και αποδίδουν νόημα στην έννοια της δύναμης με ρητό εκθέτη $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, $\alpha > 0$.	Να επισημανθεί ότι η επέκταση της δύναμης με ακέραιο εκθέτη σε δύναμη με ρητό εκθέτη γίνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να διατηρούνται οι ιδιότητες των δυνάμεων. Η εισαγωγή της έννοιας να γίνει μέσα από αριθμητικά παραδείγματα. Μπορούν να συζητηθούν τα προβλήματα που θα προέκυπταν αν δεν υπήρχε η απαίτηση για θετική βάση. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ20, Δ21.
	4.1.2. Υπολογίζουν αριθμητικές παραστάσεις και απλοποιούν αλγεβρικές εκφράσεις που περιέχουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ22.
	4.1.3. Αποδίδουν νόημα στην έννοια της δύναμης θετικού αριθμού με άρρητο εκθέτη.	Η απόδοση του νοήματος σχετίζεται με την ύπαρξη και τη θέση του αριθμού που εκφράζει η δύναμη στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Προτείνεται να γίνει με τη βοήθεια κατάλληλου αριθμητικού παραδείγματος και να χρησιμοποιηθούν οι ρητές προσεγγίσεις του άρρητου εκθέτη. Για τις αριθμητικές προσεγγίσεις να χρησιμοποιηθεί αριθμομηχανή.

4.2. Εκθετική συνάρτηση (6 ώρες)	4.2.1. Αναγνωρίζουν την εκθετική συνάρτηση $f(x)=α^x$ (α>0 και α≠1) και συνδέουν τις αναπαραστάσεις της (πίνακας τιμών, γραφική παράσταση, τύπος).	Προτείνεται η εισαγωγή στην έννοια της εκθετικής συνάρτησης να γίνει μέσω προβλήματος. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ23.
	4.2.2. Μελετούν, μέσω της γραφικής παράστασης, συγκεκριμένες συναρτήσεις της μορφής $f(x)=α^x$ (α>0 και α≠1), γενικεύον τα συμπεράσματά τους και τα εκφράζουν συμβολικά.	Μέσω της γραφικής παράστασης να συζητηθούν και να περιγραφούν το πεδίο ορισμού, η μονοτονία και το σύνολο τιμών. Να προσεγγιστεί διαισθητικά η έννοια της ασύμπτωτης. Μέσω της παρατήρησης 2 < e < 3 να συσχετιστεί η γραφική παράσταση της $f(x) = e^x$ με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) =2^x$ και $h(x) = 3^x$ και να προσδιοριστούν οι ομοιότητές τους. Στη διεύθυνση: http://photodentro.edu.gr/lor/handle/8521/5238 μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με τη μελέτη της εκθετικής συνάρτησης. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ24.
	4.2.3. Κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, που προκύπτουν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = a^x$ (a>0 και a≠1).	Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ24, Δ25.
	4.2.4. Συγκρίνουν τον τρόπο μεταβολής των τιμών συναρτήσεων της μορφής $y=αx$, $y=x^α$ και $y=α^x$ με x>0, για συγκεκριμένες τιμές του α.	Μπορεί να χρησιμοποιηθούν κατάλληλα προβλήματα για να γίνει σύγκριση μεταξύ των συναρτήσεων $f(x) =2x$, $g(x)=x^2$ και $h(x)= 2^x$.
	4.2.5. Επιλύουν απλές εκθετικές εξισώσεις και ανισώσεις.	
	4.2.6. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση της εκθετικής συνάρτησης.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ26.
4.3. Λογάριθμοι (5 ώρες)	4.3.1. Αναγνωρίζουν το λογάριθμο του αριθμού θ>0 με βάση α>0 ως τη μοναδική λύση της εκθετικής εξίσωσης $α^x=θ$. Αναφέρουν και αιτιολογούν τις βασικές σχέσεις που προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του	Προτείνεται η εισαγωγή στους λογαρίθμους να γίνει μέσω της αντιστοίχισης μιας γεωμετρικής προόδου, π.χ. της 1, 2, 2^2, 2^3, … , με την αριθμητική πρόοδο των αντίστοιχων εκθετών. Με τη βοήθεια αυτού του παραδείγματος, να επισημανθεί η σημασία

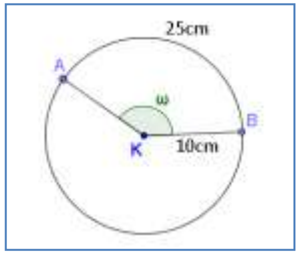
	λογαρίθμου.	των λογαρίθμων στην απλοποίηση των υπολογισμών από την αρχή της ιστορίας τους μέχρι την εφεύρεση των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Ο λογάριθμος να ερμηνευθεί γραφικά ως η τετμημένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=α^x$ με την ευθεία $y=θ$. Να δοθεί έμφαση στην ισοδυναμία των εξισώσεων $α^x = y$ και $\log_α y = x$. Να συζητηθεί η χρησιμότητά των λογαρίθμων με βάση το 10 στους αριθμητικούς υπολογισμούς και να συσχετισθεί με τη χρήση του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.  Προτείνεται στις εφαρμογές να χρησιμοποιούνται κυρίως οι φυσικοί και οι δεκαδικοί λογάριθμοι.
	4.3.2. Εφαρμόζουν ιδιότητες λογαρίθμων.	Είναι σημαντικό οι μαθητές να εμπλακούν σε διαδικασίες απόδειξης των ιδιοτήτων: $\log_α(xy) = \log_α x + \log_α y$, $\log_α(\frac{x}{y}) = \log_α x - \log_α y$, $\log_α(x^κ) = κ\log_α x$. Να συζητηθεί ο τύπος αλλαγής βάσης $\log_α θ = \frac{\ln θ}{\ln a}$.
	4.3.3. Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες λογαρίθμων στην επίλυση προβλημάτων.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ27.
5. Στατιστική (20 ώρες)		
5.1. Δείγμα – Δειγματοληψία	5.1.1. Αναγνωρίζουν και κατηγοριοποιούν τις μεταβλητές σε	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ28.

(1 ώρα)	ποιοτικές και ποσοτικές (διακριτές και συνεχείς). 5.1.2. Αναγνωρίζουν την αναγκαιότητα χρήσης δειγμάτων κατάλληλης σύνθεσης για την εξαγωγή έγκυρων συμπερασμάτων και αξιολογούν μεθόδους συλλογής δεδομένων.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ28.
5.2. Πίνακες Συχνοτήτων (4 ώρες)	5.2.1. Οργανώνουν και παρουσιάζουν τα δεδομένα με πίνακες συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων ~~και~~ αθροιστικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων 5.2.2. Ομαδοποιούν παρατηρήσεις σε κλάσεις ίσου πλάτους. 5.2.3. Εξάγουν πληροφορίες από πίνακες συχνοτήτων.	Προτείνεται η χρήση αριθμομηχανής στη διδασκαλία της στατιστικής. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ29. Να χρησιμοποιηθούν παραδείγματα από πίνακες συχνοτήτων όλων των ειδών.
5.3. Γραφικές μέθοδοι παρουσίασης (4 ώρες)	5.3.1. Οργανώνουν και παρουσιάζουν τα δεδομένα με κατάλληλες γραφικές μεθόδους ανάλογα με το είδος της μεταβλητής που εξετάζουν. 5.3.2. Εξάγουν πληροφορίες από γραφικές παραστάσεις δεδομένων.	Ως γραφικές μέθοδοι θα χρησιμοποιηθούν το ραβδόγραμμα, το κυκλικό διάγραμμα, το σημειόγραμμα, το φυλόγραμμα, το διάγραμμα συχνοτήτων, το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων. Οι ποσοτικές μεταβλητές μπορούν να παρασταθούν με τη βοήθεια της τεχνολογίας με σημειογράμματα όταν το πλήθος των δεδομένων δεν είναι μεγάλο. Είναι σημαντικό οι μαθητές να εξετάζουν διαφορετικές γραφικές παραστάσεις δεδομένων. Προτείνεται η χρήση νέων τεχνολογιών για την επεξεργασία/παρουσίαση σχετικών δραστηριοτήτων. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ29.
5.4. Μέτρα Θέσης και Μεταβλητότητας (7 ώρες)	5.4.1. Υπολογίζουν μέτρα θέσης (επικρατούσα τιμή, μέση τιμή, διάμεσος, τεταρτημόρια)και τα προσδιορίζουν στις γραφικές παραστάσεις των δεδομένων.	Επειδή συνήθως στη στατιστική ασχολούμαστε με μεγάλο πλήθος δεδομένων είναι απαραίτητη η ομαδοποίηση. Αυτό μπορεί να αναδειχθεί με παραδείγματα και ρήση κατάλληλου

		λογισμικού, χωρίς αυτό να συμβεί σε βάρος άλλων στόχων. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ29.
	5.4.2. Εκτιμούν μέτρα θέσης από γραφικές παραστάσεις δεδομένων.	
	5.4.3. Υπολογίζουν μέτρα μεταβλητότητας (εύρος, μέση απόλυτη απόκλιση, διακύμανση, τυπική απόκλιση, ενδοτεταρτομοριακό εύρος).	Για τη διακύμανση να δοθεί και να χρησιμοποιηθεί ο τύπος του ορισμού $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{\iota=1}^{\nu}\nu_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2$, όπου x_i.οι τιμές της μεταβλητής Χ. Προτείνεται η χρήση αριθμομηχανής ή να δίνονται από τον διδάσκοντα τα αθροίσματα των τετραγώνων των αποκλίσεων από την μέση τιμή, ή στην περίπτωση της μέσης τιμής το άθροισμα των τιμών των παρατηρήσεων, αφού σκοπός της στατιστικής είναι η ερμηνεία των δεδομένων, των μέτρων θέσης και μεταβλητότητας και όχι οι αριθμητικοί υπολογισμοί.
	5.4.4. Διερευνούν την επίδραση ακραίων τιμών στα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας και εξάγουν συμπεράσματα.	
	5.4.5. Συγκρίνουν ομάδες δεδομένων και εξάγουν συμπεράσματα με βάση τα μέτρα θέσης (μέση τιμή) και μεταβλητότητας (μέση απόλυτη απόκλιση, διακύμανση, τυπική απόκλιση, συντελεστής μεταβλητότητας).	
5.5. Θηκόγραμμα (4 ώρες)	5.5.1. Κατασκευάζουν το θηκόγραμμα και το χρησιμοποιούν για να ερμηνεύσουν χαρακτηριστικά των δεδομένων ενός δείγματος (συμμετρία – ασυμμετρία, απομακρυσμένες τιμές).	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ29.
	5.5.2. Αντιστοιχούν θηκογράμματα σε άλλες γραφικές	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ29.

	παραστάσεις των δεδομένων.	
	5.5.3. Συγκρίνουν ομάδες δεδομένων και εξάγουν συμπεράσματα βασιζόμενοι στις πληροφορίες που αντλούν από τα θηκογράμματα και τα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας που σχετίζονται με αυτό.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ30.

Ενδεικτικές δραστηριότητες



Δ1 (αντιστοιχεί στους στόχους 1.1.1, 1.1.2)

Δίνεται ο κύκλος του σχήματος με κέντρο Κ και ακτίνα 10cm. Επίσης δίνεται το τόξο ΑΒ με μήκος 25 cm και αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω.

α) Να βρείτε το μέτρο της ω σε rad.

β) Να δικαιολογήσετε ότι το συνημίτονο της γωνίας ω είναι αρνητικό.

Δ2 (αντιστοιχεί στους στόχους 1.1.1, 1.1.2)

Δίνεται γωνία φ rad όπου $2 < \varphi < 3$. Αν $\sigma\upsilon\nu 2\varphi = 0{,}64$, τότε:

α) Να βρείτε το συνημίτονο και το ημίτονο της γωνίας φ.

β) Να σχεδιάσετε το τόξο φ ακτινίων πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Δ3 (αντιστοιχεί στο στόχο 1.3.1)

α) Δίνεται γωνία ω (σε rad), με $0 \le \omega < 2\pi$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$. Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, να εξηγήσετε γιατί είναι μοναδική και να βρείτε το μέτρο της.

β) Να βρείτε όλες τις γωνίες φ με $0 \le \varphi < 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση $\eta\mu\varphi = \frac{1}{2}$ και να τις σχεδιάσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

γ) Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης ημx = $\eta\mu x = \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ4 (αντιστοιχεί στο στόχο 1.4.2)

Μία ρόδα ακτίνας 1 περιστρέφεται με φορά αντίθετη από αυτήν των δεικτών του ρολογιού έτσι ώστε, κάθε σημείο της περιφέρειάς της, να διαγράφει σε ένα δευτερόλεπτο τόξο ενός ακτινίου. Τοποθετούμε τη ρόδα σε ένα σύστημα αξόνων με αρχή στο κέντρο της Ο και θεωρούμε ένα σημείο της Ρ, το οποίο τη χρονική στιγμή 0 βρίσκεται στο σημείο (1,0).

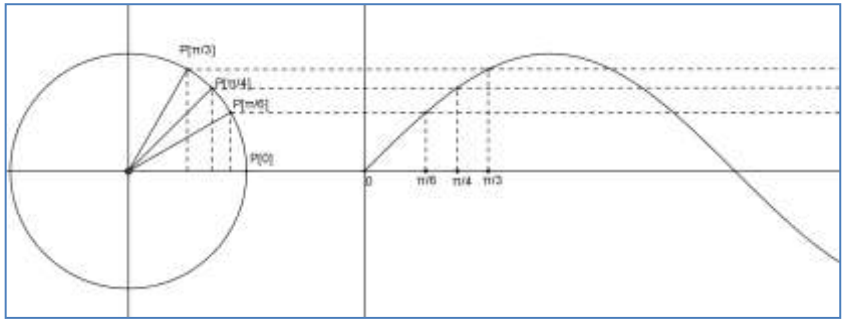
α) Να εξηγήσετε γιατί, το ύψος του σημείου Ρ σε σχέση με τον άξονα x'x κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), $t \ge 0$ δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \eta\mu t$, $t \ge 0$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(t) στο διάστημα $[0, 4\pi]$.

γ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές t με $0 \le t \le 4\pi$ κατά τις οποίες το σημείο Ρ βρίσκεται στο μεγαλύτερο και στο μικρότερο δυνατό ύψος.

δ) Να προσδιορίσετε τα χρονικά διαστήματα μεταξύ 0 και 4π sec κατά τα οποία το ύψος του σημείου Ρ είναι μεγαλύτερο του 0,5.

ε) Θεωρούμε τώρα το σημείο Κ της ρόδας, το οποίο τη χρονική στιγμή 0 βρίσκεται στη θέση (0,1). Να δείξετε ότι το ύψος του σημείου Κ κάθε χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση g(t) = συνt, $t \geq 0$.



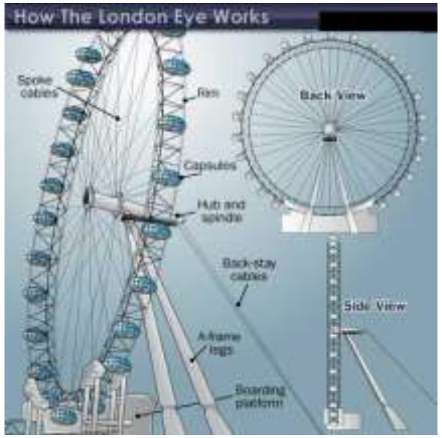
Δ5 (αντιστοιχεί στο στόχο 1.4.4)

Το London Eye είναι μία τεράστια ρόδα λούνα-παρκ δίπλα στον Τάμεση, η οποία προσφέρει πανοραμική θέα στο Λονδίνο. Η ρόδα έχει ακτίνα 60m, το χαμηλότερο σημείο της βρίσκεται σε ύψος 15m και ολοκληρώνει μία περιστροφή σε 30 min. Υποθέτουμε ότι η ρόδα κάνει 3 συνεχόμενες περιστροφές και μετά σταματάει.

α) Να ορίσετε μία συνάρτηση f που να δίνει, για κάθε χρονική στιγμή t (σε min) με $0 \leq t \leq 90$, το ύψος ενός κουβούκλιου (Α), το οποίο τη χρονική στιγμή 0 βρίσκεται στο ύψος του κέντρου της ρόδας και αρχίζει να κινείται με κατεύθυνση προς τα πάνω.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

γ) Να προσδιορίσετε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το ύψος του κουβούκλιου Α ξεπερνάει τα 105 m.



Δ6 (αντιστοιχεί στους στόχους 2.1.1, 2.1.2)

Από ένα χαρτόνι διαστάσεων 20×30 εκατοστών κόβουμε τετράγωνα πλευράς x (όπως φαίνεται στο σχήμα) με σκοπό να κατασκευάσουμε ένα κουτί ανοικτό από πάνω.

α) Να βρείτε μια συνάρτηση που να εκφράζει τον όγκο του κουτιού. Τι τιμές μπορεί να πάρει το x;

β) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι όσο αυξάνεται το x, μειώνεται ο όγκος. Να φτιάξετε ένα πίνακα τιμών για να διαπιστώσετε αν ο Γιάννης έχει δίκιο.

γ) Να βρείτε (με προσέγγιση) πόσο πρέπει να είναι το x ώστε το κουτί να έχει το μέγιστο όγκο.

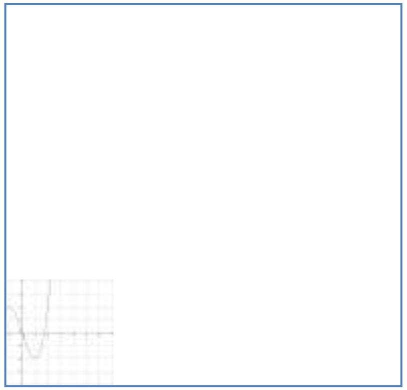
Δ7 (αντιστοιχεί στο στόχο 2.1.2)

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^3-3x$ και $g(x)=x^4-2x^2$ χρησιμοποιώντας κάποιο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Παρατηρώντας το σχήμα,

α) να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των f και g.

β) Είναι κάποια συνάρτηση άρτια ή περιττή;

γ) Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς g(–2), g(–0,5), g(0), g(1), g(1,5).



$f(x)=x^3-3x$

$g(x)=x^4-2x^2$

Δ8 (αντιστοιχεί στο στόχο 2.1.2)

Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0,3] και γνησίως φθίνουσα στο $[3,+\infty)$:

Α) Αν η f είναι άρτια:

α) Να χαράξετε μια γραφική παράσταση που θα μπορούσε να έχει η f, β) Τι συμπέρασμα βγάζετε για τη μονοτονία της στα διαστήματα $[-3,0]$ και $(-\infty,-3]$); Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

Β) Να απαντήσετε στα ίδια ερωτήματα, αν η f είναι περιττή συνάρτηση. Είναι δυνατόν η συνάρτηση f να είναι περιττή και να ισχύει $f(0)\neq 0$;»

Δ9 (αντιστοιχεί στους στόχους 2.1.2, 2.1.3)

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{x^2+1}{2x}$ και την ευθεία $y=\frac{1}{2}x$ χρησιμοποιώντας λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Παρατηρώντας το σχήμα,

α) να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

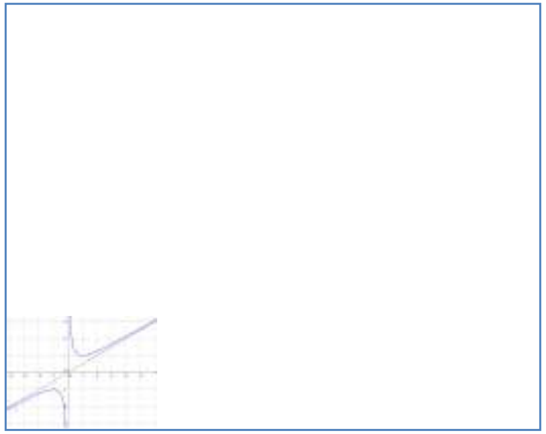
β) να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

γ) να βρείτε από τη γραφική παράσταση (κατά προσέγγιση) τις λύσεις της εξίσωσης f(x) = 2. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

δ) να εξετάσετε για ποιες τιμές του c η εξίσωση f(x) = c έχει λύσεις και πόσες. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ε) να εξετάσετε για ποιες τιμές του α η ευθεία y = αx τέμνει τη γραφική παράσταση της f.

στ) να βρείτε γραφικά και αλγεβρικά τις λύσεις της ανίσωσης $\frac{x^2+1}{2x}>\frac{1}{2}$



$$f(x)=\frac{x^2+1}{2x}$$

Δ10 (αντιστοιχεί στο στόχο 2.2.3)

Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει μικρά δοχεία των 120ml για χυμούς φρούτων. Το τμήμα σχεδιασμού του εργοστασίου έλαβε δυο παραγγελίες: Ο πρώτος πελάτης θέλει κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις που διαφέρουν κατά ένα, ο δεύτερος πελάτης θέλει κυλινδρικά τενεκεδάκια που έχουν ύψος(υ) 10cm μεγαλύτερο από το μήκος της ακτίνας (ρ) της βάσης (ο όγκος ενός κυλίνδρου δίνεται από τη σχέση V = πρ^{2}υ).

α) Να προσδιορίσετε τις διαστάσεις του κουτιού.

β) Να προσδιορίσετε τις διαστάσεις του κυλινδρικού δοχείου.

Δ11 (αντιστοιχεί στους στόχους 2.2.1, 2.2.3)

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3+2x^2-9x-18$ με τους άξονες, χωρίς να την σχεδιάσετε.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=2x^5-3x^4$ και $g(x)=2x^3-3x^2$ χωρίς να τις σχεδιάσετε.

Δ12 (αντιστοιχεί στους στόχους 2.2.3, 2.3.3)

Μια βιομηχανία έχει υπολογίσει ότι για την ημερήσια παραγωγή x μονάδων από ένα προϊόν έχει κόστος $K(x)=-2x^2+120x+100$ χιλιάδες ευρώ, ενώ η πώληση αυτών των x μονάδων της αποφέρει έσοδα $E(x)=x^3-x^2+20x$ χιλιάδες ευρώ. Η βιομηχανία μπορεί να παράξει μέχρι 20 μονάδες αυτού του προϊόντος καθημερινά.

α) Ποια ημερήσια παραγωγή δίνει έσοδα 20.000 ευρώ;

β) Πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία την ημέρα για να έχει κέρδος;

Δ13 (αντιστοιχεί στο στόχο 2.2.4)

Να εξετάσετε αν η εξίσωση $x^3 + 2x - 2 = 0$ έχει ρίζα μεταξύ των αριθμών 0 και 1. Να προσδιορίσετε αυτή τη ρίζα με προσέγγιση εκατοστού, χρησιμοποιώντας υπολογιστή τσέπης. Μπορείτε με τον ίδιο τρόπο να διαπιστώσετε αν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης μεταξύ των αριθμών 1 και 2;

Δ14 (αντιστοιχεί στο στόχο 2.4.1)

α) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x+3}=x+1$ (E_1).

β) Να λύσετε την εξίσωση $x+3=(x+1)^2$ (E_2)

γ) Να εξηγήσετε γιατί η E_1 και η E_2 δεν έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις, αν και η E_2 προκύπτει από την E_1 αν υψώσουμε και τα δύο μέλη της στο τετράγωνο.

δ) Να λύσετε γραφικά τις εξισώσεις του α) και του β) ερωτήματος.

Δ15 (αντιστοιχεί στο στόχο 3.1.1)

Η ακολουθία 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,… ονομάζεται ακολουθία Fibonacci (Leonardo di Pisa (Fibonacci), 1175-1250).

α) Ας αντιστοιχίσουμε λοιπόν τους φυσικούς αριθμούς ν με τους όρους της παραπάνω ακολουθίας $x_ν$, συμπληρώνοντας τον παρακάτω πίνακα:

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x_ν$	0	1									

β) Να παρατηρήσετε πως προκύπτουν οι όροι της ακολουθίας από τον x_3 και μετά. Μπορείτε να υπολογίσετε τον 12ο όρο της ακολουθίας; Ποιες πληροφορίες χρειάζονται για τον υπολογισμό του 12ου όρου;

γ) Ας προσπαθήσουμε να σκεφτούμε έναν κανόνα που θα μας βοηθά να βρίσκουμε οποιονδήποτε όρο της παραπάνω ακολουθίας.

Δ16 (αντιστοιχεί στους στόχους 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3)

Ένα skateboard αφήνεται ελεύθερο να κυλίσει σε μια κατηφόρα. Το πρώτο δευτερόλεπτο της κίνησής του διανύει απόσταση 3cm, το δεύτερο δευτερόλεπτο διανύει απόσταση 5cm, το τρίτο δευτερόλεπτο 7cm, το τέταρτο δευτερόλεπτο 9cm κ.ο.κ. Το skateboard κινείται συνολικά 1 λεπτό.

α) Πόσο διάστημα θα διανύσει στο 20-στό δευτερόλεπτο της κίνησης του;

β) Αν τοποθετήσουμε τα διαστήματα που έχει διανύσει το skateboard στα πρώτα 20 δευτερόλεπτα της κίνησής του με τον παρακάτω τρόπο:

3 5 7 9 11 13 …………………………………..31 33 35 37 39 41

41 39 37 35 33 31 ………………………………….. 13 11 9 7 5 3

Ποιο είναι το άθροισμα της κάθε στήλης; Μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνολική απόσταση που θα έχει διανύσει το skateboard στο διάστημα των πρώτων 20 δευτερολέπτων με ένα γρήγορο τρόπο;

γ) Ποιο είναι το διάστημα που θα διανύσει στο ν-οστό ($\nu \le 60$)δευτερόλεπτο της κίνησής του;

δ) Να δείξετε ότι η συνολική απόσταση που θα διανύσει το skateboard στο διάστημα των ν πρώτων δευτερολέπτων είναι: $\nu\cdot(\nu+2)$ cm.

Δ17 (αντιστοιχεί στους στόχους 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3)

Ένας θρύλος αναφέρει ότι ζητήθηκε από τον εφευρέτη του παιχνιδιού που λέγεται σκάκι, να ορίσει ο ίδιος την ανταμοιβή του για την εφεύρεση αυτή. Λέγεται λοιπόν ότι η απαίτησή του βρίσκεται στο παρακάτω κείμενο:

«Φανταστείτε μια σκακιέρα. Αυτή έχει 64 τετράγωνα.

Στο πρώτο τετράγωνο τοποθετούμε 1 κόκκο στάρι,

στο δεύτερο τετράγωνο 2 κόκκους στάρι,

στο τρίτο τετράγωνο 4 κόκκους στάρι,

στο πέμπτο τετράγωνο 8 κόκκους στάρι, κ.ο.κ.

μέχρι να τοποθετήσουμε και στα 64 τετράγωνα κόκκους σταριού. Θα ήθελα τόσους κόκκους σταριού, όσους έχει επάνω η σκακιέρα».

α) Πόσοι κόκκοι σταριού έχουν τοποθετηθεί στο 64ο τετράγωνο;

β) Αν η σκακιέρα είχε ν τετράγωνα, πόσοι κόκκοι σταριού θα είχαν τοποθετηθεί στο ν-οστό τετράγωνο;

γ) Αποτελεί το πλήθος των κόκκων σε κάθε τετράγωνο διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Να υπολογίσετε τους 10 πρώτους όρους της ακολουθίας: 2^0, 2^0+2^1, $2^0+2^1+2^2$, $2^0+2^1+2^2+2^3$ κ.ο.κ.

Πόσοι συνολικά κόκκοι σιταριού βρίσκονται στα 64 τετράγωνα της σκακιέρας;

ε) Αν η σκακιέρα είχε ν τετράγωνα, πόσοι θα ήταν στην περίπτωση αυτή συνολικά οι κόκκοι πάνω στη σκακιέρα;

Δ18 (αντιστοιχεί στους στόχους 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3)

Στην προηγούμενη δραστηριότητα βρήκαμε ότι το άθροισμα των πρώτων ν όρων της γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1= 1$ και $\lambda=2$ είναι: $1+2+2^2+2^3+\ldots 2^{\nu-1}=2^\nu-1$

α) Να υπολογίστε τις τιμές των: 3^0, 3^0+3^1, $3^0+3^1+3^2$, $3^0+3^1+3^2+3^3$.

β) Να βρείτε έναν τύπο για το άθροισμα $3^0+3^1+3^2+3^3+\ldots 3^{\nu-1}$.

γ) Να βρείτε στη συνέχεια έναν τύπο για το άθροισμα: $4^0+4^1+4^2+\ldots 4^{\nu-1}$.

δ) Μπορείτε να εικάσετε έναν τύπο για το άθροισμα: $1+\lambda^1+\lambda^2+\ldots\lambda^{\nu-1}$, για οποιοδήποτε $\lambda\neq 1$.

ε) Αν ο πρώτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου δεν είναι ίσος με 1 (δηλ. $\alpha_1\neq 1$), πως μεταβάλλεται η παράσταση του ερωτήματος (δ); Πως μπορούμε να προσαρμόσουμε τον τύπο που βρήκαμε στο (δ) ερώτημα ώστε να ισχύει γενικά;

Δ19 (αντιστοιχεί στο στόχο 3.3.3)

Πρόβλημα 1: ανατοκισμός

A) Καταθέτουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο 1000 € με ετήσιο επιτόκιο 3%. Με τη συμπλήρωση ενός χρόνου οι τόκοι προστίθενται στο κεφάλαιο και το ποσό που προκύπτει είναι το νέο κεφάλαιο, το οποίο τοκίζεται με το ίδιο επιτόκιο για τον επόμενο χρόνο. Αυτή η διαδικασία (γνωστή ως ανατοκισμός) επαναλαμβάνεται για 10 χρόνια.

1) να βρείτε πόσο θα είναι το νέο κεφάλαιο στο τέλος του 1ου χρόνου.
2) να βρείτε πόσο θα είναι το νέο κεφάλαιο στο τέλος του 2ου χρόνου.
3) να βρείτε πόσο θα είναι το νέο κεφάλαιο στο τέλος του 3ου χρόνου.
4) να βρείτε πόσα χρήματα θα εισπράξουμε στο τέλος του 10ου χρόνου.

B) Καταθέτουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο α ευρώ με ετήσιο επιτόκιο ε%. Αν το κεφάλαιο αυτό ανατοκίζεται για ν χρόνια, να εκφράσετε συναρτήσει των α, ε και ν το ποσό που θα εισπράξουμε στο τέλος του ν-ου χρόνου.

Σημείωση: ο ανατοκισμός μπορεί να γίνεται ανά εξάμηνο, ανά τρίμηνο, ανά μήνα, κοκ.

Παρατήρηση: για τον υπολογισμό των πράξεων να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή.

<u>Πρόβλημα 2: ο αριθμός e</u>

Σε μια φανταστική χώρα, ας υποθέσουμε ότι μια τράπεζα προσφέρει στους καταθέτες τις εξής επιλογές ανατοκισμού: (α) ετήσιο επιτόκιο 100%, (β) επιτόκιο εξαμήνου 50%, (γ) επιτόκιο τετραμήνου 33,33%, δ) επιτόκιο τριμήνου 25%. Ποια επιλογή θα κάνατε για να αυξήσετε τα χρήματά σας για μια κατάθεση ενός χρόνου;

Εκ πρώτης όψεως φαίνεται να είναι το ίδιο. Είναι όμως; Ας το δούμε αναλυτικά.

Ας υποθέσουμε ότι καταθέτετε 1 ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 100%. Σε ένα χρόνο θα έχετε πάρει 1+1=2 ευρώ δηλαδή θα έχετε διπλασιάσει τα χρήματά σας. Με 50% επιτόκιο, 2 φορές το χρόνο, θα πάρετε $1+\frac{1}{2}$ ευρώ το πρώτο εξάμηνο και στο τέλος του χρόνου $1+\frac{1}{2}$ φορές αυτού του ποσού δηλαδή $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2,25$ ευρώ. Όμοια, με επιτόκιο 33,33% το τετράμηνο θα πάρετε λίγο παραπάνω δηλαδή: $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=2,37$ ευρώ. Όμοια, με επιτόκιο 25% το τρίμηνο θα πάρετε ακόμα λίγο παραπάνω, δηλαδή: $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4=2,44$ ευρώ. Παρατηρούμε πως το ποσό αυξάνεται αν αυξήσουμε τη συχνότητα ανατοκισμού μέσα στο χρόνο. Αυτό σημαίνει πως μ' αυτόν τον τρόπο μπορείτε να πλουτίσετε; Μάλλον όχι. Για να διαπιστώσετε τι συμβαίνει να ελέγξετε με το κομπιουτεράκι σας πόσα χρήματα θα πάρετε στο τέλος του χρόνου αν ανατοκίζατε τα χρήματά σας

1) Ανά μήνα με επιτόκιο 8,33%;
2) Ανά εβδομάδα με επιτόκιο 1,92%;
3) Ανά ημέρα με επιτόκιο 0,274%;
4) Ανά ώρα με επιτόκιο 0,0114%;

Τι παρατηρείτε;

Παρατήρηση: Το όριο της ακολουθίας $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$, καθώς το ν τείνει στο άπειρο, τείνει σε ένα πεπερασμένο αριθμό. Ο αριθμός αυτός είναι ο e = 2,7182818284... και έχει πάρει το συμβολισμό του από τον L. Euler (1707-1783). Ο άρρητος αυτός αριθμός συναντάται σε πολλές πρακτικές εφαρμογές, αλλά ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η συνάρτηση $f(x)=e^x$ η οποία έχει την ιδιότητα ο ρυθμός μεταβολής της για κάθε τιμή του x να ισούται με την τιμή της συνάρτησης.

Δ20 (αντιστοιχεί στο στόχο 4.1.1)

Ποιον αριθμό εκφράζει κάθε μια από τις δυνάμεις $8^{\frac{1}{3}}$, $8^{-\frac{1}{3}}$, $8^{\frac{2}{3}}$, $9^{0,5}$, $5^{\frac{2}{3}}$, $5^{1,5}$;

Δ21 (αντιστοιχεί στο στόχο 4.1.1)

Στο ερώτημα ποιον αριθμό εκφράζει η παράσταση $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2$ δόθηκαν δυο διαφορετικές απαντήσεις. Να εξετάσετε που βρίσκεται το πρόβλημα.

1η απάντηση: $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2=\left[(-2)^{2\cdot\frac{1}{4}}\right]^2=\left[[(-2)^2]^{\frac{1}{4}}\right]^2=\left(4^{\frac{1}{4}}\right)^2=4^{\frac{2}{4}}=4^{\frac{1}{2}}=2$

2η απάντηση: $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2=(-2)^{\frac{2}{4}\cdot 2}=(-2)^1=-2$

Δ22 (αντιστοιχεί στο στόχο 4.1.2)

Δίνεται η παράσταση $\left(\sqrt[6]{8}+2\right)\left(\sqrt[6]{8}-2\right)$

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
   i) με χρήση αριθμομηχανής.
   ii) με εφαρμογή αλγεβρικών ιδιοτήτων.

β) Να συγκρίνετε τις δυο μεθόδους ως προς την ακρίβεια του αποτελέσματος.

Δ23 (αντιστοιχεί στο στόχο 4.2.1)

Τα βακτήρια είναι πολύ μικροί, μονοκύτταροι οργανισμοί που είναι μακράν οι πιο πολυπληθείς οργανισμοί στη Γη, οι οποίοι αναπαράγονται μέσω μιας διεργασίας που ονομάζεται σχάση: ένα κύτταρο χωρίζεται στη μέση, σχηματίζοντας δύο «θυγατρικά κύτταρα». Ένα τέτοιο βακτήριο είναι η σαλμονέλα (salmonella), το οποίο σε θερμοκρασία περιβάλλοντος 35 ° C διαιρείται κάθε ώρα και σχηματίζονται δυο άλλα βακτήρια.

Ας υποθέσουμε ότι σε μια μερίδα τροφής υπάρχουν 100 βακτήρια σαλμονέλας και ότι η θερμοκρασία περιβάλλοντος είναι 35° C.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος (σε ώρες)	0	1	2	3	4	5
Αριθμός βακτηρίων	100					

β) Να αποτυπώσετε τα δεδομένα του πίνακα με σημεία σε κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων αξόνων. Η σχέση μεταξύ του αριθμού των βακτηρίων και χρόνου είναι γραμμική; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να εκτιμήσετε το χρόνο που θα υπάρχουν i) 1200 βακτήρια, ii) 4.550 βακτήρια και iii) περισσότερα από 7.200 βακτήρια στη μερίδα τροφής.

δ) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει το πλήθος των βακτηρίων σαλμονέλας ως συνάρτηση του χρόνου . Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ;

ε) Μπορούμε να υπολογίσουμε ανά πάσα χρονική στιγμή τον πληθυσμό των βακτηρίων; Θα είχαν νόημα για το συγκεκριμένο πρόβλημα οι αρνητικές τιμές i) για το χρόνο και ii) για τον πληθυσμό των βακτηρίων;

Δ24 (αντιστοιχεί στους στόχους 4.2.2, 4.2.3)

Να δοθούν οι γραφικές παραστάσεις των ακόλουθων ομάδων συναρτήσεων. Να ζητηθεί από τους μαθητές να συγκρίνουν τα γραφήματά τους και να προσδιορίσουν τυχόν ομοιότητες και διαφορές που αφορούν α) το πεδίο ορισμού, β) το σύνολο τιμών, γ) τα σημεία τομής με τους άξονες, δ) τη μονοτονία, ε) τις ασύμπτωτες και στ) τη συμμετρία.

i) $f_1(x)=2^x$, $f_2(x)=3\cdot 2^x$, $f_3(x)=-3\cdot 2^x$, $f_4(x)=4\cdot 2^x$

ii) $f(x)=2^x$, $g(x)=\frac{1}{4}\cdot 2^x$

iii) $f_1(x)=2^x$, $f_2(x)=2^x+3$, $f_3(x)=2^{x-3}$, $f_4(x)=2^{x-3}+3$

iv) $f(x)=2^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Δ25 (αντιστοιχεί στο στόχο 4.2.3)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=3^x$. Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f_1, f_2, f_3 σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

α) Η γραφική παράσταση της f_1 να προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 4 μονάδες δεξιά.

β) Η γραφική παράσταση της f_2 να προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 2 μονάδες αριστερά.

γ) Η γραφική παράσταση της f_3 να προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 2 μονάδες πάνω.

δ) Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f_1, f_2 και f_3 στο ίδιο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Ποια χαρακτηριστικά της συνάρτησης f διατηρούνται και ποια αλλάζουν στις συναρτήσεις f_1, f_2, f_3;

Δ26 (αντιστοιχεί στο στόχο 4.2.6)

Όταν παίρνουμε ένα φάρμακο, ο οργανισμός μας το μεταβολίζει και μετά από κάποιο χρονικό διάστημα δεν παραμένει ίχνος τους φαρμάκου στο σώμα μας. Ο χρόνος που χρειάζεται να διασπαστεί ή να εξαφανιστεί η μισή ποσότητα του φαρμάκου λέγεται ημιζωή ή χρόνος υποδιπλασιασμού του φαρμάκου (ή φαρμακευτικής ουσίας).
Για ένα φάρμακο P η ημιζωή του είναι μία ημέρα.

α) Τι μέρος της αρχικής δόσης Q_0 από το φάρμακο P παραμένει στον οργανισμό ενός ασθενούς i) μετά από μία ημέρα; ii) μετά από 2 ημέρες;

β) Αν το t εκφράζει τον αριθμό των ημερών μετά από τη λήψη μιας δόσης του φαρμάκου P και το Q(t) εκφράζει την αντίστοιχη ποσότητα του φαρμάκου σε mgr που παραμένει στον οργανισμό μετά από t ημέρες , να συμπληρώσετε τον πίνακα που ακολουθεί.

t (ημέρες)	0	1	2	3	4	5	6	7
Q (ποσότητα φαρμάκου σε mgr)	Q_0							

γ) Να χρησιμοποιήσετε τα στοιχεία του πίνακα και να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει την ποσότητα Q ως συνάρτηση του χρόνου t.

δ) Στο τέλος ποιας μέρας η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό είναι το $\frac{1}{256}$ της αρχικής ποσότητας;

ε) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης Q σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, όταν η αρχική δόση φαρμάκου είναι $Q_0 = 2mgr$. Για τους υπολογισμούς σας να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή.

στ) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών της συνάρτησης Q; Σε ποιο σημείο τέμνει τον κατακόρυφο άξονα;

ζ) Όταν οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής αυξάνονται, τι συμβαίνει με τις αντίστοιχες τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής Q;

Δ27 (αντιστοιχεί στο στόχο 4.3.3)

Για απλό ήχο δεδομένης έντασης I , η ένταση του υποκειμενικού αισθήματος που αντιλαμβάνεται κάποιος ακροατής ονομάζεται ακουστότητα Lτου ήχου. Για την ακουστότητα L χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρησης το 1 decibel και για την ένταση I το watt/m^2.

Έχει βρεθεί πειραματικά ότι η ακουστότητα L σχετίζεται με την ένταση I με λογαριθμικό τρόπο , σύμφωνα με τον τύπο $L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$, όπου I_0 η μικρότερη ένταση ήχου που μπορεί να ακούσει το αυτί του ανθρώπου, και είναι περίπου ίση με 10^{-12} watt/m^2. Να υπολογίσετε την ακουστότητα απλού ήχου έντασης: α) 10^{-6} watt/m^2 και β) δεκαπλάσιας από το I_0 .

Δ28 (αντιστοιχεί στους στόχους 5.1.1 , 5.1.2, 5.1.3)

Σε κάθε μία από τις επόμενες καταστάσεις

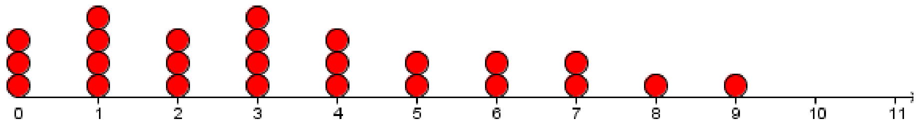
α) Να προσδιορίσετε το χαρακτηριστικό που εξετάζεται και να βρείτε το είδος της μεταβλητής β) Να εξετάσετε αν η μέθοδος που θα εφαρμοστεί θα δημιουργήσει αντιπροσωπευτικό δείγμα, εξηγώντας το σκεπτικό σας.

1) Μία τηλεοπτική εκπομπή με σκοπό να κάνει δημοσκόπηση σχετική με ένα θέμα, καλεί τους τηλεθεατές να τηλεφωνήσουν για να ψηφίσουν υπέρ ή κατά ή με λευκό σε σχέση με το θέμα.
2) Για να εξετάσουμε τους τρόπους διασκέδασης των νέων της χώρας μας, επιλέγουμε ένα μεγάλο δείγμα από τους μαθητές των Λυκείων της Αττικής.
3) Για να εκτιμήσει ένας μαθητής, τον μέσο όρο των παιδιών ανά οικογένεια, που ζουν στην περιοχή του, ρωτάει τους μαθητές του σχολείου του και του διπλανού σχολείου, για τον αριθμό αδελφών που έχουν.

Δ29 (αντιστοιχεί στους στόχους 5.2.1, 5.3.2, 5.4.1, 5.5.1 , 5.5.2)

Το παρακάτω σημειόγραμμα παρουσιάζει τον αριθμό απουσιών των 25 μαθητών ενός τμήματος της Β' Λυκείου κατά το μήνα Νοέμβριο.

αριθμός απουσιών των μαθητών του Β1 το Νοέμβριο



α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

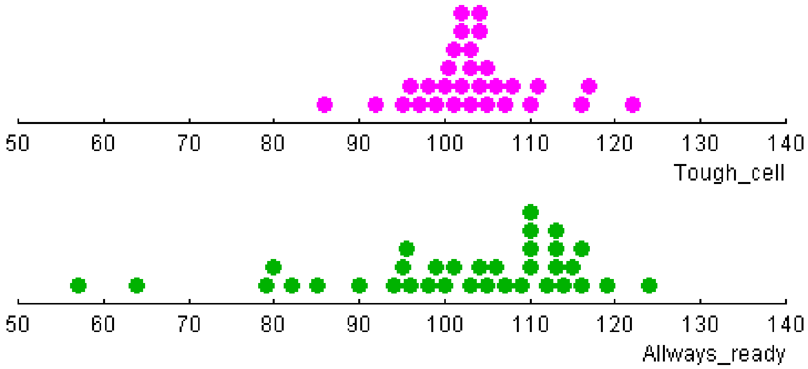
β) Να βρεθεί ο αριθμός και το ποσοστό των μαθητών που απουσίασαν.

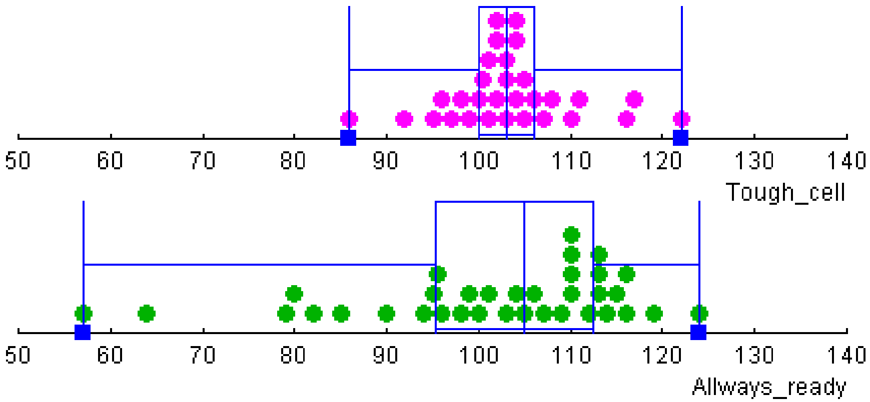
i) Τρείς ημέρες.
ii) Το πολύ πέντε ημέρες.
iii) Τουλάχιστον 6 ημέρες.
iv) Από τρεις έως έξι ημέρες.

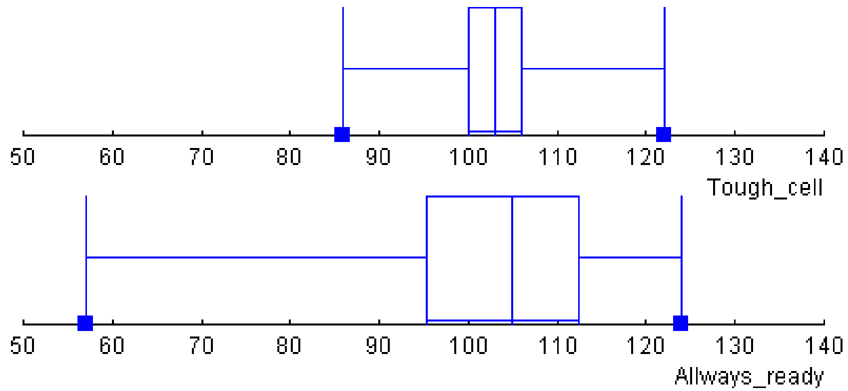
γ) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο θηκόγραμμα πάνω στο σημειόγραμμα και να εξηγήσετε τι αντιπροσωπεύουν οι τιμές που θα βρείτε, με βάση την κατάσταση που εξετάζουμε.

Δ30 (αντιστοιχεί στο στόχο 5.5.3)

Τα παρακάτω σημειογράμματα παρουσιάζουν την διάρκεια ζωής σε λεπτά (min) δύο διαφορετικών δειγμάτων μπαταριών ίδιου τύπου (1,5 Volt, τύπος AAA), των μπαταριών μάρκας «Tough cell» και «Always ready» ενώ παρακάτω, παρουσιάζονται τα αντίστοιχα θηκογράμματα.







Ποια από τις δύο μάρκες μπαταρίας θα προτιμούσατε σε σχέση με την διάρκεια ζωής, αν θεωρήσουμε ότι τα δείγματα είναι αντιπροσωπευτικά και άλλοι παράγοντες προτίμησης είναι περίπου ίδιοι;

Να γράψετε μια μικρή αναφορά στην οποία θα υποστηρίζετε την άποψή σας.

Σημείωση: Τα δεδομένα της δραστηριότητας προέρχονται από τον διαδικτυακό τόπο: http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00073/toepassing_wisweb.en.html μέσω της επιλογής Start with: batteries 30**.** Τα μικρά τετραγωνάκια στα άκρα των θηκογραμμάτων προέρχονται από το αντίστοιχο applet.

Β΄ Λυκείου, Γεωμετρία

Εισαγωγή

Στη Γεωμετρία της Β΄ Λυκείου παρουσιάζονται θεωρήματα και προβλήματα που έχουν μεγάλη ιστορική και μαθηματική αξία. Αξιοποιείται η αναλυτική-συνθετική μέθοδος και επιχειρείται μία πρώτη επαφή με διαδικασίες απειροστικού λογισμού. Επιπλέον, με την ανάγκη που υπάρχει στη στερεομετρία να απεικονίζονται σχήματα του χώρου στο επίπεδο, ασκείται η φαντασία. Ακόμα, πραγματοποιείται η μετάβαση από το ευθύγραμμο τμήμα στο εμβαδόν και από το εμβαδόν στον όγκο. Σε σχέση με την προηγούμενη χρονιά πληθαίνουν οι εφαρμογές που είναι χρήσιμες στην καθημερινότητα.

Μέσα από τα ιστορικά σημειώματα, τα οποία αναμιγνύονται με τη θεωρία και δεν είναι αποκομμένα από αυτήν, οι ιδέες του παρελθόντος συγκρίνονται με τις σημερινές. Οι παρουσιαζόμενες δυνατότητες για περισσότερες από μία αποδείξεις του ίδιου θεωρήματος, αναδεικνύουν ότι ο δρόμος για την αλήθεια δεν είναι μοναδικός.

Ειδικότερα, η Γεωμετρία της Β Λυκείου περιλαμβάνει τα ακόλουθα κεφάλαια.

Κεφάλαιο 1: Εγγεγραμμένα σε κύκλο Σχήματα

Οι εγγεγραμμένες γωνίες αποτελούν ένα επιπλέον εργαλείο σύγκρισης γωνιών ενώ παράλληλα, δίνουν τη δυνατότητα γεωμετρικών κατασκευών. Χρησιμοποιείται πιο εμπεριστατωμένα η αναλυτική-συνθετική μέθοδος.

Κεφάλαιο 2: Αναλογίες - Ομοιότητα

Παρουσιάζεται το Θεώρημα Θαλή και αναδεικνύονται οι εφαρμογές του. Ακόμα, τα σχήματα εντάσσονται, μέσω της ομοιότητας, σε κατηγορίες ευρύτερες από εκείνες τις ισότητας.

Κεφάλαιο 3: Πυθαγόρειο Θεώρημα (και μετρικές σχέσεις)

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα, εκτός από την πρακτική του αξία στις μετρήσεις, κατέχει κεντρική θέση στα Μαθηματικά, αφού μέσα από αυτό ανακαλύφθηκαν οι άρρητοι αριθμοί. Με το νόμο των συνημιτόνων και τις προβολές, επιχειρείται η σύνδεση με τη Φυσική (π.χ. έργο δύναμης, κανόνας του παραλληλογράμμου).

Κεφάλαιο 4: Εμβαδά ευθυγράμμων σχημάτων

Η έννοια του εμβαδού, στενά συνδεδεμένη με τη μέτρηση, βρίσκει πλήθος εφαρμογών και στην καθημερινότητα. Στο κεφάλαιο αυτό το γινόμενο δύο ευθυγράμμων τμημάτων αποκτά αναπαραστατική υπόσταση ως εμβαδόν παραλληλογράμμου. Από την άλλη μεριά, η έκφραση εμβαδών ως γινομένου ευθυγράμμων τμημάτων προσφέρει τη δυνατότητα να αναχθούν συγκρίσεις εμβαδών σε συγκρίσεις ευθυγράμμων τμημάτων.

Κεφάλαιο 5: Κανονικά Πολύγωνα

Οι γεωμετρικές ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων προετοιμάζουν το έδαφος για το θεωρητικό πρόβλημα της μέτρησης του κύκλου. Η μελέτη τους έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς αυτά χρησιμοποιούνται όχι μόνο σε κατασκευές με αισθητική αξία (πλακοστρώσεις, ζωγραφική κ.λπ.), αλλά εμφανίζονται και στη φύση (κυψέλες μελισσών, φολίδες φιδιών κ.ά.).

Κεφάλαιο 6: Μέτρηση Κύκλου

Πραγματοποιείται μια πρώτη επαφή με διαδικασίες ορίου και γνωριμία με τη μέθοδο της προσέγγισης που είναι μια από τις κεντρικές ιδέες των Μαθηματικών.

Κεφάλαιο 7: Στερεά Σχήματα - Μέτρηση Στερεών

Η ανάγκη για απεικόνιση σχημάτων των τριών διαστάσεων σε δισδιάστατες επιφάνειες καλλιεργεί τη χωρική αντίληψη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ενώ μετρήσεις όγκων και επιφανειών έχουν άμεση εφαρμογή σε ανάγκες της καθημερινής ζωής.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ Σύνολο 50 ώρες	ΣΤΟΧΟΙ Οι μαθητές να μπορούν να:	ΣΧΟΛΙΑ-ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
1. Εγγεγραμμένα σε κύκλο Σχήματα (8 ώρες)		
1.1. Σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας (1 ώρα)	1.1.1. Χρησιμοποιούν τη σχέση εγγεγραμμένων και επίκεντρων γωνιών στην επίλυση προβλημάτων. 1.1.2. Αναγνωρίζουν ως ορθές τις εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο και διαπιστώνουν ότι κάθε ορθογώνιο τρίγωνο εγγράφεται σε ημικύκλιο.	Να αποδειχτεί η σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας Προτείνεται η δραστηριότητα Δ1.
1.2. Γωνία χορδής και εφαπτομένης και σχετικοί γεωμετρικοί τόποι (3 ώρες)	1.2.1. Εφαρμόζουν την Αναλυτική - Συνθετική Μέθοδο στην επίλυση προβλημάτων. 1.2.2. Εντοπίζουν το γεωμετρικό τόπο των σημείων που βλέπουν υπό συγκεκριμένη γωνία σταθερό ευθύγραμμο τμήμα και αναγνωρίζουν το γεωμετρικό τόπο των σημείων από τα οποία ευθύγραμμο τμήμα φαίνεται υπό ορθή γωνία.	Να γίνει αναφορά στην Αναλυτική - Συνθετική Μέθοδο (ερμηνεία των όρων ανάλυση, σύνθεση, διερεύνηση), στη σημασία της στις εν γένει γεωμετρικές αποδείξεις και στους άλλους κλάδους των Μαθηματικών καθώς επίσης και στον Φρανσουά Βιέτ (François Viète 1540 - 1603). Προτείνεται η δραστηριότητα Δ2.
1.3. Εγγεγραμμένα - εγγράψιμα πολύγωνα (2 ώρες)	1.3.1. Εξηγούν τη διαφορά ανάμεσα στα θεωρήματα για να είναι εγγεγραμμένο ένα πολύγωνο και τα κριτήρια για να είναι εγγράψιμο.	Να γίνουν οι αποδείξεις: (1) σε ένα εγγεγραμμένο πολύγωνο: (α) κάθε πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες και (β) οι μεσοκάθετοι των πλευρών διέρχονται από το ίδιο σημείο. (2) για να είναι ένα πολύγωνο εγγράψιμο πρέπει μία πλευρά του να φαίνεται υπό ίσες γωνίες από όλες τις απέναντι κορυφές.

		Προτείνεται ως εισαγωγική δραστηριότητα η Δ3.
1.4. Εγγεγραμμένα - εγγράψιμα τετράπλευρα (1 ώρα)	1.4.1. Διακρίνουν τη διαφορά ανάμεσα στα θεωρήματα που ισχύουν σε ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο και τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο.	Να αποδειχτεί η πρόταση για τη σχέση μεταξύ των απέναντι εσωτερικών γωνιών. Ως πόρισμα να διατυπωθεί η σχέση εσωτερικής γωνίας με την απέναντι εξωτερική γωνία. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ4.
1.5. Περιγεγραμμένα - Περιγράψιμα σε κύκλο πολύγωνα (1 ώρα)	1.5.1. Πιστοποιούν ότι ο τρόπος που εγγράφεται κύκλος σε πολύγωνο αποτελεί γενίκευση του τρόπου που εγγράφεται κύκλος σε τρίγωνο κατ' αντιστοιχία με τον περιγεγραμμένο κύκλο τριγώνων-πολυγώνων.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ5.
2. Αναλογίες - Ομοιότητα (7 ώρες)		
2.1. Λόγος, μέτρο και αναλογία ευθυγράμμων τμημάτων (1 ώρα)	2.1.1. Ερμηνεύουν το λόγο δύο ευθυγράμμων τμημάτων ως το λόγο των μέτρων τους.	Να γίνει σύντομη αναφορά στις ιδιότητες των αναλογιών. Να αναδειχθεί μέσω παραδειγμάτων ότι ζεύγη ευθυγράμμων τμημάτων διαφορετικών μεγεθών ενδέχεται να έχουν τον ίδιο λόγο (π.χ. τα ευθύγραμμα τμήματα με μήκη 4 και 8 έχουν τον ίδιο λόγο με τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν μήκη 5 και 10 αντιστοίχως). Να συνδεθούν τα σύμμετρα και ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα με τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς. Να γίνει σύντομη ιστορική αναφορά για τη σημασία των σύμμετρων μεγεθών στην Πυθαγόρεια φιλοσοφία.
2.2. Θεώρημα Θαλή (2 ώρες)	2.2.1. Εφαρμόζουν το θεώρημα Θαλή εφόσον συντρέχουν οι προϋποθέσεις ή φέρνοντας κατάλληλες βοηθητικές ευθείες.	Να αναδειχτούν οι εφαρμογές του θεωρήματος του Θαλή σε τρίγωνα και τραπέζια. Να συσχετιστεί το θεώρημα Θαλή με τη ήδη γνωστή πρόταση η οποία αφορά στην παραλληλία του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου προς την τρίτη πλευρά. Να γίνει απόδειξη του θεωρήματος Θαλή για συγκεκριμένο

		λόγο (π.χ. $\frac{3}{4}$) και να αναφερθεί ότι με παρόμοιο τρόπο γενικεύεται για οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς. Να γίνει ιστορική αναφορά στο πέμπτο βιβλίο των Στοιχείων. Να διερευνηθεί το «αντίστροφο» του θεωρήματος Θαλή. Να διερευνηθεί η γεωμετρική επίλυση της εξίσωσης πρώτου βαθμού. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ6.
2.3. Θεώρημα Διχοτόμων τριγώνου (2 ώρες)	2.3.1. Διαπιστώνουν τη δυνατότητα χωρισμού ευθυγράμμου τμήματος στον ίδιο λόγο με σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του ή στην προέκταση του.	Να αναφερθεί χωρίς απόδειξη το αντίστροφο του θεωρήματος εσωτερικής - εξωτερικής διχοτόμου. Σε τρίγωνο με πλευρές α, β, γ, να υπολογιστούν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων στα οποία η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος χωρίζουν την απέναντι πλευρά συναρτήσει των α, β, γ. Να μην γίνει αναφορά στην ορολογία «διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε εσωτερικό και εξωτερικό λόγο», καθώς και στα αρμονικά συζυγή. Στα ιστορικά σημειώματα να συμπεριληφθεί παρουσίαση για τον κύκλο του Απολλωνίου.
2.4. Κριτήρια Ομοιότητας Τριγώνων (2 ώρες)	2.4.1. Πιστοποιούν ότι τα κριτήρια ομοιότητας λειτουργούν όπως και τα κριτήρια ισότητας, δηλαδή, με λιγότερες από τις προϋποθέσεις του ορισμού μπορούμε να αποφανθούμε για το ζητούμενο. 2.4.2. Συσχετίζουν την ισότητα με την ομοιότητα τριγώνων και εντοπίζουν τις διαφορές.	Να δοθεί ο ορισμός της ομοιότητας τριγώνων μέσω του ορισμού της ομοιότητας πολυγώνων. Να αναφερθούν τα θεωρήματα ομοιότητας τριγώνων και να γίνει απόδειξη ενός εξ αυτών. Να αποδειχτεί η πρόταση που συσχετίζει το γινόμενο δύο πλευρών τριγώνου με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου και το ύψος που αντιστοιχεί στην τρίτη πλευρά. Σε ιστορικό σημείωμα να συμπεριληφθεί η λειτουργία του

		εξάντα. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ7 και Δ8.
3. Πυθαγόρειο Θεώρημα (και μετρικές σχέσεις) (7 ώρες)		
3.1. Ορθές προβολές (1 ώρα)	3.1.1. Κατασκευάζουν και αναγνωρίζουν ορθές προβολές ευθυγράμμων τμημάτων σε ευθεία. 3.1.2. Συνδέουν την προβολή μιας πλευράς πάνω σε άλλη με το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας. 3.1.3. Χρησιμοποιούν τις προβολές σε επίλυση προβλημάτων Φυσικής.	Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ9 (ως εισαγωγική), Δ10 και Δ11.
3.2. Προτάσεις για τις κάθετες πλευρές και το ύψος στα ορθογώνια τρίγωνα (2 ώρες)	3.2.1. Ερμηνεύουν τις μετρικές σχέσεις για τις κάθετες πλευρές και για το ύψος ως αποτέλεσμα ομοιότητας τριγώνων. 3.2.2. Χρησιμοποιούν τις μετρικές σχέσεις ορθογωνίων τριγώνων στην επίλυση προβλημάτων και κατασκευών.	Να γίνουν οι αποδείξεις των προτάσεων οι οποίες σε ορθογώνιο τρίγωνο συνδέουν: (α) το τετράγωνο μίας κάθετης πλευράς με την προβολή της στην υποτείνουσα. (β) το τετράγωνο του ύψους με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ12.
3.3. Το Πυθαγόρειο θεώρημα (2 ώρες)	3.3.1. Εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του για την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων. 3.3.2. Εξηγούν γιατί ο λόγος της διαγωνίου τετραγώνου προς την πλευρά του είναι άρρητος αριθμός.	Με την ευκαιρία της απόδειξης του Πυθαγορείου θεωρήματος που χρησιμοποιεί τις σχέσεις της προηγούμενης παραγράφου, να σχολιαστεί η διαφορά φιλοσοφίας με την αντίστοιχη απόδειξη του Ευκλείδη που εμπλέκει εμβαδά. Να παρατεθεί ιστορικό σχόλιο που θα πραγματεύεται την ανακάλυψη των αρρήτων και τη σχέση του Πυθαγορείου θεωρήματος με τους τρόπους με τους οποίους Βαβυλώνιοι και Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν τα ορθογώνια τρίγωνα σε πρακτικές εφαρμογές. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ13.
3.4. Γενικευμένο Πυθαγόρειο	3.4.1. Χρησιμοποιούν το νόμο των συνημιτόνων για επίλυση	Να αποδειχθεί ο νόμος των συνημιτόνων.

Θεώρημα ή Νόμος των Συνημιτόνων (2 ώρες)	ασκήσεων και προβλημάτων Μαθηματικών και Φυσικής. 3.4.2. Συνδέουν το νόμο των συνημιτόνων με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.	Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ14 και Δ15.
4. Εμβαδά ευθυγράμμων σχημάτων (8 ώρες)		
4.1. Η έννοια του εμβαδού (1 ώρα)	4.1.1. Εξηγούν την ανάγκη της διαδικασίας του διαμερισμού σχήματος. 4.1.2. Διακρίνουν τα ισοδύναμα σχήματα από τα ίσα σχήματα.	Να αναφερθεί ότι η μέτρηση των εμβαδών είναι μία διαδικασία ανάλογη με την μέτρηση των ευθυγράμμων τμημάτων. Να γίνει συνοπτική αναφορά στις διαισθητικές ιδιότητες (που επέχουν θέση αξιωμάτων) και διέπουν τα εμβαδά. Η ισότητα, η ομοιότητα και τα εμβαδά κατηγοριοποιούν με διαφορετικούς τρόπους τα επίπεδα σχήματα. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ16.
4.2. Εμβαδά: ορθογωνίου, παραλληλογράμμου, τριγώνου, τραπεζίου (2 ώρες)	4.2.1. Υπολογίζουν μέσω μετασχηματισμών σε σχήματα γνωστού εμβαδού, τα εμβαδά διαφόρων σχημάτων.	Να αποδειχθούν οι τύποι των εμβαδών ορθογωνίου, παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ17.
4.3. Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου (2 ώρες)	4.3.1. Χρησιμοποιούν τους τύπους των εμβαδών για την επίλυση ασκήσεων-προβλημάτων υπολογισμού επιπέδων χωρίων και ακτίνων εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου.	Να αποδειχθούν οι τύποι $E = \tau \cdot \rho$, $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$, $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$. Ο τύπος του Ήρωνα να δοθεί χωρίς απόδειξη, η οποία όμως να περιέχεται σε σχετικό ιστορικό σημείωμα. Η ενασχόληση με τους τύπους της ενότητας 4.3 να είναι περιορισμένη.
4.4. Εμβαδόν και ομοιότητα (2 ώρες)	4.4.1. Συσχετίζουν το λόγο ομοιότητας δυο ομοίων σχημάτων με: (α) το λόγο των περιμέτρων τους και	Να αποδειχτεί το θεώρημα το οποίο αναφέρεται στο λόγο των εμβαδών δυο τριγώνων, στα οποία μια γωνία του ενός είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία του άλλου.

	(β) το λόγο των εμβαδών τους.	Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ18, Δ19 και Δ20.
4.5. Τετραγωνισμός ευθυγράμμων σχημάτων (1 ώρα)	4.5.1. Μετασχηματίζουν πολύγωνα σε ισοδύναμα με λιγότερες πλευρές.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ21.
5. Κανονικά Πολύγωνα (5 ώρες)		
5.1. Ορισμός και στοιχεία κανονικού πολυγώνου (2 ώρες)	5.1.1. Αναγνωρίζουν ως κανονικά τα πολύγωνα τα οποία έχουν και τις πλευρές ίσες και τις γωνίες ίσες. 5.1.2. Διαφοροποιούν τη γωνία από την κεντρική γωνία κανονικού ν-γωνου και αποδεικνύουν τη μεταξύ τους σχέση. 5.1.3. Μπορούν να υπολογίζουν στοιχεία κανονικών πολυγώνων.	Η απόδειξη για την εγγραφή και περιγραφή κανονικού ν-γωνου σε κύκλο να γίνει για μια συγκεκριμένη περιπτώση (π.χ., εξάγωνο ή οκτάγωνο) και να τονιστεί ότι η διαδικασία γενικεύεται. Για την επίτευξη του στόχου 5.1.3, να μην δοθούν οι γενικοί τύποι, υπολογισμού πλευράς, αποστήματος, περιμέτρου και εμβαδού κανονικού πολυγώνου ως συνάρτηση της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου, ώστε οι μαθητές να τους υπολογίζουν κατά περίπτωση. Να αποδειχθεί ότι δυο κανονικά πολύγωνα με ίσο αριθμό πλευρών είναι όμοια και στη συνέχεια ότι ο λόγος ομοιότητας ισούται με το λόγο των αποστημάτων τους και το λόγο των ακτίνων τους. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ22.
5.2. Εγγραφή κανονικών πολυγώνων σε κύκλο (3 ώρες)	5.2.1. Εγγράφουν σε κύκλο: (α) τετράγωνο (β) κανονικό εξάγωνο (γ) ισόπλευρο τρίγωνο. 5.2.2. Διερευνούν ένα κανονικό πολύγωνο ως προς τις συμμετρίες που παρουσιάζει. 5.2.3. Αξιοποιούν ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων στην επίλυση προβλημάτων.	Να σημειωθεί ότι ο σχεδιασμός κανονικών πολυγώνων πραγματοποιείται διαιρώντας τον κύκλο σε ίσα τόξα και ότι δεν εφικτό να γίνουν όλες οι διαιρέσεις με κανόνα και διαβήτη. Να δοθεί ιστορικό σχόλιο: (α) για τη σύνδεση της κατασκευής κανονικού πενταγώνου και δεκαγώνου με τη «χρυσή τομή» και (β) για τις προσπάθειες που έγιναν κατά τον 18ο και 19ο αιώνα να διαιρεθεί κύκλος σε ίσα τόξα.

		Να αναδειχτεί η αξία των κανονικών πολυγώνων στην κάλυψη επιφανειών (π.χ. κάλυψη με τρίγωνα, τετράγωνα και κανονικά εξάγωνα). Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ23, Δ24, Δ25 και Δ26.
6. Μέτρηση Κύκλου (6 ώρες)		
6.1. Μήκος κύκλου (3 ώρες)	6.1.1. Περιγράφουν και ερμηνεύουν τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζεται το μήκος του κύκλου. 6.1.2. Διακρίνουν την έννοια του «ίσον» από την έννοια του «τείνει σε». 6.1.3. Βρίσκουν το μήκος τόξου ως συνάρτηση της ακτίνας. 6.1.4. Εφαρμόζουν τους τύπους στην επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων με μεικτόγραμμα σχήματα.	Να αναφερθεί ότι η μέθοδος της εξάντλησης η οποία χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του μήκους κύκλου παράγει ορθά και ακριβή αποτελέσματα και είναι μία από τις κεντρικές ιδέες των Μαθηματικών. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ27.
6.2. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου (3 ώρες)	6.2.1. Ερμηνεύουν και περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζεται το εμβαδόν του κύκλου. 6.2.2. Υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού τομέα. 6.2.3. Εφαρμόζουν τους τύπους στην επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων με μεικτόγραμμα χωρία.	Να γίνει ιστορική αναφορά για τον τετραγωνισμό του κύκλου η οποία θα: (α) αναδεικνύει τη συμβολή του Αρχιμήδη (287 - 212 π.Χ.), και τη σύνδεσή της με τα σημερινά Μαθηματικά. (β) αναφέρεται στους μηνίσκους του Ιπποκράτη (τέλος 5^{ου} αι. π.Χ.) και (γ) αναφέρεται στη φύση του αριθμού π. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ28 και Δ29.
7. Στερεά Σχήματα - Μέτρηση Στερεών (9 ώρες)		
7.1. Γενικά περί πολυέδρων (2 ώρες)	7.1.1. Αναγνωρίζουν τα βασικά γεωμετρικά στερεά. 7.1.2. Αναγνωρίζουν τα αναπτύγματα πρισμάτων, πυραμίδων, κώνων και κυλίνδρου.	Να αναφερθούν οι έννοιες γενέτειρα, πρισματική επιφάνεια, επίπεδη τομή, έδρα, ακμή, κορυφή. Να γίνει σύντομη αναφορά στην στερεά γωνία. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ30 και Δ31.

7.2. Πρίσμα, παραλληλεπίπεδο, κύβος (3 ώρες)	7.2.1. Υπολογίζουν μήκη και γωνίες στα πρίσματα. 7.2.2. Υπολογίζουν το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο πρισμάτων.	Να γίνει αναφορά στο ορθό και το πλάγιο πρίσμα. Να αναδειχθεί ότι το παραλληλεπίπεδο είναι ειδική περίπτωση πρίσματος και ο κύβος ειδική περίπτωση παραλληλεπιπέδου, κατά αντιστοιχία με τετράπλευρα, παραλληλόγραμμα, ρόμβους, και τετράγωνα. Με αφορμή τις στερεές γωνίες ενός πρίσματος να γίνει αναφορά στις τρισορθογώνιες του ορθού πρίσματος. Να αποδειχτεί ότι: (α) Οι απέναντι έδρες κάθε παραλληλεπιπέδου είναι ίσες και παράλληλες. (β) Η διαγώνιος δ κάθε ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ακμές α, β, γ δίνεται από τον τύπο $δ^2 = α^2 + β^2 + γ^2$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας πρίσματος μόνο για την περίπτωση του ορθού. Να παρουσιαστεί, με αναφορά σε συγκεκριμένο παράδειγμα, ο τύπος του όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Να δοθεί χωρίς απόδειξη ότι ο όγκος παραλληλεπιπέδου και γενικότερα κάθε πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης επί το ύψος του. Να γίνει ιστορική αναφορά στο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου.
7.3. Πυραμίδα (1 ώρα)	7.3.1. Εφαρμόζουν τους τύπους για την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων.	Να γίνει αναφορά στο τετράεδρο. Να δοθεί ο τύπος του όγκου της πυραμίδας χωρίς απόδειξη, αλλά να υπάρχει εμπειρική ερμηνεία. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ32.
7.4. Στερεά εκ περιστροφής:	7.4.1. Εφαρμόζουν τους τύπους για την επίλυση ασκήσεων και	Από τα είδη κυλίνδρου και κώνου, να μελετηθούν μόνο οι

κύλινδρος, κώνος, σφαίρα (3 ώρες)	προβλημάτων.	ορθοί. Να αναφερθούν οι κωνικές τομές, χωρίς τύπους ή ιδιότητες, καθώς και οι μέγιστοι κύκλοι σφαίρας. Να δοθούν χωρίς απόδειξη οι τύποι υπολογισμού του εμβαδού της επιφάνειας και του όγκου κυλίνδρου. Να περιγραφεί η διαδικασία υπολογισμού τους με τον συνεχή διπλασιασμό των πλευρών της βάσης κανονικού πρίσματος που είναι εγγεγραμμένο ή περιγεγραμμένο σε αυτόν. Να σημειωθεί η αντιστοιχία της διαδικασίας με εκείνη του υπολογισμού εμβαδού κύκλου. Να δοθούν χωρίς απόδειξη οι τύποι υπολογισμού του εμβαδού της επιφάνειας και του όγκου κανονικής πυραμίδας. Να περιγραφεί η διαδικασία υπολογισμού τους με τον συνεχή διπλασιασμό των πλευρών της βάσης κανονικής πυραμίδας που είναι εγγεγραμμένη ή περιγεγραμμένη σε αυτήν. Να δοθούν χωρίς απόδειξη οι τύποι για το εμβαδόν και τον όγκο σφαίρας. Να γίνει ιστορική αναφορά στα Πλατωνικά στερεά. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ33.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δ1 (αντιστοιχεί στο στόχο 1.1.1)

Να βρείτε τη γωνία δύο τεμνουσών ευθειών κύκλου, συναρτήσει των οριζομένων από αυτές τόξων του κύκλου. (Η δραστηριότητα προτείνεται να υλοποιηθεί σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας.)

Δ2 (αντιστοιχεί στους στόχους 1.2.1 και 1.2.2)

Από σημείο εκτός κύκλου να κατασκευάσετε, με κανόνα και διαβήτη, την εφαπτομένη προς αυτόν.

Δ3 (αντιστοιχεί στο στόχο 1.3.1)

(α) Πόσοι κύκλοι διέρχονται από ένα σημείο, από δύο σημεία, από τρία σημεία; Αιτιολογείστε τις απαντήσεις σας. Υπάρχει πάντοτε κύκλος που διέρχεται από τέσσερα σημεία;

(β) Σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας να σχεδιάσετε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τις μεσοκαθέτους των πλευρών του. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε τον κύκλο που διέρχεται από τις κορυφές Α, Β και Γ. Μεταβάλετε τη θέση της κορυφής Δ, ώστε το τετράπλευρο να. γίνει εγγράψιμο. Τι παρατηρείτε για τις μεσοκαθέτους; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας και να εξετάσετε αν γενικεύεται για ν-γωνο.

Δ4 (αντιστοιχεί στο στόχο 1.4.1)

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ τέμνονται στο Η. Σχεδιάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ, ΕΖ και ΖΔ.

(α) Να βρείτε τα εγγράψιμα τετράπλευρα που σχηματίζονται.

(β) Να αποδείξετε ότι τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ είναι διχοτόμοι των γωνιών του (ορθικού) τριγώνου ΔΕΖ.

Δ5 (αντιστοιχεί στο στόχο 1.5.1)

Σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας να σχεδιάσετε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τις διχοτόμους των γωνιών του. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε τον εγγεγραμμένο κύκλο στο τρίγωνο ΑΒΓ. Μεταβάλλετε τη θέση της κορυφής Δ, ώστε ο προηγούμενος κύκλος να γίνει ο εγγεγραμμένος κύκλος του τετραπλεύρου. Τι παρατηρείτε για τις διχοτόμους; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας και να εξετάσετε αν γενικεύεται για ν-γωνο.

Δ6 (αντιστοιχεί στο στόχο 2.2.1)

Αν τα α, β, γ είναι γνωστά ευθύγραμμα τμήματα να κατασκευάσετε το ευθύγραμμο τμήμα χ ώστε να ισχύει: $\frac{α}{β}=\frac{γ}{χ}$.

Ως εφαρμογή να επιλύσετε γεωμετρικά την εξίσωση 3χ + 2 = 7

Δ7 (αντιστοιχεί στο στόχο 2.4.1)

(α) Δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Μ και ισχύει ΜΑ·ΜΒ = ΜΓ·ΜΔ.
Να αποδείξετε και για τις δυο περιπτώσεις ότι τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι κορυφές εγγράψιμου τετραπλεύρου.

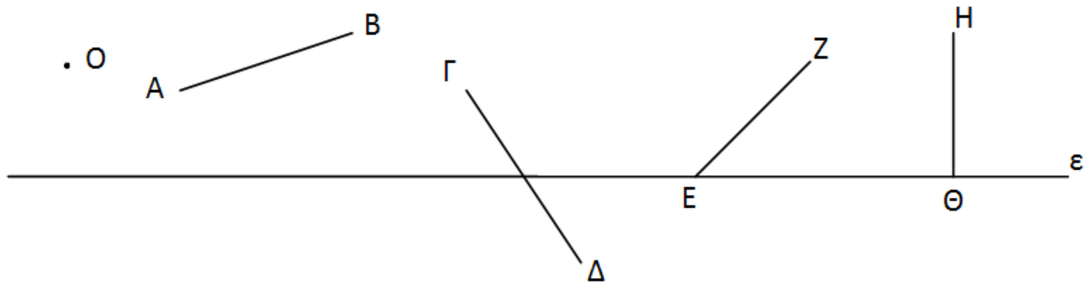
(β) Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης.

Δ8 (αντιστοιχεί στους στόχους 2.4.1 και 2.4.2.)

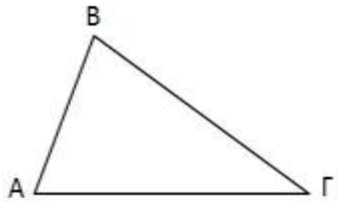
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 2, ΑΓ = 4 και τη γωνία $\hat{Α}=60^{o}$. Να κατασκευάσετε τρίγωνα όμοια προς το ΑΒΓ με λόγο ομοιότητας 1, 2 και $\frac{1}{2}$.

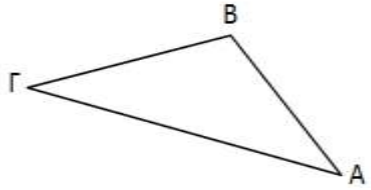
Δ9 (αντιστοιχεί στο στόχο 3.1.1)

(α) Να κατασκευάσετε τις ορθές προβολές του σημείου Ο και των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ και ΗΘ πάνω στην ευθεία ε.



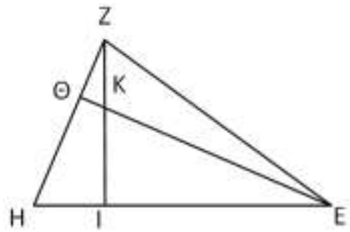
(β) Να κατασκευάσετε την προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στη ΒΓ σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:





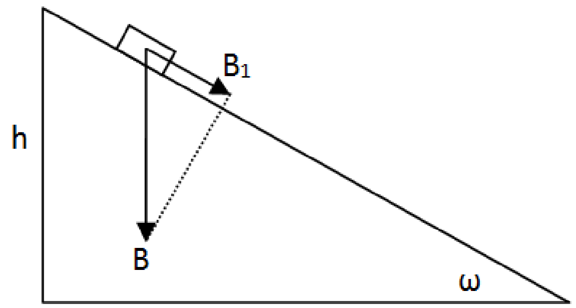
Δ10 (αντιστοιχεί στο στόχο 3.1.2)

Στο διπλανό σχήμα είναι ZI⊥EH και EΘ⊥ZH. Να εντοπίσετε προβολές ευθυγράμμων τμημάτων πάνω σε άλλα και να τις εκφράσετε συναρτήσει ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών.



Δ11 (Αντιστοιχεί στο στόχο 3.1.3)

Το έργο μιας δύναμης ισούται με το μέτρο της συνιστώσας της που είναι παράλληλη στη μετατόπιση επί το μέτρο της μετατόπισης. Έτσι, στο σχήμα, το έργο του βάρους του σώματος είναι το έργο της συνιστώσας του $\vec{B}_1$ ($W = B_1 \cdot \Delta x$).



(α) Αν ω είναι γωνία του κεκλιμένου επιπέδου με το οριζόντιο επίπεδο, να βρείτε τη γωνία του βάρους και της συνιστώσας του $\vec{B}_1$ που είναι παράλληλη στη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής.

(β) Αν $B = 10N$, και $\omega = 30^o$, να βρείτε το μέτρο B_1.

(γ) Να βρείτε το έργο του βάρους, αν το σώμα ξεκινάει από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου (ύψος h) και διανύει απόσταση ίση με το μήκος *l* του κεκλιμένου επιπέδου.

(δ) Να εξηγήσετε γιατί το έργο της συνιστώσας του βάρους είναι ίδιο με το έργο του βάρους και ίσο με τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας του σώματος. (Δίνεται ότι $E_\Delta = mgh$, $B = mg$.)

Δ12 (Αντιστοιχεί στο στόχο 3.2.2)

(α) Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη, τη μέση ανάλογο β δύο ευθυγράμμων τμημάτων α και γ.

(β) Βρείτε τη σχέση του μήκους ΑΔ του ύψους ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (με $\hat{A} = 90^o$) με το γεωμετρικό μέσο των μηκών ΒΔ και ΔΓ. Ποιο στοιχείο του τριγώνου είναι ο αριθμητικός μέσος των μηκών ΒΔ και ΔΓ;

Αποδείξτε ότι ο αριθμητικός μέσος είναι μικρότερος ή ίσος του αριθμητικού μέσου. Διερευνήστε πότε ισχύει η ισότητα.

Δ13 (Αντιστοιχεί στο στόχο 3.3.1)

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη τα τμήματα $\sqrt{2}$ ΑΒ και $\sqrt{3}$ ΑΒ.

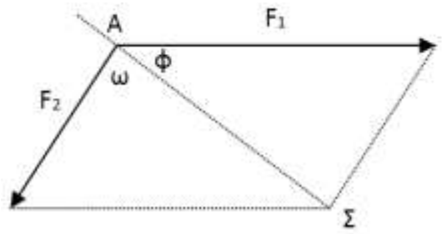
Δ14 (Αντιστοιχεί στους στόχους 3.4.1 και 3.4.2)

Στην Φυσική χρησιμοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου για να υπολογιστεί το μέτρο της συνισταμένης δύο δυνάμεων, δοθέντων των μέτρων τους και της μεταξύ τους γωνίας. Να ερμηνεύσετε το συγκεκριμένο υπολογισμό με βάση το νόμο των συνημιτόνων.

Δ15 (Αντιστοιχεί στους στόχους 3.4.1 και 3.4.2)

Ένα πλοίο κινείται με κατεύθυνση από το Α προς το Σ. Από τη στιγμή που βρίσκεται στη θέση Α και μέχρι την ολοκλήρωση της πορείας του, ασκούνται σε αυτό πλαγιομετωπικοί άνεμοι που το ωθούν με δύναμη μέτρου F_1 που σχηματίζει γωνία ω με την επιθυμητή πορεία πλεύσης. Ο καπετάνιος, προκειμένου να διατηρήσει σταθερή την πορεία, δίνει εντολή να στραφεί το πηδάλιο κατά φ μοίρες.

Αν οι προπέλες ωθούν το πλοίο με σταθερή δύναμη μέτρου F_1 μπορείτε να περιγράψετε έναν τρόπο με τον οποίο μπορεί να προσδιοριστεί η γωνία φ;



Δ16 (Αντιστοιχεί στο στόχο 4.1.2)

(α) Να χωρίσετε ένα τρίγωνο σε τέσσερα ίσα τρίγωνα φέρνοντας κατάλληλες ευθείες και στη συνέχεια να συγκρίνετε το εμβαδόν κάθε τριγώνου με το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου.

(β) Να χωρίσετε ένα παραλληλόγραμμο σε δύο, τρία, τέσσερα ίσα παραλληλόγραμμα και στη συνέχεια να συγκρίνετε το εμβαδόν κάθε παραλληλογράμμου με το εμβαδόν του αρχικού παραλληλόγραμμου.

Δ17 (Αντιστοιχεί στους στόχους 4.1.2 και 4.2.1)

(α) Να χωρίσετε ένα σκαληνό τρίγωνο σε δύο ή τρία άνισα αλλά ισοδύναμα τρίγωνα με ευθείες που διέρχονται από μια κορυφή.

(β) Να χωρίσετε ένα τρίγωνο με ευθεία που διέρχεται από την κορυφή σε δύο τρίγωνα με λόγο εμβαδών $\frac{1}{3}$.

(γ) Να συγκρίνετε ως προς το εμβαδόν τα τρίγωνα στα οποία χωρίζεται ένα τρίγωνο από τις διαμέσους του, στη συνέχεια να χωρίσετε ένα τρίγωνο σε τρία ισοδύναμα άνισα μεταξύ τους τρίγωνα, αξιοποιώντας το βαρύκεντρο.

Δ18 (Αντιστοιχεί στους στόχους 4.2.1 και 4.4.1)

Να αποδείξετε το Πυθαγόρειο θεώρημα με τη βοήθεια των εμβαδών και να το γενικεύσετε με την κατασκευή εξωτερικά των πλευρών του ομοίων σχημάτων. (Προτείνεται η δραστηριότητα να πραγματοποιηθεί σε περιβάλλον δυναμικής Γεωμετρίας εφόσον αυτό είναι δυνατόν).

Δ19 (Αντιστοιχεί στο στόχο 4.4.1)

Με τη βοήθεια ενός χάρτη να προσεγγίσετε την έκταση μιας γεωγραφικής περιοχής, π.χ. της Κέρκυρας.

Δ20 (Αντιστοιχεί στο στόχο 4.4.2)

Να αποδείξετε το θεώρημα των διχοτόμων με χρήση εμβαδών.

Δ21 (Αντιστοιχεί στο στόχο 4.5.1)

Να μετασχηματίσετε:

(α) ένα τρίγωνο σε ισοδύναμο παραλληλόγραμμο

(β) το παραπάνω παραλληλόγραμμο σε ισοδύναμο ορθογώνιο και

(γ) το παραπάνω ορθογώνιο σε ισοδύναμο τετράγωνο.

Δ22 (Αντιστοιχεί στο στόχο 5.1.1)

Να εξηγήσετε γιατί ο ρόμβος και το ορθογώνιο δεν είναι πάντοτε κανονικά πολύγωνα.

Δ23 (Αντιστοιχεί στο στόχο 5.2.1)

Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ να εγγράψετε:

(α) τετράγωνο και στη συνέχεια κανονικό οκτάγωνο. Συνεχίστε την ίδια διαδικασία με την εγγραφή κανονικού δεκαεξαγώνου, κ.ο.κ. Ποιος είναι ο μαθηματικός τύπος ο οποίος προσδιορίζει το πλήθος των πλευρών των παραπάνω πολυγώνων;

(β) ισόπλευρο τρίγωνο και στη συνέχεια κανονικό εξάγωνο. Συνεχίστε την ίδια διαδικασία με την εγγραφή κανονικού δωδεκαγώνου κ.ο.κ. Ποιος είναι ο μαθηματικός τύπος ο οποίος προσδιορίζει το πλήθος των πλευρών των παραπάνω πολυγώνων;

<u>Σημείωση</u>. Για να κατασκευαστούν κανονικά πολύγωνα χρειάζεται να χωριστεί ο κύκλος σε ίσα τόξα, κάτι το οποίο δεν είναι πάντα εφικτό με κανόνα και διαβήτη.

Δ24 (Αντιστοιχεί στο στόχο 5.2.2)

Να αποδείξετε ότι:

(α) κάθε κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές έχει ν άξονες συμμετρίας.

(β) κάθε κανονικό πολύγωνο με άρτιο πλήθος πλευρών έχει κέντρο συμμετρίας (γ) οι άξονες συμμετρίας ενός κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές είναι οι διχοτόμοι των γωνιών του και οι μεσοκάθετοι των πλευρών του.

Δ25 (Αντιστοιχεί στο στόχο 5.2.3)

(α) Ποια είναι τα κανονικά πολύγωνα με τα οποία μπορούμε να καλύψουμε πλήρως μια επιφάνεια, χρησιμοποιώντας ένα είδος ίσων μεταξύ τους πολυγώνων κάθε φορά;

(β) Να εξετάσετε ποιο από τα παραπάνω κανονικά πολύγωνα έχει για δεδομένο εμβαδόν τη μικρότερη περίμετρο.

(γ) Να δικαιολογήσετε το σχήμα που έχουν οι κερήθρες: ίσοι και κανονικοί αποθηκευτικοί χώροι που κατασκευάζονται χωρίς μεταξύ τους κενά και με το ελάχιστο δυνατόν κόστος.

Στην ίδια αρχή στηρίζονται και ορισμένα συστήματα κινητής τηλεφωνίας που είναι «κυψελωτά»: οι γεωγραφικές περιοχές, δηλαδή, που καλύπτουν οι σταθμοί βάσης διαιρούνται σε μικρότερες περιοχές, τις κυψέλες, οι οποίες προσφέρουν κάλυψη του επιθυμητού χώρου με ορισμό τοποθεσιών που είναι ίσες μεταξύ τους και έχουν την μικρότερη περιμετρική ζώνη.

Δ26 (Αντιστοιχεί στο στόχο 5.2.3)

Να εξετάσετε πόσα ίδια νομίσματα μπορείτε να τοποθετήσετε γύρω από ένα ίδιο με αυτά κεντρικό νόμισμα, με τέτοιον τρόπο ώστε να εφάπτονται διαδοχικά μεταξύ τους αλλά και με το αρχικό νόμισμα.

Δ27 (Αντιστοιχεί στους στόχους 6.1.1. και 6.1.2)

Να σχεδιάσετε κύκλο C με κέντρο σημείο O του επιπέδου και ακτίνα 4. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε το κανονικό εγγεγραμμένο και το κανονικό περιγεγραμμένο εξάγωνο στον κύκλο C.

(α) Να βρείτε τις περιμέτρους των δυο εξαγώνων.

(β) Τι συμπεραίνετε για το μήκος L του κύκλου;

(γ) Μπορείτε να βρείτε ακριβέστερο τρόπο προσέγγισης του μήκους του κύκλου; Τεκμηριώστε την απάντησή σας, με αριθμητικά αποτελέσματα.

Σημείωση. Η δραστηριότητα να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια λογισμικού εφόσον είναι δυνατόν.

Δ28 (Αντιστοιχεί στους στόχους 6.2.1. και 6.2.2)

Να σχεδιάσετε κύκλο C με κέντρο σημείο O του επιπέδου και ακτίνα 4. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε το κανονικό εγγεγραμμένο εξάγωνο και το κανονικό περιγεγραμμένο εξάγωνο στον κύκλο C.

(α) Να βρείτε τα εμβαδά των δυο εξαγώνων.

(β) Τι συμπεραίνετε για το εμβαδόν E του κύκλου;

(γ) Μπορείτε να βρείτε ακριβέστερο συμπέρασμα για το εμβαδόν του κύκλου; Τεκμηριώστε την απάντησή σας, με αριθμητικά αποτελέσματα.

Σημείωση. Η δραστηριότητα να πραγματοποιηθεί με τη βοήθεια λογισμικού εφόσον είναι δυνατόν.

Δ29 (Αντιστοιχεί στους στόχους 6.2.1. και 6.2.2)

(α) Δίνονται τα ισοπεριμετρικά μεταξύ τους σχήματα: κανονικό εξάγωνο, κανονικό δωδεκάγωνο, κύκλος. Να συγκρίνετε τα εμβαδά των παραπάνω ευθυγράμμων σχημάτων με το εμβαδόν του κύκλου.

(β) Δίνονται τα ισοδύναμα μεταξύ τους σχήματα: κανονικό εξάγωνο, κανονικό δωδεκάγωνο, κύκλος. Να συγκρίνετε τις περιμέτρους των παραπάνω ευθυγράμμων σχημάτων με το μήκος του κύκλου.

<u>Σημείωση</u>. Να συσχετιστεί με τη Δραστηριότητα **Δ25**.

Δ30 (Αντιστοιχεί στους στόχους 7.1.1 και 7.1.2)

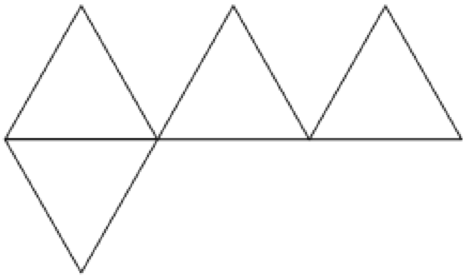
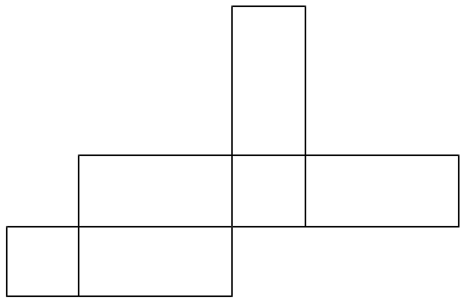
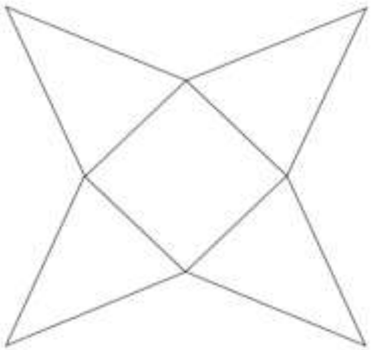
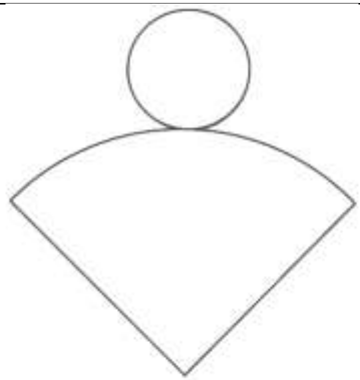
Με κατάλληλα χειραπτικά ή ψηφιακά εργαλεία να κατασκευάσετε:

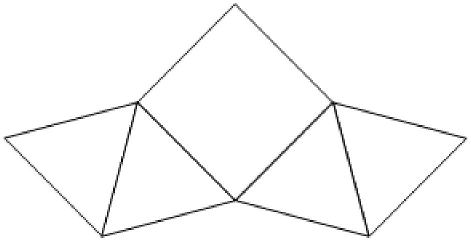
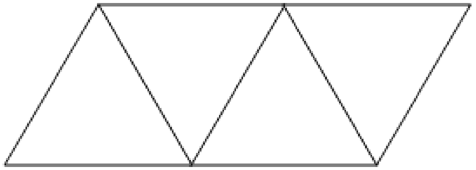
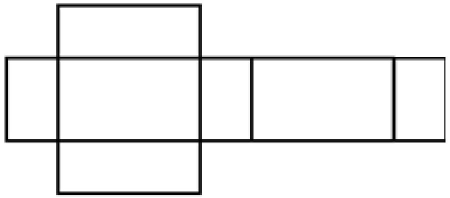
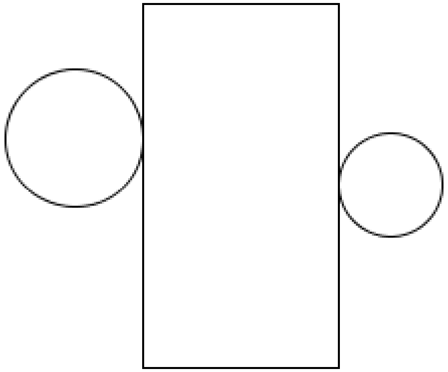
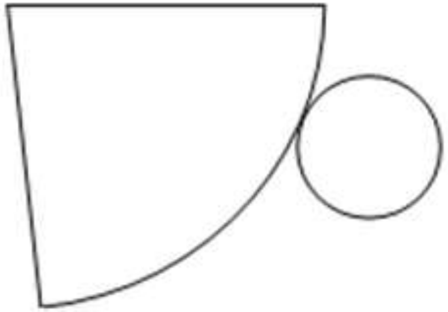
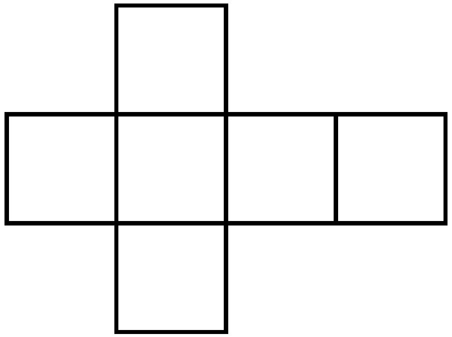
(α) αναπτύγματα στερεών και

(β) στερεά από τα αναπτύγματά τους.

Δ31 (Αντιστοιχεί στους στόχους 7.1.1 και 7.1.2)

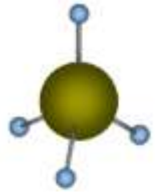
Για όσα από τα παρακάτω σχήματα αποτελούν ανάπτυγμα στερεού, να καταγράψετε το είδος του στερεού.

(α) 	(στ) 
(β) 	(ζ) 

(γ) 	(η) 
(δ) 	(θ) 
(ε) 	(ι) 

Δ32 (Αντιστοιχεί στο στόχο 7.3.1)

Για να παρασταθεί ο στερεοχημικός τύπος του μεθανίου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το μοντέλο σφαιρών - ράβδων που φαίνεται στην εικόνα, και στο οποίο οι σφαίρες που παριστάνουν τα υδρογόνα απέχουν ίσες αποστάσεις μεταξύ τους.



Έστω α η απόσταση μεταξύ των πυρήνων δύο υδρογόνων (δηλαδή, μεταξύ των κέντρων τους).

(α) Να βρείτε τον τύπο που δίνει την απόσταση του κέντρου του ατόμ ου του άνθρακα από το επίπεδο που ορίζουν τρία από τα κέντρα των ατόμων του υδρογόνου, ως συνάρτηση της απόστασης α.

(β) Αν ο πυρήνας του ατόμου του άνθρακα απέχει 110 pm (1 pm = 10^{-12} m) από το πρωτόνιο του υδρογόνου, να βρείτε την απόσταση α.

Δ33 (Αντιστοιχεί στο στόχο 7.4.1)

Με τη βοήθεια των αναπτυγμάτων του κυλίνδρου και του κώνου να επαληθεύσετε τους τύπους για το εμβαδό της επιφάνειάς τους.

Β΄ Λυκείου, Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών

Εισαγωγή

Το Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών της Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου περιλαμβάνει τρία κεφάλαια: α) τα διανύσματα, β) την ευθεία και γ) τις ακολουθίες, των οποίων οι γενικές αρχές, τα περιεχόμενα και οι στόχοι έχουν ως ακολούθως:

α) Διανύσματα στο επίπεδο

Η προσπάθεια των Μαθηματικών να μελετήσουν και να ερμηνεύσουν ότι μας περιβάλλει, οδηγεί σε μεγέθη τα οποία δεν ορίζονται μόνο με την αριθμητική τους τιμή. Για παράδειγμα, ενώ τα μεγέθη μάζα, όγκος, πυκνότητα, θερμοκρασία, προσδιορίζονται μόνο από το μέτρο τους (σε σχέση με την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης), τα μεγέθη δύναμη, ταχύτητα, επιτάχυνση, μαγνητική επαγωγή, για να τα προσδιορίσουμε, εκτός από το μέτρο τους, χρειαζόμαστε τη διεύθυνση και τη φορά τους. Τέτοια μεγέθη λέγονται διανυσματικά μεγέθη ή απλώς διανύσματα και τα μελετάει ο Διανυσματικός Λογισμός . Τα διανύσματα εισήχθησαν στα μαθηματικά από την Φυσική. Μέσα στα μαθηματικά εντοπίστηκαν τα κρίσιμα χαρακτηριστικά τους, οι κεντρικές κανονικότητες που εκφράζουν και από εκεί και πέρα ανεδείχθησαν ως κεντρικής σημασίας σε πολλές άλλες επιστήμες με πρώτο μεγάλο ιστορικό παράδειγμα τη Φυσική και σε επιστήμες που δύσκολα θα το φανταζόταν κανείς, όπως π.χ. στα Οικονομικά.

Τα διανύσματα και οι συναφείς έννοιες θα παρουσιαστούν και γεωμετρικά και αλγεβρικά με τη βοήθεια των συντεταγμένων. Η γεωμετρική παρουσίαση βοηθάει περισσότερο στην κατανόηση και ερμηνεία των φυσικών μεγεθών, ενώ η παρουσίαση με τη βοήθεια των συντεταγμένων τους διευκολύνει τη μεθοδολογική τους προσέγγιση και τη γενίκευση των συμπερασμάτων.

Στα μαθηματικά η σημασία των διανυσμάτων αναδεικνύεται με τη συμβολή τους στη μελέτη των επίπεδων και στερεών σχημάτων της Αναλυτικής Γεωμετρίας .

Για λόγους διασύνδεσης των εννοιών, είναι χρήσιμο να αποδειχθούν προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας , της Στερεομετρίας και της Τριγωνομετρίας με τη βοήθεια των διανυσμάτων(Θεωρήματα διαμέσων, Δύναμη σημείου ως προς κύκλο, βαρύκεντρο τριγώνου, κτλ.).

Με την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του Διανυσματικού Λογισμού οι μαθητές του Λυκείου θα πρέπει να γνωρίζουν:

- Την έννοια του Διανύσματος, τις πράξεις μεταξύ διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό αριθμού με διάνυσμα
- Το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στο επίπεδο και εφαρμογές του εσωτερικού γινομένου στη Γεωμετρία και στην Τριγωνομετρία.

β) Εξίσωση Ευθείας

Η Αναλυτική Γεωμετρία (Γεωμετρία των συντεταγμένων ή Καρτεσιανή Γεωμετρία) είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των σχημάτων και των μεταξύ τους σχέσεων με τη βοήθεια ενός συστήματος συντεταγμένων. Η παράσταση ενός σημείου του επιπέδου με ένα ζεύγος αριθμών οδηγεί στην «αλγεβροποίηση» της Γεωμετρίας, δηλαδή στη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων και των μεταξύ τους σχέσεων με αλγεβρικές μεθόδους. Στην Αναλυτική Γεωμετρία τα σχήματα, μέσω των συντεταγμένων, ορίζονται με εξισώσεις και για τη μελέτη των εξισώσεων έχουμε στη διάθεση μας τον πλούτο της αλγεβρικής μεθοδολογίας.

Με την ολοκλήρωση της διδασκαλίας της Αναλυτικής Γεωμετρίας οι μαθητές του Λυκείου θα πρέπει να γνωρίζουν:

- Τον τρόπο της γόνιμης σύνθεσης Γεωμετρίας και Άλγεβρας μέσω των συντεταγμένων που δημιουργεί την Αναλυτική Γεωμετρία.
- Την έννοια του συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας.
- Τις διάφορες μορφές εξίσωσης ευθείας
- Τη σχετική θέση δύο ευθειών στο επίπεδο (Επίλυση γραμμικού συστήματος 2×2 με τη μέθοδο των οριζουσών).

γ) Ακολουθίες και Όρια Ακολουθιών

Στην εισαγωγική παράγραφο παρουσιάζεται η μέθοδος της τέλειας ή μαθηματικής επαγωγής με στόχο οι μαθητές να περάσουν από την εφαρμογή της επαγωγικής σκέψης στην μαθηματική επαγωγή ως μέθοδο απόδειξης μαθηματικών προτάσεων ,να να εμβαθύνουν στην έννοια της απόδειξης, να καλλιεργήσει τις ευρετικές ικανότητές τους.
Η πρώτη ενότητα έχει στόχο να αντιληφθούν οι μαθητές την ανάγκη εισαγωγής της Ανάλυσης. Δηλαδή, τι είδους προβλήματα αντιμετωπίζουμε με την Μαθηματική Ανάλυση τα οποία δεν μπορούμε να αντιμετωπίσουμε με την Άλγεβρα και την Γεωμετρία. Ένα διαφωτιστικό εισαγωγικό παράδειγμα είναι ο υπολογισμός του εμβαδού του κύκλου με έμφαση στην άπειρη διαδικασία προσέγγισης και στον υπολογισμού της άγνωστης ποσότητας. Μέσα από αυτό το παράδειγμα και με την κατάλληλη διδακτική προσέγγιση μπορεί να αναπτυχθεί μια πρώτη διαισθητική αντίληψη του ορίου ακολουθίας η οποία πρέπει να εμπλουτισθεί στη συνέχεια και με άλλα κατάλληλα παραδείγματα. Επίσης, η κλασματική αναπαράσταση ρητών αριθμών με περιοδική αναπαράσταση, ειδικότερα όταν η περίοδος είναι 9 (π.χ. 0,999... = 1), την οποία έχουν γνωρίσει οι μαθητές στο Γυμνάσιο, μπορεί εδώ να γίνει με αυστηρό τρόπο συνδέοντας την δεκαδική αναπαράσταση των αριθμών με τις γεωμετρικές προόδους και με τα όρια ακολουθιών. Η έννοια του ορίου στη διακριτή περίπτωση των ακολουθιών είναι λιγότερο δύσκολη και μπορούν να αναπτυχθούν ευκολότερα σωστές αντιλήψεις και εικόνες.
Με την ολοκλήρωση της διδασκαλίας της ενότητας/κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει:

- Να αναγνωρίζουν την αναγκαιότητα εισαγωγής των άπειρων διαδικασιών για την επίλυση προβλημάτων
- Να αναγνωρίζουν τις ακολουθίες ως ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων και να μπορούν να τις αναπαριστούν γραφικά
- Να έχουν αναπτύξει μια πρώτη αντίληψη του ορίου ακολουθίας στην περίπτωση απλών μορφών αξιοποιώντας τις ΤΠΕ.
- Να μπορούν να βρίσκουν το όριο ακολουθιών απλής μορφής (π.χ. πολυωνυμικών, ρητών και με απλά ριζικά),με την βοήθεια των ιδιοτήτων των ορίων και τη χρήση των ορίων βασικών ακολουθιών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ **(Σύνολο 50 ώρες)**	**ΣΤΟΧΟΙ** **Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να:**	**ΣΧΟΛΙΑ - ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ**
1. Διανύσματα στο επίπεδο (22 ώρες)		
1.1. Η έννοια του διανύσματος (2 ώρες)	1.1.1. Αναγνωρίζουν τα στοιχεία ενός δοθέντος διανύσματος. 1.1.2. Σχεδιάζουν διανύσματα που ικανοποιούν δοθείσες συνθήκες.	Η εισαγωγή στην έννοια του διανύσματος μπορεί να γίνει με τη δραστηριότητα Δ1 Ως γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να ορισθεί η κυρτή γωνία που σχηματίζουν οποιαδήποτε ίσα προς αυτά διανύσματα $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$
1.2. Πράξεις με διανύσματα (3 ώρες)	1.2.1. Βρίσκουν το άθροισμα δυο ή περισσότερων διανυσμάτων και να εκφράζουν ένα διάνυσμα ως άθροισμα δυο ή περισσότερων διανυσμάτων	Η εισαγωγή της έννοιας του αθροίσματος διανυσμάτων μπορεί να γίνει με τη δραστηριότητα Δ2

	1.2.2. Βρίσκουν τη διαφορά δυο διανυσμάτων και να εκφράζουν ένα διάνυσμα συναρτήσει των διανυσματικών ακτίνων των άκρων του με σημείο αναφοράς. 1.2.3. Γνωρίζουν την τριγωνική ανισότητα και πότε ισχύουν οι ισότητες.	Να συσχετιστεί η τριγωνική ανισότητα με τις αντίστοιχες ιδιότητες των απολύτων τιμών και της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.
1.3. Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα (3 ώρες)	1.3.1. Εκφράζουν ένα διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό δύο ή περισσοτέρων διανυσμάτων. 1.3.2. Αποδεικνύουν ότι δύο διανύσματα είναι συγγραμμικά. 1.3.3. Αποδεικνύουν ότι τρία σημεία μπορεί να είναι συνευθειακά.	Να διατυπωθούν, αλλά να μην αποδειχθούν οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα. Η εισαγωγή της έννοιας του γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων προτείνεται να γίνει μέσω της δραστηριότητας Δ3. Να εκφραστεί η διανυσματική ακτίνα του μέσου ενός τμήματος ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσματικών ακτίνων των άκρων του. Να αποδειχθεί η διανυσματική συνθήκη παραλληλίας δύο διανυσμάτων.
1.4. Συντεταγμένες στο επίπεδο (5 ώρες)	1.4.1. Βρίσκουν στο καρτεσιανό επίπεδο τις συντεταγμένες ενός διανύσματος, όταν δίνονται οι συντεταγμένες των άκρων. 1.4.2. Σχεδιάζουν στο καρτεσιανό επίπεδο ένα διάνυσμα με γνωστή αρχή και γνωστές συντεταγμένες. 1.4.3. Υπολογίζουν στο καρτεσιανό επίπεδο τις συντεταγμένες: α) του γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων, των οποίων δίνονται οι συντεταγμένες, β) του διανύσματος, του οποίου δίνονται οι	Να αποδειχθεί ότι: «Κάθε διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων των αξόνων» και, με βάση αυτό, να ορισθούν οι συντεταγμένες διανύσματος.

	συντεταγμένες των άκρων και γ) του μέσου ενός ευθύγραμμου τμήματος, του οποίου δίνονται οι συντεταγμένες των άκρων. 1.4.4. Υπολογίζουν στο καρτεσιανό επίπεδο το μέτρο ενός διανύσματος, του οποίου δίνονται οι συντεταγμένες, καθώς και την απόσταση δύο σημείων Α και Β των οποίων δίνονται οι συντεταγμένες.	
	1.4.5. Εξετάζουν, αν δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου είναι παράλληλα.	Να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=0,\ \text{με}\ \det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ όπου (x_1, y_1) και (x_2, y_2), οι συντεταγμένες των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντιστοίχως και στη συνέχεια να αποδειχθεί η συνθήκη παραλληλίας δύο διανυσμάτων με τη βοήθεια των συντελεστών διεύθυνσης αυτών.
	1.4.6. Εξετάζουν αν τρία σημεία του καρτεσιανού επιπέδου είναι συνευθειακά.	Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ4.
1.5. Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων (9 ώρες)	1.5.1. Υπολογίζουν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων από τα μέτρα του και τη γωνία που σχηματίζουν.	Η εισαγωγή στην έννοια του εσωτερικού γινομένου μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της δραστηριότητας Δ5. Είναι σημαντικό κατά τη διδασκαλία οι μαθητές να εμπλακούν στην απόδειξη, με χρήση του ορισμού του εσωτερικού γινομένου: α) της αντιμεταθετικής ιδιότητάς του και β) της συνθήκης παραλληλίας δύο διανυσμάτων, καθώς και στον υπολογισμό του εσωτερικού τετραγώνου διανύσματος
	1.5.2. Υπολογίζουν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων από τις συντεταγμένες τους.	Να αποδειχθεί η αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου. Η απόδειξη μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του νόμου των συνημιτόνων. Να αποδειχθούν, με τη βοήθεια της αναλυτικής έκφρασης του εσωτερικού γινομένου, όλες οι ιδιότητές του.

		Για να κατανοήσουν οι μαθητές ότι οι ιδιότητες των απολύτων τιμών και των δυνάμεων πραγματικών αριθμών δεν μεταφέρονται όλες στα διανύσματα, προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ6.
	1.5.3. Υπολογίζουν τη γωνία δύο διανυσμάτων από τις συντεταγμένες τους.	
	1.5.4. Εξετάζουν αν ισχύει η καθετότητα δύο διανυσμάτων.	Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί η συνθήκη καθετότητας δύο διανυσμάτων και διανυσματικά και αναλυτικά (με χρήση των συντεταγμένων, καθώς και με χρήση των συντελεστών διεύθυνσης των διανυσμάτων).
	1.5.5. Υπολογίζουν την προβολή διανύσματος σε άξονα / διάνυσμα.	
	1.5.6. Αναλύουν ένα διάνυσμα σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία είναι παράλληλη προς δοθέν διάνυσμα.	Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ7
		Να αποδειχθούν, με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου: α) Το θεώρημα των διαμέσων και β) Η δύναμη σημείου ως προς κύκλο. Να αποδειχθεί, με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου ο τύπος του συνημιτόνου διαφοράς τόξων και στη συνέχεια, από τον τύπο αυτό, να παραχθούν οι τύποι του συνημιτόνου αθροίσματος και του ημιτόνου αθροίσματος και διαφοράς τόξων, καθώς και του ημιτόνου και συνημιτόνου διπλασίου τόξου.
2. Ευθεία στο επίπεδο (12 ώρες)		

2.1. Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας (2 ώρες)	2.1.1. Εξηγούν τη γεωμετρική σημασία της κλίσης ευθείας. 2.1.2. Χαράσσουν την ευθεία της οποίας δίνονται: α) Οι συντεταγμένες ενός σημείου της και ο συντελεστής διεύθυνσης αυτής. β) Οι συντεταγμένες ενός σημείου της και ενός διανύσματος που είναι παράλληλο προς αυτή. 2.1.3. Διακρίνουν, με τη βοήθεια των συντελεστών διεύθυνσης, πότε δυο ευθείες είναι παράλληλες και πότε είναι κάθετες.	Να δοθεί ο ορισμός του συντελεστή διεύθυνσης ευθείας και να συσχετισθεί με το συντελεστή διεύθυνσης των παράλληλων προς αυτή διανυσμάτων. Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ 8. Να αποδειχθεί η συνθήκη παραλληλίας και καθετότητας ευθειών.

2.2. Εξίσωση ευθείας (3 ώρες)	2.2.1. Βρίσκουν την εξίσωση της ευθείας σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
	α) Όταν δίνονται οι συντεταγμένες ενός σημείου της και ο συντελεστής διεύθυνσης αυτής.
	β) Όταν είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και δίνονται οι συντεταγμένες ενός σημείου της.
	γ) Όταν δίνονται οι συντεταγμένες δύο σημείων της.
	2.2.2. Βρίσκουν την εξίσωση της ευθείας όταν δίνονται οι συντεταγμένες ενός σημείου της και ενός διανύσματος παράλληλου προς αυτή.
		Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από γνωστό σημείο $M_0(x_0, y_0)$ και έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης λ, προτείνεται να βρεθεί με χρήση της αναλυτικής έκφρασης της συνθήκης παραλληλίας των διανυσμάτων $\vec{\delta} = (1, \lambda) // \varepsilon$ και $\overrightarrow{M_0M}$ για κάθε σημείο M της ε, ενώ
		Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από γνωστό σημείο $M_0(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη προς τον άξονα $y'y$, μπορεί να βρεθεί με χρήση της αναλυτικής έκφρασης της συνθήκης παραλληλίας των διανυσμάτων $\vec{\delta} = (0,1) // \varepsilon$ και $\overrightarrow{M_0M}$ για κάθε σημείο M της ε.
		Στη δραστηριότητα Δ9 προτείνεται ένας άλλος τρόπος εύρεσης της εξίσωσης ευθείας.

	2.2.3. Ελέγχουν αν: α) Ένα σημείο με γνωστές συντεταγμένες ανήκει σε ευθεία της οποίας δίνεται η εξίσωση. β) Τρία ή περισσότερα σημεία με γνωστές συντεταγμένες είναι συνευθειακά.	
2.3. Η εξίσωση $Ax+By=\Gamma$, με $A\neq 0$ ή $B\neq 0$ (4 ώρες)	2.3.1. Προσδιορίζουν την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από γνωστό σημείο και είναι κάθετη σε γνωστό διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου.	Να αποδειχθεί με χρήση της αναλυτικής έκφρασης της συνθήκης καθετότητας δύο διανυσμάτων ότι: α) Αν *ε* είναι μια ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου $M_0(x_0, y_0)$ ένα σημείο αυτής και $\vec{n}=(A,B)$ ένα διάνυσμα κάθετο στη *ε*,προς αυτή, τότε ευθεία *ε* έχει εξίσωση την: $Ax+By=\Gamma$, με $A\neq 0$ ή $B\neq 0$ (1), και $\Gamma=Ax_o+By_o$, αλλά και αντιστρόφως: β) Κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n}=(A,B)$. Να τονισθεί ότι ο προηγούμενος τρόπος απόδειξης της γενικής μορφής της εξίσωσης ευθείας έχει τα ακόλουθα πλεονεκτήματα: ✓ Καταλήγουμε άμεσα στο συμπέρασμα ότι το διάνυσμα που έχει συντεταγμένες τους συντελεστές των x και y είναι κάθετο στην ευθεία ε, οπότε άμεσα μπορούμε να βρούμε ένα διάνυσμα παράλληλο προς την ευθεία ε. ✓ Μπορούμε, χωρίς να απαιτείται να γνωρίζουμε την αναλυτική συνθήκη παραλληλίας δύο διανυσμάτων, να βρούμε όλες τις μορφές της εξίσωσης ευθείας που βρήκαμε στην 2.2.1. και ✓ Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε τη γενική μορφή εξίσωσης επιπέδου στο χώρο.

	2.3.2. Σχεδιάζουν μια ευθεία, όταν δίνεται η εξίσωση της με μορφή $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y=\Gamma$, με $\mathrm{A}\neq 0$ ή $\mathrm{B}\neq 0$ 2.3.3. Διακρίνουν πότε μια ευθεία με εξίσωση $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y=\Gamma$, με $\mathrm{A}\neq 0$ ή $\mathrm{B}\neq 0$ είναι πλάγια, κατακόρυφη ή οριζόντια. 2.3.4. Προσδιορίζουν ένα διάνυσμα κάθετο και ένα παράλληλο προς μια ευθεία με εξίσωση της. 2.3.5. Ελέγχουν αν τρεις ή περισσότερες ευθείες, των οποίων δίνονται οι εξισώσεις, διέρχονται από το ίδιο σημείο.	Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ10. Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ11.
2.4. Σχετική θέση δύο ευθειών στο επίπεδο (Επίλυση γραμμικού συστήματος 2×2 με τη μέθοδο των οριζουσών) (3 ώρες)	2.4.1. Λύνουν και διερευνούν γραμμικά συστήματα 2×2	Η σχετική θέση των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος: $\begin{cases}\mathrm{A}x+\mathrm{B}y=\Gamma\\ \mathrm{A}'x+\mathrm{B}'y=\Gamma'\end{cases}$, με ($\mathrm{A}\neq 0$ ή $\mathrm{B}\neq 0$) και ($\mathrm{A}'\neq 0$ ή $\mathrm{B}'\neq 0$), θα μελετηθεί με τη βοήθεια αναλυτικής έκφρασης της συνθήκης παραλληλίας των διανυσμάτων (A,B) και $(\mathrm{A}',\mathrm{B}')$ που είναι κάθετα προς τις ευθείες του συστήματος. Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ12.
3. Ακολουθίες και όριο ακολουθιών (16 ώρες)		
3.1. Μαθηματική επαγωγή (3 ώρες)	3.1.1. Διατυπώνουν την αρχή της μαθηματικής επαγωγής. Διακρίνουν την σημασία της δομής της(δύο βήματα) και την εφαρμόζουν στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων.	Προτείνεται το παράδειγμα του «ντόμινο» ως το αντίστοιχο της αναπαράστασης, με μη μαθηματικά μέσα, της ιδέας της μαθηματικής επαγωγής. Να αντιληφθούν οι μαθητές ότι επαγωγή χρησιμοποιείται

	3.1.2. Διατυπώνουν εικασίες με απλό επαγωγικό συλλογισμό και τις αποδεικνύουν με Μαθηματική επαγωγή.	όταν η μεταβλητή είναι φυσικός αριθμός. Να αντιληφθούν οι μαθητές ότι ο επαγωγικός συλλογισμός δεν οδηγεί σε απόδειξη στα μαθηματικά αλλά σε εικασία. Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ13 και Δ14. Να αποδειχθεί με τη μαθηματική επαγωγή ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύουν: $$1^2+2^2+\ldots+\nu^2=\frac{\nu\cdot(\nu+1)\cdot(2\nu+1)}{6}$$ και $$(1+\alpha)^\nu \geq 1+\nu\alpha,\ \ \text{με } \alpha>-1$$ (Ανισότητα Bernoulli).
3.2. Η έννοια της ακολουθίας (Επανάληψη) (1 ώρα)	3.2.1. Παριστάνουν γραφικά μια ακολουθία (α_ν) και γνωρίζουν ότι η γραφική της παράσταση αποτελείται από τα μεμονωμένα σημεία $\mathrm{M}_\nu(\nu, f(\nu))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=f(x), x\in \mathrm{A}$, με $\mathbb{N}^* \subseteq \mathrm{A}$ 3.2.2. Βρίσκουν τον ν-οστό όρο μιας ακολουθίας αριθμών, όταν αυτή δίνεται υπό μορφή κανονικότητας.	Η ακολουθία να ορισθεί ως συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών.
3.3. Όριο ακολουθίας (4 ώρες)		Να αντιληφθούν οι μαθητές την αναγκαιότητα εισαγωγής της έννοιας της σύγκλισης ακολουθίας μέσα από τον υπολογισμό του εμβαδού κύκλου ως μιας διαδικασίας υπολογισμού άγνωστων ποσοτήτων, μέσω της προσέγγισης τους οσοδήποτε κοντά από γνωστές ποσότητες. Προτείνεται η δραστηριότητα Δ15.

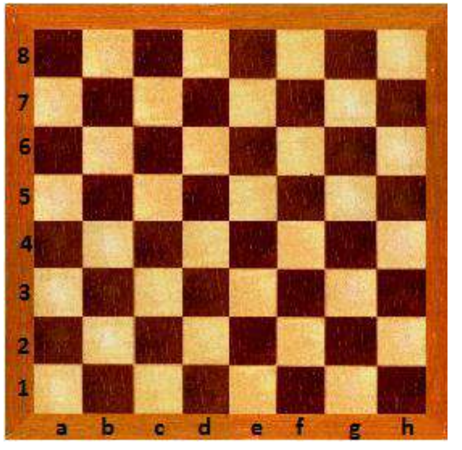
	3.3.1. Αποκτήσουν μια διαισθητική αντίληψη για την έννοια του ορίου ακολουθίας και την ερμηνεύουν γραφικά.	Η εισαγωγή στην έννοια του ορίου ακολουθίας (πεπερασμένου ή μη πεπερασμένου) προτείνεται να γίνει με διαισθητικό τρόπο και με τη βοήθεια των ΤΠΕ, κάνοντας χρήση τόσο ενός πίνακα τιμών της, όσο και της γραφικής παράστασης της ακολουθίας. Για το πεπερασμένο όριο, ως παραδείγματα προτείνονται οι ακολουθίες: $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, και $\beta_\nu = 1 + \frac{(-1)^\nu}{\nu}$ Με τα συγκεκριμένα παραδείγματα να αντιληφθούν οι μαθητές ότι για να είναι το $l \in \mathbf{R}$ όριο μιας ακολουθίας (α_ν) πρέπει και αρκεί όλοι οι όροι της, ακολουθίας, εκτός από πεπερασμένο πλήθος, να απέχουν από το l απόσταση μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό επιλέξουμε. Για το μη πεπερασμένο όριο, ως παραδείγματα προτείνονται οι ακολουθίες: $\alpha_\nu = \nu$, $\beta_\nu = \sqrt{\nu}$ και $\gamma_\nu = -2\nu + 1$. Με τα συγκεκριμένα παραδείγματα να αντιληφθούν οι μαθητές ότι : α) Το όριο μιας ακολουθίας (α_ν) είναι $+\infty$ όταν για οποιονδήποτε αριθμό επιλέξουμε οι όροι της ακολουθίας εκτός από πεπερασμένο πλήθος είναι μεγαλύτεροι από αυτό τον αριθμό και β) Το όριο μιας ακολουθίας (α_ν) είναι $-\infty$ όταν για οποιονδήποτε αριθμό επιλέξουμε οι όροι της ακολουθίας εκτός από πεπερασμένο πλήθος είναι μικρότεροι από αυτό τον αριθμό..

	3.3.2. Διακρίνουν τις έννοιες, πεπερασμένο όριο ακολουθίας, μη πεπερασμένο όριο, ακολουθία χωρίς όριο και εφαρμόζουν κατάλληλες τεχνικές για την εύρεση του ορίου.	Μπορεί να γίνει ιστορική αναφορά στη προσεγγιστική μέθοδο του Ήρωνα για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας θετικού αριθμού
3.4. Βασικές ιδιότητες (πράξεις με όρια) (4 ώρες)	3.4.1. Διακρίνουν τους πραγματικούς αριθμούς από το $+\infty$ και το $-\infty$ και πότε μια πράξη μεταξύ των συμβόλων αυτών και των πραγματικών αριθμών κατά τον υπολογισμό ορίων είναι «επιτρεπτή» και πότε «μη επιτρεπτή».	Να διατυπωθούν, χωρίς να αποδειχθούν, οι βασικές ιδιότητες των ορίων
	3.4.2. Υπολογίζουν τα όρια βασικών ακολουθιών (Πολυωνυμικών, Ρητών και με απλά ριζικά).	Με χρήση των ιδιοτήτων των ορίων να αποδειχθούν τα παρακάτω βασικά όρια: $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \frac{1}{\nu^k} = 0$ και $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \nu^k = +\infty$, αν $k \in \mathbb{N}^*$
3.5. Το όριο της ακολουθίας $\alpha_\nu = \alpha^\nu$, με $\alpha > -1$ και εφαρμογές του (4 ώρες)	3.5.1. Χρησιμοποιούν τα όρια της μορφής $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha^\nu$, με $\alpha > -1$ και τις ιδιότητες των ορίων των ακολουθιών στην επίλυση προβλημάτων.	Με διαισθητικό τρόπο (πίνακα τιμών-γραφική παράσταση) και χρήση των ΤΠΕ να παρουσιασθούν τα παρακάτω όρια: $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha^\nu = 0$, αν $\lvert\alpha\rvert < 1$ και $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha^\nu = +\infty$, αν $\alpha > 1$
	3.5.2. Συνδέουν και ταυτοποιούν τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς με την κλασματική αναπαράσταση τους.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ16. Να γίνει αναφορά στον αριθμό e.
	3.5.3. Υπολογίζουν το άθροισμα των άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, όταν $\lvert\lambda\rvert < 1$.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ17 .
	3.5.4. Λύνουν προβλήματα που προκύπτουν από πραγματικές φυσικές καταστάσεις και τα αντιμετωπίζουν με τις ανάλογες μαθηματικές μεθόδους.	Προτείνεται η δραστηριότητα Δ18.

Ενδεικτικές δραστηριότητες

Δ1 (αντιστοιχεί στο στόχο 1.1.1)

Στη σκακιέρα να τοποθετήσετε τη βασίλισσα στη θέση (d,6) και να περιγράψετε την κίνηση της βασίλισσας σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
Στη σκακιέρα να τοποθετήσετε ένα άλογο στη θέση (b,3) και να περιγράψετε την κίνηση του αλόγου σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
Στην σκακιέρα να τοποθετήσετε ένα πύργο στη θέση (g,4) και να περιγράψετε την κίνηση του πύργου σε τρεις διαφορετικές θέσεις.
Στη σκακιέρα να τοποθετήσετε ένα αξιωματικό στη θέση (e,5) και να περιγράψετε την κίνηση του αξιωματικού σε τρεις διαφορετικές θέσεις.

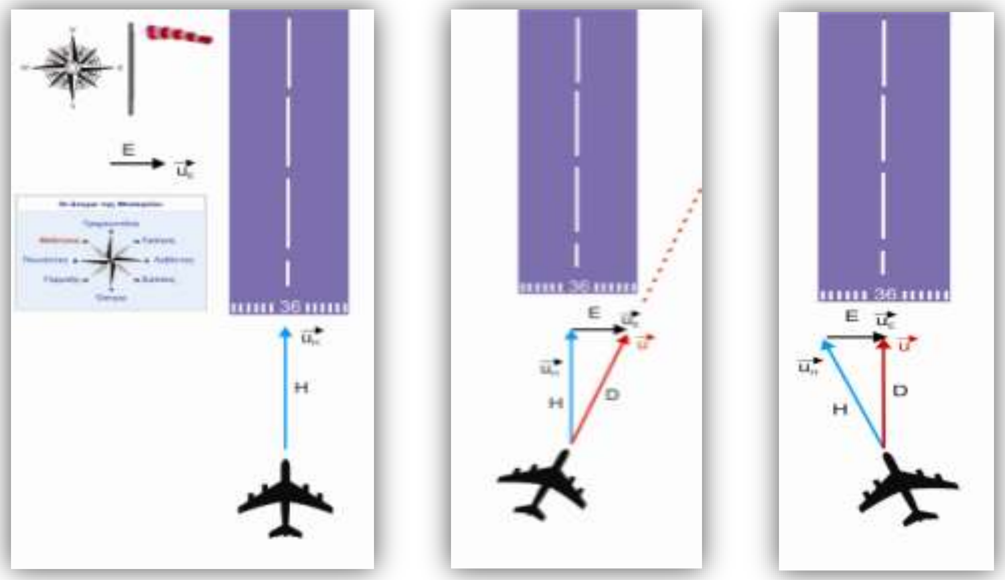


Δ2 (αντιστοιχεί στο στόχο 1.2.1)

Ένα αεροπλάνο προσπαθεί να προσγειωθεί στον αεροδιάδρομο που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο άνεμος που φυσάει είναι ανατολικός *Ε* με ταχύτητα μέτρου $u_E = 30\, m/s$ και έχει διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση του αεροδιαδρόμου. Η ταχύτητα του αεροπλάνου έχει μέτρο $u_H = 50\, m/s$ και διεύθυνση τη διεύθυνση της ευθείας Η. Να εξετάσετε:

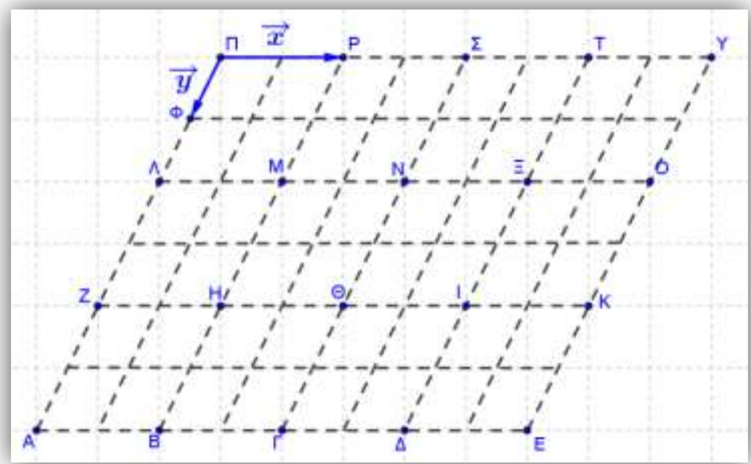
α) Αν ο πιλότος, κινούμενος στην ίδια διεύθυνση με τον αεροδιάδρομο, θα καταφέρει να προσγειωθεί;

β) Αν όχι, σε ποια διεύθυνση πρέπει να κινηθεί, ώστε να προσγειωθεί σωστά. Στην περίπτωση αυτή ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας προσγείωσης;



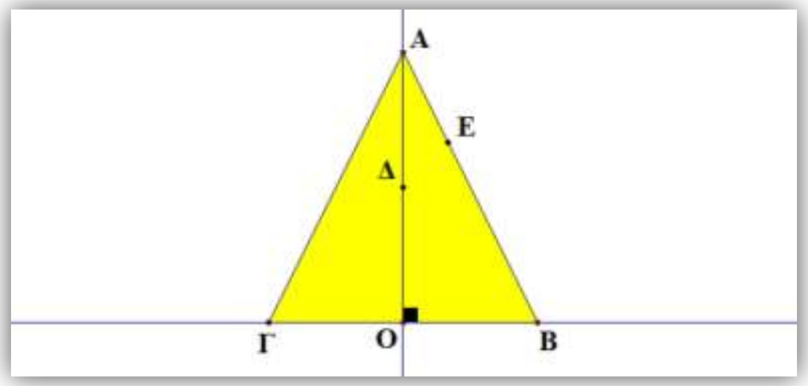
Δ3 (αντιστοιχεί στο στόχο 1.3.1)

Μια δασκάλα πήγε με τους μαθητές της τάξης της σε ένα θεματικό πάρκο. Οι μαθητές θέλησαν να παίξουν το παιχνίδι του κρυμμένου θησαυρού. Η δασκάλα βρίσκεται στη θέση Π και κατευθύνει τους μαθητές. Οι πορείες που πρέπει να ακολουθήσουν είναι: $\overrightarrow{\text{ΡΣ}},\overrightarrow{\text{ΦΛ}},\overrightarrow{\text{ΠΜ}},\overrightarrow{\text{ΚΘ}},\overrightarrow{\text{ΗΔ}},\overrightarrow{\text{ΓΝ}},\overrightarrow{\text{ΚΝ}},\overrightarrow{\text{ΥΘ}}$.Να εκφράσετε τις πορείες τους διανυσματικά συναρτήσει των διανυσμάτων $\overrightarrow{\text{ΠΡ}}=\vec{x}$ και $\overrightarrow{\text{ΠΦ}}=\vec{y}$.



Δ4 (αντιστοιχεί στο στόχο 1.4.6)

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$, το $ΑΟ$ είναι το ύψος του, το $Δ$ είναι το μέσο του $ΑΟ$ και το $Ε$ είναι σημείο της $ΑΒ$ με $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΒ$.

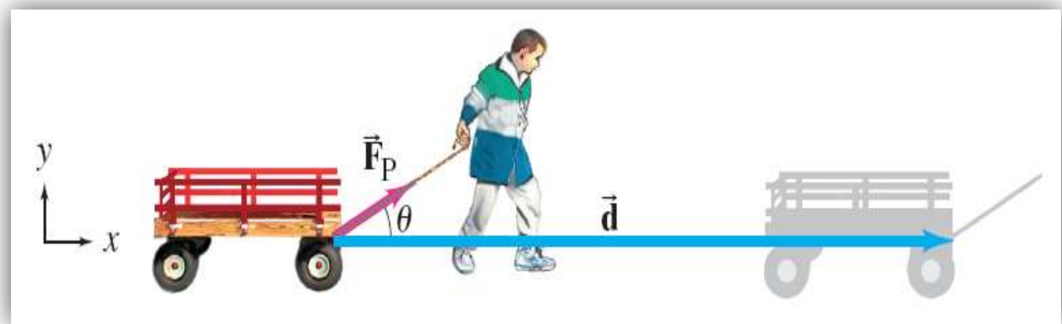


Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ και Ε είναι συνευθειακά, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

α) Επιλέξτε σύστημα συντεταγμένων με θετικό ημιάξονα των *x* την ημιευθεία ΟΒ και θετικό ημιάξονα των *y* την ημιευθεία ΟΑ και βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Γ, Δ και Ε συναρτήσει των μηκών $(ΟΑ) = α$ και $(ΟΒ) = β$ των ΟΑ και ΟΒ αντιστοίχως β) Βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{\Gamma E}$ και στη συνέχεια δείξτε ότι τα διανύσματα αυτά είναι συγγραμμικά.

Δ5 (αντιστοιχεί στο στόχο 1.5.1)

Η δύναμη του διαγράμματος έχει μέτρο $F_p = 20N$ και σχηματίζει γωνία 30° με το οριζόντιο έδαφος. Να βρείτε το έργο της δύναμης αυτής, όταν το βαγονάκι σύρεται 100m κατά μήκος του εδάφους.



Δ6 (αντιστοιχεί στο στόχο 1.5.2)

α) Έστω δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (με όποιες συντεταγμένες επιλέξετε). Υπολογίστε τα $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|$ και $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και συγκρίνετέ τα. Κάντε το ίδιο και για άλλα ζεύγη μη συγγραμμικών διανυσμάτων. Τι παρατηρείτε; Γενικεύστε το συμπέρασμά σας.

β) Κάντε τα ίδια και για διάφορα ζεύγη συγγραμμικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Τι παρατηρείτε; Γενικεύστε το συμπέρασμά σας.

γ) Αποδείξτε ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και ότι η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta}$.

δ) Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι για όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2 \le \vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$ και ότι η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta}$

ε) Τέλος, αποδείξτε ότι $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \le (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$, για οποιουσδήποτε $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

και ότι η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$

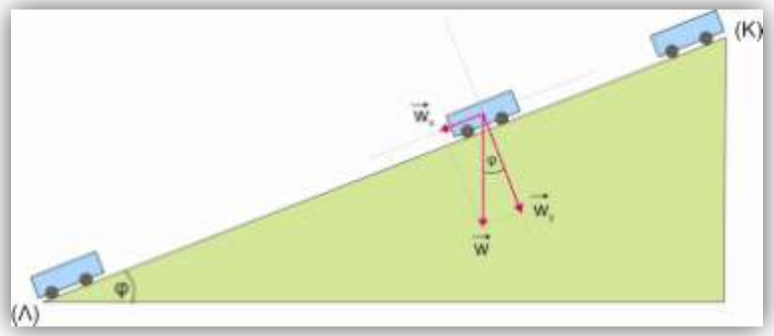
Δ7 (αντιστοιχεί στο στόχο 1.5.6)

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται ένα κεκλιμένο επίπεδο ΚΛ στο οποίο κινείται, υπό την επίδραση του βάρους του, σώμα βάρους W= 50N, ξεκινώντας από την κορυφή του Κ και καταλήγοντας στην βάση του Λ.

Αν η γωνία που σχηματίζει το κεκλιμένο επίπεδο με το οριζόντιο επίπεδο είναι ίση με $\varphi = 30^\circ$ και το ύψος της κορυφής Κ του κεκλιμένου επιπέδου από το οριζόντιο επίπεδο είναι ίσο με $h = 5m$:

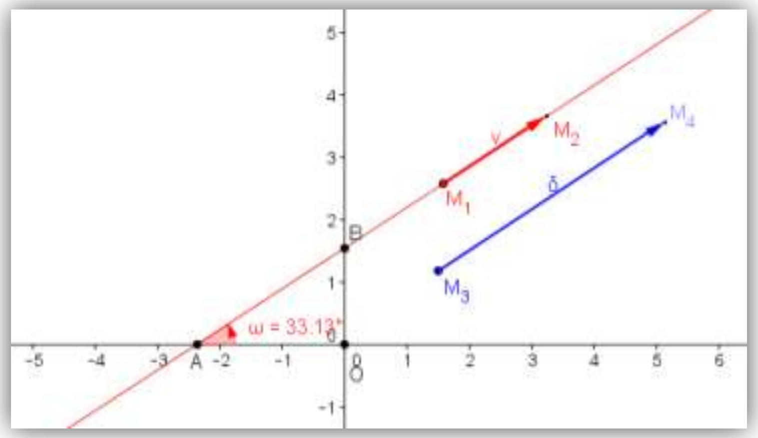
α) Να υπολογίσετε το έργο που παράγει το βάρος $\vec{W}$, κατά την μετακίνηση του σώματος από το σημείο Κ μέχρι το σημείο Λ και να εκφράσετε το έργο αυτό ως εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων.

β) Να αναλύσετε το βάρος $\vec{w}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{W_x} // \overrightarrow{K\Lambda}$ και $\vec{W_y} \perp \overrightarrow{K\Lambda}$ και να υπολογίσετε τα μέτρα τους, καθώς και το έργο που παράγουν κατά την ίδια μετακίνηση του σώματος. Τι συμπεραίνετε; Να δικαιολογήσετε το συμπέρασμά σας.



Δ 8 (αντιστοιχεί στο στόχο 2.1.1)

Με τη χρήση του λογισμικού GeoGebra επιλέξτε δύο μεταβλητά σημεία Α και Β των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, χαράξτε την ευθεία *ε* που διέρχεται από τα σημεία Α και Β και υπολογίστε την εφαπτομένη της γωνίας *ω* που σχηματίζει η ευθεία *ε* με τον άξονα $x'x$. Πάνω στην ευθεία *ε* επιλέξτε τυχαία δύο σημεία M_1 και M_2, υπολογίστε τις συντεταγμένες τους (x_1, y_1) και (x_2, y_2) και έπειτα το πηλίκο $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Θεωρήστε επιπλέον και ένα τυχαίο διάνυσμα $\vec{\delta} = \overrightarrow{\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2}$ παράλληλο προς την ευθεία *ε*, υπολογίστε τις συντεταγμένες του (α, β) και έπειτα το συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\vec{\delta}} = \frac{\beta}{\alpha}$ αυτού. Μετακινήστε τα σημεία Α και Β πάνω στους άξονες, καθώς και το διάνυσμα $\vec{\delta} = \overrightarrow{\mathrm{N}_1\mathrm{N}_2}$ και συγκρίνετε την $\varepsilon\varphi\omega$ με το πηλίκο $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ και το συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\vec{\delta}}$ του διανύσματος $\vec{\delta}$. Τι παρατηρείτε;



Δ9 (αντιστοιχεί στους στόχους 2.2.1 & 2.2.2)

Έστω ε μια ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου, $M_0(x_0, y_0)$ ένα σταθερό σημείο αυτής και $\vec{\delta}=(\alpha,\beta)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα παράλληλο προς την ε (Σχήμα). Έστω, επιπλέον, τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της ε, $\vec{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$ και $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων M_0 και M αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι:

i) $\vec{r}=\vec{r}_0+t\cdot\vec{\delta},\quad t\in\mathbf{R}$ (Διανυσματική εξίσωση της ευθείας ε)

ii) $\begin{cases} x=x_0+t\cdot\alpha \\ y=y_0+t\cdot\beta \end{cases},\quad t\in\mathbf{R}$ (Παραμετρική εξίσωση της ευθείας ε)

iii) Για $\alpha\neq 0$, η παραμετρική εξίσωση της ε παίρνει τη μορφή:

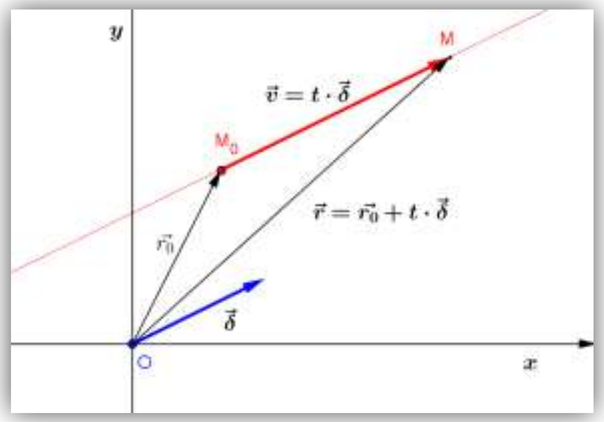
$$y-y_0=\lambda\cdot(x-x_0),\ \text{όπου}\ \lambda=\frac{\beta}{\alpha}=\lambda_{\vec{\delta}}=\lambda_{\varepsilon},$$

αλλά και, αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής $y-y_0=\lambda\cdot(x-x_0)$ παριστάνει ευθεία με παραμετρική μορφή:

$$\begin{cases} x=x_0+t\cdot 1 \\ y=y_0+t\cdot\lambda \end{cases},\quad t\in\mathbf{R},$$

δηλαδή ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M_0(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}=(1,\lambda)$.

iv) Για $\alpha = 0$, η παραμετρική εξίσωση της ε παίρνει τη μορφή $x = x_0$, αλλά και, αντιστρόφως, κάθε εξίσωση της μορφής παριστάνει ευθεία με παραμετρική μορφή $\begin{cases} x = x_0 + t \cdot 0 \\ y = y_0 + t \cdot 1 \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$, δηλαδή ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M_0(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta} = (0,1)$.



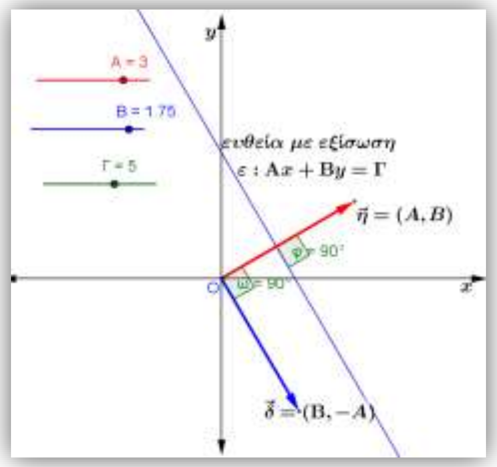
Δ10 (Αντιστοιχεί στο στόχο 2.3.1)

Με τη χρήση του λογισμικού GeoGebra να επιλέξετε τρεις δρομείς Α, Β, Γ και να παραστήσετε γραφικά τα διανύσματα $\vec{n} = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$ και $\vec{\delta} = (\mathrm{B}, -\mathrm{A})$, καθώς και την ευθεία *ε* με εξίσωση $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y = \Gamma$. Να υπολογίσετε επιπλέον το μέτρο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{n}$ και $\vec{\delta}$, καθώς και το μέτρο της γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{n}$ με την ευθεία *ε* και, στη συνέχεια, να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

i) Ποια είναι η σχέση των διανυσμάτων $\vec{n}$ και $\vec{\delta}$, τόσο μεταξύ τους, όσο και με την ευθεία *ε*, όταν μεταβάλλουμε το Α ή το Β;

ii) Πώς κινείται η ευθεία ε, όταν μεταβάλλουμε μόνο το Α ή μόνο το Β ή μόνο το Γ; Για να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό ενεργοποιείστε το ίχνος της ευθείας ε και μεταβάλλετε διαδοχικά τους δρομείς Α, Β, Γ, αφού προηγουμένως διατηρήσετε στην επιφάνεια εργασίας μόνο την ευθεία και τους δρομείς και αποκρύψετε όλα τα υπόλοιπα (βλέπε παρακάτω σχήμα).

iii) Αποδείξτε τον προηγούμενο ισχυρισμό σας.



Δ11 (αντιστοιχεί στο στόχο: 2.3.3)

Δίνεται η παρακάτω οικογένεια γραμμικών εξισώσεων:

$$\varepsilon_{\lambda}: \left(\lambda^2 - \lambda\right) \cdot x - \lambda \cdot y = \lambda^2 - 3\lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Με το λογισμικό GEOGEBRA επιλέξτε ένα δρομέα λ που να παίρνει τιμές από -20 έως 20 με αύξηση 0,2 και παραστήστε γραφικά την ε_λ

i) Μετακινήστε το δρομέα για να μεταβάλλετε τις τιμές του λ και απαντήστε στο ερώτημα: «Τι παριστάνει η ε_λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \neq 0$ και τί για $\lambda = 0$;» Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

ii) Πάρτε δύο τιμές του λ, για παράδειγμα $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, παραστήστε γραφικά τις ε_1 και ε_2, βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους Α και επιβεβαιώστε αλγεβρικά την απάντησή σας.

iii) Ενεργοποιήστε το ίχνος της ε_λ, μετακινήστε το δρομέα για να μεταβάλλετε τις τιμές του λ και ελέγξτε αν οι ε_λ, $\lambda \in \mathbf{R}$ διέρχονται όλες από το σημείο Α. Επαληθεύσατε την εικασία σας αλγεβρικά.

Δ12 (αντιστοιχεί στους στόχους: 2.3.4 και 2.4.1)

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Εξισώσεις ευθειών	Κάθετο διάνυσμα	Παράλληλο διάνυσμα	Συντελεστής διεύθυνσης	Σχετική θέση ευθειών
$\begin{cases} \varepsilon_1: & \sqrt{3}\,x - y = -7 \\ \varepsilon_2: & 3x - \sqrt{3}\,y = 3 \end{cases}$	$\vec{n}_1 =$ $\vec{n}_2 =$	$\vec{\delta}_1 =$ $\vec{\delta}_2 =$	$\lambda_1 =$ $\lambda_2 =$	☐ Τεμνόμενες-Σημείο τομής (x_0,y_0)= ☐ Παράλληλες ☐ Συμπίπτουν

$\begin{cases} \varepsilon_1: & 6x - y = -13 \\ \varepsilon_2: & 5x + 3y = -1 \end{cases}$	$\vec{n}_1 =$ $\vec{n}_2 =$	$\vec{\delta}_1 =$ $\vec{\delta}_2 =$	$\lambda_1 =$ $\lambda_2 =$	☐ Τεμνόμενες-Σημείο τομής (x_0,y_0)= ☐ Παράλληλες ☐ Συμπίπτουν
$\begin{cases} \varepsilon_1: & 8x + 6y = -10 \\ \varepsilon_2: & 4x + 3y = -5 \end{cases}$	$\vec{n}_1 =$ $\vec{n}_2 =$	$\vec{\delta}_1 =$ $\vec{\delta}_2 =$	$\lambda_1 =$ $\lambda_2 =$	☐ Τεμνόμενες-Σημείο τομής (x_0,y_0)= ☐ Παράλληλες ☐ Συμπίπτουν

Δ13 (αντιστοιχεί στο 3.1.2)

Από τις ισότητες

$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

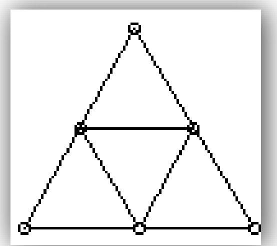
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$$

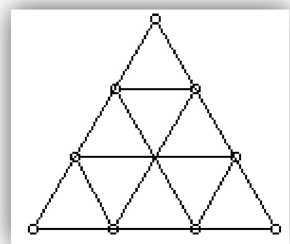
να εικάσετε τον υποδηλούμενο κανόνα του σχηματισμού τους και να τον αποδείξετε με επαγωγή

Δ14 (αντιστοιχεί στο 3.1.2)

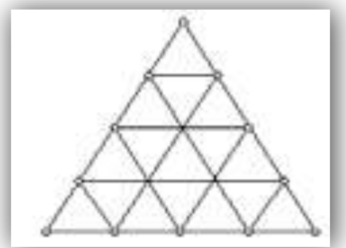
Η πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου έχει μήκος ν εκατοστών, όπου ν φυσικός αριθμός με ν ≥ 2. Με ευθείες παράλληλες στις πλευρές του, το τρίγωνο χωρίζεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζονται ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρά μήκους 1 εκατοστού.



ν = 2



ν = 3

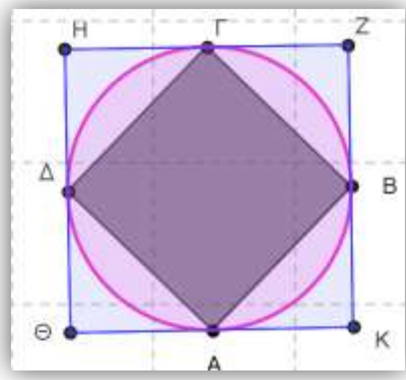


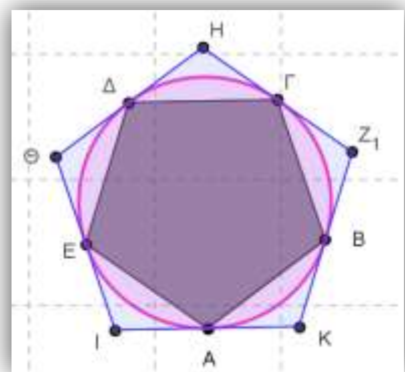
ν = 4

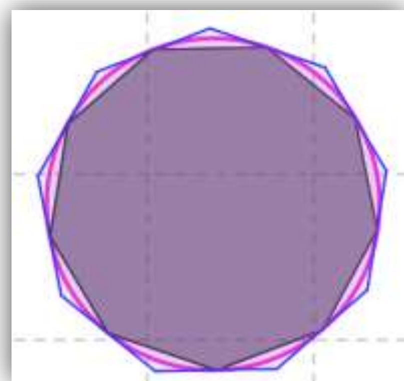
Να εικάσετε τον υποδηλούμενο κανόνα υπολογισμού του πλήθους των ισοπλεύρων τριγώνων και στη συνέχεια να τον αποδείξετε, αν το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά μήκους ν εκατοστών;

Δ15(αντιστοιχεί στο 3.3.1)

(Προσεγγιστικές διαδικασίες) Με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας υπολογίζουμε προσεγγιστικά το εμβαδόν του κύκλου με ακτίνα ρ=1, εγγράφοντας και περιγράφοντας στον κύκλο κανονικά πολύγωνα με πλήθος πλευρών ν που αυξάνεται, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Με τη βοήθεια του λογισμικού να βρείτε για ν=4,5,8,16,32,64 κτλ. τα εμβαδά των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα . Στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου με προσέγγιση εκατοστού.





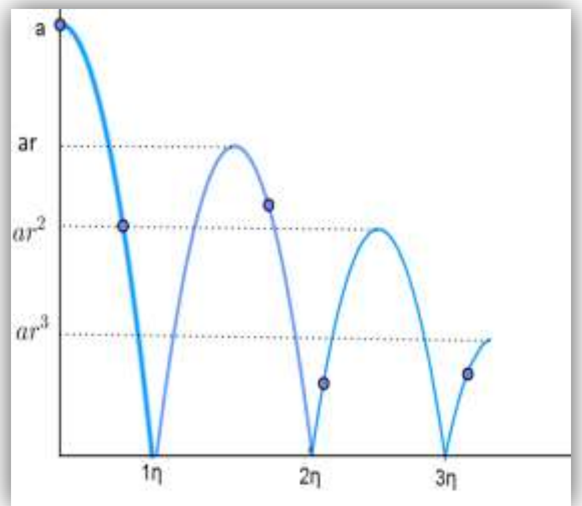


Κανονικό πολύγωνο Πλευρές	**ν=4**	**ν=5**	**ν=8**	**ν=16**	**ν=32**	**ν=64**	**ν=128**	**ν=256**	**ν=…**
ε_ν : Εμβαδόν εγγεγραμμένου πολυγώνου=									
E_ν : Εμβαδόν περιγεγραμμένου πολυγώνου									
$E_\nu - \varepsilon_\nu$: Διαφορά εμβαδών									

Δ16 (αντιστοιχεί στο 3.5.1)
Να αποδείξετε ότι 0,9999… =1, με έναν από τους παρακάτω δύο τρόπους:
Α' ΤΡΟΠΟΣ:
Γράψτε τον αριθμό 0,9999… ως άθροισμα των άπειρων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο απολύτως μικρότερο του 1 και στη συνέχεια, αφού βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου αυτής, να υπολογίσετε το συγκεκριμένο άθροισμα.
Β' ΤΡΟΠΟΣ:
Βρείτε τον ν-οστό όρο της ακολουθίας:

$$\alpha_1 = 0.9, \quad \alpha_2 = 0.99, \quad \alpha_3 = 0.999, \quad \alpha_4 = 0.9999, \ \ldots$$

των δεκαδικών προσεγγίσεων του αριθμού 0,9999… με 1, 2, 3, 4 κοκ δεκαδικά ψηφία και αποδείξτε ότι αυτός παίρνει τη μορφή $\alpha_\nu = 1 - \frac{1}{10^\nu}$. Στη συνέχεια βρείτε το όριο της ακολουθίας αυτής, που είναι ο αριθμός 0,9999….
Δ17 (αντιστοιχεί στο 3.5.3)
Έστω ότι αφήνουμε μια μπάλα να πέσει από ύψος α =30 m και υποθέτουμε ότι το ύψος κάθε αναπήδησης είναι ίσο με το 0,8 του ύψους της προηγούμενης αναπήδησης.
1) Σε ποιο ύψος θα φτάσει στην τρίτη αναπήδηση;
2) Ποιο είναι το συνολικό διάστημα που θα διανύσει η μπάλα μέχρι να σταματήσει;



Δ18 (Αντιστοιχεί στο 3.5.2)

Δίνεται τετράγωνο πλευράς μήκους α=1 Το δοθέν τετράγωνο χωρίζεται σε μικρότερα σχήματα σύμφωνα με τον παρακάτω κανόνα:

Από το μέσο της βάσης φέρνουμε το κάθετο τμήμα .Στη συνέχεια στο μέσο του κάθετου τμήματος φέρνουμε νέα κάθετο προς το τμήμα με κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία αυτή επ' άπειρο.

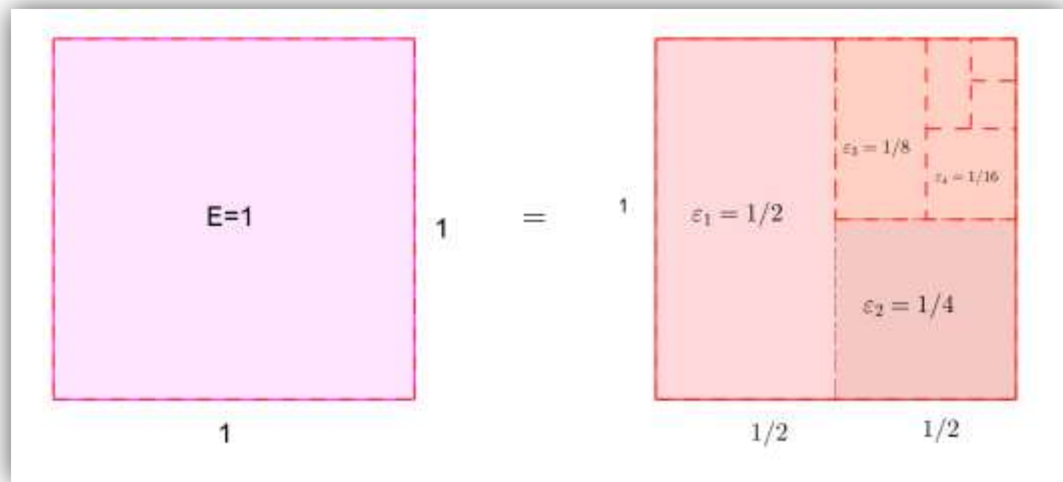
Να υπολογιστούν τα εμβαδά

α) Το εμβαδόν Ε του αρχικού τετραγώνου

β) Τα εμβαδά ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 των επιπέδων σχημάτων που προκύπτουν με τον κανόνα που προαναφέραμε

γ) Το εμβαδόν του ν-οστού σχήματος ε_ν

δ) Το άθροισμα των εμβαδών των άπειρων αυτών επιπέδων σχημάτων;



Γ΄ Λυκείου, Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Οικονομικών - Πολιτικών - Κοινωνικών και Παιδαγωγικών Σπουδών

Α΄ μέρος (Ανάλυση)

Εισαγωγή

Η Ανάλυση αποτελεί ένα σημαντικό κλάδο των Μαθηματικών με πολλές εφαρμογές στις οικονομικές και άλλες επιστήμες. Η διδασκαλία της στο Λύκειο αποσκοπεί στο να εφοδιάσει τους μαθητές με κατάλληλα μαθηματικά εργαλεία τα οποία θα μπορούν να χρησιμοποιήσουν για τη μοντελοποίηση και λύση προβλημάτων. Για τη σωστή και επιτυχημένη χρήση των εννοιών και θεωρημάτων της Ανάλυσης δεν αρκεί η απλή παρουσίασή τους και η διδασκαλία τυποποιημένων διαδικασιών, αλλά απαιτείται η ανάπτυξη μιας σωστής διαισθητικής αντίληψης από τους μαθητές. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσω της σύνδεσης των τυπικών λύσεων με τις αντίστοιχες οπτικές αναπαραστάσεις καθώς και μέσα από δραστηριότητες που συνδέουν τις έννοιες αυτές με πραγματικές καταστάσεις.

Κύριο στόχο αποτελεί η εννοιολογική κατανόηση σε ένα αρχικό επίπεδο, μέσα από την ανάπτυξη σωστής διαισθητικής αντίληψης των βασικών εννοιών και θεωρημάτων της Μαθηματικής Ανάλυσης, σε συνδυασμό με την ανάπτυξη δεξιοτήτων για τη λύση προβλημάτων. Για το λόγο αυτό, η εφαρμογή χωρίς κατανόηση θεωρημάτων για μηχανιστικούς υπολογισμούς, η διδασκαλία εννοιών των οποίων η κατανόηση δεν είναι εύκολη από τους μαθητές (π.χ. αόριστο ολοκλήρωμα) και η ανάπτυξη τεχνικών για την αντιμετώπιση δύσκολων ασκήσεων, χωρίς αυτό να συνδυάζεται με κάποια βαθύτερη κατανόηση, δεν προσφέρονται για την εξυπηρέτηση των παραπάνω στόχων.

Οι βασικές υποπεριοχές της Μαθηματικής Ανάλυσης είναι ο Διαφορικός Λογισμός και ο Ολοκληρωτικός Λογισμός, ενώ τα κεντρικά στοιχεία της περιοχής της Ανάλυσης είναι τα εξής:

Κεφάλαιο 1: Όριο και Συνέχεια συνάρτησης

Στην ενότητα αυτή γίνεται αρχικά σύντομη ανασκόπηση των στοιχείων των συναρτήσεων (Ορισμός, Ισότητα, Πράξεις, Σύνθεση, Μονοτονία, Ακρότατα). Ακολούθως γίνεται εισαγωγή στο όριο συνάρτησης το οποίο αποτελεί τη βάση για την Ανάλυση. Μέσα από κατάλληλα παραδείγματα οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν πλούσιες αναπαραστάσεις για το όριο και τη συνέχεια.

Κεφάλαιο 2: Παράγωγος

Η ενότητα της παραγώγου είναι μία από αυτές όπου, εκτός από την κατανόηση των εννοιών, οι μαθητές πρέπει να δουν και να αντιμετωπίσουν εφαρμογές σε προβλήματα.
Μέσα από προβλήματα που αφορούν στη στιγμιαία ταχύτητα, στην επιτάχυνση κινητού, στον ρυθμό μεταβολής, στην Οικονομία κ.α., θα φανεί η αποτελεσματικότητα των εργαλείων του Απειροστικού Λογισμού σε περιπτώσεις οι οποίες δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με άλλα εργαλεία.

Κεφάλαιο 3: Μελέτη Συνάρτησης

Μέσω της μελέτης συνάρτησης με χρήση της παραγώγου, θα προκύψουν τα βασικά αποτελέσματα που σχετίζονται με τη μονοτονία, τα ακρότατα, και, τελικά, τη γραφική παράσταση συνάρτησης. Στην κατεύθυνση αυτή θα δίνονται πραγματικά προβλήματα, από διάφορες επιστημονικές περιοχές, στα οποία θα ζητείται το μέγιστο ή το ελάχιστο μιας συνάρτησης. Έτσι, μέσω της μελέτης συνάρτησης υλοποιείται ο σημαντικότερος στόχος της διδασκαλίας των παραγώγων.

Κεφάλαιο 4: Ολοκληρωτικός Λογισμός

Η ενότητα του ολοκληρώματος (όπως και της παραγώγου) είναι μία από αυτές όπου, εκτός από την κατανόηση των εννοιών, οι μαθητές πρέπει να δουν και να αντιμετωπίσουν και εφαρμογές. Μέσα από προβλήματα που αφορούν στην εύρεση εμβαδού, θα φανεί η αποτελεσματικότητα των εργαλείων της Ανάλυσης σε περιπτώσεις οι οποίες είναι δύσκολες να αντιμετωπιστούν με άλλα εργαλεία. Αξιοποιώντας τις ΤΠΕ, θα γίνουν αντιληπτές έννοιες όπως της παράγουσας μιας συνάρτησης (και κατ' επέκταση όλων των βασικών συναρτήσεων), του ορισμένου ολοκληρώματος και εφαρμογών του στον υπολογισμό εμβαδών επίπεδων χωρίων.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ (Σύνολο ωρών 80)	ΣΤΟΧΟΙ Οι μαθητές να μπορούν να:	ΣΧΟΛΙΑ - ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
1. Όριο και Συνέχεια Συνάρτησης		
1.1. Πραγματικοί Αριθμοί (Επαναλήψεις) (3 ώρες)	1.1.1. Χρησιμοποιούν, έννοιες, ιδιότητες και προτάσεις των πραγματικών αριθμών για να λύνουν εξισώσεις, ανισώσεις και προβλήματα.	
1.2. Συναρτήσεις (Έννοια & γραφική παράσταση συνάρτησης, Ισότητα συναρτήσεων, Βασικές συναρτήσεις) (5 ώρες)	1.2.1. Αναγνωρίζουν αν μια σχέση που δίνεται συμβολικά, γραφικά ή λεκτικά είναι συνάρτηση και συνδέουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης.	• Είναι σημαντικό οι μαθητές να αναγνωρίζουν τις μεταβλητές και τις παραμέτρους σε μια συνάρτηση. • Θα συμπεριληφθούν οι τριγωνομετρικές και οι εκθετικές συναρτήσεις καθώς και οι λογαριθμικές συναρτήσεις $y = ln\,x$ και $y = log\,x$ που θα διδαχθούν εδώ για πρώτη φορά. • Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ1.
	1.2.2. Βρίσκουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης , την τιμή σε ένα σημείο, τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες, καθώς και τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων.	
	1.2.3. Εκτιμούν, από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, το πεδίο ορισμού της, το σύνολο τιμών της, τα ολικά ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας και την τιμή της σε ένα σημείο.	
	1.2.4. Αναπαριστάνουν γραφικά τις βασικές συναρτήσεις $y = \alpha x + \beta$, $y = \alpha x^2$, $y = \alpha x^3$, $y = \frac{\alpha}{x}$ και $y = \sqrt{x}$, με $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, και αναφέρουν τα χαρακτηριστικά τους γνωρίσματα	
	1.2.5. Εκφράζουν πραγματικές καταστάσεις με την βοήθεια συναρτήσεων.	• Η μοντελοποίηση πρέπει να αφορά σε απλά προβλήματα ώστε οι μαθητές να εστιάσουν στην αναγνώριση των μεταβλητών και στη σχέση ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής. • Προτείνεται να γίνουν οι δραστηριότητες Δ2, Δ3.
	1.2.6. Διακρίνουν αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες και, αν δεν είναι ίσες, βρίσκουν το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο	

	του $\mathbf{R}$ στο οποίο αυτές είναι ίσες.	
1.3. Πράξεις με συναρτήσεις - Σύνθεση συναρτήσεων (3 ώρες)	1.3.1. Βρίσκουν πεδίο ορισμού και τον τύπο συναρτήσεων που προκύπτουν από πράξεις άλλων συναρτήσεων. 1.3.2. Σχεδιάζουν τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=-f(x)$, $y=\|f(x)\|$ με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=f(x)$ 1.3.3. Βρίσκουν το πεδίο ορισμού και τον τύπο μιας συνάρτησης που προκύπτει από σύνθεση συναρτήσεων και αναλύουν μια σύνθετη συνάρτηση στις συναρτήσεις από τις οποίες προέκυψε με σύνθεση.	• Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ4. • Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ5.
1.4. Πεπερασμένο Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$ (2 ώρες)	1.4.1. Εκτιμούν το όριο μιας συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$, όταν δίνεται η γραφική της παράσταση.	• Η εισαγωγή της έννοιας του ορίου να γίνει με εποπτικό τρόπο.
1.5. Ιδιότητες των ορίων (Όριο και διάταξη, Όριο και πράξεις) (4 ώρες)	1.5.1. Γνωρίζουν τις ιδιότητες του ορίου συνάρτησης και με τη βοήθεια τους να υπολογίζουν τα όρια απλών συναρτήσεων..	
1.6. Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ (4 ώρες)	1.6.1. Εικάζουν την ύπαρξη μη πεπερασμένων ορίων συναρτήσεων από τη γραφική τους παράσταση 1.6.2. Βρίσκουν, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ορίου, μη πεπερασμένα όρια συναρτήσεων σε σημείο $x_0 \in \mathbf{R}$ 1.6.3. Βρίσκουν τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.	• Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ6.
1.7. Όριο συνάρτησης στο άπειρο (4 ώρες)	1.7.1. Υπολογίζουν τα όρια συναρτήσεων στο $+\infty$ και στο $-\infty$. 1.7.2. Αναγνωρίζουν την οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη γραφικά. 1.7.3. Βρίσκουν τις οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης ρητών συναρτήσεων με βάση τον ορισμό.	• Η εύρεση ασυμπτώτων θα γίνεται μόνο με τον ορισμό • Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ7.

1.8. Συνέχεια συνάρτησης (3 ώρες)	1.8.1. Αναγνωρίζουν αν μια συνάρτηση είναι συνεχής ή ασυνεχής από τη γραφική της παράσταση. 1.8.2. Διαπιστώνουν, με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των συνεχών συναρτήσεων, αν μια συνάρτηση είναι συνεχής ή ασυνεχής.	• Να δοθεί, χωρίς απόδειξη, ότι οι τριγωνομετρικές, οι εκθετικές και οι λογαριθμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς. • Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ8.
2. Παράγωγος συνάρτηση		
2.1. Η έννοια της παραγώγου συνάρτησης (Παράγωγος συνάρτησης σε σημείο - Παράγωγος συνάρτηση)(8 ώρες)	2.1.1. Αναγνωρίζουν την ύπαρξη παραγώγου από τη γραφική παράσταση,	• Να αναφερθεί ότι η παράγωγος μπορεί εκφράζει στιγμιαία ταχύτητα, οριακό κόστος, συντελεστή διεύθυνσης εφαπτομένης καμπύλης. • Στη διεύθυνση: http://webspace.ship.edu/msrenault/geogebracalculus/ derivative_at_a_point.html οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν διαδραστικά με την έννοια της παραγώγου συνάρτησης.
	2.1.2. Βρίσκουν την παράγωγο βασικών συναρτήσεων	• Να αποδειχθούν οι τύποι των παράγωγων των συναρτήσεων $f(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$, $f(x)=x$, $f(x)=x^2$, $f(x)=\sqrt{x}$ • Να δοθούν οι τύποι των παραγώγων των $y=\eta\mu x$, $y=\sigma\upsilon\nu x$, της εκθετικής $y=e^x$ και της λογαριθμικής $y=ln\,x$ και να επιβεβαιωθούν με τη βοήθεια των ΤΠΕ • Στη διεύθυνση: http://webspace.ship.edu/msrenault/geogebracalculus/ derivative_elementary_functions.html οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν διαδραστικά με τον υπολογισμό των παραγώγων των βασικών συναρτήσεων.
	2.1.3. Βρίσκουν την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης απλών συναρτήσεων	• Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ9.
	2.1.4. Γνωρίζουν τη σχέση συνέχειας και παραγωγισιμότητας συνάρτησης σε σημείο.	• Να αποδειχθεί ότι: αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
2.2. Κανόνες Παραγώγισης (5 ώρες)	2.2.1. Εφαρμόζουν τους κανόνες παραγώγισης αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου συναρτήσεων.	• Να αποδειχθεί ο τύπος της παραγώγου του αθροίσματος συναρτήσεων και του γινομένου σταθεράς με συνάρτηση.

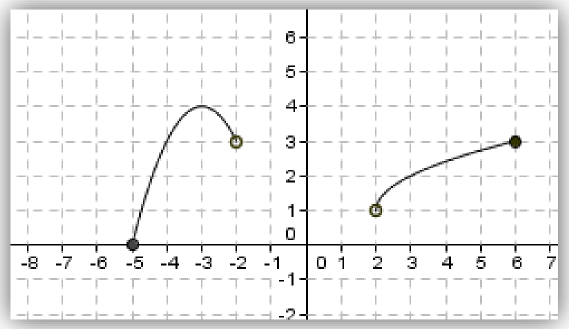
	2.2.2. Βρίσκουν την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης.	• Να αποδειχθούν οι τύποι των παραγώγων των συναρτήσεων: $y = \varepsilon\varphi x$, $y = \sigma\varphi x$, $y = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$ και $y = x^\alpha$, με $\alpha \in \mathbf{R}$
2.3. Ρυθμός Μεταβολής (4 ώρες)	2.3.1. Αναγνωρίζουν τη σημασία της παραγώγου, ως ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους (για παράδειγμα στιγμιαία ταχύτητα, οριακό κόστος κλπ.). 2.3.2. Χρησιμοποιούν την παράγωγο για να επιλύουν προβλήματα από την καθημερινή ζωή και από διάφορες επιστήμες (κυρίως οικονομικές).	• Προτείνεται να γίνουν οι δραστηριότητες Δ10, Δ11, Δ12, Δ13, Δ14. • Αν σε ένα πρόβλημα η μεταβλητή παίρνει διακριτές τιμές, με τη βοήθεια των παραγώγων μελετάμε την επέκταση της συνάρτησης σε κατάλληλο διάστημα.
3. Μελέτη Συνάρτησης		
3.1. Το Θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών (3 ώρες)	3.1.1. Διατυπώνουν τα θεωρήματα Bolzano και Ενδιάμεσων Τιμών και τα ερμηνεύουν γεωμετρικά. 3.1.2. Εξετάζουν και διαπιστώνουν αν μια εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε ένα διάστημα.	• Να διατυπωθεί το Θεώρημα Bolzano και στη συνέχεια, ως επέκτασή του, να διατυπωθεί, αλλά να μην αποδειχθεί, το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών • Να δοθούν ως συμπεράσματα του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών οι προτάσεις με τις οποίες βρίσκουμε το πρόσημο μιας συνεχούς σε διάστημα συνάρτησης και το σύνολο τιμών μιας συνεχούς και γνησίως μονότονης σε διάστημα συνάρτησης
3.2. Κριτήρια μονοτονίας συνάρτησης (Κριτήρια για γνησίως αύξουσες, γνησίως φθίνουσες και σταθερές συναρτήσεις) (8 ώρες)	3.2.1. Αποφαίνονται για το αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα ή σταθερή σε ένα διάστημα Δ, χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο κριτήριο μονοτονίας, και προσδιορίζουν το σύνολο τιμών της και τις ρίζες της. 3.2.2. Αποφαίνονται για το αν δύο συναρτήσεις διαφέρουν κατά σταθερή ποσότητα σε ένα διάστημα Δ, χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο κριτήριο.	• Τα κριτήρια μονοτονίας συνάρτησης, δηλαδή τα κριτήρια για γνησίως αύξουσες, γνησίως φθίνουσες και σταθερές συναρτήσεις, να δοθούν χωρίς απόδειξη. Η εισαγωγή τους να γίνει διαισθητικά. Για την παρουσίασή τους προτείνεται να χρησιμοποιηθούν οι ΤΠΕ. • Να δοθεί έμφαση στη σχέση που συνδέει συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε ένα διάστημα και έχουν ίσες παραγώγους στο εσωτερικό αυτού.
3.3. Τοπικά ακρότατα συνάρτησης – Κριτήριο ύπαρξης τοπικών ακροτάτων συνάρτησης (κριτήριο 1ης παραγώγου) (6 ώρες)	3.3.1. Βρίσκουν τις πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης. 3.3.2. Χρησιμοποιούν το κριτήριο 1ης παραγώγου για να ελέγξουν, αν μια πιθανή θέση τοπικού ακροτάτου είναι θέση τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου.	• Να αποδειχθεί το κριτήριο 1ης παραγώγου. • Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ15. • Στη διεύθυνση: http://webspace.ship.edu/msrenault/GeoGebraCalculus/ derivative_app_opt_wire.html

	3.3.3. Εκφράζουν με τη βοήθεια συναρτήσεων πραγματικές καταστάσεις και λύνουν προβλήματα βελτιστοποίησης.	οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν διαδραστικά στη μεγιστοποίηση του εμβαδού ορθογωνίου με σταθερή περίμετρο. • Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ16.
3.4. Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης (3 ώρες)	3.4.1. Μελετούν και να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση συνάρτησης, χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα θεωρήματα και προτάσεις.	• Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ17.
4. Ολοκληρωτικός Λογισμός		
4.1. Παράγουσα συνεχούς συνάρτησης (4 ώρες)	4.1.1. Γνωρίζουν τις παράγουσες βασικών συναρτήσεων. 4.1.2. Βρίσκουν παράγουσες συναρτήσεων της μορφής $y=f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$, όταν γνωρίζουν μια παράγουσα της f και λύνουν απλά προβλήματα εύρεσης συναρτήσεων των οποίων δίνεται ο ρυθμός μεταβολής.	• Να δοθεί έμφαση στην πρόταση με την οποία προσδιορίζεται το σύνολο των παραγουσών μιας συνάρτησης. • Να δοθεί πίνακας παραγουσών γνωστών απλών, αλλά και σύνθετων συναρτήσεων. • Προτείνεται να γίνουν οι δραστηριότητες: Δ18, Δ19.
4.2. Ορισμένο ολοκλήρωμα (4 ώρες)	4.2.1. Συνδέουν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος με το εμβαδόν χωρίου. 4.2.2. Γνωρίζουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος (γραμμικότητα, μονοτονία, σχέση Chalses).	
4.3. Το θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης (4 ώρες)	4.3.1. Υπολογίζουν ολοκληρώματα με χρήση του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού.	• Να δοθεί ο τύπος $\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx = G\left(\beta\right)-G\left(\alpha\right)$, όπου G μια παράγουσα της f • Προτείνεται να γίνουν οι δραστηριότητες: Δ20, Δ21.
4.4. Εμβαδόν επιπέδου χωρίου (3 ώρες)	4.4.1. Υπολογίζουν εμβαδά με χρήση ολοκληρωμάτων. 4.4.2. Χρησιμοποιούν το ορισμένο ολοκλήρωμα για να λύνουν προβλήματα πραγματικών καταστάσεων	• Προτείνεται να γίνουν οι δραστηριότητες: Δ22, Δ23. • Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ24.

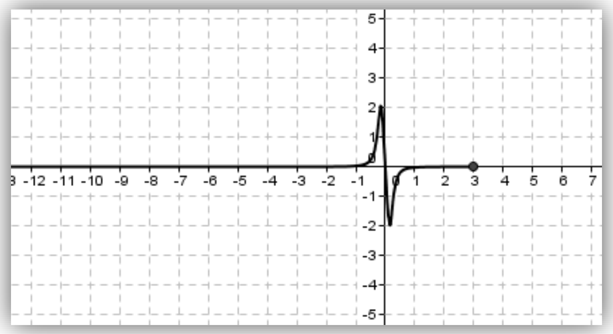
Ενδεικτικές Δραστηριότητες

Δ1 (αντιστοιχεί στους στόχους 1.2.1)

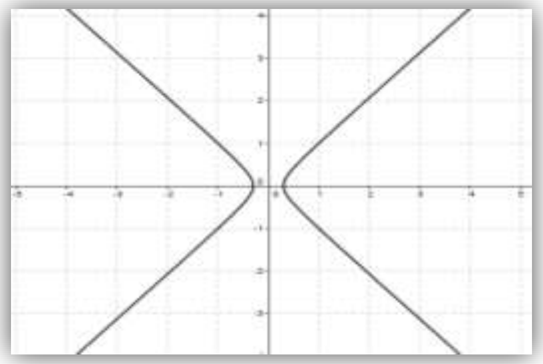
Να βρεθεί ποιες από τις παρακάτω αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και στη συνέχεια να βρεθεί το πεδίο ορισμού τους.



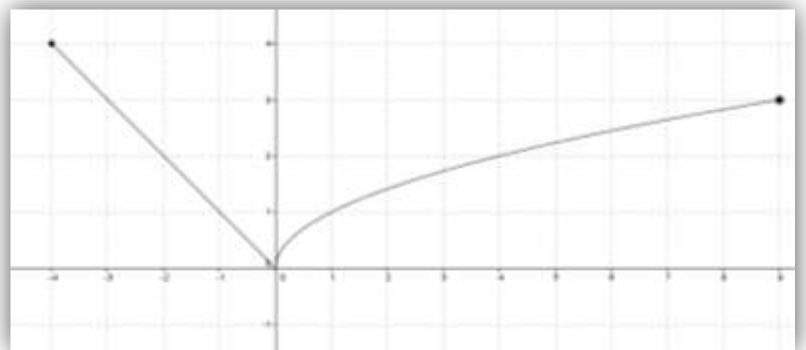
α)



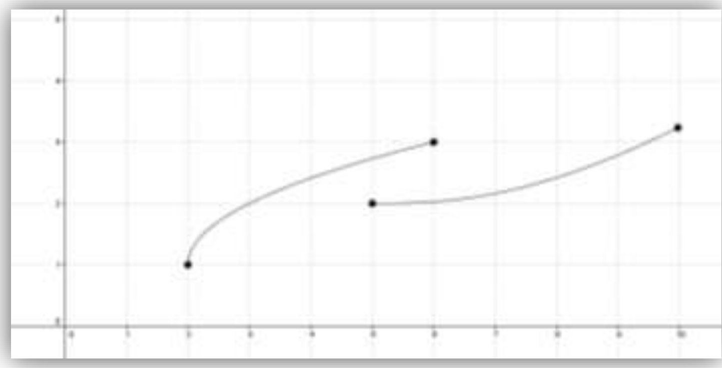
β)

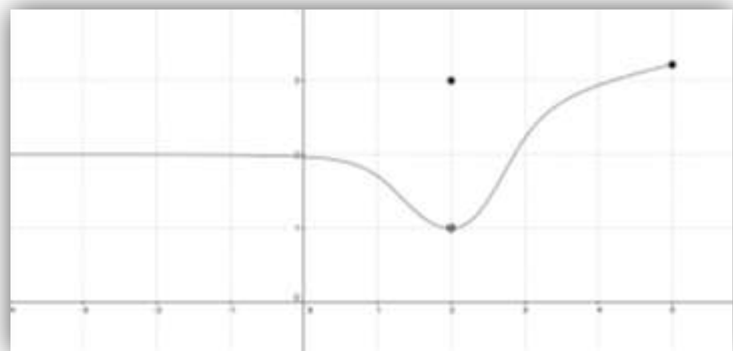


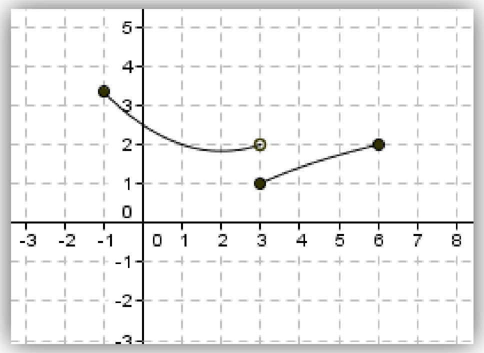
γ)

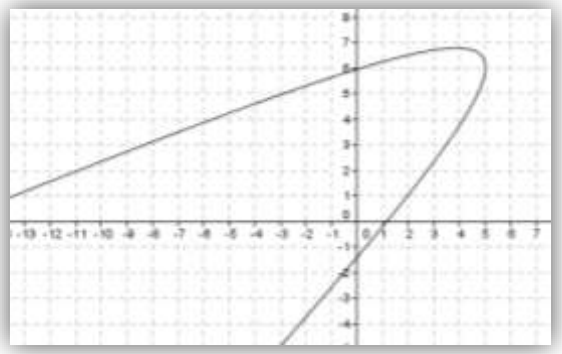


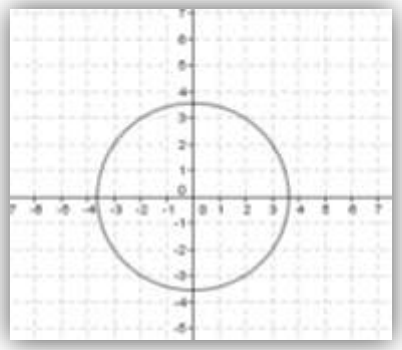
δ)

ε) 

στ) 

ζ) 

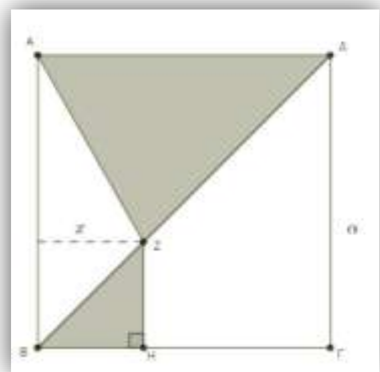
η) 



θ)

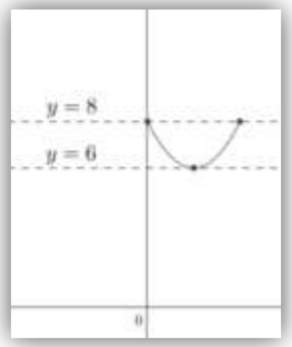
Δ2 (αντιστοιχεί στους στόχους 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3 και 1.2.5)

Στο παρακάτω σχήμα το σημείο Z κινείται πάνω στη διαγώνιο $ΒΔ$ ενός τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ με μήκος πλευράς α .

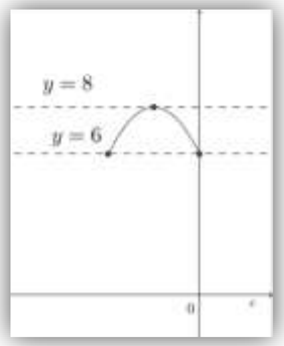


i) Αν x είναι η απόσταση του σημείου Z από την πλευρά AB του τετραγώνου, να βρεθεί το εμβαδόν E του σκιασμένου τμήματος συναρτήσει του x .

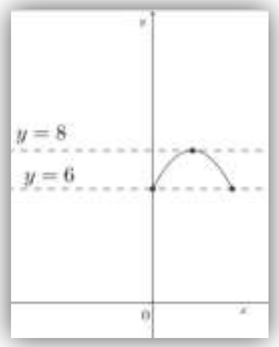
ii) Ποια από τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις μπορεί αντιστοιχεί στη συνάρτηση του εμβαδού E που βρήκατε;



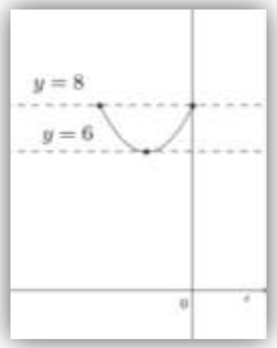
A)



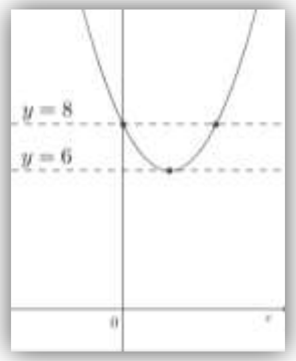
B)



Γ)



Δ)



E)

iii) Με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, ποιο είναι το μήκος α της πλευράς του τετραγώνου;

iv) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή του εμβαδού και για ποιες τιμές της απόστασης x του σημείου Z από την πλευρά AB το εμβαδόν παίρνει τις τιμές αυτές;

Δ3 (αντιστοιχεί στον στόχο 1.2.3)

Ένας κατασκευαστής πουλά ένα προϊόν 110 ευρώ ανά τεμάχιο. Το συνολικό κόστος αποτελείται από το πάγιο κατασκευής 7500 ευρώ και από το κόστος παραγωγής μονάδας που είναι 60 ευρώ, ανά τεμάχιο.

i) Πόσα τεμάχια προϊόντος πρέπει να πουλήσει ο κατασκευαστής για να μην έχει ούτε κέρδος, ούτε απώλεια;

ii) Αν πουλήσει 100 τεμάχια του προϊόντος, ποιο είναι το κέρδος ή η απώλεια του κατασκευαστή;

iii) Πόσα τεμάχια πρέπει να πουλήσει για να έχει κέρδος 1250 ευρώ;

Δ4 (αντιστοιχεί στον στόχο 1.3.1)

Μια περιβαλλοντική μελέτη προτείνει ότι η μέση ημερήσια περιεκτικότητα του αέρα σε μονοξείδιο του άνθρακα θα είναι $c(p)=0.5p+1$, μέρη ανά εκατομμύριο, όταν ο πληθυσμός είναι p χιλιάδες. Εκτιμάται ότι σε t χρόνια από σήμερα, ο πληθυσμός θα είναι $p(t)=10+0{,}1t^2$.

i) Να εκφράσετε την περιεκτικότητα του μονοξειδίου του άνθρακα στον αέρα, ως συνάρτηση του χρόνου.

ii) Μετά από πόσα χρόνια η περιεκτικότητα του μονοξειδίου του άνθρακα θα φτάσει τα $6{,}8$ μέρη ανά εκατομμύριο;

Δ5 (αντιστοιχεί στον στόχο 1.3.2)

1)

i) Να σχεδιάσετε (χρησιμοποιώντας ένα λογισμικό δυναμικό όπως π.χ. το Geogebra) τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-1$.

ii) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοίχων τιμών:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					
$-f(x)$					

iii) Τι παρατηρείτε όσον αφορά στις τιμές της συνάρτησης $y=-f(x)$, σε σχέση με αυτές της $y=f(x)$;

iv) Διατυπώστε μια εικασία για το ποια θα είναι η μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=-f(x)$.

v) Να σχεδιάσετε, στο ίδιο σχήμα του βήματος α.i), τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=-f(x)$, ελέγχοντας παράλληλα την εικασία που διατυπώσατε στο βήμα A iv).

2)

i) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοίχων τιμών:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					
$\lvert f(x)\rvert$					

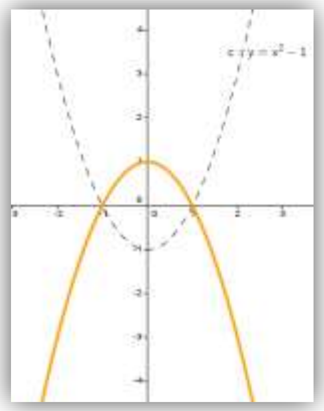
ii) Τι παρατηρείτε όσον αφορά στις τιμές της συνάρτησης $y=\lvert f(x)\rvert$, σε σχέση με αυτές της $y=f(x)$;

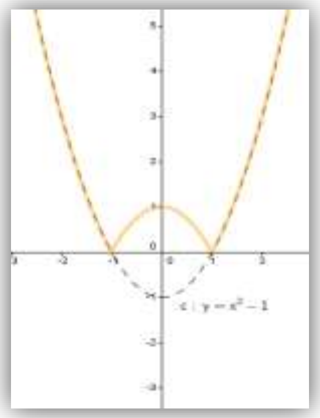
iii) Διατυπώστε μια εικασία για το ποια θα είναι η μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=\lvert f(x)\rvert$.

iv) Να σχεδιάσετε, στο ίδιο σχήμα του βήματος α.i), τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=\lvert f(x)\rvert$, ελέγχοντας παράλληλα την εικασία που διατυπώσατε στο βήμα B.iii).

3)

Να συμπληρώσετε στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις, τα μέρη της δραστηριότητας που αντιστοιχούν:





[Μέρος . . .] **[Μέρος . . .]**

Δ6 (αντιστοιχεί στους στόχους 1.6.2, 1.6.3)

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g\left(x\right)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

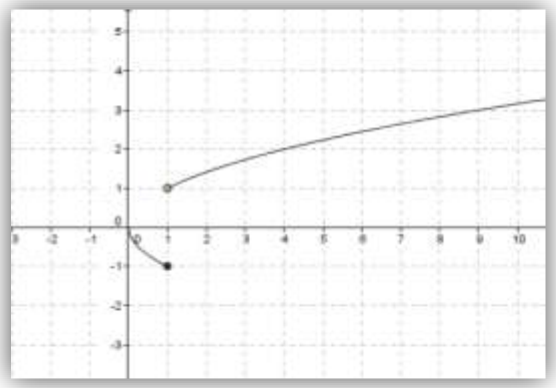
ii) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g .

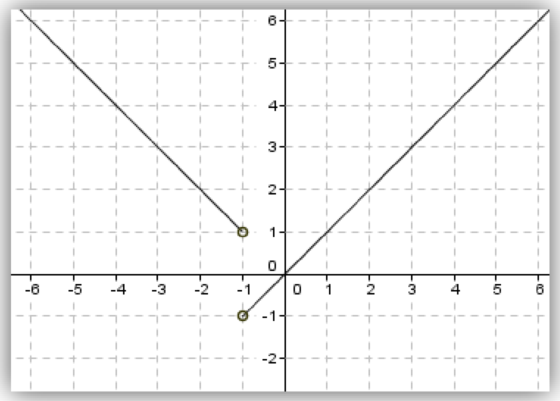
Δ7 (αντιστοιχεί στους στόχους 1.7.1, 1.7.3)

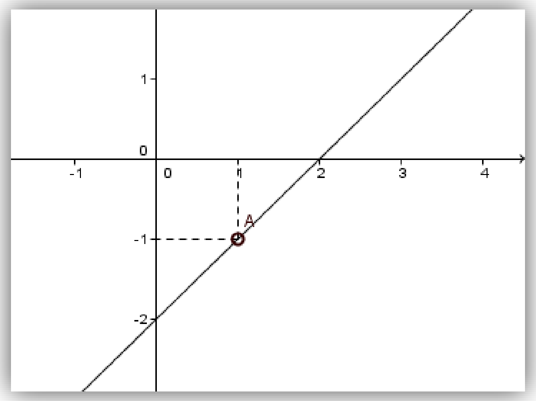
Να βρεθούν, αν υπάρχουν οι οριζόντιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Δ8 (αντιστοιχεί στους στόχους 1.8.1)

Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους;.







Σχήμα α’ Σχήμα β’ Σχήμα γ’

Δ9 (αντιστοιχεί στους στόχους 2.1.1, 2.1.3)

Να βρεθούν και να σχεδιασθούν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f\left(x\right)=x^4-2x^2$ στα σημεία $x_0=-1$, $x_1=0$ και $x_2=1$.

Δ10 (αντιστοιχεί στον στόχο 2.3.2)

Μια περιβαλλοντική μελέτη αναφέρει ότι η μέση ημερήσια περιεκτικότητα του αέρα σε μονοξείδιο του άνθρακα θα είναι $c(p)=\sqrt{0{,}5p^2+17}$, μέρη ανά εκατομμύριο, όταν ο πληθυσμός είναι p χιλιάδες. Εκτιμάται ότι σε t χρόνια από σήμερα, ο πληθυσμός θα είναι $p(t)=3{,}1+0{,}1t^2$. Με ποιο ρυθμό θα μεταβάλλεται το μονοξείδιο του άνθρακα, ως προς το χρόνο, σε 3 χρόνια από σήμερα;

Δ11 (αντιστοιχεί στον στόχο 2.3.2):

Υπολογίζεται ότι σε x μήνες από σήμερα ο πληθυσμός μιας κοινότητας θα είναι $P(x)=x^2+20x+8000$.

i) Με ποιο ρυθμό θα μεταβάλλεται ο πληθυσμός, ως προς το χρόνο, 15 μήνες από σήμερα;

ii) Κατά πόσο θα μεταβληθεί ο πληθυσμός κατά το 16^o μήνα;

Δ12 (αντιστοιχεί στους στόχους 2.3.2, 2.3.1 και 2.3.3):

Όταν πετάμε ένα βότσαλο σε μια λίμνη, δημιουργούμε κυματισμό με τη μορφή ομόκεντρων κύκλων. Η ακτίνα του εξωτερικού κύκλου αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 1 μέτρο το δευτερόλεπτο. Όταν η ακτίνα είναι 4 μέτρα, να βρείτε με ποιο ρυθμό αυξάνεται το εμβαδόν της ταραγμένης επιφάνειας του νερού.

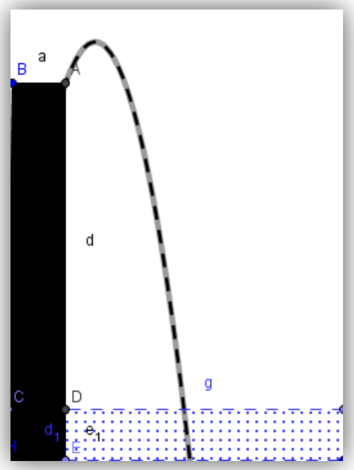
Δ13 (αντιστοιχεί στους στόχους 2.3.1, 2.3.2)

Όταν πέφτει κατακόρυφα ένα αντικείμενο, το ύψος του (σε μέτρα) μετά από t δευτερόλεπτα είναι $H(t)=-16t^2+S_0t+H_0$, όπου H_0 το αρχικό ύψος και S_0 η αρχική ταχύτητα του αντικειμένου.

i) Να βρείτε μια έκφραση για την επιτάχυνση του αντικειμένου.

ii) Πως μεταβάλλεται η επιτάχυνση σε σχέση με το χρόνο;

iii) Ποια η σημασία του γεγονότος ότι το αποτέλεσμα του ερωτήματος (I) είναι αρνητικό;



Δ14 (αντιστοιχεί στους στόχους 2.3.1, 2.3.2):

Τη χρονική στιγμή $t=0$ ένας αθλητής καταδύσεων πηδάει από το βατήρα, ο οποίος βρίσκεται σε ύψος 32 μέτρων πάνω από το νερό. Η θέση του δίνεται από την εξίσωση: $s(t)=-16t^2+16t+32$, όπου το S μετράται σε μέτρα και το t σε δευτερόλεπτα.

i) Να βρείτε ποια χρονική στιγμή ο αθλητής «χτυπάει» το νερό.

ii) Ποια είναι η ταχύτητά του κατά τη σύγκρουση;

Δ15 (αντιστοιχεί στον στόχο 3.3.2)

Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ να έχει ελάχιστο στο σημείο 2, το $f(2) = 1$

Δ16 (αντιστοιχεί στον στόχο 3.3.3):

Υποθέτουμε ότι όταν παραχθούν q τεμάχια ενός προϊόντος, το ολικό κόστος παραγωγής είναι $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$, σε ευρώ. Πόσα τεμάχια πρέπει να παραχθούν, ώστε το μέσο κόστος ανά τεμάχιο να είναι τα μικρότερο;

[Σημείωση: Το μέσο κόστος ανά τεμάχιο, $A(q)$, είναι το ολικό κόστος διά του πλήθους των τεμαχίων, δηλαδή $A(q) = \dfrac{C(q)}{q}$]

Δ17 (αντιστοιχεί στον στόχο 3.4.1)

Να μελετηθούν οι συναρτήσεις:

$$\text{α) } f(x) = \frac{1}{x(x-1)} \quad \text{και} \quad \text{β) } g(x) = xe^{-x},\ x \geq 0$$

Δ18 (αντιστοιχεί στους στόχους 4.1.1, 4.1.3)

Ένας κατασκευαστής έχει οριακό κόστος $3q^2 - 60q + 400$ σε ευρώ, ανά τεμάχιο, όταν κατασκευάζει q τεμάχια. Αν γνωρίζουμε ότι το συνολικό κόστος κατασκευής δύο τεμαχίων είναι 900 ευρώ, να βρείτε το συνολικό κόστος κατασκευής 5 τεμαχίων.

[Υπόδειξη: Το οριακό κόστος είναι η παράγωγος του συνολικού κόστους $C(q)$)

Δ19 (αντιστοιχεί στους στόχους 4.1.1, 4.1.3)

Η τιμή μεταπώλησης μιας συγκεκριμένης βιομηχανικής μηχανής μειώνεται μετά από μια δεκαετία, με ρυθμό που εξαρτάται από την ηλικία της μηχανής. Όταν η μηχανή είναι x ετών, ο ρυθμός μεταβολής της τιμής της είναι $220(x-10)$, σε ευρώ ανά έτος.

i) Να εκφράσετε την τιμή $T(x)$ της μηχανής ως συνάρτηση της ηλικίας της και της αρχικής της τιμής.

ii) Αν αρχικά η μηχανή κόστιζε 12.000 ευρώ, πόσο θα κοστίζει μετά από 10 χρόνια;

Δ20 (αντιστοιχεί στον στόχο 4.3.1)

Μια έρευνα αναφέρει ότι σε x μήνες από τώρα, ο πληθυσμός, $P(x)$, μια πόλης θα αυξάνεται με ρυθμό $2 + 6\sqrt{x}$. Αν σήμερα ο πληθυσμός της πόλης είναι 5000 κάτοικοι, να βρείτε πόσο θα είναι σε 9 μήνες από σήμερα.

Δ21 (αντιστοιχεί στον στόχο 4.3.1)

Υποθέτουμε ότι σε x χρόνια από τώρα ένα επενδυτικό σχέδιο θα είναι κερδοφόρο με ρυθμό $R_1(x) = 50 + x^2$, ευρώ το χρόνο, ενώ ένα δεύτερο επενδυτικό σχέδιο θα είναι κερδοφόρο με ρυθμό $R_2(x) = 200 + 5x$,ευρώ το χρόνο. Αφού σχεδιάσετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις, να απαντήσετε στις ερωτήσεις:

i) Για πόσα χρόνια το δεύτερο σχέδιο θα είναι πιο κερδοφόρο από το πρώτο;

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των δύο γραφικών παραστάσεων.

iii) Τι παριστάνει το παραπάνω εμβαδό;

Δ22 (αντιστοιχεί στους στόχους 4.2.1, 4.3.1,4.4.1)

i) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τραπεζίου που περικλείεται από τον $x'x$, την ευθεία $y = 2x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$.

ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_1^3 2x dx$. Πως συνδέονται οι απαντήσεις των δύο ερωτημάτων;

Δ23 (αντιστοιχεί στους στόχους 4.2.1, 4.3.1, 4.4.1)

i) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τραπεζίου που περικλείεται από τον $x'x$, την ευθεία $y = -4x - 1$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = 3$.

ii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^3 (-4x - 1)dx$. Πως συνδέονται οι απαντήσεις των δύο ερωτημάτων;

Δ24(αντιστοιχεί στον στόχο 4.4.2)

Ο Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης του Νεύτωνα αναφέρει ότι δύο σώματα ε μάζες m_1, m_2, έλκονται μεταξύ τους με δύναμη $F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$, όπου R η απόσταση μεταξύ των σωμάτων και G η σταθερά βαρύτητας. Αν το ένα σώμα είναι σταθερό, να υπολογίσετε το έργο που απαιτείται για να μετακινήσουμε το άλλο σώμα από τη θέση όπου $R = a$ στη θέση $R = b$.

Β΄ μέρος (Πιθανότητες και Στατιστική)

Εισαγωγή

Τα Στοχαστικά Μαθηματικά ως μέρος του Προγράμματος Οικονομικών, Πολιτικών, Κοινωνικών και Παιδαγωγικών Σπουδών της Γ΄ Λυκείου έχουν βαρύνουσα μορφωτική σημασία και αποβλέπουν κυρίως στην καλλιέργεια της στοχαστικής σκέψης των μαθητών και την αξιοποίησή τους ως εργαλείο μάθησης στην υπηρεσία άλλων επιστημών. Έτσι, από τη μια πλευρά τα Στοχαστικά Μαθηματικά της τελευταίας τάξης του Λυκείου επιδιώκουν να καταστήσουν τους μαθητές ικανούς, να επιχειρηματολογούν με ακρίβεια και λογική συνοχή στη μαθηματική γλώσσα, προάγοντας την κριτική και δημιουργική τους σκέψη. Από την άλλη πλευρά αποβλέπουν στη συστηματική προετοιμασία των μαθητών ώστε να είναι σε θέση να διερευνούν, να αναλύουν, να αναπαριστούν, να θέτουν οι ίδιοι προβλήματα και να τα επιλύουν. Στο πλαίσιο αυτό οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις διεπιστημονικές συσχετίσεις και το τεράστιο εύρος εφαρμογών των Στοχαστικών Μαθηματικών σε όλους τους τομείς της κοινωνικο-οικονομικής ζωής και του πολιτισμού, ενώ παράλληλα εξοικειώνονται με τις βασικές έννοιες που θα τους είναι απαραίτητες όταν θα φοιτήσουν στο πανεπιστήμιο.

Ειδικότερα, οι μαθητές καλούνται να αποκτήσουν μια πρώτη γνωριμία με τα ακόλουθα κεφάλαια: Συνδυαστική, Βασικές έννοιες των Πιθανοτήτων, Κατανομές Πιθανότητας και Στατιστική.

Η Συνδυαστική(combinatorics), την οποία θα μελετήσουμε, είναι τα Μαθηματικά της απαρίθμησης και έχει ως αντικείμενο την ανάπτυξη συστηματικών μεθόδων για τον προσδιορισμό του πλήθους των στοιχείων πεπερασμένων συνόλων, χωρίς άμεση προσφυγή στην καταμέτρησή τους. Η Συνδυαστική δεν είναι αυτοσκοπός, αλλά εφαρμόζεται στις Πιθανότητες και τη μελέτη της Διωνυμικής Κατανομής (binomial distribution) .

Οι Πιθανότητες (probabilities) έχουν βαρύνουσα σημασία στο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου. Ο πολύπλοκος και δυναμικός κόσμος στον οποίο ζούμε δεν είναι απολύτως αιτιοκρατικός. Ακόμα και οι πλέον σύγχρονες επιστημονικές θεωρίες δεν είναι σε θέση να προβλέψουν με απόλυτη ακρίβεια όλα τα φαινόμενα που μελετούν. Η τύχη και η αβεβαιότητα είναι παντού γύρω μας και αποτελούν μέρος της καθημερινής μας ζωής. Ακούμε για την πιθανότητα να μεταδοθεί μια ασθένεια ή να γίνει μεγάλος σεισμός, για την πιθανότητα να νικήσει μια ποδοσφαιρική ομάδα ή να βγει πρώτο ένα κόμμα στις εκλογές. Ακούμε ακόμα για την πιθανότητα να κερδίσει κάποιος το λαχείο ή να ζήσει μέχρι την ηλικία των 100 ετών. Η στοχαστικότητα είναι πλέον μια σύγχρονη αναγκαιότητα. Με την ανάπτυξη και μελέτη των Στοχαστικών Μαθηματικών οι μαθηματικοί προσπαθούν να κατανοήσουν τη μεταβλητότητα, να «δαμάσουν» την αβεβαιότητα. Η Θεωρία Πιθανοτήτων προσφέρει ισχυρά εργαλεία για την περιγραφή και ανάλυση των τυχαίων φαινομένων και έχει ευρύτατες εφαρμογές στην επιστήμη και την καθημερινή ζωή. Μεταξύ άλλων διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην επινόηση οικονομικών μοντέλων πρόβλεψης, την κβαντομηχανική, την πρόγνωση του καιρού και τις ιατρικές διαγνώσεις. Αναμφίβολα, οι μελλοντικοί πολίτες θα πρέπει να αναπτύξουν την κριτική ικανότητα λήψης αποφάσεων και εξαγωγής συμπερασμάτων σε αβέβαιες καταστάσεις.

Οι βασικές έννοιες του λογισμού των πιθανοτήτων έχουν ήδη αποτελέσει αντικείμενο αρχικής επεξεργασίας από τους μαθητές της Α΄ Λυκείου. Στην Γ΄ Λυκείου διενεργείται μια σύντομη επανάληψη των γνώσεων αυτών, αλλά επιπλέον οι μαθητές εμπλέκονται σε πιο σύνθετα προβλήματα εμπλουτίζοντας τις γνώσεις τους με νέες έννοιες. Ειδικότερα, γίνεται αναφορά στο Νόμο των Μεγάλων Αριθμών (law of large numbers) για να αποσαφηνιστεί η σύνδεση ανάμεσα στη Στατιστική και τις Πιθανότητες. Επίσης, εισάγεται ο γενικός (αξιωματικός) ορισμός της πιθανότητας για πεπερασμένους δειγματικούς χώρους. Ακολουθούν οι κανόνες λογισμού πιθανοτήτων, η στοχαστική ανεξαρτησία (stochastic independence) και η δεσμευμένη πιθανότητα (conditional probability). Το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας αποτελεί εφαρμογή του πολλαπλασιαστικού κανόνα, ενώ το Θεώρημα του Bayes, συνδέει δεσμευμένες πιθανότητες της μορφής $P(A|B)$ με δεσμευμένες πιθανότητες της μορφής $P(B|A)$. Αν θεωρήσουμε το Β ως “αιτία” και το Α ως “αποτέλεσμα”, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του αποτελέσματος Α το οποίο οφείλεται στην αιτία Β. Τα προβλήματα στα οποία χρησιμοποιούνται οι προαναφερόμενες περιπτώσεις μπορούν να αποδοθούν εύκολα με τη χρήση δεντροδιαγράμματος πιθανοτήτων.

Η μελέτη των Τυχαίων Μεταβλητών και των Κατανομών Πιθανότητας αποτελούν σημαντική καινοτομία του νέου Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου. Κατ’ αναλογία προς τις αντίστοιχες στατιστικές έννοιες προσεγγίζονται σε βασικό επίπεδο οι έννοιες της αναμενόμενης τιμής, της διασποράς και της τυπικής απόκλισης, οι οποίες θα χρησιμεύουν ως θεωρητικά μοντέλα για τα φαινόμενα που παρατηρούνται στη Στατιστική. Από τις διακριτές κατανομές παρουσιάζεται η κατανομή Bernoulli και η διωνυμική, η οποία είναι η συχνότερη κατανομή. Από τις συνεχείς μελετάται η κανονική κατανομή, η οποία είναι σημαντική για την περιγραφή και μοντελοποίηση πλήθους καταστάσεων στις οποίες πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες τιμές είναι μάλλον σπάνιες, ενώ ενδιάμεσες τιμές είναι συνήθεις. Τα μοντέλα των κατανομών πιθανότητας είναι πολύτιμα για την ανάπτυξη πολύπλευρων δεξιοτήτων σκέψης. Η αξιοποίησή τους είναι μια σημαντική πτυχή στην περιγραφή και πραγμάτευση των στοχαστικών προβλημάτων. Οι μαθητές θα πρέπει να αναγνωρίζουν ότι μπορεί σε ένα πρόβλημα να υπάρχουν διαφορετικά μοντέλα, να κατανοούν τους περιορισμούς που ενυπάρχουν και να αντιλαμβάνονται γιατί ένα μοντέλο είναι κατάλληλο, ενώ κάποιο άλλο όχι. Για την αντιμετώπιση των δυσκολιών η διδασκαλία των Πιθανοτήτων θα πρέπει να προωθεί και να αναδεικνύει το στοχαστικό συλλογισμό των μαθητών. Οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να διακρίνουν τα τυχαία από τα αιτιοκρατικά φαινόμενα και να κατανοούν ότι τα χαρακτηριστικά που αποδίδονται στα τυχαία γεγονότα έχουν προεξάρχουσα σημασία στη μάθηση των εννοιών. Η μετάφραση από την καθημερινή γλώσσα στη γλώσσα των συνόλων διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στις Πιθανότητες. Ωστόσο, η λεπτομερής επεξεργασία της "άλγεβρας των συνόλων" δεν είναι απαραίτητη. Η αποτελεσματική διδασκαλία οικοδομεί πάνω στις προϋπάρχουσες γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών.

Τέλος, η ανάγκη για την ενασχόληση των μαθητών με τη Στατιστική προκύπτει από το γεγονός ότι η μεταβλητότητα ενυπάρχει παντού στον κόσμο των δεδομένων. Καθημερινά οι άνθρωποι κατακλύζονται από δημοσκοπήσεις, παρουσιάσεις στατιστικών διαγραμμάτων, ενώ κάποιοι λαμβάνουν αποφάσεις βασιζόμενοι σε στατιστικές μελέτες, όπως οι γιατροί και σπανιότερα οι δικαστές. Κύριο αντικείμενο έρευνας και μελέτης της Στατιστικής είναι η συλλογή, ταξινόμηση, επεξεργασία, παρουσίαση, ανάλυση και ερμηνεία διαφόρων δεδομένων με απώτερο στόχο την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων για λήψη ορθών αποφάσεων. Πρόκειται για επιστήμη με ευρύτατες εφαρμογές στη Δημόσια Διοίκηση, τις επιχειρήσεις, καθώς και στις θετικές, τεχνολογικές και ανθρωπιστικές επιστήμες. Η γνώση της Στατιστικής για το σύγχρονο πολίτη είναι τόσο αναγκαία όσο η ανάγνωση και η γραφή. Με το νέο Πρόγραμμα Σπουδών παρέχεται η δυνατότητα στους αυριανούς πολίτες, να κατανοούν τις βασικές έννοιες και τις διαδικασίες της Στατιστικής, έτσι ώστε να είναι σε θέση να προβαίνουν σε κριτικό έλεγχο των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται, καθώς και των ερμηνειών και των συμπερασμάτων που εξάγονται. Στόχος είναι η ανάπτυξη του στατιστικού συλλογισμού και μαζί με την διδασκαλία των πιθανοτήτων στοχεύει στην ανάπτυξη της μη ντετερμινιστικής σκέψης. Η αξιοποίηση κατάλληλων λογισμικών δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να εξερευνήσουν τις έννοιες των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής.

Η Στατιστική έχει σημαντική βαρύτητα στο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών οικονομικών, πολιτικών, κοινωνικών και παιδαγωγικών σπουδών της Γ΄ Λυκείου. Οι βασικές έννοιες της Στατιστικής έχουν εισαχθεί στη Β΄ Λυκείου. Στην Γ΄ Λυκείου γίνεται μια σύντομη επανάληψη των πρότερων βασικών γνώσεων, αλλά οι μαθητές διευρύνουν τις στατιστικές γνώσεις τους με νέες έννοιες. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι το περιεχόμενο της Στατιστικής οργανώνεται με βάση ένα στατιστικό πρόβλημα. Στη διδασκαλία δίνεται προεξάρχουσα σημασία στην εμπλοκή των μαθητών στη διατύπωση του στατιστικού ερωτήματος, την ανάλυση των δεδομένων και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Καθώς οι στατιστικές εμπειρίες τους εμπλουτίζονται οι μαθητές αναμένεται να αποκομίσουν μια πλουσιότερη κατανόηση της μεταβλητότητας. Στο πλαίσιο του προγράμματος οι μαθητές θα αποκτήσουν μια πρώτη εξοικείωση με το απλό γραμμικό μοντέλο και πιο συγκεκριμένα με τις έννοιες του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης και της ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης. Εφόσον δύο μεταβλητές συσχετίζονται, η μεταβολή στην τιμή της μιας συνδέεται με την μεταβολή της τιμής της άλλης. Τέτοιες μεταβλητές παραπέμπουν σε παραδείγματα διμεταβλητών δεδομένων. Τα δεδομένα αυτά δίνονται με ζεύγη της μορφής (x, y) και μεταξύ αυτών μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει σχέση.

Μετά την ολοκλήρωση της ύλης του Προγράμματος Σπουδών οι μαθητές θα πρέπει μεταξύ άλλων να μπορούν:

- να γνωρίζουν την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, τις μεταθέσεις, τις διατάξεις (permutations), τις διατάξεις με επανάληψη και τους συνδυασμούς (combinations) και να τα εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων πιθανοτήτων·
- να αξιοποιούν συνήθεις έννοιες των πιθανοτήτων όπως πείραμα τύχης (random experiment), δειγματικός χώρος (sample space), ενδεχόμενα (events, outcomes), κ.λπ.
- να κατανοούν τον κλασικό και τον γενικό (αξιωματικό) ορισμό της πιθανότητας, τη δεσμευμένη πιθανότητα, τη στοχαστική ανεξαρτησία και να τα χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.
- να αναγνωρίζουν αυθεντικές καταστάσεις της καθημερινότητας για τις οποίες η διωνυμική και η κανονική (normal) κατανομή αποτελούν ενδεδειγμένα μοντέλα. Να εφαρμόζουν αυτές τις κατανομές στη λύση προβλημάτων και να σχολιάζουν κριτικά την καταλληλότητά τους.
- να κατανοούν τις έννοιες της γραμμικής συσχέτισης (linear correlation) και της παλινδρόμησης (regression).

Το Πρόγραμμα Σπουδών μαζί με τον Οδηγό Εκπαιδευτικού παρέχουν κατευθυντήριες οδηγίες στους συγγραφείς των σχολικών βιβλίων. Ειδικότερα, χρησιμεύουν ως πηγή πληροφόρησης και βοηθούν τους εκπαιδευτικούς να αναπτύξουν πλούσια κατανόηση για τους τρόπους δραστηριοποίησης της σκέψης των μαθητών στα Στοχαστικά

Μαθηματικά. Οι εκπαιδευτικοί, με την ανανέωση του διδακτικού σχεδιασμού τους, αναμένεται να υποστηρίζουν την ανάπτυξη του στοχαστικού συλλογισμού των μαθητών μέσα από την αξιοποίηση άτυπων και τυπικών στρατηγικών. Οι τύποι πρέπει πάντοτε να αιτιολογούνται. Είναι σημαντικό, οι μαθητές να είναι σε θέση όχι απλώς να μαθαίνουν τους τύπους, αλλά επίσης να έχουν πλούσιες ευκαιρίες ώστε να εικάζουν, να εφευρίσκουν και να βελτιώνουν τις δικές τους αναπαραστάσεις ως εργαλεία για την υποστήριξη της μάθησης. Πρωταρχική σημασία έχει η ανάπτυξη της εννοιολογικής σκέψης των μαθητών και όχι η κατακυριάρχηση αλγεβρικών τεχνικών, οι οποίες στρεβλώσουν και υποβαθμίζουν τη στοχαστική φύση του μαθήματος. Τέλος, οι παραγωγοί θεμάτων και οι αξιολογητές θα πρέπει να διαμορφώνουν μελετημένα εξεταστικά δοκίμια που υπηρετούν με συνέπεια τους στόχους του Προγράμματος Σπουδών των Στοχαστικών Μαθηματικών, το οποίο εκτίθεται στη συνέχεια.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ **(Σύνολο Ωρών=50 ώρες)**	**ΣΤΟΧΟΙ** **Οι μαθητές να μπορούν να:**	**ΣΧΟΛΙΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ**
1. Συνδυαστική (10 ώρες)		
1.1 Αρχή απαρίθμησης (2 ώρες)	1.1.1. κατασκευάζουν κατάλληλο δεντροδιάγραμμα σε μια εργασία απαρίθμησης, να διακρίνουν τα βήματα και τους κλάδους του και να υπολογίζουν τα τελικά αποτελέσματα. 1.1.2. εφαρμόζουν την πολλαπλασιαστική αρχή σε αποδείξεις και προβλήματα απαρίθμησης. 1.1.3. διακρίνουν την πολλαπλασιαστική αρχή απαρίθμησης από την προσθετική αρχή απαρίθμησης και να τις εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων.	• Με κατάλληλα παραδείγματα θα πρέπει να δειχθεί ότι το δεντροδιάγραμμα πλεονεκτεί από άλλα μοντέλα απαρίθμησης όπως είναι τα διαγράμματα του Venn και οι πίνακες διπλής εισόδου. • Ως εισαγωγική δραστηριότητα για το στόχο 1.1.1. προτείνεται η Δ1. Στο πρόβλημα αυτό επειδή τα βήματα είναι δύο, μπορεί να εφαρμοστεί πίνακας διπλής εισόδου ή δεντροδιάγραμμα. • Ενδεικτική εισαγωγική δραστηριότητα για τον στόχο 1.1.2 είναι η Δ2. Βασικός στόχος της δραστηριότητας είναι να βοηθήσει τους μαθητές να εικάσουν τη γενίκευση της πολλαπλασιαστικής αρχής της απαρίθμησης. • Ενδεικτική δραστηριότητα για το στόχο 1.1.3. είναι η Δ3.
1.2 Μεταθέσεις, Διατάξεις και Συνδυασμοί: • Μεταθέσεις (2 ώρες)	1.2.1. αναγνωρίζουν ένα πρόβλημα μεταθέσεων ν διαφορετικών στοιχείων και να το λύνουν	• Παράλληλα με τις μεταθέσεις εισάγεται ο ορισμός του ν! • Προτείνεται οι μαθητές να εξοικειωθούν με απλές πράξεις όπως: $\frac{10!}{8!}=\frac{8!\cdot 9\cdot 10}{8!}=9\cdot 10=90.$ • Να αποδειχθεί με χρήση της πολλαπλασιαστικής αρχής ο τύπος του πλήθους των μεταθέσεων των ν διαφορετικών στοιχείων:

		$M_ν=ν!$ • Να επισημανθεί ότι δύο μεταθέσεις των ν στοιχείων διαφέρουν μόνο στη σειρά των στοιχείων. • Για τον στόχο 1.2.1 μπορεί να χρησιμοποιηθεί η δραστηριότητα Δ4.

• Διατάξεις (χωρίς επανάθεση, με επανάθεση) (3 ώρες)	1.2.2. αναγνωρίζουν ένα πρόβλημα διάταξης με ή χωρίς επανάληψη ν διαφορετικών στοιχείων ανά κ και το επιλύουν.	• Για το στόχο 1.2.2 προτείνεται η δραστηριότητα Δ5.
		• Να αποδειχθεί με χρήση της πολλαπλασιαστικής αρχής ότι
		  • το πλήθος των διατάξεων ν διαφορετικών στοιχείων ανά κ είναι: $Δ^ν_κ = \frac{ν!}{(ν-κ)!}$
		  • το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη ν διαφορετικών στοιχείων ανά κ, είναι $ν^κ$.
		  • Για τις διατάξεις με επανάληψη δε θα εισαχθεί συμβολισμός.
		• Να επισημανθούν τα ακόλουθα:
		α) Οι μεταθέσεις είναι ειδική περίπτωση διατάξεων των ν διακεκριμένων στοιχείων ανά ν.
		β) Δύο διατάξεις των ν διακεκριμένων στοιχείων ανά κ (με επανάληψη ή χωρίς) είναι διαφορετικές όταν δεν αποτελούνται από τα ίδια ακριβώς στοιχεία ή αποτελούνται μεν από τα ίδια στοιχεία, αλλά διαφέρουν ως προς τη σειρά των στοιχείων.
		γ) Στις επαναληπτικές διατάξεις των ν ανά κ μπορεί να έχουμε $κ<ν$, $κ=ν$ ή $κ>ν$.

• Συνδυασμοί (3 ώρες)	1.2.3. αναγνωρίζουν ένα πρόβλημα συνδυασμών ν διαφορετικών στοιχείων ανά κ και να το επιλύουν. 1.2.4. διακρίνουν τους συνδυασμούς από τις διατάξεις	• Να αποδειχθεί ότι το πλήθος των συνδυασμών ν διαφορετικών στοιχείων ανά κ είναι: $\binom{ν}{κ} = \frac{ν!}{κ!(ν-κ)!}$ • Να επισημανθούν τα ακόλουθα: α) Σε κάθε συνδυασμό με κ στοιχεία, καθεμιά από τις κ! μεταθέσεις των στοιχείων του δεν τον μεταβάλλει. β) Συνδυασμός των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ είναι κάθε

		υποσύνολο του Α με κ στοιχεία. γ) Δύο συνδυασμοί οι οποίοι διαφέρουν μόνο στην κατάταξη των κ στοιχείων λογίζονται ως ο ίδιος συνδυασμός, δηλαδή στους συνδυασμούς δεν ενδιαφέρει η σειρά με την οποία κατατάσσονται τα κ στοιχεία, αλλά μόνο ποια είναι αυτά τα στοιχεία. • Για τους στόχους 1.2.3 και 1.2.4 προτείνονται οι δραστηριότητες Δ6 και Δ7.
2. Πιθανότητες (επαναλήψεις-συμπληρώσεις) (20 ώρες)		
2.1 Πείραμα τύχης, δειγματικός χώρος, σύνολα, ενδεχόμενα, πράξεις (3 ώρες)	2.1.1. προσδιορίζουν τον πεπερασμένο δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης. 2.1.2. μεταφράζουν σχέσεις ενδεχομένων από τη γλώσσα των συνόλων στην καθημερινή γλώσσα και αντιστρόφως.	• Οι μαθητές, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, να επαναλάβουν συνοπτικά έννοιες που έχουν διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις όπως: πεπερασμένος δειγματικός χώρος, ενδεχόμενα και πράξεις με ενδεχόμενα. • Να δοθούν απλά παραδείγματα για πεπερασμένους δειγματικούς χώρους. Για λόγους πληρότητας να δοθεί ένα ενδεικτικό παράδειγμα συνεχούς δειγματικού χώρου π.χ. η διάρκεια ζωής ενός λαμπτήρα. • Να αναφερθεί πότε δυο ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα. • Για τον προσδιορισμό του πεπερασμένου δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης και των ενδεχομένων του, μπορούν να χρησιμοποιούνται ποικίλοι τρόποι αναπαράστασης (π. χ. δεντροδιαγράμματα, διαγράμματα Venn, πίνακες ορθογώνιων πεδίων, κατάλογοι δεδομένων). • Με κατάλληλα παραδείγματα να αποσαφηνιστούν οι εκφράσεις «τουλάχιστον» και «το πολύ» που αναφέρονται σε ενδεχόμενα. • Να διατυπωθούν και να αιτιολογηθούν οι νόμοι DeMorgan με χρήση διαγραμμάτων Venn • Ενδεικτική για τους στόχους 2.1.1. και 2.1.2 είναι η δραστηριότητα Δ8.
2.2 Ορισμός πιθανότητας (5 ώρες) • Κλασικός • Γενικός	2.2.1. διατυπώνουν τον κλασικό και το γενικό (αξιωματικό) ορισμό της	• Να δοθούν ποικίλες εφαρμογές των μεθόδων της Συνδυαστικής σε αυθεντικά προβλήματα πιθανοτήτων.

	πιθανότητας και να τους συσχετίζουν. 2.2.2. χρησιμοποιούν τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας για να υπολογίζουν πιθανότητες ενδεχομένων και να λύνουν προβλήματα. 2.2.3. διακρίνουν τις περιπτώσεις εφαρμογής του κλασικού και του γενικού ορισμού της πιθανότητας.	• Να γίνει αναφορά στο Νόμο των Μεγάλων Αριθμών. • Να ζητηθεί από τους μαθητές να χρησιμοποιούν μοντέλα προσομοίωσης όπως είναι η εκτέλεση ψηφιακών μικρο-πειραμάτων στον ηλεκτρονικό υπολογιστή, για να συγκρίνουν τη θεωρητική με την πειραματική πιθανότητα (π.χ. χρήση γεννήτριας δεδομένων για λήψη τυχαίων αριθμών, ρίψη κερμάτων, στρίψιμο σβούρας κ.λπ.). • Να εισαχθεί ο γενικός (αξιωματικός) ορισμός της πιθανότητας. Ο γενικός ορισμός της πιθανότητας να διατυπωθεί μόνο για πεπερασμένους δειγματικούς χώρους, να συγκριθεί με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ο οποίος και να ερμηνευτεί ως ειδική περίπτωσή του. Ο γενικός ορισμός επεκτείνεται και σε άπειρους δειγματικούς χώρους, ωστόσο δεν αποτελεί στόχο του Λυκείου. Να εφαρμοστεί ο γενικός ορισμός της πιθανότητας στην επίλυση απλών ασκήσεων και προβλημάτων. • Ενδεικτικές δραστηριότητες για το στόχο 2.2.2. είναι οι Δ9, Δ10 και για το στόχο 2.2.3 είναι η Δ11.
2.3 Λογισμός πιθανοτήτων (3 ώρες)	2.3.1. εφαρμόζουν τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων στην επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων.	• Για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες: i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ii) $P(A') = 1 - P(A)$ iii) $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ iv) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ • Δίνεται προτεραιότητα στις εφαρμογές των κανόνων λογισμού των πιθανοτήτων σε προβλήματα και όχι σε εξεζητημένες εφαρμογές της άλγεβρας των συνόλων. Ενδεικτικές δραστηριότητες είναι οι Δ12, Δ13 .
2.4 Δεσμευμένη πιθανότητα Πολλαπλασιαστικός κανόνας –Στοχαστικά ανεξάρτητα ενδεχόμενα, Ολική πιθανότητα, Θεώρημα Bayes (9 ώρες)	2.4.1. ορίζουν τη δεσμευμένη πιθανότητα δύο ενδεχομένων και να εντοπίζουν τον ενδεδειγμένο δειγματικό χώρο που απαιτείται για τον ορισμό	• Να επισημανθεί ότι η δεσμευμένη πιθανότητα παρουσιάζεται στις περιπτώσεις όπου μια πληροφορία για την έκβαση ενός πειράματος τύχης μειώνει την αβεβαιότητα συρρικνώνοντας το δειγματικό χώρο. Ενδεικτική εισαγωγική δραστηριότητα για το στόχο 2.4.1. είναι η δραστηριότητα Δ14.

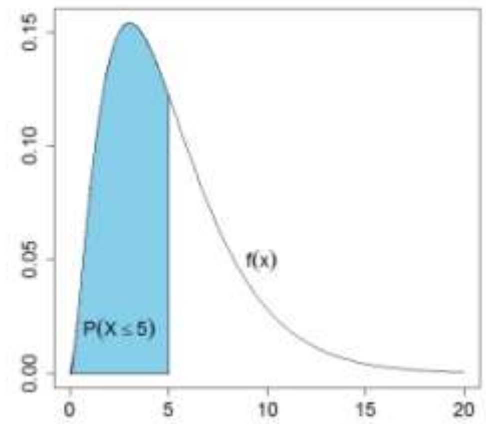
	της. 2.4.2. αξιοποιούν τη δεσμευμένη πιθανότητα για να ορίζουν τη στοχαστική ανεξαρτησία δύο ενδεχομένων. 2.4.3. αποφαίνονται αν δύο ενδεχόμενα είναι στοχαστικά εξαρτημένα ή όχι και να υπολογίζουν πιθανότητες με αυτά. 2.4.4. λύνουν προβλήματα με χρήση του Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας. 2.4.5. εφαρμόζουν το Θεώρημα του Bayes στην επίλυση προβλημάτων.	• Όταν η γνώση του ενδεχομένου Α, με P(A)≠0, δεν επηρεάζει την πιθανότητα του ενδεχομένου Β, τότε τα δυο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα και οι πιθανότητες P(B|A) και P(B) θα είναι ίσες. Συνεπώς προτείνεται να εισαχθεί η στοχαστική ανεξαρτησία ως ειδική περίπτωση της δεσμευμένης πιθανότητας. • Να δειχθεί ότι δύο ενδεχόμενα Α, Β με P(A)≠0 και P(B)≠0 είναι στοχαστικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύει : $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. Για το στόχο 2.4.3. ενδείκνυται η δραστηριότητα Δ15. • Γίνεται διεξοδική παρουσίαση του δεντροδιαγράμματος πιθανοτήτων για στοχαστικά εξαρτημένα και στοχαστικά ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Να μνημονευθεί ότι όταν ακολουθούμε ένα μονοπάτι κατά μήκος ενός κλάδου πολλαπλασιάζουμε τις πιθανότητες, ενώ όταν μεταβαίνουμε ανάμεσα στους κλάδους προσθέτουμε τις πιθανότητες. • Θα πρέπει να επισημανθεί ότι δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα Α, Β με P(A)≠0 και P(B)≠0 δεν είναι στοχαστικά ανεξάρτητα. • Να αποδειχθεί ως εφαρμογή ότι αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι στοχαστικά ανεξάρτητα, τότε και τα ενδεχόμενα, Α΄ και Β, Α και Β΄, Α΄ και Β΄ είναι επίσης στοχαστικά ανεξάρτητα. • Στην πλειονότητα των περιπτώσεων η ανεξαρτησία δύο ενδεχομένων προκύπτει από τη φύση του πειράματος ή ενυπάρχει στις υποθέσεις της κατασκευής του μοντέλου που περιγράφει ένα φαινόμενο. • Το Θεώρημα της Ολικής Πιθανότητας (Θ. Ο. Π.) να παρουσιασθεί στην απλούστερη μορφή του, όπου ο δειγματικός χώρος Ω διαμερίζεται σε δυο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄. Επομένως η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Β του Ω μπορεί να υπολογιστεί ως εξής: $P(B)=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(A')\cdot P(B\mid A')$ • Το Θεώρημα του Bayes να παρουσιασθεί επίσης στην απλούστερη μορφή του:

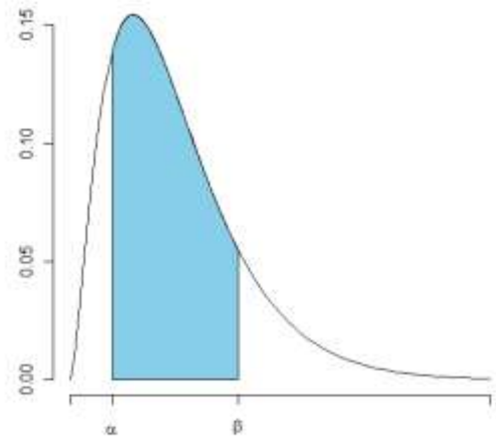
		$$P(A\mid B)=\frac{P(A)\cdot P(B\mid A)}{P(A)\cdot P(B\mid A)+P(A')\cdot P(B\mid A')}$$ όπου P(B)>0, P(A)>0, P(A΄)>0 • Για τους στόχους 2.4.4 και 2.4.5 προτείνεται η δραστηριότητα Δ16.
3. Κατανομές (20ώρες)		
Διακριτές Κατανομές 3.1 Διακριτή τυχαία μεταβλητή (3 ώρες)	3.1.1. αναγνωρίζουν την έννοια της διακριτής τυχαίας μεταβλητής.	• Με παραδείγματα από την καθημερινότητα να εισαχθεί η έννοια της τυχαίας μεταβλητής. Να αναφερθεί ότι η τυχαία μεταβλητή είναι μια συνάρτηση που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο του δειγματικού χώρου έναν πραγματικό αριθμό. • Προτείνεται η δραστηριότητα Δ17.
	3.1.2. ορίζουν συνάρτηση πιθανότητας P(X=x) μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X και να την παρουσιάζουν με τη βοήθεια πίνακα ή διαγράμματος.	• Οι τυχαίες μεταβλητές θα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα, όπως X ή Y, και οι τιμές που αυτές λαμβάνουν με τα αντίστοιχα πεζά γράμματα, x ή y. • Να τονιστεί ότι ο συμβολισμός P(X=x)=p(x) σημαίνει: «η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει την τιμή x είναι p(x)».
	3.1.3. υπολογίζουν πιθανότητες ενδεχομένων της μορφής P(X=x).	• Να παρουσιαστεί ο συμβολισμός του αθροίσματος και να εξηγηθούν οι ιδιότητές του. • Η συνάρτηση πιθανότητας P(X=x) δίνει την πιθανότητα στοιχειωδών ενδεχομένων και ακολουθεί τα αξιώματα της πιθανότητας: $P(X=x)=p(x)\geq 0$ και $\sum_x P(x)=\sum_x P(X=x)=1$.
	3.1.4. αξιοποιούν την αθροιστική συνάρτηση κατανομής για να υπολογίζουν πιθανότητες της μορφής P(X≤x) και να την παρουσιάζουν με τη βοήθεια διαγράμματος.	• Για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής προτείνεται ο συμβολισμός: $F(x)=P(X\leq x)$ • Η γνώση της πιθανότητας P(X≤x) είναι θεμελιώδης, γιατί με τη βοήθειά της μπορούμε να υπολογίσουμε πολλές άλλες χρήσιμες πιθανότητες της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X, όπως τις: P(X<x), P(X>x) και P(α≤X≤β),

	3.1.5. υπολογίζουν την αναμενόμενη τιμή και τη διασπορά διακριτής τυχαίας μεταβλητής και να γνωρίζουν να τις υπολογίζουν σε πραγματικά προβλήματα.	• Να δοθούν οι σχέσεις με τις ιδιότητες της αναμενόμενης τιμής E(X) και της διασποράς V(X) με σκοπό τη χρήση τους στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων. • Για τους στόχους 3.1.2., 3.1.3., 3.1.4. και 3.1.5. προτείνεται η Δ18.
	3.1.6. αναγνωρίζουν διακριτές τυχαίες μεταβλητές και να τις αξιοποιούν στην επεξεργασία, στην επινόηση στρατηγικών και την εξαγωγή συμπερασμάτων.	• Οι μαθητές θα πρέπει να αναπτύξουν μεγάλη ευχέρεια στην αναγνώριση και διαχείριση των διακριτών τυχαίων μεταβλητών. • Προτείνεται οι μαθητές να καταγίνονται με αυθεντικά προβλήματα με οικονομικό, κοινωνικό και παιδαγωγικό περιεχόμενο. • Έμφαση θα πρέπει να δοθεί και στην ανάλυση κι επεξεργασία των αποτελεσμάτων. • Είναι εξ ίσου σημαντικό οι μαθητές να μπορούν να περιγράψουν τα αποτελέσματα σε απλή γλώσσα (Layman'sterms), έτσι ώστε ο μέσος άνθρωπος (κάποιος χωρίς κατάρτιση στις πιθανότητες και τη στατιστική) να μπορεί να τα αντιληφθεί.
3.2. Κατανομή Bernoulli (1 ώρα)	3.2.1. αναγνωρίζουν πότε μια τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την κατανομή Bernoulli.	• Να τονισθεί η σημασία της δοκιμασίας Bernoulli ως βασική διαδικασία για τη μελέτη του απλούστερου πειράματος τύχης με δύο πιθανά ενδεχόμενα. • Συμβατικά στο πείραμα (δοκιμή) Bernoulli το γεγονός που μας ενδιαφέρει το ονομάζουμε «επιτυχία» με πιθανότητα εμφάνισης p και το συμπληρωματικό του «αποτυχία» με πιθανότητα q=1-p. • Στο πείραμα Bernoulli ενδιαφέρει η πιθανότητα επιτυχίας σε μία μόνο δοκιμή. • Να δηλωθεί ότι η τυχαία μεταβλητή X που μετρά το πλήθος των επιτυχιών σε μια και μόνο επανάληψη του πειράματος ακολουθεί την κατανομή Bernoulli και γράφουμε: X~B(1, p).
	3.2.2. γνωρίζουν τη συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Bernoulli και να υπολογίζουν την	• Αν X~B(1, p), τότε η αναμενόμενη τιμή της X και η διασπορά της δίνονται από τους τύπους: $\mu=E(x)=p$ και $V(X)=\sigma^2=V(X)=pq$. • Για τους στόχους 3.2.1. και 3.2.2. προτείνεται η Δ19.

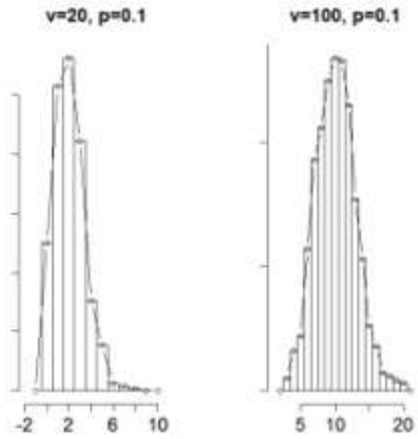
	αναμενόμενη τιμή και τη διασπορά της. 3.2.3. αναγνωρίζουν αυθεντικά προβλήματα με δοκιμές Bernoulli και να τα επιλύουν.	• Για το στόχο 3.2.3. προτείνεται η Δ20.
3.3. Διωνυμική Κατανομή Β(ν, p) (5 ώρες)	3.3.1. αναγνωρίζουν πότε μια τυχαία μεταβλητή ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή.	• Να επισημανθεί ότι η διωνυμική κατανομή προκύπτει από τις επαναλήψεις ν ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας. • Να δηλωθεί ότι η τυχαία μεταβλητή Χ η οποία μετρά το πλήθος των επιτυχιών σε ν ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή και συμβολίζεται: Χ~Β(ν, p).
	3.3.2. ορίζουν τη συνάρτηση πιθανότητας της Β(ν, p) και να παρουσιάζουν την κατανομή πιθανότητας με τη βοήθεια πίνακα ή διαγράμματος. 3.3.3. υπολογίζουν πιθανότητες της μορφής P(X=κ) για κάθε τιμή της τυχαίας μεταβλητής Χ.	• Έστω κ ο αριθμός των επιτυχιών σε μια διωνυμική κατανομή Β(ν, p). Τότε ο αριθμός των αποτυχιών ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή Β(ν, 1-p). Επομένως η πιθανότητα για κ επιτυχίες είναι ίση με την πιθανότητα για ν-κ αποτυχίες, αφού το πλήθος των επιτυχιών ταυτόχρονα καθορίζει και το πλήθος των αποτυχιών. • Να επισημανθεί ότι ο εκάστοτε διωνυμικός συντελεστής εκφράζει το πλήθος των συνδυασμών με τους οποίους παίρνουμε κ επιτυχίες στις ν δοκιμές. • Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν και οι πίνακες της διωνυμικής κατανομής.
	3.3.4. βρίσκουν αθροιστικές πιθανότητες της μορφής P(X≤κ) χρησιμοποιώντας τον τύπο ή πίνακες.	• Ο υπολογισμός πιθανοτήτων της μορφής P(X≤κ) δίνεται από το άθροισμα των πιθανοτήτων για όλες τις τιμές της τυχαίας μεταβλητής Χ που είναι μικρότερες ή ίσες από κ.
	3.3.5. υπολογίζουν την αναμενόμενη τιμή και τη διασπορά της.	• Αν Χ~Β(ν, p) τότε η αναμενόμενη τιμή και η διασπορά είναι: $E(X) = \nu p$ και $\sigma^2 = V(X) = \nu p(1-p)$. Να δοθούν οι προηγούμενοι τύποι χωρίς απόδειξη.

	3.3.6. χρησιμοποιούν τη διωνυμική κατανομή στην επίλυση αυθεντικών προβλημάτων.	• Οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν τη διωνυμική κατανομή για να μοντελοποιούν μια κατάσταση του πραγματικού κόσμου και να σχολιάζουν κριτικά την καταλληλότητά της. • Να δοθούν παραδείγματα πάνω στο γνωστικό αντικείμενο της εκάστοτε κατεύθυνσης και να ζητηθεί από τους μαθητές να περιγράφουν τα αποτελέσματα στην καθημερινή γλώσσα. • Για την καλύτερη περιγραφή και κατανόηση των προβλημάτων με δεδομένα από τη διωνυμική κατανομή, αλλά και συνδυαστικά με την ύλη από άλλες ενότητες, προτείνεται η εκπόνηση διερευνητικών εργασιών από τους μαθητές σε πραγματικά προβλήματα. Οι μαθητές να μπορούν να επεξεργάζονται τα στοιχεία του προβλήματος και να γράφουν μια σύντομη αναφορά για τον τρόπο ανάλυσης των δεδομένων και τα αποτελέσματα. • Για τους στόχους της παραγράφου 3.3 προτείνονται οι Δ21, Δ22 και Δ23.
Συνεχείς Κατανομές 3.4. Συνεχής τυχαία μεταβλητή (1ώρα)	3.4.1. αναγνωρίζουν την έννοια της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής.	• Για την κατανόηση της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να διακρίνουν μεταξύ καταστάσεων που αναφέρονται σε διακριτές κατανομές και καταστάσεων που αναφέρονται σε συνεχείς κατανομές. Για το λόγο αυτό προτείνεται η Δ24. • Να επισημανθεί ότι σε πειράματα συνεχών τυχαίων μεταβλητών, οι πιθανότητες υπολογίζονται σε ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών. • Οι μαθητές έχουν διδαχθεί πως να κατασκευάζουν το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο από συνεχή δεδομένα. Με αξιοποίηση κατάλληλου στατιστικού λογισμικού και με διερευνήσεις να διαπιστώσουν πως όταν για κατάλληλο πλήθος παρατηρήσεων ο αριθμός των κλάσεων τείνει στο άπειρο και το πλάτος των κλάσεων τείνει στο μηδέν, τότε το πολύγωνο τείνει να πάρει τη μορφή μιας ομαλής καμπύλης.

	3.4.2. γνωρίζουν την έννοια της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και τις βασικές ιδιότητές της.	• Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x) της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X είναι μια μη αρνητική συνάρτηση, της οποίας το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη της και τον άξονα x’x ισούται με 1. • Να μην γίνει εκτεταμένη χρήση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας παρά μόνον σε απλές περιπτώσεις συναρτήσεων, π.χ. γραμμικές. • Να σημειωθεί ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x) της τυχαίας μεταβλητής X είναι μια συνάρτηση που δεν υπολογίζει πιθανότητες, όπως κάνει η συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής.
	3.4.3. αναπαριστούν γραφικά την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και να γνωρίζουν τη γεωμετρική ερμηνεία της σε απλές περιπτώσεις.	• Να εξηγηθεί ότι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \le x)$ μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X με πυκνότητα πιθανότητας f(x) υπολογίζεται ως το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη της f(x) και τον άξονα x’x για τιμές μικρότερες ή ίσες του x.  **Σημείωση**: Η ολοκληρωμένη κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης κατανομής και της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας μιας

		συνεχούς τυχαίας μεταβλητής απαιτούν γνώσεις ολοκληρωτικού λογισμού.
	3.4.4. χρησιμοποιούν την αθροιστική συνάρτηση κατανομής για να αναγνωρίζουν τις πιθανότητες ενδεχομένων ως τα κατάλληλα εμβαδά κάτω από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.	• Να αναφερθεί ότι η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει τιμή σε ένα διάστημα [α,β] ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη της f(x) και τον άξονα x’x στο συγκεκριμένο διάστημα. 
	3.4.5. υπολογίζουν τη συνάρτηση κατανομής για δοσμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και αντιστρόφως σε απλές περιπτώσεις.	• Για κάθε συνεχή τυχαία μεταβλητή X ισχύουν: ○ $P(X = x) = 0$ ○ $P(X \leq x) = P(X < x)$ ○ $P(\alpha \leq X \leq \beta) = P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha < X < \beta)$ • Επιπλέον ισχύει: $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$
	3.4.6. υπολογίζουν την αναμενόμενη τιμή μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής σε απλές περιπτώσεις.	• Η αναμενόμενη τιμή E(X) υπολογίζεται ως το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη της xf(x) και τον άξονα x’x.. Ο υπολογισμός της αναμενόμενης τιμής είναι σχετικά εύκολος σε απλές περιπτώσεις (π.χ. f(x)=c, όπου c μία σταθερά).

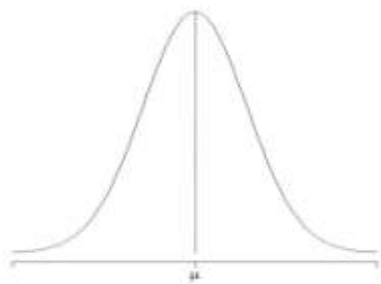
	3.4.7. αναγνωρίζουν συνεχείς τυχαίες μεταβλητές κατά τη μελέτη αυθεντικών προβλημάτων και να τις διαχειρίζονται κατάλληλα με σκοπό την εξαγωγή των ενδεδειγμένων συμπερασμάτων.	• Να υπογραμμιστεί ότι η αναμενόμενη τιμή και η διασπορά αποτελούν δύο μέτρα που χαρακτηρίζουν τη κατανομή. • Οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να διαχειρίζονται συνεχείς τυχαίες μεταβλητές κατά τη μελέτη ρεαλιστικών προβλημάτων. • Είναι επίσης σημαντικό οι μαθητές να μπορούν να κοινοποιούν τα αποτελέσματα των μελετών σε απλή γλώσσα, έτσι ώστε και άνθρωποι χωρίς καμία κατάρτιση να μπορούν να κατανοούν τους σκοπούς και τα αποτελέσματα μιας μελέτης. • Για τους στόχους 3.4.2. έως και 3.4.7. προτείνεται η Δ25.
3.5. Κανονική κατανομή Ν(μ, σ^2) (3 ώρες)	3.5.1. αναγνωρίζουν σε αυθεντικά προβλήματα της καθημερινότητας την κανονική κατανομή.	• Να γραφτεί ότι για να δηλώσουμε ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2 τότε συμβολικά γράφουμε: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ • Να επισημανθεί ότι η Ν(μ, σ^2) είναι μια συνεχής κατανομή με πολλές εφαρμογές στην καθημερινή πραγματικότητα καθώς πολλές διαδικασίες (οικονομικές, παραγωγικές, κλπ) μπορούν να περιγραφούν από την κανονική κατανομή. • Οι μαθητές αναμένεται να χρησιμοποιούν τη κανονική κατανομή και να αξιοποιούν τις ιδιότητές της για να μοντελοποιούν μια κατάσταση του πραγματικού κόσμου και να σχολιάζουν κριτικά την καταλληλότητά της. • Με τη βοήθεια ιστογράμματος από δεδομένα που ακολουθούν τη διωνυμική κατανομή, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι καθώς το πλήθος των επαναλήψεων ν αυξάνεται τότε το ιστόγραμμα παίρνει μια συμμετρική μορφή και τείνει προς την κανονική.

<table>
<tr><td></td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td>3.5.2. γνωρίζουν τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της N(μ, σ2) και τις ιδιότητες της καμπύλης της κανονικής κατανομής.</td><td>

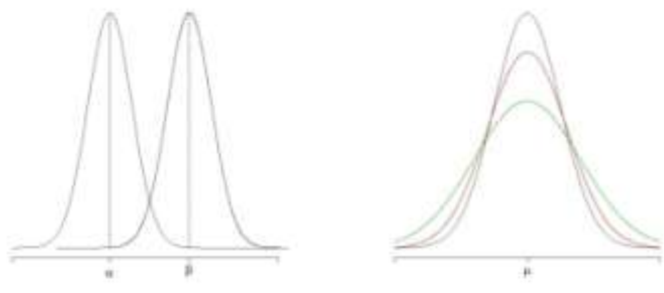
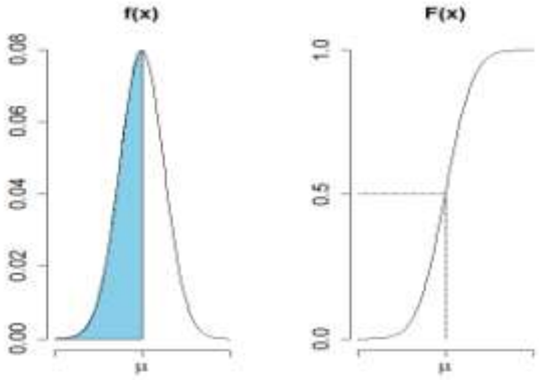
- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας κανονικής κατανομής $N(\mu,\sigma^2)$ έχει τύπο:

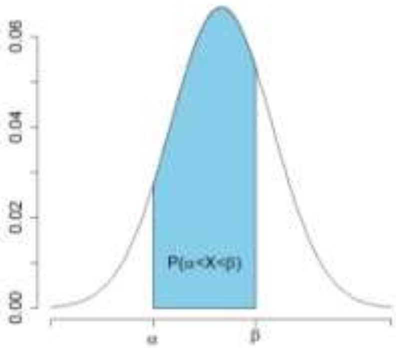
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$, με x, μ∈R καισ>0.

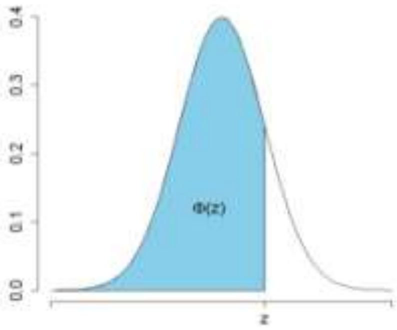
και η γραφική της παράσταση έχει μορφή καμπάνας (bell shape) όπως φαίνεται παρακάτω:

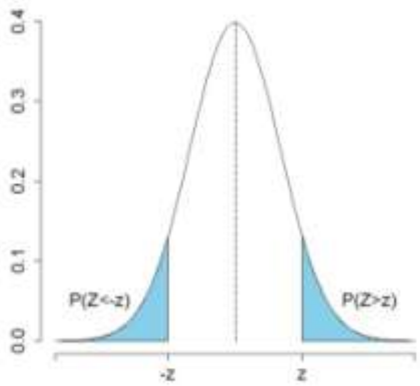


- Θα πρέπει να τονιστεί ότι δεν απαιτείται απομνημόνευση του προηγούμενου τύπου. Η γνώση του σχήματος και της συμμετρίας
</td></tr>
</table>

	3.5.3. αξιοποιούν τη γεωμετρική ερμηνεία της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας για να συνδέουν εμβαδά κάτω από τη καμπύλη με αντίστοιχες πιθανότητες.	της κανονικής κατανομής είναι απαραίτητη. • Από τις γραφικές παραστάσεις κανονικών κατανομών μπορούν να “συγκριθούν” οι μέσες τιμές και οι τυπικές τους αποκλίσεις, όπως φαίνεται στα ακόλουθα γραφήματα.  **(α)** **(β)** • Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής F(x), δηλαδή «η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες της τιμής x», δίνεται από τον εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη καμπύλη της f(x) και τον άξονα x’x για τιμές μικρότερες ή ίσες του x. 

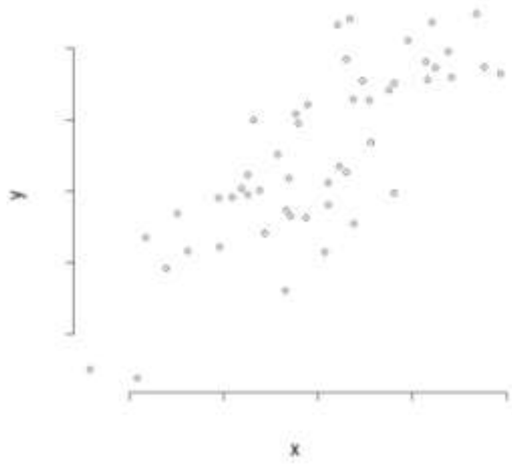
		Στο γράφημα παρουσιάζεται μια κανονική κατανομή και η αντίστοιχη αθροιστική συνάρτηση κατανομής της, όπου φαίνεται η σύνδεση εμβαδού και πιθανότητας. (Σημείωση: Ο υπολογισμός της συνάρτησης κατανομής επιτυγχάνεται με αριθμητικές μεθόδους με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού.) • Αν $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου «η τυχαία μεταβλητή X να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα [α,β] δίνεται από το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη καμπύλη της f(x) και τον άξονα x'x για τιμές x μεταξύ των α και β. 
3.6. Τυποποιημένη κανονική κατανομή N(0,1) (5 ώρες)	3.6.1. μετασχηματίζουν οποιαδήποτε κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$ στην N(0,1) και αντίστροφα.	• Να επισημανθεί η σπουδαιότητα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής N(0,1) για λόγους υπολογιστικούς. • Η τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη N(0,1) συμβολίζεται με Z. Ισχύει: Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ τότε $Z \sim N(0,1)$. • Με χρήση των ιδιοτήτων της αναμενόμενης τιμής και της διασποράς, μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι: $E(Z)=0$ και $V(Z)=1$. • Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της N(0,1) συμβολίζεται με φ(z) και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της με Φ(z).

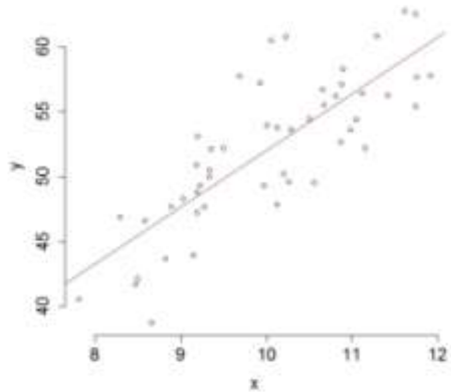
		
	3.6.2. χρησιμοποιούν τους πίνακες της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής Φ(z) της N(0,1) για να υπολογίζουν πιθανότητες της μορφής $P(X \leq x)$ και $P(α<X\leq β)$ καθώς και την τιμή του x για δεδομένες τιμές των μ, σ και Φ(z).	• Η N(0,1) είναι η πιο απλή περίπτωση κανονικής κατανομής, και οι τιμές της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής $Φ(z)=P(Z\leq z)$ έχουν υπολογισθεί και παρατίθενται σε πίνακες.
	3.6.3. αναγνωρίζουν μια z-τιμή ως τον θετικό ή αρνητικό αριθμό των τυπικών αποκλίσεων $σ = \sqrt{σ^2}$ από τη μέση τιμή μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής.	• Από τη σχέση $Z = \frac{X-μ}{σ}$ προκύπτει: X=σZ+μ. • Προτείνεται η χρήση κατάλληλου λογισμικού για τον προσδιορισμό πιθανοτήτων και τη παραγωγή γραφημάτων. • Γενικά για όλες τις τιμές του z ισχύει το εξής: $P(Z \leq -z) = P(Z \geq z) = 1 - P(Z \leq z)$

	3.6.4. εφαρμόζουν την κανονική κατανομή N(0,1) στην επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου.	 • Από τη συμμετρία της κανονικής προκύπτει: Φ(-z)=1-Φ(z) • Οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να ερευνούν και να επεξεργάζονται πραγματικά προβλήματα με τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κανονική κατανομή αλλά και συνδυαστικά με άλλα μέρη της ύλης. Επίσης, θα πρέπει να μπορούν να υποστηρίζουν τα αποτελέσματα μιας μελέτης τους σε απλή γλώσσα, έτσι ώστε και άνθρωποι χωρίς ειδική κατάρτιση να μπορούν να κατανοούν τους σκοπούς αλλά και τα αποτελέσματα. • Για τους στόχους των παραγράφων 3.5 και 3.6 προτείνονται οι Δ26, Δ27 και Δ28.
4. Στατιστική (Επαναλήψεις – Συμπληρώσεις) (15 ώρες)		
4.1 Παρουσίαση Στατιστικών δεδομένων	4.1.1. να κατασκευάζουν πίνακες κατανομής συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων για ομαδοποιημένα και μη δεδομένα και παριστάνουν γραφικά την κατανομή	• Να επαναληφθούν σύντομα οι βασικές έννοιες της Στατιστικής, οι οποίες διδάχθηκαν στη Β΄ Λυκείου και να συμπληρωθούν με νέες έννοιες. • Οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να σκέπτονται με πραγματικά δεδομένα, να αξιοποιούν ποικιλία διαγραμμάτων, να συζητούν τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των

	συχνοτήτων.	διαφόρων τρόπων αναπαράστασης και να συνθέτουν τις πληροφορίες επιλέγοντας τον προσφορότερο τρόπο παρουσίασης των στατιστικών δεδομένων. Τα δεδομένα μπορεί να είναι διακριτά, συνεχή, ομαδοποιημένα ή όχι.
4.2 Μέτρα Θέσης & Διασποράς	4.2.1. να υπολογίζουν τα μέτρα θέσης και διασποράς για ομαδοποιημένα ή μη δεδομένα.	• Να αποδειχθεί, ως εφαρμογή, η σχέση: $S^2 = \left(\overline{x^2}\right) - \left(\overline{x}\right)^2$ • Οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να κατασκευάζουν και να ερμηνεύουν ιστογράμματα και διαγράμματα αθροιστικών συχνοτήτων, να κατανοούν και να χρησιμοποιούν τις βασικές έννοιες της περιγραφικής στατιστικής, όπως μέτρα θέσης (μέση τιμή, διάμεσος και επικρατούσα τιμή) και διασποράς (εύρος, ενδοτεταρτομοριακό εύρος, διακύμανση και τυπική απόκλιση).
	4.2.2. υπολογίζουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των τιμών $y_i=\alpha x_i+\beta$ μιας μεταβλητής Υ, όταν γνωρίζουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των τιμών x_i μιας μεταβλητής Χ.	• Να αποδειχθεί, ως εφαρμογή, ότι: Αν για τις τιμές x_i και y_i δύο μεταβλητών Χ καιΥ ισχύει $y_i=\alpha x_i+\beta$, τότε για τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των μεταβλητών Χ και Υ θα ισχύει: $\overline{y}=\alpha\overline{x}+\beta$ και $s_y=\lvert\alpha\rvert\cdot s_x$
	4.2.3. αναγνωρίζουν τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των διαφόρων μέτρων θέσης και διασποράς και επιλέγουν το καταλληλότερο.	• Προτείνεται η Δ33.
	4.2.4. γνωρίζουν τη μορφή της καμπύλης συχνοτήτων της κανονικής κατανομής και να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες της τυπικής απόκλισης αυτής στην επίλυση προβλημάτων.	

	4.2.5. εμπλέκονται στη διερεύνηση και επίλυση αυθεντικών στατιστικών προβλημάτων με οικονομικό, πολιτικό, κοινωνικό και παιδαγωγικό περιεχόμενο.	• Οι μαθητές παροτρύνονται να εμπλακούν σε στατιστικά προβλήματα του κοινωνικού τους περίγυρου τα οποία συνδέονται με τον προσανατολισμό των σπουδών τους. Παρουσιάζουν στην τάξη μικρές διερευνητικές εργασίες με κύριο άξονα τη Στατιστική, στις οποίες διατυπώνουν στατιστικά ερωτήματα, συλλέγουν και αναλύουν δεδομένα και ερμηνεύουν τα αποτελέσματα. • Προτείνεται η Δ34.
4.3 Τυχαία Δειγματοληψία	4.3.1. να αποκτήσουν μια πρώτη γνωριμία με την έννοια της τυχαίας δειγματοληψίας.	• Προτείνετε η Δ35. • Για τους στόχους τους κεφαλαίου 4 προτείνεται η δραστηριότητα Δ36 με την υπόδειξη να εκπονηθεί παράλληλα με τους αντίστοιχους διδακτικούς στόχους.
5. Γραμμική Συσχέτιση-Απλό γραμμικό μοντέλο (10 ώρες)		
5.1 Γραμμική Συσχέτιση (2 ώρες)	5.1.1 κατασκευάζουν το διάγραμμα διασποράς και να αποφαίνονται εποπτικά αν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ δύο μεταβλητών.	• Όταν έχουμε ζεύγη παρατηρήσεων που αντιστοιχούν σε δύο μεταβλητές τότε το διάγραμμα διασποράς αποτελεί ένα οπτικό μέσο με το οποίο μπορούμε να εξερευνήσουμε την ύπαρξη ή όχι συσχέτισης.

		
	5.1.2 διακρίνουν τη θετική από την αρνητική συσχέτιση.	• Όταν δύο μεταβλητές σχετίζονται, στατιστικά, μεταξύ τους σημαίνει ότι οι αλλαγές στις τιμές της μιας μεταβλητής οδηγούν σε αλλαγές και στις τιμές της άλλης, ανάλογα με το είδος της συσχέτισης. Οι μεταβλητές δε διέπονται απαραίτητα από μια σχέση αιτίας – αποτελέσματος. • Αν η αύξηση της μιας μεταβλητής οδηγεί στην αύξηση της άλλης, τότε η συσχέτιση είναι θετική. Στην αντίθετη περίπτωση θα ονομάζεται αρνητική. Για παράδειγμα, το ύψος της παραγωγής ενός εργοστασίου είναι θετικά συσχετισμένο με το σύνολο των ωρών που εργάζονται οι υπάλληλοι. Αντίστοιχα, η απόσταση σε χιλιόμετρα που θα διανύσει ένα αυτοκίνητο ανά λίτρο βενζίνης είναι αρνητικά συσχετισμένο με το βάρος του αυτοκινήτου.
5.2 Συντελεστής Pearson(2 ώρες)	5.2.1 υπολογίζουν το συντελεστή συσχέτισης του Pearson και να τον ερμηνεύουν.	• Ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson αποτελεί ένα μέτρο του βαθμού της γραμμικής συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών. • Η υπόθεση ότι η σχέση αυτή είναι μια ευθεία γραμμή οδηγεί στη μελέτη του απλού γραμμικού μοντέλου. • Για τους στόχους 5.1.1., 5.1.2 και 5.2.1 προτείνεται η Δ29.

5.3 Ευθεία Παλινδρόμησης (6 ώρες)	5.3.1 χρησιμοποιούν τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση των παραμέτρων της ευθείας παλινδρόμησης.	• Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να σχεδιάζουν την ευθεία παλινδρόμησης είτε εμπειρικά (με το μάτι) είτε με χρήση ΤΠΕ και να γνωρίζουν ότι αυτή διέρχεται πάντα από το σημείο Μ$(\bar{x}, \bar{y})$. • Να τονισθεί ότι από την ευθεία παλινδρόμησης y=α+βxδεν προκύπτει ότι η ευθεία x=$\frac{y-\alpha}{\beta}$ είναι επίσης η ευθεία παλινδρόμησης του x πάνω στο y. • Οι εκτιμήσεις του y με την ευθεία παλινδρόμησης y=α+βxείναι αποδεκτές όταν χρησιμοποιήσουμε τιμές του x μεταξύ της ελάχιστης και μέγιστης τιμής από το σύνολο των παρατηρήσεων (x_i,y_i) 
	5.3.2 λύνουν προβλήματα με την ευθεία παλινδρόμησης και να ερμηνεύουν τις παραμέτρους της.	• Για τους στόχους 5.3.1., 5.3.2. 5.3.3 προτείνονται η Δ30 και Δ31.
	5.3.3 εμπλέκονται στην επίλυση αυθεντικών προβλημάτων και παρουσιάζουν τα αποτελέσματα στην καθημερινή γλώσσα	• Οι μαθητές θα πρέπει να εκπονούν διερευνητικές διεργασίες, να κάνουν στατιστικές αναλύσεις και να συντάσσουν μια σύντομη αναφορά όπου θα περιγράφουν τις μεθόδους που χρησιμοποίησαν και τα αποτελέσματα τους. • Για το σκοπό του στόχου 5.3.3. προτείνεται η Δ32.

Ενδεικτικές Δραστηριότητες

Δ1. (αντιστοιχεί στο στόχο 1.1.1.)
Μια παρέα με 4 κορίτσια και 3 αγόρια παραβρέθηκε σε μια χορευτική εκδήλωση. Καθένα από τα κορίτσια χόρεψε μια μόνο φορά με καθένα από τα αγόρια. Πόσα ζευγάρια χόρεψαν; (Σημειώνεται ότι τα ονόματα των τεσσάρων κοριτσιών ήταν Ελένη, Μαρία, Ρωξάνη και Σοφία, ενώ των τριών αγοριών Ανδρέας, Γιώργος και Κώστας)

Δ2. (αντιστοιχεί στο στόχο 1.1.2.)
Μια ταβέρνα προσφέρει ένα μενού με τέσσερα είδη: σαλάτα, κυρίως πιάτο, επιδόρπιο και ποτό. Ο κατάλογος περιλαμβάνει: 8 σαλάτες, 10 κύρια πιάτα, 7 επιδόρπια και 20 ποτά. Να φανταστείτε το δεντροδιάγραμμα και να προσδιορίσετε πόσες διαφορετικές παραγγελίες μπορούν να γίνουν με αυτό το μενού;

Δ3. (αντιστοιχεί στο στόχο 1.1.3.)
Σε ένα ράφι υπάρχουν 6 διαφορετικά αστυνομικά μυθιστορήματα, 5 διαφορετικά ιστορικά μυθιστορήματα και 3 διαφορετικά μυθιστορήματα επιστημονικής φαντασίας. Ο Γιώργος θέλει να επιλέξει ένα μυθιστόρημα. Με πόσους τρόπους μπορεί να κάνει την επιλογή; Η αδελφή του Γιώργου θέλει να επιλέξει ένα μυθιστόρημα από κάθε είδος. Με πόσους τρόπους μπορεί να διαλέξει τα τρία βιβλία;

Δ4. (αντιστοιχεί στο στόχο 1.2.1.)
Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί ένας μαθητής να τοποθετήσει στο γραφείο του ένα βιβλίο Μαθηματικών, ένα Φυσικής, ένα Λογοτεχνίας κι ένα Ιστορίας το ένα πάνω στο άλλο;

Δ5. (αντιστοιχεί στο στόχο και 1.2.2.)
Σε ένα κουτί υπάρχουν ένα άσπρο, ένα κόκκινο, ένα πράσινο κι ένα μαύρο σφαιρίδιο. Επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο, καταγράφουμε το χρώμα του και το επανατοποθετούμε στο κουτί. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία άλλη μια φορά.
α) Να σχεδιάσετε δεντροδιάγραμμα που να περιγράφει το χρώμα και τη σειρά με την οποία μπορούν να εξαχθούν τα δυο σφαιρίδια.
β) Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα είναι δυνατόν να καταγράψουμε;

γ) Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα είναι δυνατόν να καταγράψουμε αν ακριβώς το ένα από τα δυο σφαιρίδια είναι το μαύρο;

δ)Να απαντήσετε στα προηγούμενα ερωτήματα αν τραβήξουμε τα δύο σφαιρίδια χωρίς να τα επανατοποθετήσουμε στο κουτί.

Δ6. (αντιστοιχεί στο στόχο 1.2.3.)
Δίνεται το σύνολο Ω={α, β, γ, δ, ε}.
α) Να βρείτε όλα τα υποσύνολα του Ω.
β) Πόσα από τα υποσύνολα έχουν 3 στοιχεία;
γ) Σε κάθε υποσύνολο με 3 στοιχεία πόσες μεταθέσεις αντιστοιχούν;

δ) Ποια σχέση συνδέει το πλήθος των υποσυνόλων με τρία στοιχεία και τις διατάξειςΔ_3^5;

Δ7. (αντιστοιχεί στο στόχο 1.2.4.)
Ένα τμήμα με μαθητές πρόκειται να κληρώσει τρεις μαθητές να το εκπροσωπήσουν στη Γενική Συνέλευση του Σχολείου.
α) Με πόσους τρόπους μπορεί να προκύψει η τριάδα των εκπροσώπων του τμήματος από την κλήρωση;
β) Στην περίπτωση που ο 1^{ος} της κλήρωσης θα μιλήσει στη Γενική Συνέλευση, ο 2^{ος} θα είναι μέλος της εφορευτικής επιτροπής και ο 3^{ος} θα είναι αναπληρωματικό μέλος, με πόσους τρόπους μπορεί να προκύψει η τριάδα των εκπροσώπων του τμήματος;

Δ8. (αντιστοιχεί στους στόχους 2.1.1. και 2.1.2.)
Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και βρίσκουμε το άθροισμα των ενδείξεών τους.

α) Να βρείτε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.

β) Να παραστήσετε με αναγραφή τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από τις ιδιότητες: Α: "το άθροισμα των δύο ενδείξεων είναι το πολύ 6" και Β: "το άθροισμα των δύο ενδείξεων είναι τουλάχιστον 5".

γ) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα Α΄ και Β΄.

Δ9. (αντιστοιχεί στο στόχο 2.2.2.)
Σε μια συνέντευξη ο υποψήφιος πρέπει να απαντήσει σε δυο ερωτήσεις γενικής παιδείας από ένα σετ 7 ερωτήσεων που περιλαμβάνουν τέσσερις ερωτήσεις γεωγραφίας και τρεις ερωτήσεις ιστορίας. Αν οι δυο ερωτήσεις επιλέγονται τυχαία, ποια η πιθανότητα να είναι και οι δυο από τη γεωγραφία;

Δ10. (αντιστοιχεί στο στόχο 2.2.2)
Τρία αυτοκίνητα πρόκειται να ανεφοδιαστούν με καύσιμα επιλέγοντας κάποια από τα 5 πρατήρια της περιοχής. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουν διαφορετικά πρατήρια;

Δ11. (αντιστοιχεί στο στόχο 2.2.3.)
Ένα κουτί περιέχει 5 κόκκινα, 2 μαύρα και 3 άσπρα σφαιρίδια όλα του ιδίου μεγέθους. Παίρνουμε τυχαία από το κουτί ένα σφαιρίδιο και σημειώνουμε το χρώμα του. Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε σφαιρίδιο:
α) κόκκινο
β) άσπρο
γ) όχι μαύρο
δ) κόκκινο ή άσπρο
ε) ούτε κόκκινο ούτε άσπρο.

Δ12. (αντιστοιχεί στο στόχο 2.3.1.)
Από τον πληθυσμό μιας πόλης το 42% δεν έχουν ποτέ κάνει σκι, το 58% δεν έχουν ποτέ ταξιδέψει με αεροπλάνο, αλλά το 29% έχουν ήδη κάνει σκι και έχουν ταξιδέψει με αεροπλάνο. Αν πάρουμε τυχαία έναν κάτοικο της πόλης ποια είναι η πιθανότητα ποτέ να μην έχει κάνει σκι και ποτέ να μην έχει ταξιδέψει με αεροπλάνο;

Δ13. (αντιστοιχεί στο στόχο 2.3.1)
Ποια είναι η πιθανότητα όταν ρίξουμε 4 ζάρια να φέρουμε τουλάχιστον ένα «6»;

Δ14. (αντιστοιχεί στο στόχο 2.4.1.)
Ρίχνουμε ένα κόκκινο κι ένα άσπρο ζάρι και καταγράφουμε τις ενδείξεις τους. Τότε έχουμε τα ενδεχόμενα:

Α: "Το γινόμενο των ενδείξεων είναι άρτιο", Β: "Το άθροισμα των ενδείξεων είναι άρτιο", Γ: "Το κόκκινο ζάρι έχει ένδειξη μικρότερη ή ίση του 3".

Να βρείτε τις πιθανότητες P(A), P(B), P(Γ), P(B|A), P(A|B), P(A|Γ). Τι παρατηρείτε;

Δ15. (αντιστοιχεί στο στόχο 2.4.3)
Στο κουτί Α υπάρχουν μια λευκή και μια κόκκινη κιμωλία και στο κουτί Β υπάρχουν μια λευκή και δυο κόκκινες κιμωλίες. Διαλέγουμε τυχαία ένα από τα δυο κουτιά και στη συνέχεια τραβάμε από αυτό, πάλι τυχαία, μια κιμωλία. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

Ε: διαλέγουμε το κουτί Α

Λ: διαλέγουμε λευκή κιμωλία.

α) Είναι τα ενδεχόμενα Ε, Λ ανεξάρτητα;

β) Αν στο κουτί Β προσθέσουμε μια ακόμη λευκή κιμωλία και στη συνέχεια επαναλάβουμε το πείραμα, εξακολουθούν τα Ε και Λ να είναι ανεξάρτητα;

Δ16. (αντιστοιχεί στους στόχους 2.4.4 και 2.4.5)
Σε ένα τεστ μια ερώτηση πολλαπλής επιλογής έχει 5 απαντήσεις εκ των οποίων μόνο μια είναι σωστή. Η πιθανότητα ένας μαθητής να γνωρίζει τη σωστή απάντηση είναι 60%, ενώ στην περίπτωση που δεν τη γνωρίζει την επιλέγει στη τύχη.

α) Ποια είναι η πιθανότητα ένας μαθητής να απαντήσει σωστά τη συγκεκριμένη ερώτηση;

β) Αν ένας μαθητής έχει απαντήσει σωστά ποια είναι η πιθανότητα να μη γνωρίζει τη σωστή απάντηση;

Δ17. (αντιστοιχεί στο στόχο 3.1.1.)
Να δώσετε τα σύνολα τιμών των τυχαίων μεταβλητών που περιγράφουν τα ακόλουθα πειράματα τύχης:

1) Ρίψη ενός νομίσματος.
2) Ρίψη δύο νομισμάτων (Σημείωση: Η τυχαία μεταβλητή μετρά το πόσες φορές φέρνουμε Κ).
3) Ρίψη ενός ζαριού.
4) Το φύλο των ανθρώπων που απαντούν σε ένα ερωτηματολόγιο.
5) Ποια ομάδα υποστηρίζουν από αυτές που αγωνίζονται στην Α΄ Εθνική κατηγορία.

Δ18. (αντιστοιχεί στους στόχους 3.1.2., 3.1.3., 3.1.4 και 3.1.5.)

Έστω ένα επιτραπέζιο παιχνίδι όπου χρησιμοποιούμε ένα ζάρι με τέσσερις έδρες και με ενδείξεις 1, 2, 3 και 4. Το ζάρι όμως δεν είναι δίκαιο και γνωρίζουμε πως αν X είναι η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού, τότε: $\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=5c$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=3c$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=c$ και $\mathrm{P}(\mathrm{X}=4)=2c$.

1) Να βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας της X.
2) Να γράψετε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X.
3) Να παραστήσετε γραφικά την αθροιστική συνάρτηση της X.
4) Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή και τη διασπορά της X.
5) Να υπολογίσετε τις ακόλουθες πιθανότητες:

i. Το ζάρι να φέρει 4.

ii. Το ζάρι να φέρει 2 ή 3.

iii. Το ζάρι να φέρει αποτέλεσμα μεγαλύτερο του 1.

iv. Το ζάρι να φέρει αποτέλεσμα μεγαλύτερο του 2.

Δ19. (αντιστοιχεί στους στόχους 3.2.1. και 3.2.2.)
Ένας αγρότης καλλιεργεί δοκιμαστικά ένα νέο φυτό με σκοπό να προχωρήσει σε εκτεταμένη καλλιέργεια του, αν τελικά πάρει τη προσδοκώμενη σοδιά. Από άλλους αγρότες που έκαναν την ίδια δοκιμαστική καλλιέργεια γνωρίζει ότι 7 στους 10 είχαν θετικό αποτέλεσμα. Αν X είναι η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το συγκεκριμένο πείραμα του αγρότη, να απαντήσετε τα ακόλουθα ερωτήματα:

α. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

β. Ποιες τιμές παίρνει η X και ποιά είναι η κατανομή της;

γ. Να βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής F(x).

δ. Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή E(X) και η διασπορά V(X).

Δ20. (αντιστοιχεί στο στόχο 3.2.3.)
Ένας γυναικολόγος υποστηρίζει ότι το ενδεχόμενο επιτυχημένης εγκυμοσύνης μετά από τεχνητή γονιμοποίηση συμβαίνει περίπου σε 1 στις 10 προσπάθειες. Ένα ζευγάρι είναι αποφασισμένο να αποκτήσει παιδί και σκοπεύει να προσπαθήσει μέχρι να τα καταφέρει. Εάν υποθέσουμε ότι η κάθε προσπάθεια είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες, να υπολογίσετε τις πιθανότητες το ζευγάρι να αποκτήσει παιδί:

α) Με την 4η προσπάθεια.

β) Πριν την 4η προσπάθεια.

γ) Με τη 2η, 3η ή την 4η προσπάθεια.

Δ21. (αντιστοιχεί στους στόχους των παραγράφων 3.2. και 3.3.)
Σε ένα τυχερό παιχνίδι πληρώνουμε 1€ για να επιλέξουμε έναν αριθμό ν από το 0 έως το 36. Στη συνέχεια γίνεται κλήρωση μεταξύ αυτών των αριθμών και σε περίπτωση που κληρωθεί ο αριθμός ν πληρωνόμαστε 35€. Η απόδοση του παιχνιδιού περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή

$$X = \begin{cases} -1, \text{ αν δε κληρωθεί ο αριθμός ν} \\ 35, \text{ αν κληρωθεί ο αριθμός ν} \end{cases}$$

α) Να βρείτε τις πιθανότητες P(X=-1), P(X=35)

β) Να βρείτε την αναμενόμενη τιμή της X και να ερμηνεύσετε το πρόσημό της.

γ) Να βρείτε το ποσό που αναμένεται να εισπράξει ή να χάσει αν παίξει 111 φορές.

δ) Αν παίξει 74 συνεχόμενες φορές, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει τουλάχιστον 2 φορές;

Δ22. (αντιστοιχεί στους στόχους της παραγράφου 3.3.)
Σε ένα τυχερό παιχνίδι ο παίκτης ρίχνει 2 ζάρια με σκοπό να φέρει άθροισμα τουλάχιστον οκτώ. Ο παίκτης παίζει 10 συνεχόμενες φορές και ανάλογα με το πόσες φορές φέρει άθροισμα μεγαλύτερο του οκτώ κερδίζει και ανάλογα δώρα. Αν X είναι η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το πόσες φορές από τις 10 θα φέρει το επιθυμητό άθροισμα, τότε:
α. Ποια είναι η κατανομή της X;
β. Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή E(X) και τη διασπορά V(X).
γ. Να δοθεί η αθροιστική συνάρτηση κατανομής F(x).
δ. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει επιτυχία σε ακριβώς 7 από τις 10 ρίψεις;
ε. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει επιτυχία σε τουλάχιστον 7 από τις 10 ρίψεις;
στ. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει επιτυχία το πολύ σε 7 από τις 10 ρίψεις;

Δ23. (αντιστοιχεί στους στόχους της παραγράφου 3.3.)
Τα εξωτερικά ιατρεία ενός νοσοκομείου διαθέτουν ακριβώς 5 λεπτά για τη διάγνωση κάθε αρρώστου και έπειτα αποφασίζουν αν ο άρρωστος: θα είναι ελεύθερος να πάει σπίτι του χωρίς φαρμακευτική αγωγή, θα πάει στο σπίτι του με φαρμακευτική αγωγή, θα χρειαστεί διαγνωστικές εξετάσεις ή θα νοσηλευτεί. Το νοσοκομείο δέχεται ασφαλισμένους με ιδιωτική ασφάλιση αλλά και ασφαλισμένους του ΕΟΠΥΥ και λόγω του φόρτου εργασίας οι γιατροί βλέπουν συνεχώς ασθενείς χωρίς καμία διακοπή.
α) Αν κατά κανόνα οι ασφαλισμένοι του ΕΟΠΥΥ είναι τριπλάσιοι από αυτούς με ιδιωτική ασφάλιση, ποια είναι η πιθανότητα μέσα σε μία ώρα οι δυο γιατροί που εφημερεύουν να δουν ακριβώς τον ίδιο αριθμό ασφαλισμένων του ΕΟΠΥΥ με αυτούς των ιδιωτικών ασφαλιστικών εταιριών;
β) Αν η πιθανότητα ο κάθε ασθενής να πάει σπίτι του χωρίς αγωγή είναι 0,50, η πιθανότητα να πάει σπίτι του με αγωγή είναι 0,30, η

πιθανότητα να του ζητηθεί να κάνει διαγνωστικές εξετάσεις είναι 0,15 ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα να νοσηλευτεί είναι μόλις 0,05, να υπολογίσετε:

i. Τον αναμενόμενο αριθμό ασθενών που θα πάνε σπίτι τους με φαρμακευτική αγωγή σε μια ώρα.

ii. Η πιθανότητα ένας ασθενής να είναι ασφαλισμένος στον ΕΟΠΥΥ με δεδομένο ότι τελικά θα νοσηλευτεί είναι 0,6. Να υπολογίσετε την αρχική πιθανότητα ένας ασθενής να νοσηλευτεί με δεδομένο ότι είναι ασφαλισμένος στον ΕΟΠΥΥ.

γ) Το νοσοκομείο μπορεί να εξυπηρετεί το πολύ 5 ασθενείς που χρειάζονται διαγνωστικές εξετάσεις την ώρα, και τους υπεράριθμους τους στέλνει σε ένα άλλο κοντινό νοσοκομείο για να μη περιμένουν στην ουρά. Αυτό όμως μπορεί να το κάνει μέχρι και 4 φορές δωρεάν κατά τη διάρκεια της 24ωρης εφημερίας του, μιας και σε διαφορετική περίπτωση θα πρέπει να πληρώσει το κόστος των εξετάσεων στο άλλο νοσοκομείο. Ποια είναι η πιθανότητα το νοσοκομείο να μη χρειαστεί να πληρώσει έξοδα εξετάσεων στο γειτονικό νοσοκομείο κατά τη διάρκεια της εφημερίας του;

Δ24. (αντιστοιχεί στο στόχο 3.4.1.)

Ποια από τα ακόλουθα πειράματα τύχης τα περιγράφουν διακριτές και ποια συνεχείς τυχαίες μεταβλητές;

α. Το πλήθος των κλήσεων που δέχεται το κέντρο εξυπηρέτησης μιας τράπεζας μέσα σε ένα 24ωρο.

β. Η ηλικία των συμμετεχόντων σε μια έρευνα αγοράς.

γ. Η ηλικιακή ομάδα των συμμετεχόντων σε μια έρευνα αγοράς.

δ. Το ύψος των παιδιών σε μια τάξη σχολείου.

ε. Ο βαθμός απολυτηρίου του Λυκείου.

στ. Η απόσταση σε μέτρα που θα διανύσει η σφύρα όταν φύγει από τα χέρια ενός αθλητή.

Δ25. (αντιστοιχεί στους στόχους 3.4.2. έως και 3.4.7.)

Έστω ένα εργοστάσιο που συσκευάζει ζάχαρη σε πακέτα των 100γρ. Τα μηχανήματα που χρησιμοποιούνται είναι παλιά και η ποσότητα της ζάχαρης που μπαίνει σε κάθε συσκευασία δεν είναι δυνατόν να είναι πάντα ακριβώς 100γρ. Έστω Y η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το βάρος της ζάχαρης που μπαίνει σε κάθε συσκευασία, και έστω ότι από παλαιότερες μετρήσεις γνωρίζουμε ότι η Y παίρνει τιμές στο διάστημα (95,105). Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y είναι μια σταθερή συνάρτηση και ίση με c στο διάστημα (95,105) και μηδέν οπουδήποτε αλλού,να υπολογισθούν:

α. Η σταθερά c.

β. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής F(y).

γ. Η πιθανότητα ο αγοραστής να πάρει ένα πακέτο ζάχαρης με ποσότητα μικρότερη από 100γρ.

δ. Η μέση τιμή E(Y). [Σημείωση: μπορεί να υπολογιστεί με δυο τρόπους]

ε. Η πιθανότητα η ποσότητα της ζάχαρης να είναι στο διάστημα (99,101), όπως απαιτείται από την επιτροπή πιστοποίησης προϊόντων.

Δ26. (αντιστοιχεί στους στόχους των ενοτήτων 3.5 και 3.6)

Ένας ξυλουργός κόβει ξύλινες σανίδες που θα χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή βιβλιοθηκών. Το μήκος των σανίδων ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μήκος 75εκ και διασπορά 2. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

α. Μια σανίδα να έχει μήκος μικρότερο από 73εκ.

β. Το μήκος μιας σανίδας να είναι στο διάστημα (74,77)

γ. Το μήκος μιας σανίδας να είναι μεγαλύτερο από 76εκ.

δ. Το μήκος μιας σανίδας να είναι μικρότερο από 72εκ δεδομένου ότι είναι μικρότερο από 73εκ.

Δ27. (αντιστοιχεί στους στόχους των ενοτήτων 3.5 και 3.6)

Ένα μηχάνημα κάνει τρύπες σε μια μεταλλική επιφάνεια με σκοπό να περάσει ένας σωλήνας. Το μηχάνημα είναι ρυθμισμένο να κάνει τρύπες με διάμετρο κατά μέσο όρο 10εκ και τυπική απόκλιση σ=0,15εκ και οποιαδήποτε τρύπα μεταξύ 9,8εκ και 10,2εκ θα είναι αποδεκτή. Αν η τρύπα είναι μεγαλύτερη από 10,2εκ τότε η μεταλλική επιφάνεια αχρηστεύεται και αν η διάμετρος είναι μικρότερη από 9,8εκ τότε ο τεχνίτης ξαναδοκιμάζει να κάνει την τρύπα στη σωστή διάμετρο. Αν θεωρήσουμε ότι οι τρύπες που κάνει το μηχάνημα ακολουθούν την κανονική κατανομή, να υπολογίσετε τα ακόλουθα:

α. Ποια είναι η πιθανότητα η προσπάθεια να ανοιχτεί τρύπα στη μεταλλική επιφάνεια να είναι εντός των αποδεκτών ορίων;

β. Ποια είναι η πιθανότητα να αχρηστευτεί μια μεταλλική επιφάνεια;

γ. Έστω το κόστος μιας μεταλλικής επιφάνειας είναι 5€. Αν το μηχάνημα τρυπήσει διαδοχικά 100 μεταλλικές επιφάνειες, να υπολογίσετε την αναμενόμενη ζημιά που θα προκύψει από την αστοχία του μηχανήματος.

Δ28. (αντιστοιχεί στους στόχους των ενοτήτων 3.5 και 3.6)

Μια μελέτη έδειξε ότι για το 2013 κάθε νοικοκυριό στην Μ. Βρετανία ξόδευε 58.80 λίρες Αγγλίας την εβδομάδα κατά μέσο όρο για διατροφή. Αν θεωρήσουμε ότι το συγκεκριμένο έξοδο ακολουθεί τη κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση έστω σ=10. Να υπολογίσετε:

α. Ποιο είναι το ποσοστό των οικογενειών που ξοδεύουν λιγότερα από 45 λίρες για διατροφή την εβδομάδα;

β. Η πρόβλεψη για την οικονομία είναι αισιόδοξη για το νέο έτος και αναμένεται ότι αυτό θα οδηγήσει και τις οικογένειες να ξοδεύουν πιο πολλά χρήματα για φαγητό ανά εβδομάδα. Εάν η επιδίωξη της κυβέρνησης είναι το ποσοστό των οικογενειών που ξοδεύουν λιγότερες από 45 λίρες την εβδομάδα να μη ξεπερνά το 5%, ποιο θα πρέπει να είναι το μέσο ποσό ανά οικογένεια την εβδομάδα που θα ξοδεύεται για διατροφή;

Δ29. (αντιστοιχεί στους στόχους 5.1.1., 5.1.2. και 5.2.1.)

Το πλήθος των οχημάτων x σε εκατομμύρια, και ο αριθμόςy των ατυχημάτων σε εκατοντάδες, σε 15 διαφορετικές χώρες δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα:

Χώρα	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο
Πλήθος οχημάτων (x) σε εκατομμύρια	8,6	13,4	12,8	9,3	1,3	9,4	13,1	4,9	13,5	9,6	7,5	9,8	23,3	21	19,4
Αριθμός ατυχήματα (y) σε εκατοντάδες	33	51	30	48	12	23	46	18	36	50	34	35	95	99	69

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς.

β) Να υπολογίσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson.

γ) Να περιγράψετε και να ερμηνεύσετε τη σχέση ανάμεσα στο πλήθος οχημάτων (x) και στον αριθμό των ατυχημάτων (y).

Δ30. (αντιστοιχεί στους στόχους 5.3.1., 5.3.2., και 5.3.3.)

Μια μελέτη σχεδιάστηκε για την πρόβλεψη της ποιότητας ζωής ασθενών, που τη μετράμε με ένα συγκεκριμένο σκορ (Y), με βάση τα αποτελέσματα κάποιων εργαστηριακών εξετάσεων (X). Το πρόγραμμα δοκιμάστηκε σε 10 ασθενείς με τα ακόλουθα αποτελέσματα:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	5,5	4,8	4,7	3,9	4,5	6,2	6,0	5,2	4,7	4,3
Y	3,1	2,3	3,0	1,9	2,5	3,7	3,4	2,6	2,8	1,6

Αν η ευθεία παλινδρόμησης δίνεται από τη σχέση: $y=\alpha+\beta x$

α. Να δοθεί το διάγραμμα διασποράς.

β. Να υπολογιστούν οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων των α και β, και να βρεθεί η εκτιμώμενη ευθεία παλινδρόμησης.

γ. Να εκτιμηθεί η ποιότητα ζωής των ασθενών που είχαν εξετάσεις Χ=5.0.
δ. Να εκτιμηθεί η μεταβολή του μέσου σκορ αν η εξέταση αυξηθεί κατά μία μονάδα.

Δ31. (αντιστοιχεί στους στόχους 5.3.1., 5.3.2., και 5.3.3.)

Ένας κοινωνιολόγος μελετά τον αριθμό των πωλήσεων μουσικών CD σε 10 χωριά και τον αριθμό γτων μαθητώνπου κατοικούν σε αυτά. Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται οι παρατηρήσεις που συγκέντρωσε για τον αριθμό των μαθητών (y) και τον αντίστοιχο αριθμό εβδομαδιαίων πωλήσεων CD (x)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
Αριθμός εβδομαδιαίων πωλήσεων CD (x)	125	172	220	186	95	90	176	255	163	262
Αριθμός μαθητών (y)	50	71	102	86	41	38	70	120	71	122

α. Να χρησιμοποιήσετε τα προηγούμενα δεδομένα για να υπολογίσετε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson.
β. Να περιγράψετε και να ερμηνεύσετε τη σχέση ανάμεσα στον αριθμό των μαθητών (y) και στον αντίστοιχο αριθμό εβδομαδιαίων πωλήσεων μουσικών CD (x).
γ. Να υπολογίσετε την ευθεία παλινδρόμησης: y=α+βx με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.
δ. Να δώσετε την ερμηνεία των συντελεστών α και β.

Δ32. (αντιστοιχεί στους στόχους της ενότητας 5.3.3.)

Οι μαθητές της Γ' τάξης του Λυκείου αποφάσισαν να ετοιμάσουν ένα ερωτηματολόγιο για να μελετήσουν ορισμένα χαρακτηριστικά από την καθημερινότητά τους και να τα συσχετίσουν με το γενικό βαθμό που πήραν κατά το τελευταίο τετράμηνο. Τα χαρακτηριστικά που κατέγραψαν είναι: πόσες ώρες διαβάζουν καθημερινά κατά μέσο όρο, πόσες εξωσχολικές δραστηριότητες έχουν (αριθμό), πόσες ώρες ξοδεύουν καθημερινά κατά μέσο όρο σε εξωσχολικές δραστηριότητες, πόσες ώρες κάνουν φροντιστήριο καθημερινά κατά μέσο όρο καθώς και ότι άλλο θα μπορούσε να φανεί χρήσιμο σε αυτή τη μελέτη. Στη συνέχεια, να αναλύσουν τα δεδομένα σύμφωνα με τις μεθόδους της ενότητας 5.3., να μελετήσουν πώς καθένα από τα χαρακτηριστικά ξεχωριστά συσχετίζεται με το βαθμό τετραμήνου, να περιγράψουν τα αποτελέσματα και να καταλήξουν σε κάποια συμπεράσματα. Αυτό θα πρέπει να γίνει σε μορφή γραπτής εργασίας η οποία δε θα πρέπει να ξεπερνά τις 5 σελίδες, μαζί με τη στατιστική ανάλυση και τα γραφήματα.

Δ33. (αντιστοιχεί στο στόχο 4.2.3.)

α) Οι βαθμοί του μαθητή Α σε πέντε μαθήματα είναι 11, 11, 15, 15, 15 και οι αντίστοιχοι βαθμοί του μαθητή Β είναι 15, 15, 15, 20 και 20. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των βαθμών των μαθητών Α και Β. Ποιο θα διαλέγατε για να συγκρίνετε τις επιδόσεις τους και γιατί;

β) Οι βαθμοί του μαθητή Α σε πέντε άλλα μαθήματα είναι 14, 12, 12, 14, 18 και οι αντίστοιχοι βαθμοί του μαθητή Β είναι 12, 12, 15,18 και 18. Να υπολογίσετε το εύρος και τη διασπορά ή τυπική απόκλιση των βαθμών των μαθητών Α και Β. . Ποιο θα διαλέγατε για να συγκρίνετε τη μεταβλητότητα των βαθμών και γιατί;

Δ34. (αντιστοιχεί στο στόχο 4.2.5.)

Οι μαθητές της τάξης μπορούν να χωριστούν σε δύο ή και περισσότερες ομάδες (πχ. αγόρια – κορίτσια) και να καταγράψουν κάποια χαρακτηριστικά (όπως ύψος, βάρος, κλπ). Να παρουσιάσουν, να συγκρίνουν και να σχολιάσουν τα αποτελέσματα.

Δ35. (αντιστοιχεί στο στόχο 4.3.1.)
Σε συνέχεια της Δ34, οι μαθητές μπορούν να πάρουν με τυχαία δειγματοληψία ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα από τις ομάδες που δημιουργήθηκαν στη Δ34 και να διαπιστώσουν κατά πόσο τα μέτρα θέσης και διασποράς που υπολογίζονται από το δείγμα προσεγγίζουν τα μέτρα θέσης και διασποράς των ομάδων (πληθυσμού) όπως είχαν υπολογιστεί στην Δ34.

Δ36. (αντιστοιχεί στους στόχους του κεφαλαίου 4)
Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι χρόνοι για την επίλυση ενός τεστ στατιστικής από 50 μαθητές

Πίνακας 1

20,1	10	26,7	15,3	22	30,8	17,3	27,2	25,7	21,6
24	35,8	33,9	39	31,5	26	35,3	36	17,4	22,6
36,2	28	24,1	12,5	32,5	23,3	28,6	23	31	19,5
26,1	16,9	27,6	30	29,5	18,8	36,2	29,5	23,5	29,3
20	28,8	24,5	19,2	32,9	21,5	39	14,6	34,5	22

α. Να ομαδοποιηθούν τα δεδομένα σε 6 κλάσεις ίσου πλάτους
β. Να συμπληρώσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων απολύτων και σχετικών
γ. Να σχεδιάσετε το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.
δ. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων και το αντίστοιχο πολύγωνο.
ε. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή από τα αρχικά δεδομένα και τα ομαδοποιημένα δεδομένα και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα...
στ. Να βρείτε την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων είτε από τα αρχικά δεδομένα είτε από τα ομαδοποιημένα δεδομένα και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Γ΄ Λυκείου, Μαθηματικά για Θετικές και Τεχνολογικές Σπουδές
Α΄ μέρος (Ανάλυση)

Εισαγωγή

Η διδασκαλία της Μαθηματικής Ανάλυσης στο Λύκειο αποτελεί την εισαγωγή των μαθητών σε μια σημαντική περιοχή των Μαθηματικών με πλήθος εφαρμογών σε πολλούς τομείς των μαθηματικών καθώς και σε άλλες επιστήμες.

Η Ανάλυση απαιτεί την ανάπτυξη ενός τρόπου σκέψης ποιοτικά διαφορετικού από αυτόν που γνώρισαν οι μαθητές στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία. Ο πυρήνας αυτού του διαφορετικού τρόπου σκέψης είναι οι άπειρες διαδικασίες και ο προσδιορισμός αγνώστων ποσοτήτων μέσα από την προσέγγιση τους οσοδήποτε κοντά από γνωστές ποσότητες. Μια πρώτη επαφή με τέτοιου τύπου διαδικασίες είχαν οι μαθητές στην Ευκλείδεια Γεωμετρία με τον υπολογισμό του εμβαδού κύκλου. Σε αντίθεση με τον υπολογισμό του εμβαδού πολυγώνων, ο οποίος γίνεται με πεπερασμένες διαδικασίες (χωρισμός του πολυγώνου σε πεπερασμένα το πλήθος πολύγωνα γνωστού εμβαδού), στην περίπτωση του κύκλου, επειδή τέτοιου τύπου διαδικασία δεν είναι αποτελεσματική, προσεγγίζουμε τον κύκλο οσοδήποτε κοντά από κανονικά πολύγωνα και έτσι υπολογίζουμε το εμβαδόν του. Αυτή η διαδικασία υπολογισμού έχει ως βάση την έννοια του ορίου, η οποία αποτελεί την θεμελιώδη έννοια της Ανάλυσης. Ωστόσο, επειδή είναι μια ιδιαίτερα λεπτή έννοια και ο τυπικός «ε-δ» ορισμός αντικειμενικά είναι δύσκολο να κατανοηθεί από μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, η διδασκαλία της Ανάλυσης στο Λύκειο συνήθως περιορίζεται σε απλή εφαρμογή τύπων με αξιοποίηση κυρίως αλγεβρικών δεξιοτήτων και δεν περιλαμβάνει μια ουσιαστική εισαγωγή στον τρόπο σκέψης αυτής της μαθηματικής περιοχής. Αποτέλεσμα μιας τέτοιας διδασκαλίας, όπως έχει προκύψει από έρευνες στην Ελλάδα και στο εξωτερικό, είναι ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών να δημιουργεί παρανοήσεις και να σχηματίζει λανθασμένες αντιλήψεις και εικόνες για τις έννοιες και τα θεωρήματα της Ανάλυσης, με συνέπεια να αντιμετωπίζουν σοβαρά εμπόδια στη μετέπειτα πορεία τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Σκοπός της διδασκαλίας της Μαθηματικής Ανάλυσης στο Λύκειο είναι να προετοιμάσει το έδαφος για μια πιο προχωρημένη μελέτη της στο Πανεπιστήμιο. Με δεδομένο ότι ο τυπικός ορισμός του ορίου και οι περισσότερες αποδείξεις των προτάσεων και των θεωρημάτων της Ανάλυσης είναι εκτός του πλαισίου των μαθηματικών του Λυκείου, για να αποτελέσει η διδασκαλία της μια πραγματική εισαγωγή στην περιοχή αυτή, πρέπει να συμβάλλει στην ανάπτυξη σωστών διαισθητικών αντιλήψεων από τους μαθητές για τις έννοιες, τις ιδιότητες τους και τα θεωρήματα της Ανάλυσης μέσα από την ουσιαστική χρήση οπτικών αναπαραστάσεων. Γι' αυτό πρέπει να υπάρξει μια ισορροπία και σύνδεση των τυπικών λύσεων και των αντίστοιχων οπτικών αναπαραστάσεων με στόχο την κατανόηση των ιδιοτήτων της Ανάλυσης σε ένα πρώτο διαισθητικό επίπεδο.

Το νέο ΠΣ για τη Μαθηματική Ανάλυση έχει ως κύριο στόχο την εννοιολογική κατανόηση σε ένα αρχικό επίπεδο, μέσα από την ανάπτυξη σωστής διαισθητικής αντίληψης των βασικών εννοιών και θεωρημάτων της Μαθηματικής Ανάλυσης, σε συνδυασμό με την ανάπτυξη δεξιοτήτων για τη λύση προβλημάτων. Για το λόγο αυτό, η εφαρμογή χωρίς κατανόηση θεωρημάτων για μηχανιστικούς υπολογισμούς, η διδασκαλία εννοιών των οποίων η κατανόηση δεν είναι εύκολη από τους μαθητές (π.χ. αόριστο ολοκλήρωμα), καθώς και η ανάπτυξη τεχνικών για την αντιμετώπιση δύσκολων ασκήσεων, χωρίς αυτό να συνδυάζεται με κάποια βαθύτερη κατανόηση, δεν προσφέρονται για την εξυπηρέτηση των παραπάνω στόχων.

Οι βασικές υποπεριοχές της Μαθηματικής Ανάλυσης είναι ο Διαφορικός Λογισμός και ο Ολοκληρωτικός Λογισμός, ενώ τα κεντρικά στοιχεία της περιοχής της Ανάλυσης είναι τα εξής:

<u>*Κεφάλαιο 1: Όριο και Συνέχεια συνάρτησης*</u>

Στην ενότητα αυτή γίνεται αρχικά σύντομη ανασκόπηση των βασικών στοιχείων των συναρτήσεων (Ορισμός, Ισότητα, Πράξεις, Σύνθεση, Μονοτονία, Ακρότατα). Ακολούθως γίνεται εισαγωγή στο όριο συνάρτησης το οποίο αποτελεί τη βάση για την Ανάλυση. Μέσα από κατάλληλα παραδείγματα οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν πλούσιες αναπαραστάσεις για το όριο και τη συνέχεια. Οι τυπικές αποδείξεις σε ιδιότητες και ασκήσεις, σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες αναπαραστάσεις, θα συμβάλουν ουσιαστικά στους στόχους που αναφέρθηκαν παραπάνω.

<u>*Κεφάλαιο 2: Παράγωγος*</u>

Η ενότητα της παραγώγου είναι μία από αυτές όπου, εκτός από την κατανόηση των εννοιών, οι μαθητές πρέπει να δουν και να αντιμετωπίσουν εφαρμογές σε προβλήματα. Μέσα από προβλήματα που αφορούν στην στιγμιαία ταχύτητα, στην επιτάχυνση κινητού, στον ρυθμό μεταβολής, κ.α. θα φανεί η αποτελεσματικότητα των εργαλείων της Ανάλυσης σε περιπτώσεις οι οποίες δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με άλλα εργαλεία.

Κεφάλαιο 3: Μελέτη Συνάρτησης

Η συγκεκριμένη ενότητα ξεκινά με τα βασικά θεωρήματα της συνέχειας, τα οποία θα ερμηνευθούν και γεωμετρικά. Η σημασία των συμπερασμάτων των θεωρημάτων αυτών θα αναδειχθεί, μέσω επιλογής των κατάλληλων εφαρμογών. Ακολουθεί η μελέτη συνάρτησης με χρήση της παραγώγου, οπότε θα προκύψουν τα βασικά αποτελέσματα σε σχέση με τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και, τελικά, τη γραφική παράστασης μιας συνάρτησης. Στην κατεύθυνση αυτή θα δίνονται πραγματικά προβλήματα, από διάφορες επιστημονικές περιοχές, στα οποία θα ζητείται το μέγιστο ή το ελάχιστο μιας συνάρτησης. Έτσι, μέσω της μελέτης συνάρτησης, υλοποιείται ο σημαντικότερος στόχος της διδασκαλίας των παραγώγων.

Κεφάλαιο 4: Τριγωνομετρικές, Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις

Στην ενότητα αυτή γίνεται η τελική και ολοκληρωμένη παρουσίαση των τριγωνομετρικών, των εκθετικών και των λογαριθμικών συναρτήσεων, που οι μαθητές έχουν συναντήσει σε προηγούμενα έτη στο Λύκειο. Οι παραπάνω συναρτήσεις μελετώνται αναλυτικά, ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα, για να αποτελέσουν ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο για τον εμπλουτισμό παραδειγμάτων, αλλά και την επίλυση προβλημάτων της Ανάλυσης, καθώς βρίσκονται στο σταυροδρόμι όπου συναντώνται διάφορες επιστημονικές περιοχές.

Κεφάλαιο 5: Ολοκληρωτικός Λογισμός

Η ενότητα του ολοκληρώματος (όπως και της παραγώγου) είναι μία από αυτές όπου, εκτός από την κατανόηση των εννοιών, οι μαθητές πρέπει να δουν και να αντιμετωπίσουν εφαρμογές σε προβλήματα. Μέσα από προβλήματα που αφορούν στην εύρεση εμβαδού, όγκου κ.α. θα φανεί η αποτελεσματικότητα των εργαλείων του Απειροστικού Λογισμού σε περιπτώσεις οι οποίες δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με άλλα εργαλεία. Αξιοποιώντας τις ΤΠΕ, θα γίνουν αντιληπτές έννοιες, όπως της παράγουσας μιας συνάρτησης (και κατ' επέκταση όλων των βασικών συναρτήσεων), του ορισμένου ολοκληρώματος και εφαρμογών του στον υπολογισμό εμβαδών επίπεδων χωρίων και όγκων στερεών εκ περιστροφής.

Στην ενότητα αυτή, αλλά και σε όλες τις προηγούμενες, θα πρέπει να αποφευχθεί η μηχανιστική εφαρμογή διαδικασιών και τεχνικών, καθώς και ασκήσεων που ουσιαστικά αφορούν ενότητες της Ανάλυσης, οι οποίες δεν περιλαμβάνονται στην ύλη της Γ΄ Λυκείου. Αυτά όχι μόνο δε συμβάλουν, αλλά δημιουργούν σοβαρά χρονικά εμπόδια στην επίτευξη των ουσιαστικών στόχων του μαθήματος.

Σε όλα τα παραπάνω κεφάλαια εξετάζονται συναρτήσεις που ορίζονται σε *διάστημα* ή σε *ένωση διαστημάτων*. Επιπλέον, στα πρώτα τρία κεφάλαια τα παραδείγματα, οι δραστηριότητες και τα προβλήματα αφορούν σε *πολυωνυμικές* και *ρητές συναρτήσεις*, σε *συναρτήσεις με απλά ριζικά*, καθώς και σε συναρτήσεις που προκύπτουν από αυτές με πράξεις ή σύνθεση. Παραδείγματα, δραστηριότητες και προβλήματα που αφορούν σε τριγωνομετρικές, εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις θα γίνουν για πρώτη φορά στο τέταρτο κεφάλαιο, όπου μελετώνται οι συναρτήσεις αυτές.

Στη διδασκαλία της Ανάλυσης ουσιαστικό ρόλο μπορεί να παίξει η αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας και ιδιαίτερα τα παρεχόμενα λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας. Έρευνες έχουν δείξει ότι η χρήση τέτοιων λογισμικών μπορεί να συμβάλλει ουσιαστικά στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να διερευνούν, να δημιουργούν εικασίες και γενικότερα στην κατανόηση της Ανάλυσης και στην ικανότητα ανάπτυξης μαθηματικών συλλογισμών. Ωστόσο, η επιλογή από τον καθηγητή του τρόπου εφαρμογής των δυναμικών εργαλείων στην τάξη, καθώς και η επιλογή των κατάλληλων μαθηματικών δραστηριοτήτων, καθορίζει την αποτελεσματικότητα αυτών των εργαλείων στη μάθηση.

Για τη σωστή επιλογή μιας δραστηριότητας επισημαίνεται ότι:

Μια δραστηριότητα πρέπει:

- Να είναι κατανοητή από όλους τους μαθητές και να μην επιτρέπει παρανοήσεις και υπονοούμενα.
- Να αφήνει περιθώρια για έρευνα και αυτενέργεια.

- Να ενθαρρύνει τη συνεργατικότητα και την ομαδική εργασία, προτρέποντας τους μαθητές και τις ομάδες σε νοητικό ανταγωνισμό.
- Να μην επιτρέπει άμεση προσέγγιση στη λύση.
- Το πρόβλημα από το οποίο προκύπτει η δραστηριότητα, να είναι πλούσιο σε εμπλεκόμενες έννοιες, να είναι σημαντικό, αλλά όχι δύσκολο, ώστε να μπορεί ο μαθητής να ανταπεξέλθει.
- Η εργασία του προβλήματος να μπορεί να γίνει (όπου αυτό είναι δυνατό) σε δύο τουλάχιστον πλαίσια (π.χ. αριθμητικό, γραφικό), μεταξύ των οποίων ο μαθητής θα μπορεί να κάνει τις κατάλληλες αντιστοιχίσεις.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ **(Σύνολο ωρών 125)**	**ΣΤΟΧΟΙ** **Οι μαθητές να μπορούν να:**	**ΣΧΟΛΙΑ - ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ**
1. Όριο και συνέχεια συνάρτησης (37 ώρες)		
1.1. Πραγματικοί Αριθμοί (Επαναλήψεις) (3 ώρες)	1.1.1. Χρησιμοποιούν, έννοιες, ιδιότητες και προτάσεις των πραγματικών αριθμών για να λύνουν εξισώσεις, ανισώσεις και προβλήματα.	
1.2. Συναρτήσεις (5 ώρες)	1.2.1. Αναγνωρίζουν αν μια σχέση που δίνεται συμβολικά, γραφικά ή λεκτικά είναι συνάρτηση και συνδέουν τις διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης.	• Είναι σημαντικό οι μαθητές να αναγνωρίζουν τις μεταβλητές και τις παραμέτρους σε μια συνάρτηση.
	1.2.2. Βρίσκουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, την τιμή της σε ένα σημείο, τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες, καθώς και τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων.	• Προτείνεται η δραστηριότητα Δ1.
	1.2.3. Εκτιμούν, από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, το πεδίο ορισμού της, το σύνολο τιμών της, τα ολικά ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας και την τιμή της σε ένα σημείο.	
	1.2.4. Εκτιμούν, από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g, τις λύσεις της εξίσωσης: $f(x)=g(x)$, και τα διαστήματα στα οποία αληθεύουν οι ανισώσεις: $f(x)>g(x)$ και $f(x)<g(x)$.	• Προτείνεται η δραστηριότητα Δ2
	1.2.5. Διακρίνουν αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες και, στην περίπτωση που δεν είναι ίσες, βρίσκουν το ευρύτερο δυνατόν υποσύνολο του $\mathbf{R}$ στο οποίο αυτές είναι ίσες.	• Προτείνεται η δραστηριότητα Δ3
	1.2.6. Αναπαριστάνουν γραφικά τις βασικές συναρτήσεις	

	$y=\alpha x+\beta$, $y=\alpha x^2$, $y=\alpha x^3$, $y=\dfrac{\alpha}{x}$ *και* $y=\sqrt{x}$, *με* $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, και αναφέρουν τα χαρακτηριστικά τους γνωρίσματα. 1.2.7. Εκφράζουν πραγματικές καταστάσεις με την βοήθεια συναρτήσεων.	• Η μοντελοποίηση πρέπει να αφορά σε απλά προβλήματα, ώστε οι μαθητές να εστιάσουν στην αναγνώριση των μεταβλητών και στη σχέση ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής.
1.3. Πράξεις με συναρτήσεις - Σύνθεση συναρτήσεων (5 ώρες)	1.3.1. Βρίσκουν το πεδίο ορισμού και τον τύπο συναρτήσεων που προκύπτουν από πράξεις άλλων συναρτήσεων. 1.3.2. Σχεδιάζουν, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $y=-f(x)$, $y=\lvert f(x)\rvert$, $y=f(x)+c$, $y=f(x+c)$, $y=cf(x)$, $y=f(cx)$, $c\in\mathbf{R}$ 1.3.3. Βρίσκουν τον τύπο και το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης που προκύπτει από σύνθεση συναρτήσεων και αναλύουν μια σύνθετη συνάρτηση στις συναρτήσεις από τις οποίες προέκυψε με σύνθεση.	• Προτείνεται η δραστηριότητα Δ4
1.4. Όριο συνάρτησης στο $x_0\in\mathbf{R}$ (5 ώρες)	1.4.1. Αποκτήσουν μια διαισθητική αντίληψη για την έννοια του ορίου και την ερμηνεύουν γραφικά. 1.4.2. Εκτιμούν το όριο μιας συνάρτησης στο $x_0\in\mathbf{R}$, όταν δίνεται η γραφική της παράσταση.	• Η εισαγωγή της έννοιας του ορίου να γίνει με εποπτικό τρόπο, ώστε οι μαθητές να οδηγηθούν στη διατύπωση ενός «διαισθητικού» ορισμού του ορίου. • Να τονισθεί ότι, για να έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου μιας συνάρτησης f σε σημείο $x_0\in\mathbf{R}$ δεν απαιτείται η f να είναι ορισμένη στο x_0, αλλά να ορίζεται «όσο θέλουμε κοντά στο x_0», δηλαδή η f να είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής: $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ ή (α,x_0) ή (x_0,β) • Οι μαθητές πρέπει, μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες, να

	1.4.3. Χρησιμοποιούν τα πλευρικά όρια για την εύρεση ορίου συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbf{R}$.	αντιληφθούν ότι το όριο μιας συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbf{R}$ δεν εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης στο x_0 (όταν η συνάρτηση ορίζεται στο x_0), αλλά από τις τιμές της «κοντά στο x_0» • Να τονισθεί ότι μια συνάρτηση f, που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ δεν έχει όριο στο x_0, στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις: α) υπάρχουν τα δύο πλευρικά όρια της f στο x_0 και είναι διαφορετικά μεταξύ τους β) ένα τουλάχιστον από τα δύο πλευρικά όρια της f στο x_0 δεν υπάρχει. • Προτείνεται η δραστηριότητα Δ5
1.5. Ιδιότητες των ορίων (5 ώρες)	1.5.1. Υπολογίζουν, με βάση τις ιδιότητες του ορίου, όρια συναρτήσεων σε σημείο $x_0 \in \mathbf{R}$ και αιτιολογούν τις ενέργειες τους κατά τον υπολογισμό του ορίου. 1.5.2. Υπολογίζουν το όριο σύνθετης συνάρτησης. 1.5.3. Αποφαίνονται για το πρόσημο μιας συνάρτησης κοντά στο $x_0 \in \mathbf{R}$, όταν γνωρίζουν το πρόσημο του ορίου της στο x_0	• Με τη βοήθεια κατάλληλων αντιπαραδειγμάτων οι μαθητές να διαπιστώσουν ότι η ύπαρξη του ορίου συνάρτησης που έχει προκύψει από πράξεις συναρτήσεων δεν συνεπάγεται και την ύπαρξη του ορίου των επιμέρους συναρτήσεων.
1.6. Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbf{R}$ (4 ώρες)	1.6.1. Αποκτήσουν μια διαισθητική αντίληψη για την έννοια του μη πεπερασμένου ορίου συνάρτησης σε σημείο $x_0 \in \mathbf{R}$ και την ερμηνεύουν γραφικά 1.6.2. Εικάζουν την ύπαρξη μη πεπερασμένων ορίων συναρτήσεων από τη γραφική τους παράσταση 1.6.3. Βρίσκουν, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ορίου, μη πεπερασμένα όρια συναρτήσεων σε σημείο $x_0 \in \mathbf{R}$.	• Είναι σημαντικό οι μαθητές να ξεκαθαρίσουν ότι το $+\infty$ και το $-\infty$ δεν είναι πραγματικοί αριθμοί και να κατανοήσουν τη λογική μέσω της οποίας κάποιες πράξεις είναι επιτρεπτές και κάποιες άλλες δεν είναι.

	1.6.4. Βρίσκουν τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης	• Προτείνεται η δραστηριότητα Δ6
1.7. Συνέχεια συνάρτησης (4 ώρες)	1.7.1. Αναγνωρίζουν αν μια συνάρτηση είναι συνεχής ή ασυνεχής από τη γραφική της παράσταση. 1.7.2. Διαπιστώνουν, με τη βοήθεια του ορισμού, τη συνέχεια συναρτήσεων σε σημείο του πεδίου ορισμού τους. 1.7.3. Διαπιστώνουν, με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των συνεχών συναρτήσεων, αν μια συνάρτηση είναι συνεχής ή ασυνεχής.	• Προτείνεται η δραστηριότητα Δ7
1.8. Όριο συνάρτησης στο άπειρο (6 ώρες)	1.8.1. Αποκτήσουν μια διαισθητική αντίληψη για την έννοια του ορίου συνάρτησης στο άπειρο. 1.8.2. Υπολογίζουν τα όρια-συναρτήσεων στο $+\infty$ και στο $-\infty$ 1.8.3. Αναγνωρίζουν γραφικά την οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη. 1.8.4. Βρίσκουν τις οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.	• Να γίνει συσχέτιση του ορίου συνάρτησης στο $+\infty$ με το όριο ακολουθίας. • Να τονισθεί ότι η ασύμπτωτη στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f μπορεί να έχει και κοινά σημεία με την C_f • Προτείνεται η δραστηριότητα Δ8
2. Παράγωγος (22 ώρες)		
2.1. Η έννοια της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο (5 ώρες)	2.1.1. Συνδέουν την έννοια της παραγώγου με τη στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού και την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. 2.1.2. Αναγνωρίζουν την ύπαρξη ή μη της παραγώγου μιας συνάρτησης από τη γραφική της παράσταση. 2.1.3. Επιλέγουν, για τον υπολογισμό της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο, την πλέον κατάλληλη από τις παρακάτω δύο διατυπώσεις του ορισμού της παραγώγου συνάρτησης *f* σε σημείο x_0:	• Στη διεύθυνση: http://webspace.ship.edu/msrenault/geogebracalculus/derivative_at_a_point.html οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν διαδραστικά με την έννοια της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο. • Να γίνει αναφορά στο ορισμό: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

	$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ή $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 2.1.4. Εξετάζουν την παραγωγισιμότητα συνάρτησης σε σημείο απευθείας από τον ορισμό. 2.1.5. Βρίσκουν την εξίσωση της εφαπτομένης σε σημείο της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. 2.1.6. Συμπεραίνουν τη συνέχεια μιας συνάρτησης σε σημείο όταν αυτή είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.	και να τονισθεί ο ρόλος των x και h στον παραπάνω τύπο. Να γίνει, επιπλέον, αναφορά και στο συμβολισμό του Leibniz • Με χρήση παραδειγμάτων στα οποία η εφαπτομένη είτε διαπερνά είτε έχει περισσότερα από ένα κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση συνάρτησης, να τονισθεί η τοπική έννοια της εφαπτομένης. • Να διδαχθεί και η περίπτωση κατακόρυφης εφαπτομένης. • Προτείνεται η δραστηριότητα Δ9. • Να αποδειχθεί ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
2.2. Παραγωγίσιμες συναρτήσεις - Παράγωγος συνάρτηση (6 ώρες)	2.2.1. Αναγνωρίζουν την παράγωγο ως συνάρτηση. 2.2.2. Βρίσκουν την παράγωγο συνάρτηση βασικών συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τον ορισμό.	• Στη διεύθυνση: http://webspace.ship.edu/msrenault/geogebracalculus/derivative_as_a_function.html οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν διαδραστικά με την έννοια της παραγώγου συνάρτησης. • Να βρεθούν, με χρήση του ορισμού, οι παράγωγοι των συναρτήσεων: $f(x)=c, c\in\mathbb{R}$, $f(x)=x$, $f(x)=x^2$ και $f(x)=\sqrt{x}$. • Στη διεύθυνση: http://webspace.ship.edu/msrenault/geogebracalculus/derivative_elementary_functions.html οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν διαδραστικά με τον υπολογισμό των παραγώγων των βασικών συναρτήσεων.
2.3. Κανόνες παραγώγισης (6 ώρες)	2.3.1. Βρίσκουν, χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγώγισης, τις παραγώγους συναρτήσεων που προκύπτουν από πράξεις ή και σύνθεση συναρτήσεων.	• Να μη διδαχθεί η απόδειξη της παραγώγου πηλίκου.
2.4. Ρυθμός μεταβολής (5 ώρες)	2.4.1. Αναγνωρίζουν τη σημασία της παραγώγου, ως ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους (για παράδειγμα, στιγμιαία	• Να τονισθεί ότι το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής στο x_0

	ταχύτητα, ένταση ρεύματος, οριακό κόστος κλπ.). 2.4.2. Χρησιμοποιούν την παράγωγο για να εκφράζουν πραγματικές καταστάσεις και να επιλύουν προβλήματα.	φανερώνει την «τάση» που έχει το μέγεθος $y = f(x)$ να μεταβληθεί στη θέση x_0. Έτσι: 1. Θετικός ρυθμός μεταβολής δηλώνει αύξηση. 2. Αρνητικός ρυθμός μεταβολής δηλώνει μείωση. 3. Μηδενικός ρυθμός μεταβολής δηλώνει στασιμότητα. Με τη λογική αυτή εμφανίζονται τα πρόσημα στους αλγεβρικούς τύπους που προκύπτουν κατά την επίλυση προβλημάτων. • Προτείνεται η δραστηριότητα Δ10. • Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ11, Δ12.
3. Μελέτη Συνάρτησης		
3.1. Το Θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών (6 ώρες)	3.1.1. Διατυπώνουν τα Θεωρήματα Bolzano και Ενδιάμεσων Τιμών και τα ερμηνεύουν γεωμετρικά. 3.1.2. Χρησιμοποιούν το Θεώρημα Bolzano και το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών για να λύνουν προβλήματα (π.χ. πρόσημο συνάρτησης και ύπαρξη ρίζας σε διαστήματα του πεδίου ορισμού της, σύνολο τιμών μιας συνεχούς και γνησίως μονότονης συνάρτησης σε διαστήματα του πεδίου ορισμού της).	• Να διατυπωθεί το θεώρημα Bolzano και στη συνέχεια να αποδειχθεί το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, κατά την απόδειξη του οποίου να αναφερθεί ότι η συνάρτηση μετατοπίζεται κατάλληλα ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano. • Μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων να δοθούν ως συμπεράσματά του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών οι προτάσεις με τις οποίες βρίσκουμε το σύνολο τιμών μιας συνεχούς και γνησίως μονότονης σε διάστημα συνάρτησης. • Προτείνεται η δραστηριότητα Δ13.
3.2. Κριτήρια μονοτονίας συνάρτησης (Κριτήρια για γνησίως αύξουσες, γνησίως φθίνουσες και σταθερές συναρτήσεις) (6 ώρες)	3.2.1. Αποφαίνονται για το αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα ή σταθερή, σε ένα διάστημα Δ, χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο κριτήριο μονοτονίας, και προσδιορίζουν το σύνολο τιμών της και τις ρίζες της. 3.2.2. Χρησιμοποιούν τη μονοτονία συναρτήσεων για να λύνουν	• Τα κριτήρια μονοτονίας συνάρτησης, δηλαδή τα κριτήρια για γνησίως αύξουσες, γνησίως φθίνουσες και σταθερές συναρτήσεις, να δοθούν χωρίς απόδειξη, αλλά να υποστηριχθούν διαισθητικά με χρήση των ΤΠΕ • Με τη βοήθεια κατάλληλων αντιπαραδειγμάτων οι μαθητές να διαπιστώσουν ότι δεν ισχύει το αντίστροφο των κριτηρίων για τις γνησίως μονότονες συναρτήσεις. • Για τους στόχους 3.2.1. και 3.2.2. προτείνεται η δραστηριότητα Δ14.

	εξισώσεις και ανισώσεις της μορφής $f(g(x)) = f(h(x))$, $f(g(x)) = \kappa$ και $f(g(x)) > f(h(x))$, $f(g(x)) > \kappa$. 3.2.3. Αποφαίνονται για το αν δύο συναρτήσεις διαφέρουν κατά σταθερή ποσότητα σε ένα διάστημα Δ, χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο κριτήριο.	• Να δοθεί έμφαση στη σχέση που συνδέει συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε ένα διάστημα και έχουν ίσες παραγώγους στο εσωτερικό αυτού..
3.3. Τοπικά ακρότατα συνάρτησης – Κριτήριο ύπαρξης τοπικών ακροτάτων συνάρτησης (κριτήριο $1^{ης}$ παραγώγου) (5ώρες)	3.3.1. Βρίσκουν τις πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης. 3.3.2. Χρησιμοποιούν το κριτήριο $1^{ης}$ παραγώγου για να ελέγξουν αν μια πιθανή θέση τοπικού ακροτάτου είναι θέση τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου. 3.3.3. Εκφράζουν με τη βοήθεια συναρτήσεων πραγματικές καταστάσεις και λύνουν προβλήματα βελτιστοποίησης.	• Να αποδειχθεί το θεώρημα Fermat και να υποστηριχθεί διαισθητικά με χρήση των ΤΠΕ. • Να αποδειχθεί η σχέση που συνδέει τη μονοτονία και την $1^{η}$ παράγωγο με τα τοπικά ακρότατα. • Προτείνεται η δραστηριότητα Δ15. • Προτείνεται η δραστηριότητα Δ16.
3.4. Κυρτότητα & σημεία καμπής συναρτήσεων (5 ώρες)	3.4.1. Βρίσκουν τα διαστήματα στα οποία μια συνάρτηση είναι γνησίως κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής. 3.4.2. Αναγνωρίζουν τη σχετική θέση της εφαπτομένης και της γραφικής παράστασης συνάρτησης με βάση την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.	• Η εισαγωγή της έννοιας της γνήσιας κυρτής/κοίλης συνάρτησης να γίνει γεωμετρικά και στη συνέχεια να δοθεί, χωρίς απόδειξη, η συνθήκη κυρτότητας συνάρτησης σε διάστημα (Μονοτονία της 1ης παραγώγου), η οποία όμως να υποστηριχθεί διαισθητικά με χρήση των ΤΠΕ. • Να μελετηθούν συναρτήσεις οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους.
3.5. Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. (4 ώρες]	3.5.1. Μελετούν και να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση συνάρτησης χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα θεωρήματα και προτάσεις.	• Προτείνεται η δραστηριότητα Δ17.
4. Τριγωνομετρικές, εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις (21 ώρες)		
4.1. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις (7 ώρες)		
• Κριτήρια σύγκρισης για τα όρια	4.1.1. Εφαρμόζουν τα κριτήρια σύγκρισης για τα όρια στον υπολογισμό ορίων συναρτήσεων.	• Να διατυπωθούν, αλλά <u>να μην αποδειχθούν</u>, τα παρακάτω τρία *κριτήρια σύγκρισης για τα όρια:* i) Το κριτήριο παρεμβολής

		ii) Το κριτήριο εύρεσης του ορίου στο $x_0 \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ συνάρτησης f, που είναι κάτω φραγμένη κοντά στο x_0 από συνάρτηση g η οποία έχει στο x_0 όριο το $+\infty$. iii) Το κριτήριο εύρεσης του ορίου στο $x_0 \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ συνάρτησης f, που είναι άνω φραγμένη κοντά στο x_0 από συνάρτηση g η οποία έχει στο x_0 όριο το $-\infty$. Για την παρουσίαση των παραπάνω κριτηρίων προτείνεται να γίνει χρήση των ΤΠΕ.
• Συνέχεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων	4.1.2. Μελετούν ως προς τη συνέχεια συναρτήσεις που είναι αποτέλεσμα πράξεων ή και συνθέσεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων με άλλες συναρτήσεις	• Να αποδειχθεί η συνέχεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
• Παράγωγος τριγωνομετρικών συναρτήσεων	4.1.3. Υπολογίζουν παραγώγους συναρτήσεων που είναι αποτέλεσμα πράξεων ή και συνθέσεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων με άλλες συναρτήσεις	• Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. i) Για τον υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης $y = \eta\mu x$ να γίνει χρήση του ορίου: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$, το οποίο θα δοθεί χωρίς απόδειξη. ii) Για τον υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης $y = \sigma\upsilon\nu x$ προτείνεται να γίνει χρήση της ταυτότητας: $\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$. • Προτείνεται η δραστηριότητα Δ18, με σκοπό να κατανοήσουν οι μαθητές ότι: 1. Η παράγωγος μια συνάρτησης δεν είναι πάντα συνεχής. 2. Ενδέχεται μια συνάρτηση f να παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο εσωτερικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, χωρίς να αλλάζει η μονοτονία της συνάρτησης εκατέρωθεν του x_0, όσο κοντά και αν βρεθούμε στο σημείο αυτό.

• Μελέτη και χάραξη των γραφικών παραστάσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.	4.1.4. Βρίσκουν την περίοδο, το είδος μονοτονίας και τα ολικά ακρότατα (αν υπάρχουν) των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και είναι σε θέση να χαράξουν τη γραφική τους παράσταση σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου	• Να μελετηθούν και να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις $y=\eta\mu x$, $y=\sigma\upsilon\nu x$, $y=\varepsilon\varphi x$ και $y=\sigma\varphi x$.
• Η συνάρτηση $f(t)=\alpha\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi)+\beta$	4.1.5. Μετατρέπουν κάθε συνάρτηση της μορφής: $$f(t)=\alpha\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi)+\beta$$ σε κατάλληλη μορφή, ώστε να μπορούν να βρίσκουν την περίοδό της και χαράσσουν τη γραφική της παράσταση με κατάλληλη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(t)=\alpha\cdot\eta\mu\omega t$.	• Να δοθούν παραδείγματα όπως: $$f(t)=\eta\mu 2t\ ,\ g(t)=\eta\mu\left(2t-\frac{\pi}{3}\right) \text{ και } h(t)=3\sigma\upsilon\nu\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$$ • Να γίνει αναφορά σε κυκλώματα ή ταλαντώσεις. Ως εφαρμογή προτείνεται η δραστηριότητα Δ19
4.2. Εκθετικές Συναρτήσεις (6 ώρες)		• Να γίνει επανάληψη της έννοιας της εκθετικής συνάρτησης με βάση α $(0<\alpha\neq 1)$ και να τονισθούν, οι γνωστές από τη Β’ Λυκείου, ιδιότητές της που αναφέρονται στη μονοτονία της και στα όριά της στο $-\infty$ και $+\infty$. Να τονισθεί, επιπλέον, ότι η εκθετική συνάρτηση με βάση α είναι συνεχής σε όλο το **R** και ότι, λόγω της μονοτονίας και της συνέχειάς της, το σύνολο τιμών της είναι το $(0,+\infty)$ (βλ. §3.1).
• Παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης ($y=e^x$).	4.2.1. Υπολογίζουν παραγώγους συναρτήσεων που είναι αποτέλεσμα πράξεων ή και συνθέσεων της εκθετικής συνάρτησης με άλλες συναρτήσεις.	• Να δοθεί χωρίς απόδειξη, αλλά να υποστηριχθεί διαισθητικά με χρήση των ΤΠΕ, η ανισότητα $$e^x \geq x+1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$ Με την βοήθεια της παραπάνω ανισότητας να αποδειχθεί ότι: $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$ και στη συνέχεια ότι η εκθετική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και να υπολογισθεί η παράγωγός της.
• Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης της εκθετικής συνάρτησης	4.2.2. Μελετούν και να χαράσσουν τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που είναι αποτέλεσμα πράξεων ή και συνθέσεων της εκθετικής συνάρτησης με άλλες συναρτήσεις.	

	4.2.3. Λύνουν προβλήματα εκθετικής μεταβολής (αύξησης & απόσβεσης).	• Να αποδειχθεί ότι: «Η συνάρτηση $y = e^x$ είναι η μοναδική συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f' = f$ και $f(0) = 1$» και γενικότερα ότι: «Αν $k \in \mathbb{R}$ είναι μια σταθερά, τότε οι συναρτήσεις αυτής μορφής: $y = ce^{kx}$, με $c \in \mathbb{R}$, είναι οι μοναδικές συναρτήσεις f για την οποίες ισχύει: $f'(x) = k \cdot f(x)$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ». • Ως εφαρμογή αυτής πρότασης αυτής προτείνεται η δραστηριότητα Δ20
• Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης της εκθετικής συνάρτησης με βάση α, όπου $0 < \alpha \neq 1$.	4.2.4. Χαράσσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha^x$, με $0 < \alpha \neq 1$, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις: α) όταν $\alpha > 1$ και β) όταν $0 < \alpha < 1$ και να ανακαλούν στη μνήμη τις ιδιότητές της.	
4.3. Η λογαριθμική συνάρτηση ($y = ln\, x$) (6 ώρες)		
• Η έννοια της λογαριθμικής συνάρτησης		• Να ορισθεί ως λογαριθμική συνάρτηση η συνάρτηση που κάθε θετικό πραγματικό αριθμό τον απεικονίζει στον φυσικό του λογάριθμο, δηλαδή η συνάρτηση: $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με $g(x) = ln\, x$. • Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης, $g(x) = ln\, x$, είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της εκθετικής συνάρτησης, $f(x) = e^x$, ως προς τη διχοτόμο, $y = x$, της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.
• Παράγωγος της λογαριθμικής συνάρτησης.	4.3.1. Υπολογίζουν όρια και παραγώγους συναρτήσεων που είναι αποτέλεσμα πράξεων ή και συνθέσεων της λογαριθμικής συνάρτησης με άλλες συναρτήσεις.	• Να αποδειχθεί ότι: $\lim_{x \to 1} \frac{ln\, x}{x - 1} = 1$ και στη συνέχεια ότι η λογαριθμική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη

• Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης της λογαριθμικής συνάρτησης. • Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης: $y = x^{\alpha}$, με $\alpha \in \mathbf{R} - Ά$	4.3.2. Χαράσσουν τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που είναι αποτέλεσμα πράξεων ή και συνθέσεων της λογαριθμικής συνάρτησης με άλλες συναρτήσεις. 4.3.3. Εφαρμόζουν τις ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης στην επίλυση απλών λογαριθμικών εξισώσεων και ανισώσεων 4.3.4. Χαράσσουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^{\alpha}$ με $\alpha \in \mathbf{R} - Ά$ σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις: α) όταν $\alpha > 1$ β) όταν $0 < \alpha < 1$ και γ) όταν $\alpha < 0$.	και να υπολογισθεί η παράγωγός της. • Για τη μελέτη και τη χάραξη της γραφικής της παράστασης της λογαριθμικής συνάρτησης, $y = ln\,x$, να δοθούν, επιπλέον, χωρίς απόδειξη τα όρια αυτής στο 0 και στο $+\infty$.
4.4. Κανόνας De L' Hospital (2 ώρες)	4.4.1. Ελέγχουν, αν ισχύουν οι συνθήκες εφαρμογής του κανόνα De L' Hospital για τον υπολογισμό ορίου και, με χρήση του κανόνα αυτού, να υπολογίζουν το συγκεκριμένο όριο.	• Να αναφερθούν παραδείγματα, όπου δεν εφαρμόζεται ο κανόνας De L' Hospital. Προτείνεται να γίνουν οι δραστηριότητες: Δ21 και Δ22 • Να δοθούν ως ασκήσεις οι υπολογισμοί, με χρήση του κανόνα De L' Hospital, των παρακάτω ορίων: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln\,x}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 0} x\,ln\,x$
5. Ολοκληρωτικός Λογισμός (19 ώρες)		
5.1. Παράγουσα συνάρτησης (4 ώρες)	5.1.1. Γνωρίζουν τις παράγουσες βασικών συναρτήσεων 5.1.2. Βρίσκουν τις συναρτήσεις των οποίων δίνεται η παράγωγος στη μορφή $y = f(g(x)) \cdot g'(x)$, όπου η f είναι συνάρτηση με γνωστή παράγουσα.	• Να δοθεί έμφαση στην πρόταση με την οποία προσδιορίζεται το σύνολο των παραγουσών μιας συνάρτησης σε διάστημα Δ και να αποδειχθεί η πρόταση αυτή. • Να δοθεί πίνακας παραγουσών βασικών συναρτήσεων • Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ23
5.2. Ορισμένο ολοκλήρωμα (4 ώρες)	5.2.1. Συνδέουν την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος με το εμβαδόν χωρίου. 5.2.2. Εφαρμόζουν τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος (γραμμικότητα, μονοτονία, σχέση Chalses)	• Η εισαγωγή στην έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος προτείνεται να γίνει με τον υπολογισμό του εμβαδού του παραβολικού χωρίου. • Οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος θα παρουσιασθούν εποπτικά και δεν θα αποδειχθούν. • Να δοθεί χωρίς απόδειξη, αλλά να ερμηνευθεί γεωμετρικά, η πρόταση:

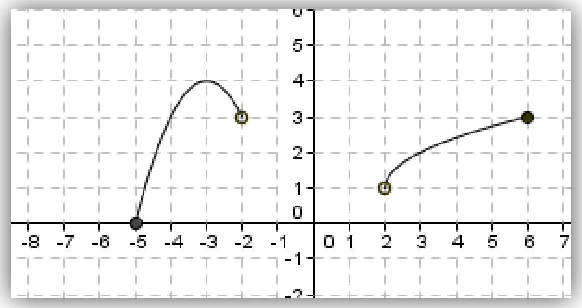
		«Έστω f και g δυο συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και οι f και g δεν είναι ίσες στο $[\alpha,\beta]$, τότε θα ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$»
5.3. Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού λογισμού (4 ώρες)	5.3.1. Γνωρίζουν τη σχέση παραγώγου και ολοκληρώματος 5.3.2. Υπολογίζουν ολοκληρώματα με χρήση του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Ανάλυσης.	• Για την επίτευξη του στόχου 5.3.1 προτείνονται οι δραστηριότητες Δ24 και Δ25. • Μετά από αυτές τις δραστηριότητες να διατυπωθεί, αλλά να μην αποδειχθεί, η ακόλουθη πρόταση: «Αν $f:\Delta\to\mathbf{R}$, όπου Δ διάστημα, είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε για κάθε $\alpha\in\Delta$ η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ x\in\Delta$ είναι μια παράγουσα της *f* στο Δ » Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της πρότασης αυτής να αποδειχτεί το Θεμελιώδες Θεώρημα της Ανάλυσης. Τονίζεται εδώ ότι η εισαγωγή της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ x\in\Delta$ γίνεται για έναν και μόνο σκοπό: *Να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα της Ανάλυσης και να αναδειχθεί, έτσι, η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό.* Για το λόγο αυτό δεν θα διδαχθούν ασκήσεις που αναφέρονται στην παραγώγιση της συνάρτησης της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt$. • Να αναφερθεί ότι, με βάση το θεμελιώδες Θεώρημα της Ανάλυσης, προκύπτει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό. • Προτείνεται η δραστηριότητα Δ26.
5.4. Εμβαδά (4 ώρες)	5.4.1. Υπολογίζουν εμβαδά με χρήση ολοκληρωμάτων. 5.4.2. Χρησιμοποιούν το ορισμένο ολοκλήρωμα για να λύνουν προβλήματα που προκύπτουν από μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων (π.χ. έργο μιας δύναμης, ροπή κ.λπ.)	• Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ27 και Δ28. • Προτείνεται η δραστηριότητα Δ29
5.5. Όγκοι στερεών εκ	5.5.1. Υπολογίζουν όγκους στερεών από περιστροφή.	• Να μελετηθούν μόνο περιπτώσεις στερεών που προκύπτουν εκ

περιστροφής (3 ώρες)		περιστροφής, ως προς τον άξονα $x'x$, του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μιας μη αρνητικής και συνεχούς συνάρτησης $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. • Με κατάλληλες δραστηριότητες να οδηγηθούν οι μαθητές στο συμπέρασμα ότι ο ζητούμενος όγκος δίνεται από τον τύπο $V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}[f(x)]^2\,dx$ • Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ30

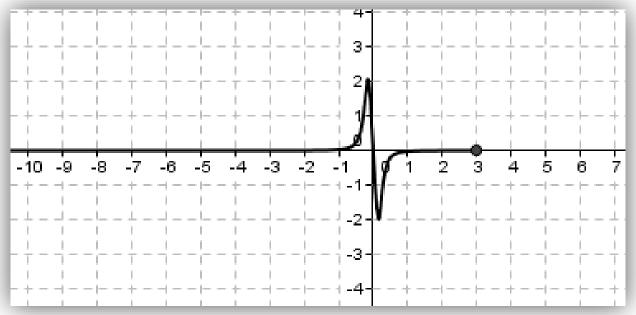
Ενδεικτικές Δραστηριότητες

Δ1 (αντιστοιχεί στους στόχους 1.2.1 και 1.2.2)

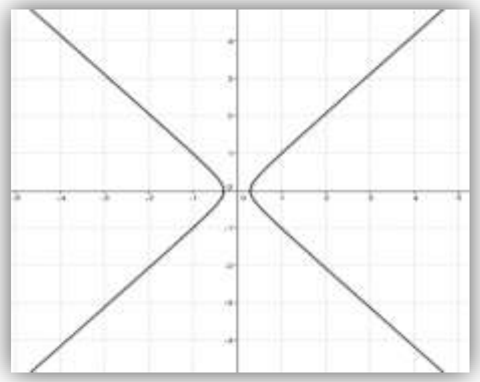
Να βρεθεί ποιες από τις παρακάτω γραμμές αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και στη συνέχεια να βρεθεί το πεδίο ορισμού τους.



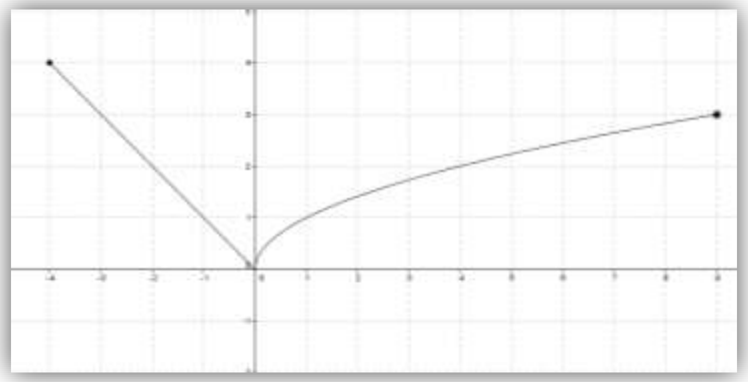
Α)



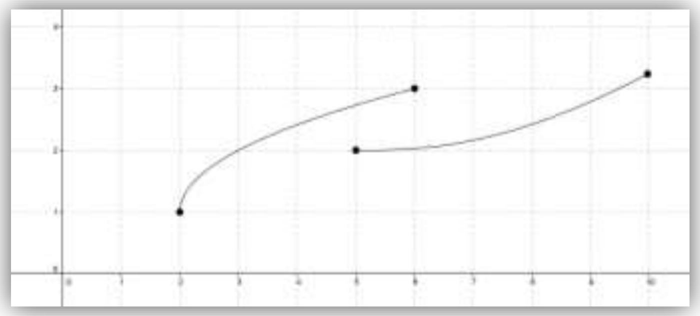
Β)

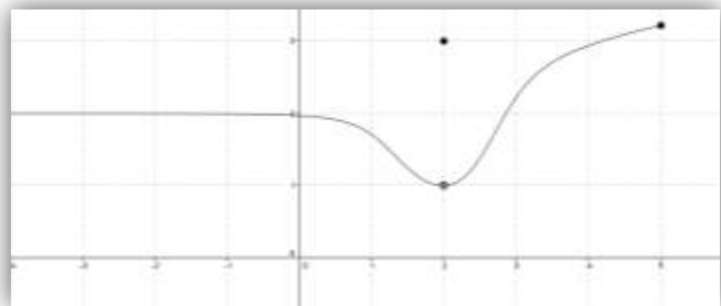


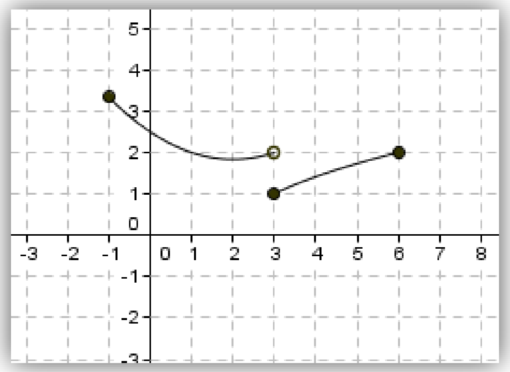
Γ)

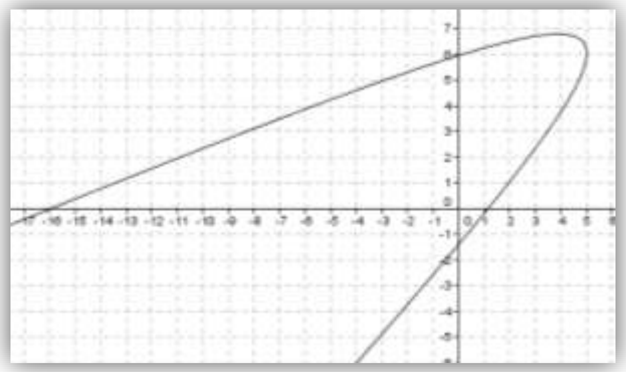


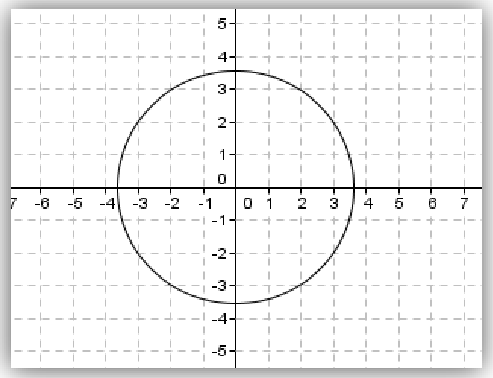
Δ)

E) 

Z) 

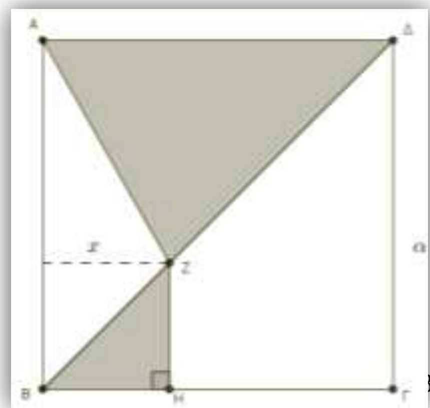
Η) 

Θ) 

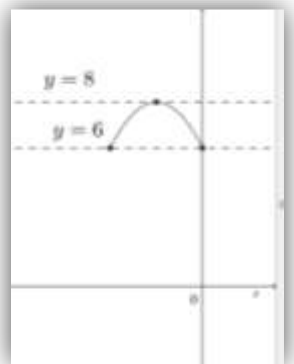
Ι) 

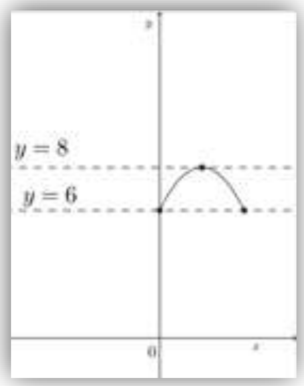
Δ2 (αντιστοιχεί στους στόχους 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3 και 1.2.4)

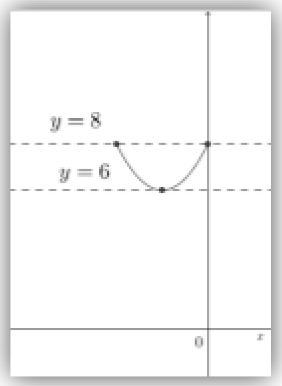
Στο διπλανό σχήμα το σημείο Z κινείται πάνω στη διαγώνιο $B\Delta$ ενός τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ με μήκος πλευράς α.

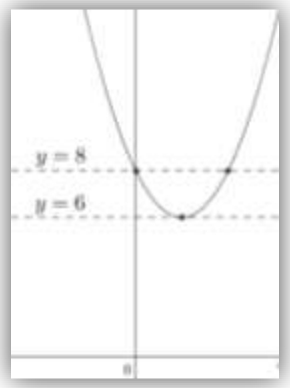


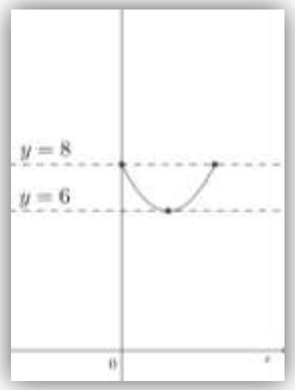
1. Αν x είναι η απόσταση του σημείου Z από την πλευρά AB του τετραγώνου, να βρεθεί το εμβαδόν E του σκιασμένου τμήματος συναρτήσει του x.
2. Ποια από τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις μπορεί αντιστοιχεί στη συνάρτηση του εμβαδού E που βρήκατε;

A) 

B) 

Γ) 

Δ) 

E) 

3. Με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, ποιο είναι το μήκος α της πλευράς του τετραγώνου;

4. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή του εμβαδού και για ποιες τιμές της απόστασης x του σημείου Z από την πλευρά AB το εμβαδόν παίρνει τις τιμές αυτές;

Δ3 (αντιστοιχεί στον στόχο 1.2.5)

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$ και $g(x)=\dfrac{x-3}{x^2-2x-3}$ είναι ίσες

β) Αν οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο δυνατόν υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο αυτές είναι ίσες.

Δ4 (αντιστοιχεί στο στόχο 1.3.2)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{x}$ και, με τη βοήθεια αυτής, να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f $και$ $|f|$.

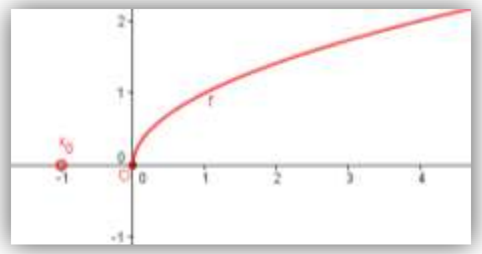
Δ5 (αντιστοιχεί στους στόχους 1.4.1, 1.4.2 και 1.4.3)

A)

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$.

ii) Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f (σχήμα α') και στη συνέχεια να προσπαθήσετε να βρείτε το όριό της στο $x_0 = -1$.

iii) Να περιγράψετε τη διαδικασία που ακολουθείτε για την εύρεση του ορίου μιας συνάρτησης. Τί πρόβλημα συναντάτε στη συγκεκριμένη περίπτωση; Πού πιστεύετε ότι οφείλετε αυτό;

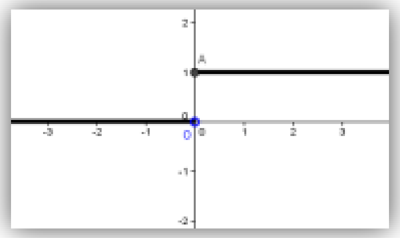


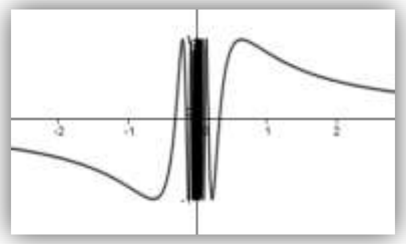
Σχήμα α'

B)

i) Να βρείτε το όριο της συνάρτησης Heaviside(*): $H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$, στο $t_0 = 0$ (σχήμα β'). Τι παρατηρείτε;

ii) Υπάρχει το όριο της συνάρτησης $f(x) = ημ\frac{1}{x}$, στο $x_0 = 0$, της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται από το σχήμα γ'. Τι παρατηρείτε;





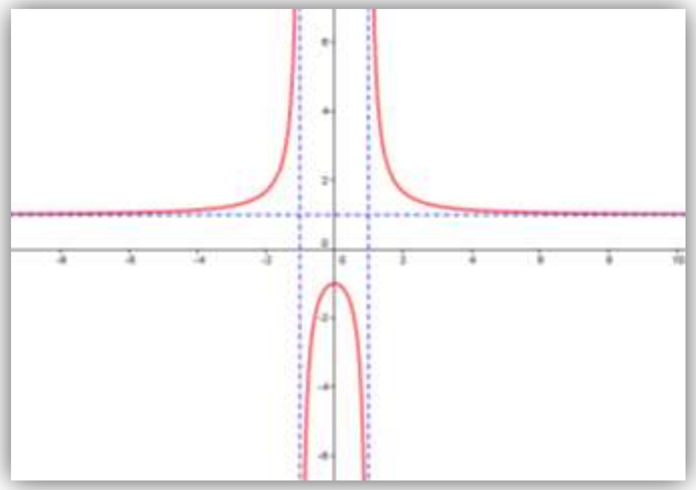
Σχήμα β’ Σχήμα γ’

Δ6 (αντιστοιχεί στον στόχο 1.6.4)

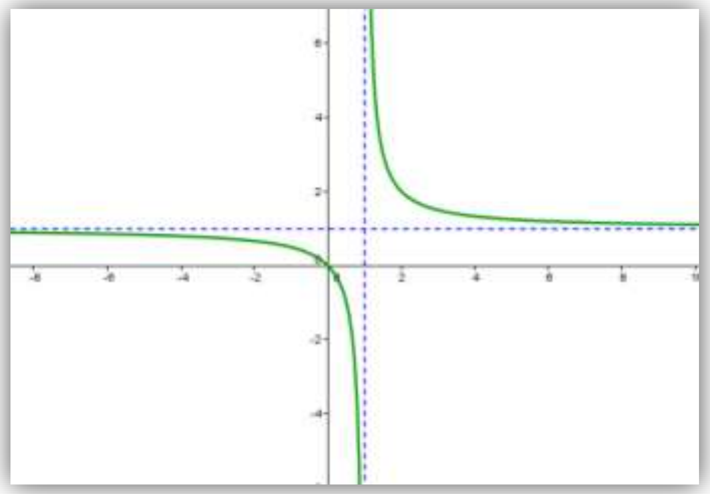
v) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ και $g\left(x\right)=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$.

vi) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

vii) Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των συναρτήσεων f και g , να ελέγξετε τα συμπεράσματα των βημάτων i) και ii). Τι παρατηρείτε;.



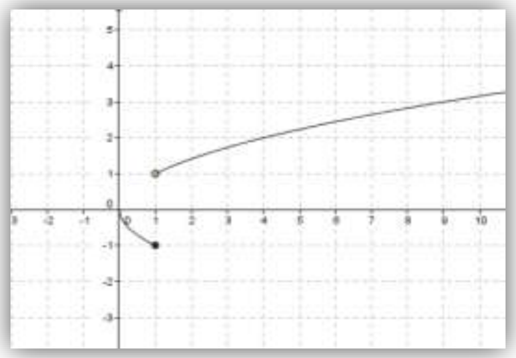
(Σχήμα α’)

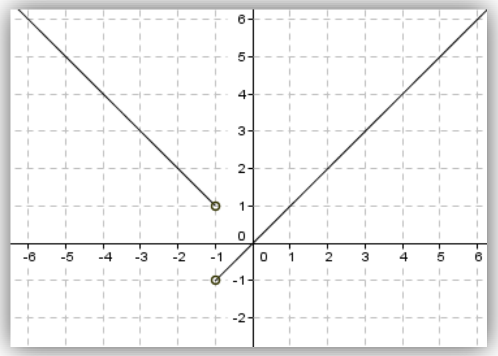


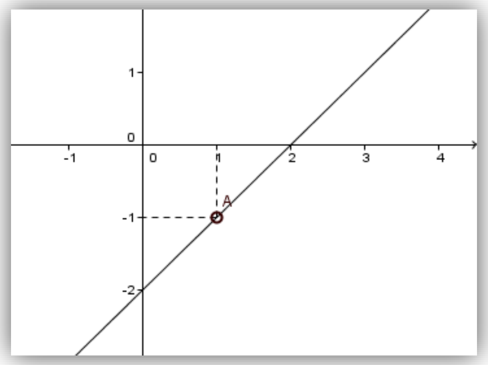
(Σχήμα β’)

Δ7 (αντιστοιχεί στους στόχους 1.7.1 και 1.7.2)

Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας πρώτα γραφικά και έπειτα με την βοήθεια του τύπου καθεμιάς συνάρτησης.







Σχήμα α' Σχήμα β' Σχήμα γ'

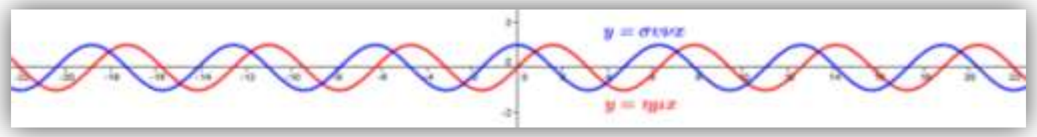
i) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)\sqrt{x}}{|x-1|}, & \text{αν } x\in[0,1)\cup(1,+\infty)\\ -1, & \text{αν } x=1\end{cases}$ (σχήμα α')

ii) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{|x+1|}$ (σχήμα β')

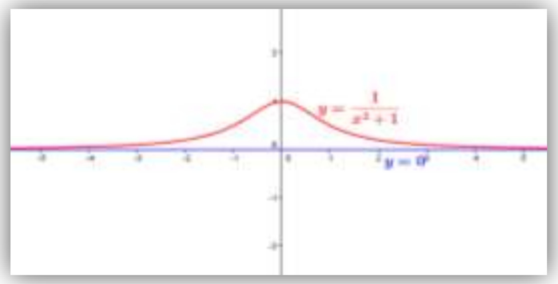
iii) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ (σχήμα γ')

Δ8 (αντιστοιχεί στους στόχους 1.8.1, 1.8.3 και 1.8.4

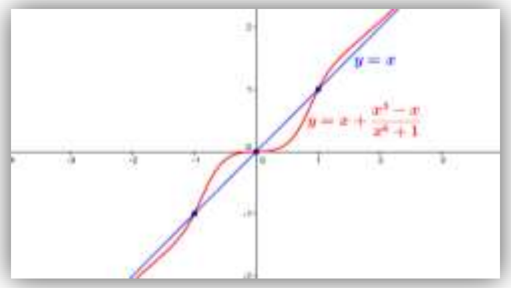
i) Με βάση τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $y=\eta\mu x$ και $y=\sigma\upsilon\nu x$ να ελέγξετε, αν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\eta\mu x$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sigma\upsilon\nu x$



ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ (σχήμα α’) και $g(x)=x+\dfrac{x^3-x}{x^6+1}$ (σχήμα β’) και έπειτα να ελέγξετε, αν οι ασύμπτωτες έχουν κοινά σημεία με τις γραφικές παραστάσεις των αντίστοιχων συναρτήσεων.



Σχήμα α’

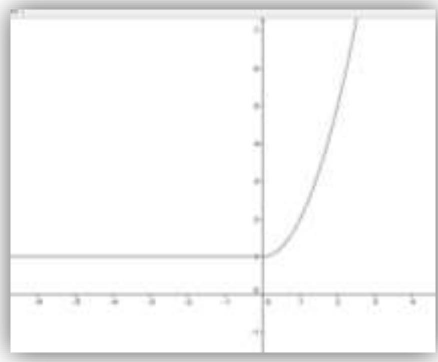


Σχήμα β’

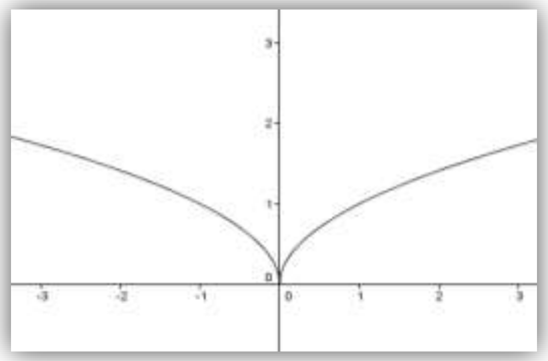
Δ9 (αντιστοιχεί στους στόχους 2.1.2, 2.1.5)

Να βρεθούν και να σχεδιασθούν, αν υπάρχουν, οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, καθώς και το πλήθος των κοινών σημείων της κάθε εφαπτομένης με τη γραφική παράσταση, στο σημείο x_0 όταν:

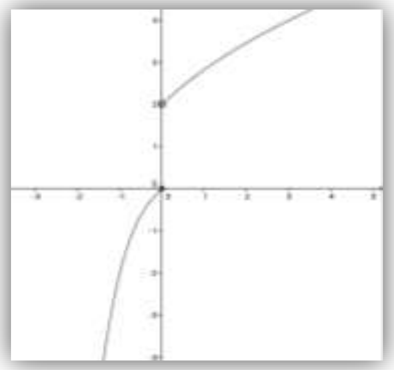
α) $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2+1, & x\geq 0 \\ 1, & x<0 \end{cases}$, $x_0=0$



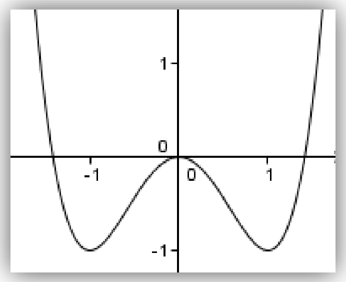
β) $f\left(x\right)=\sqrt{\left|x\right|}$ $x_0=1$



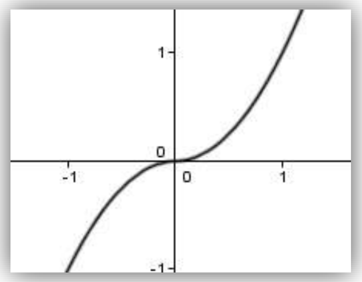
ε) $f\left(x\right)=\begin{cases} 2\sqrt{x+1}, & x>0 \\ x^3+x, & x\leq 0 \end{cases}$, $x_0=0$



γ) $f\left(x\right)=x^4-2x^2$, $x_0=-1$, $x_0=0$,



δ) $f\left(x\right)=x\left|x\right|$, $x_0=0$, $x_0=-1$, $x_0=1$. Τι παρατηρείτε;

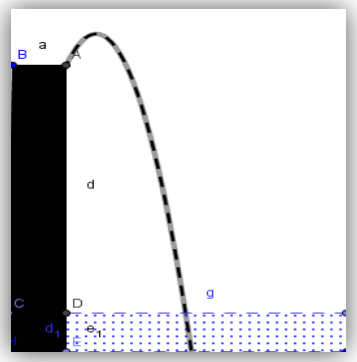


Δ10 (αντιστοιχεί στον στόχο 2.4.1)

Τη χρονική στιγμή $t=0$ ένας αθλητής καταδύσεων πηδάει από το βατήρα, ο οποίος βρίσκεται σε ύψος 32 μέτρων πάνω από το νερό. Η θέση του δίνεται από την εξίσωση: $s\left(t\right)=-16t^2+16t+32$, όπου το s μετράται σε μέτρα και το t σε δευτερόλεπτα.

α) Να βρείτε ποια χρονική στιγμή ο αθλητής «χτυπάει» το νερό.

β) Ποια είναι η ταχύτητά του κατά τη σύγκρουση;

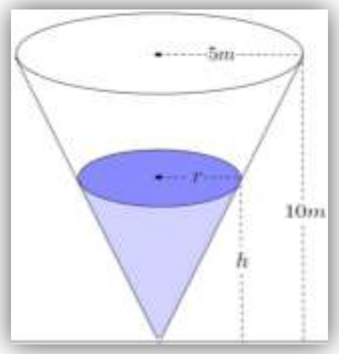


Δ11 (αντιστοιχεί στους στόχους 2.3.1, 2.4.1 και 2.4.3)
Όταν πετάμε ένα βότσαλο σε μια λίμνη, δημιουργούμε κυματισμό με τη μορφή ομόκεντρων κύκλων. Η ακτίνα του εξωτερικού κύκλου αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 1 μέτρο το δευτερόλεπτο. Όταν η ακτίνα είναι 4 μέτρα, να βρείτε με ποιο ρυθμό αυξάνεται το εμβαδόν της ταραγμένης επιφάνειας του νερού. (Να λυθεί το πρόβλημα και με χρήση του συμβολισμού του Leibniz)

Δ12 (αντιστοιχεί στους στόχους 2.4.1, 2.4.2)
Από την κωνική δεξαμενή του σχήματος, αδειάζει νερό μέσω μιας οπής που βρίσκεται στη βάση της. Από τον νόμο *Torricelli* προκύπτει ότι η παροχή δίνεται από τον τύπο $Q = S\sqrt{2gh}\ m^3/\text{sec}$ όπου S η επιφάνεια της οπής και $g \approx 10\ m/\text{sec}^2$ η επιτάχυνση της βαρύτητας.

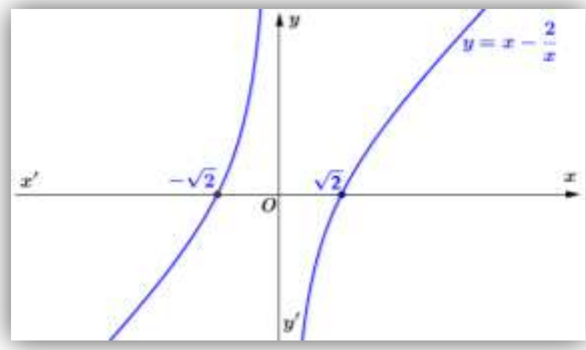
α) Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τις μεταβλητές r και h.

β) Αν $S = 0,01\ m^2$, να βρεθεί ο ρυθμός με τον οποίο κατεβαίνει η υδάτινη στάθμη όταν $h = 5m$.



Δ13 (αντιστοιχεί στους στόχους 3.2.2, 3.2.3, 3.1.2)

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x - \frac{2}{x}$.



1) Να υπολογίσετε, με χρήση του θεωρήματος Bolzano, τη θετική ρίζα της συνάρτησης *f* με προσέγγιση εκατοστού, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα και κάνοντας χρήση του υπολογιστή σας ή υπολογιστή τσέπης για την εκτέλεση των πράξεων:
   - 1ο) Βρείτε το κλειστό διάστημα Δ, με άκρα δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, μέσα στο οποίο βρίσκεται η θετική ρίζα της συνάρτησης.
   - 2ο) Χωρίστε το διάστημα Δ σε δέκα (10) διαδοχικά υποδιαστήματα, πλάτους 0,1 το καθένα, και, με χρήση του θεωρήματος Bolzano, βρείτε εκείνο το υποδιάστημα Δ_1 του διαστήματος Δ μέσα στο οποίο βρίσκεται η θετική ρίζα της συνάρτησης.
   - 3ο) Χωρίστε το διάστημα Δ_1 σε δέκα (10) διαδοχικά υποδιαστήματα, πλάτους 0,01 το καθένα, και, βρείτε εκείνο το υποδιάστημα Δ_2 του διαστήματος Δ_1 μέσα στο οποίο βρίσκεται η θετική ρίζα της συνάρτησης.

Επιβεβαιώστε την απάντησή σας με υπολογιστή τσέπης.

2) Προσδιορίστε το πρόσημο της συνάρτησης f σε καθένα από τα υποδιαστήματα στα οποία χωρίζουν το πεδίο ορισμού της οι ρίζες της και, με τη βοήθεια του προσήμου της f, βρείτε τα διαστήματα στα οποία αληθεύει η ανίσωση $x > \frac{2}{x}$. Έπειτα, λύστε την ανίσωση αυτή και αλγεβρικά και συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας. Αν δεν είναι τα ίδια, ελέγξτε που βρίσκεται το λάθος σας.

3) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,\ 0)$ και $(0,\ +\infty)$ του πεδίου ορισμού της και βρείτε, στη συνέχεια, το σύνολο τιμών της.

Δ14 (αντιστοιχεί στους στόχους 3.2.1, 3.2.2, 3.1.4)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία της και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β) Να λυθεί η ανίσωση $f\left(x^4+1\right) < f\left(x^2+1\right)$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f\left(x^2-5x+6\right) = -1$.

δ) Να βρεθεί το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = k-1$ για τις διάφορες τιμές του k.

Δ15 (αντιστοιχεί στους στόχους στόχοι 3.3.1 και 3.3.2)

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κυλινδρικό δοχείο για να χωράει 1 λίτρο λαδιού. Να βρεθούν οι διαστάσεις του δοχείου, ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος του μετάλλου που θα χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή.

Δ16(αντιστοιχεί στους στόχους 3.3.1, 3.3.2)

Ένας αγρότης χρειάζεται συνολικά 2400 μέτρα συρματοπλέγματος για να περιφράξει ένα χωράφι σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με πρόσοψη στο ποτάμι (βλ. σχήμα). Αν κατά μήκος του ποταμιού δε θα χρησιμοποιήσει περίφραξη, να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του χωραφιού, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδό.

Δ17 (αντιστοιχεί στον στόχο 3.5.1)

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Δ18 (αντιστοιχεί στον στόχο 4.1.3)

Με χρήση του λογισμικού GEOGEBRA να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\left(\eta\mu\dfrac{1}{x}+2\right), & \text{αν } x\neq 0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$,

καθώς, επίσης, τις συναρτήσεις $f(x)=x^2$ και $g(x)=3x^2$ (σχήμα: 1)

i) Ποια είναι η θέση της C_f ως προς τις C_g και C_h; Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

ii) Αποδείξτε ότι οι C_g και C_h έχουν ως εφαπτομένη στο σημείο $O(0,0)$ τον άξονα $x'x$

iii) Έχει η C_f εφαπτομένη στο σημείο $O(0,0)$ και, αν έχει, ποια είναι αυτή; Για να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό κάντε αλλεπάλληλα ZOOM στο σημείο $O(0,0)$. Αν η απάντησή σας είναι καταφατική, αποδείξτε τον ισχυρισμό σας και, επιπλέον, ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $O(0,0)$ έχει με αυτή άπειρα κοινά σημεία.

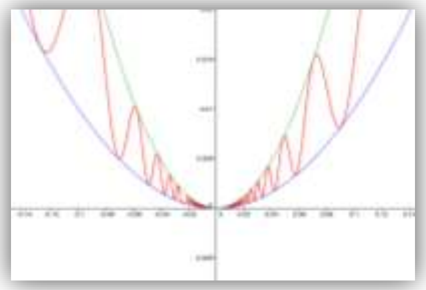
iv) Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, βρείτε την παράγωγό της και παραστήστε την γραφικά, με τη βοήθεια του λογισμικού (σχήμα 2). Στη συνέχεια απαντήστε στα παρακάτω δύο ερωτήματα:

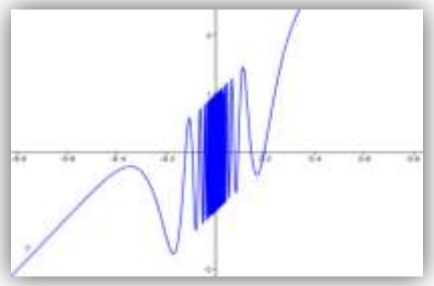
α) Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$; Για να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό, κάντε αλλεπάλληλα ZOOM στο σημείο $O(0,0)$, τόσο κατά μήκος των δύο αξόνων, όσο και κατά μήκος του άξονα $y'y$.

β) Είναι η παράγωγος της συνάρτησης f συνεχής στο σημείο 0;

v) Παρουσιάζει η συνάρτηση f ολικό ελάχιστο; Αν ναι, ποια είναι θέση του και ποια η τιμή του. Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

vi) Υπάρχει περιοχή $(-\delta,\ \delta)$ του 0 τέτοια ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\delta,\ 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0,\ \delta)$; Για να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό, κάντε αλλεπάλληλα ZOOM στο σημείο $O(0,0)$. Τί συμπεραίνετε;





Σχήμα 1. Σχήμα 2.

Δ19 (αντιστοιχεί στον στόχο 4.1.5)

Ένα σώμα αμελητέων διαστάσεων είναι δεμένο σε κατακόρυφο ελατήριο και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η εξίσωση που δίνει την απόσταση y του σώματος από το έδαφος είναι της μορφής $y(t)=1+0,4\eta\mu(5\pi t+\frac{\pi}{4})$, όπου t σε s και y σε m.

i) Να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης.

ii) Να προσδιορίσετε την θέση του σώματος τις χρονικές στιγμές $t_1=0$ και $t_2=0,2$ s.

iii) Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας του σώματος συναρτήσει του χρόνου t.

iv) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση τις χρονικές στιγμές $t_1=0$ και $t_2=0,2$ s..

v) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της απόστασης του σώματος συναρτήσει του χρόνου t, για την χρονική διάρκεια της πρώτης περιόδου.

vi) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σώματος από το έδαφος.

Δ20 (αντιστοιχεί στον στόχο 4.2.3)

«Σύμφωνα με το Νόμο του Νεύτωνα, η θερμοκρασία ενός θερμού αντικειμένου, που αφήνεται να κρυώσει σε περιβάλλον χαμηλότερης και σταθερής θερμοκρασίας, μειώνεται με ρυθμό ανάλογο προς τη διαφορά της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος από τη θερμοκρασία του αντικειμένου» Έτσι, για παράδειγμα, όταν ένα φλιτζάνι με καυτό καφέ αφήνεται να κρυώσει στο τραπέζι μιας κουζίνας, ο ρυθμός με τον οποίο κρυώνει ο καφές μειώνεται, επειδή η διαφορά της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος της κουζίνας από τη θερμοκρασία του καφέ μειώνεται. Ως εκ τούτου, με την πάροδο του χρόνου, ο ρυθμός με τον οποίο κρυώνει ο καφές, τείνει στο μηδέν και η θερμοκρασία του καφέ προσεγγίζει τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος της κουζίνας».

Με βάση τον νόμο του Νεύτωνα να γίνει η ακόλουθη δραστηριότητα:

Όταν διαπράττεται ένας φόνος, το σώμα, του οποίου η θερμοκρασία αρχικά ήταν $37^o\,C$, αρχίζει να ψύχεται σύμφωνα με τον νόμο του Νεύτωνα. Υποθέτουμε ότι μετά από δύο ώρες η θερμοκρασία του σώματος είναι $35^o\,C$ και ότι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος αέρα είναι σταθερή και ίση με $20^o\,C$.

i) Εκφράστε τη θερμοκρασία T του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες) που πέρασε από την ώρα κατά την οποία διαπράχθηκε ο φόνος.

ii) Παραστήστε γραφικά τη παραπάνω συνάρτηση.

iii) Τί συμβαίνει με τη θερμοκρασία, όταν περάσει “πάρα πολύς” χρόνος; Εξηγήστε την απάντησή σας τόσο γραφικά, όσο και αλγεβρικά.

iv) Εάν το δολοφονημένο σώμα βρέθηκε στις 8πμ και η θερμοκρασία του εκείνη τη στιγμή ήταν $30^o C$, να βρείτε πότε διαπράχθηκε το έγκλημα.

Δ21(αντιστοιχεί στον στόχο 4.4.1)

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=e^x+e^{-x}$ και $g(x)=e^x-e^{-x}$.

- Προσπαθήστε να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ με τη βοήθεια του κανόνα De L' Hospital. Τι παρατηρείτε;
- Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το ίδιο όριο χωρίς την χρήση του κανόνα;

Δ22 (αντιστοιχεί στον στόχο 4.4.2)

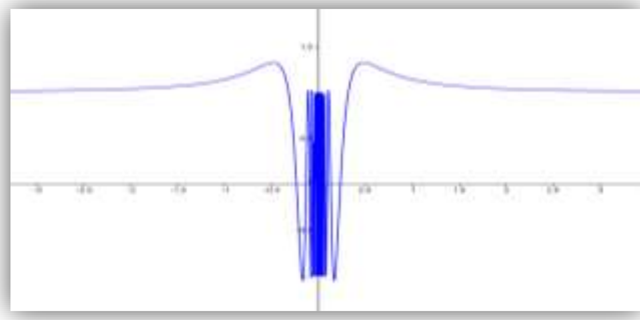
Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}$ και $g(x)=x$.

i) Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα De L' Hospital για τον υπολογισμό του ορίου το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$; Για να απαντήσετε στο ερώτημα ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα:

α) Υπολογίστε τις παραγώγους των συναρτήσεων f και g και παραστήστε γραφικά, με τη χρήση του λογισμικού GEOGEBRA, τη συνάρτηση $y=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. (σχήμα)

β) Κάντε αλλεπάλληλα ZOOM στο σημείο $O(0,0)$, για να απαντήσετε στο ερώτημα αν υπάρχει ή όχι το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

ii) Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, χωρίς την χρήση του κανόνα De L' Hospital;



Δ23 (αντιστοιχεί στο στόχο 5.1.3.)

Ένα φλιτζάνι καφέ θερμοκρασίας $90^o\,C$ αφήνεται να κρυώσει σε περιβάλλον δωματίου θερμοκρασίας $20^o\,C$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας T του καφέ δίνεται από τον τύπο $T'(t) = -7 \cdot e^{-0,1t}$, $t \geq 0$, να βρείτε:

i) Τη θερμοκρασία του καφέ, συναρτήσει του χρόνου t. Πόση θα είναι, με προσέγγιση δεκάτου, η θερμοκρασία του καφέ μετά από 10 λεπτά της ώρας;

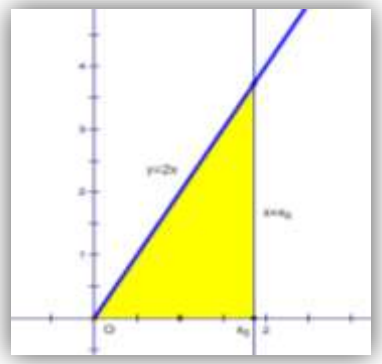
ii) Πότε η θερμοκρασία του καφέ θα είναι μικρότερη από $25^o\,C$. (Κάντε χρήση ενός υπολογιστή τσέπης). Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί η θερμοκρασία του καφέ μετά από λίγες ώρες θα είναι ίδια με τη θερμοκρασία του δωματίου;

Δίνεται ότι η θερμοκρασία μετριέται σε βαθμούς Κελσίου, ενώ ο χρόνος σε λεπτά της ώρας.

Δ24 (αντιστοιχεί στον στόχο 5.3.1.)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x,\ x \geq 0$.

i) Να υπολογισθεί το εμβαδόν $A(x_0) = \int_0^{x_0} f(t)dt$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = x_0$, για τυχαίο $x_0 > 0$.

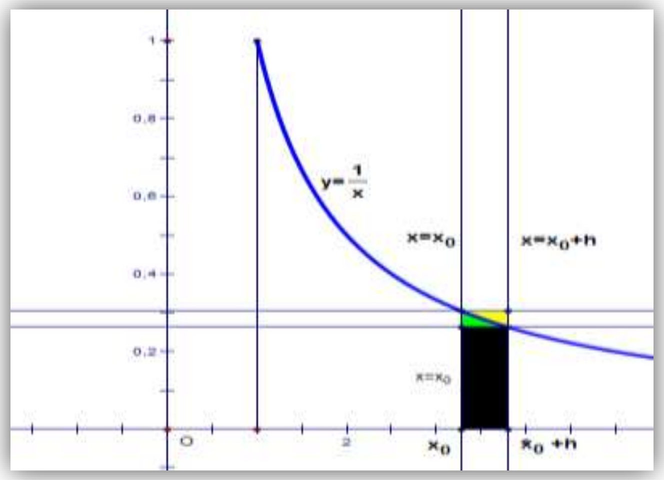


ii) Ποια σχέση συνδέει τη συνάρτηση εμβαδού $A(x) = \int_0^{x} f(t)dt,\ x \geq 0$, που βρήκατε στο α) ερώτημα, με τη συνάρτηση $f(x) = 2x$;

iii) Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για τη συνάρτηση $f(x) = x+1,\ x \geq 0$

Δ25 (αντιστοιχεί στον στόχο 5.3.1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x \geq 1$. Για τυχαίο $h \neq 0$ (στο σχήμα πήραμε $h > 0$) θεωρούμε, επιπλέον, τα εμβαδά $A(x_0) = \int_1^{x_0} f(t)dt$ και $A(x_0 + \mathrm{h}) = \int_1^{x_0+h} f(t)dt$ των χωρίων που περικλείονται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, και $x = x_0$, αντιστοίχως τις ευθείες $x = 1$ και $x = x_0 + h$.



i) Να εκφράσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = x_0$, $x = x_0 + h$ και τον άξονα $x'x$ συναρτήσει των εμβαδών $A(x_0)$ και $A(x_0 + h)$.

ii) Ποια ανισοτική σχέση συνδέει το εμβαδόν του ερωτήματος α) με τα εμβαδά των χωρίων που ορίζονται από τις ευθείες $x = x_0$, $x = x_0 + h$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $y = \frac{1}{x_0}$ και $y = \frac{1}{x_0 + h}$ αντιστοίχως;

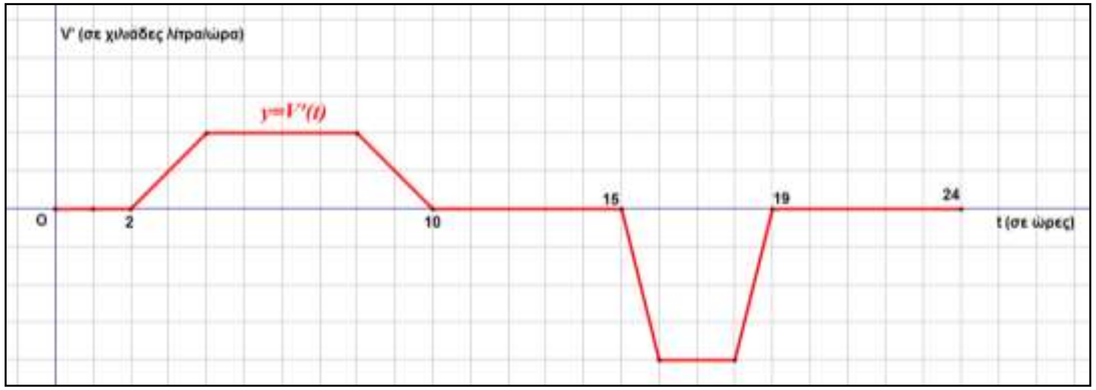
iii) Με βάση την απάντηση του ερωτήματος β), και χρησιμοποιώντας το κριτήριο παρεμβολής, να υπολογίσετε την παράγωγο $A'(x)$ της συνάρτησης εμβαδού $A(x)$. Ποια σχέση συνδέει την $A'(x)$ με τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$;

Δ26 (αντιστοιχεί στον στόχο 5.3.3.)

Α) Έστω $f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ -2x + 4, & \text{αν } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$ η παράγωγος μιας συνάρτησης $f : [0,4] \to \mathbf{R}$, με $f(0) = 0$.

- Να αποδείξετε ότι η f' είναι συνεχής, άρα ολοκληρώσιμη.
- Να υπολογίσετε τις τιμές της f στα σημεία 2 και 4, χωρίς να βρείτε τον τύπο της f.

Β) Μία δεξαμενή νερού γεμίζει και αδειάζει με κατάλληλο μηχανισμό. Ο όγκος $V(t)$ του νερού της δεξαμενής (μετρούμενος σε λίτρα) μεταβάλλεται με ρυθμό $V'(t)$, του οποίου η γραφική παράσταση για ένα χρονικό διάστημα διάρκειας 24 ωρών ($0 \leq t \leq 24$) δίνεται από το παρακάτω σχήμα:



Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα, <u>χωρίς</u> να βρείτε τον τύπο του όγκου $V(t)$ του νερού της δεξαμενής:

1. Πότε άρχισε και πότε σταμάτησε να γεμίζει η δεξαμενή;
2. Ποια είναι η χωρητικότητα της δεξαμενής, αν αυτή γέμισε τελείως;
3. Πότε άρχισε και πότε σταμάτησε να αδειάζει η δεξαμενή; Άδειασε τελείως η δεξαμενή;

Δίνεται ότι:

i) στην αρχή του εικοσιτετραώρου η δεξαμενή ήταν άδεια και
ii) ο χρόνος μετριέται σε ώρες και ο όγκος σε χιλιάδες λίτρα.

Δ27 (αντιστοιχεί στους στόχους 5.1.1, 5.1.2, 5.2.1, 5.3.2, 5.4.1)

i) Να βρεθεί μια παράγουσα της συνάρτησης $f(x)=3x^2\sqrt{x^3+1}$.
ii) Να βρεθούν οι ρίζες και το πρόσημο της f και έπειτα,
iii) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

Δ28 (αντιστοιχεί στους στόχους 5.1.1, 5.2.1, 5.2.2, 5.3.2, 5.4.1)

Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=x^2$ την εφαπτομένη της στο σημείο $A(2,4)$ και τον άξονα $x'x$.

Δ29 (αντιστοιχεί στον στόχο 5.4.2)

Ο Νόμος της Παγκόσμιας Έλξης του Νεύτωνα αναφέρει ότι δύο σώματα με μάζες m_1, m_2, αντιστοίχως, έλκονται μεταξύ τους με δύναμη $F=G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{R^2}$, όπου R η απόσταση μεταξύ των σωμάτων και G η σταθερά βαρύτητας. Αν το ένα σώμα έχει σταθερή θέση, να υπολογίσετε το έργο που απαιτείται για να μετακινήσουμε το άλλο σώμα από τη θέση $R=a$ στη θέση $R=b$.

Δ30 (αντιστοιχεί στον στόχο 5.5.1)

i) Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από περιστροφή, γύρω από τον άξονα $x'x$, του χωρίου που φράσσεται από τον άξονα $x'x$, την ευθεία $y=5$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$.

ii) Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από περιστροφή, γύρω από τον άξονα $x'x$, του χωρίου που φράσσεται από τον άξονα $x'x$, την ευθεία $y=2x$ και τη ευθεία $x=3$.

iii) Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από περιστροφή, γύρω από τον άξονα $x'x$, του χωρίου που φράσσεται από τον άξονα $x'x$, την ευθεία $y=2x+1$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$.

iv) Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που προκύπτει από περιστροφή, γύρω από τον άξονα $x'x$,του χωρίου που φράσσεται από τον άξονα $x'x$ και την καμπύλη $y=\sqrt{4-x^2}$

Β΄ Μέρος (Πιθανότητες – Αναλυτική Γεωμετρία)
B_1(Πιθανότητες)

Εισαγωγή

Τα Στοχαστικά Μαθηματικά ως μέρος του Προγράμματος Θετικών και Τεχνολογικών Σπουδών της Γ΄ Λυκείου έχουν βαρύνουσα μορφωτική σημασία και αποβλέπουν κυρίως στην καλλιέργεια της στοχαστικής σκέψης των μαθητών και την αξιοποίησή τους ως εργαλείο μάθησης στην υπηρεσία άλλων επιστημών. Έτσι, από τη μια πλευρά τα Στοχαστικά Μαθηματικά της τελευταίας τάξης του Λυκείου επιδιώκουν να καταστήσουν τους μαθητές ικανούς, να κατανοούν αποδείξεις και να επιχειρηματολογούν με ακρίβεια και λογική συνοχή στη μαθηματική γλώσσα, προάγοντας την κριτική και δημιουργική τους σκέψη. Από την άλλη πλευρά αποβλέπουν στη συστηματική προετοιμασία των μαθητών ώστε να είναι σε θέση να διερευνούν, να αναλύουν, να αναπαριστούν, να θέτουν οι ίδιοι προβλήματα και να τα επιλύουν. Στο πλαίσιο αυτό οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις διεπιστημονικές συσχετίσεις και το τεράστιο εύρος εφαρμογών των Στοχαστικών Μαθηματικών σε όλους τους τομείς της κοινωνικο-οικονομικής ζωής και του πολιτισμού, ενώ παράλληλα εξοικειώνονται με τις βασικές έννοιες που θα τους είναι απαραίτητες όταν θα φοιτήσουν στο Πανεπιστήμιο. Ειδικότερα, οι μαθητές καλούνται να αποκτήσουν μια πρώτη γνωριμία με τα ακόλουθα κεφάλαια: Συνδυαστική, Βασικές έννοιες των Πιθανοτήτων και Κατανομές Πιθανότητας.

Η Συνδυαστική(combinatorics), την οποία θα μελετήσουμε, είναι τα Μαθηματικά της απαρίθμησης και έχει ως αντικείμενο την ανάπτυξη συστηματικών μεθόδων για τον προσδιορισμό του πλήθους των στοιχείων πεπερασμένων συνόλων, χωρίς άμεση προσφυγή στην καταμέτρησή τους. Η Συνδυαστική δεν είναι αυτοσκοπός, αλλά εφαρμόζεται στις Πιθανότητες και τη μελέτη της Διωνυμικής Κατανομής.

Οι Πιθανότητες (probabilities) έχουν βαρύνουσα σημασία στο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου. Ο πολύπλοκος και δυναμικός κόσμος στον οποίο ζούμε δεν είναι απολύτως αιτιοκρατικός. Ακόμα και οι πλέον σύγχρονες επιστημονικές θεωρίες δεν είναι σε θέση να προβλέψουν με απόλυτη ακρίβεια όλα τα φαινόμενα που μελετούν. Η τύχη και η αβεβαιότητα είναι παντού γύρω μας και αποτελούν μέρος της καθημερινής μας ζωής. Ακούμε για την πιθανότητα να μεταδοθεί μια ασθένεια ή να γίνει μεγάλος σεισμός, για την πιθανότητα να νικήσει μια ποδοσφαιρική ομάδα ή να βγει πρώτο ένα κόμμα στις εκλογές. Ακούμε ακόμα για την πιθανότητα να κερδίσει κάποιος το λαχείο ή να ζήσει μέχρι την ηλικία των 100 ετών. Η στοχαστικότητα είναι πλέον μια σύγχρονη αναγκαιότητα. Με την ανάπτυξη και μελέτη των Στοχαστικών Μαθηματικών οι μαθηματικοί προσπαθούν να κατανοήσουν τη μεταβλητότητα, να «δαμάσουν» την αβεβαιότητα. Η Θεωρία Πιθανοτήτων προσφέρει ισχυρά εργαλεία για την περιγραφή και ανάλυση των τυχαίων φαινομένων και έχει ευρύτατες εφαρμογές στην επιστήμη και την καθημερινή ζωή. Μεταξύ άλλων διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη οικονομικών μοντέλων πρόβλεψης, στην κβαντομηχανική, στην πρόγνωση του καιρού και στις ιατρικές διαγνώσεις. Αναμφίβολα, οι μελλοντικοί πολίτες θα πρέπει να αναπτύξουν την κριτική ικανότητα λήψης αποφάσεων και εξαγωγής συμπερασμάτων σε αβέβαιες καταστάσεις.

Οι βασικές έννοιες του λογισμού των πιθανοτήτων έχουν ήδη αποτελέσει αντικείμενο αρχικής επεξεργασίας από τους μαθητές της Α΄ Λυκείου. Στην Γ΄ Λυκείου διενεργείται μια σύντομη επανάληψη των γνώσεων αυτών, αλλά επιπλέον οι μαθητές εμπλέκονται σε πιο σύνθετα προβλήματα εμπλουτίζοντας τις γνώσεις τους με νέες έννοιες. Ειδικότερα, γίνεται αναφορά στο Νόμο των Μεγάλων Αριθμών (lawoflargenumbers) για να αποσαφηνιστεί η σύνδεση ανάμεσα στη Στατιστική και τις Πιθανότητες. Επίσης, εισάγεται ο γενικός (αξιωματικός) ορισμός της πιθανότητας για πεπερασμένους δειγματικούς χώρους. Ακολουθούν οι κανόνες λογισμού πιθανοτήτων, η στοχαστική ανεξαρτησία (stochasticindependence) και η δεσμευμένη πιθανότητα (conditionalprobability). Το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας αποτελεί εφαρμογή του πολλαπλασιαστικού κανόνα, ενώ το Θεώρημα του Bayes, συνδέει δεσμευμένες πιθανότητες της μορφής $P(A|B)$ με δεσμευμένες πιθανότητες της μορφής $P(B|A)$. Αν θεωρήσουμε το Β ως "αιτία" και το Α ως "αποτέλεσμα", τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του αποτελέσματος Α το οποίο οφείλεται στην αιτία Β. Τα προβλήματα στα οποία χρησιμοποιούνται οι προαναφερόμενες περιπτώσεις μπορούν να αποδοθούν εύκολα με τη χρήση δεντροδιαγράμματος πιθανοτήτων.

Η μελέτη τυχαίων μεταβλητών και των κατανομών αποτελεί σημαντική καινοτομία του νέου Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου. Κατ' αναλογία προς τις αντίστοιχες στατιστικές έννοιες προσεγγίζονται σε βασικό επίπεδο οι έννοιες της αναμενόμενης τιμής, της διασποράς και της τυπικής απόκλισης, οι οποίες θα χρησιμεύσουν ως θεωρητικά μοντέλα για τα φαινόμενα που παρατηρούνται στη Στατιστική. Από τις διακριτές κατανομές παρουσιάζονται η κατανομή Bernoulliκαι η διωνυμική, η οποία είναι μια από τις κατανομές που συναντάμε συχνά σε προβλήματα. Από τις συνεχείς κατανομές μελετάμε την κανονική κατανομή, η οποία είναι σημαντική για την περιγραφή και μοντελοποίηση πλήθους καταστάσεων από την καθημερινότητά μας. Επιπλέον, εξετάζουμε την προσέγγιση της διωνυμικής από την κανονική κατανομή ως εργαλείο απλούστευσης των αλγεβρικών πράξεων. Τα μοντέλα των κατανομών πιθανότητας είναι πολύτιμα για την ανάπτυξη πολύπλευρων δεξιοτήτων σκέψης. Η αξιοποίησή τους είναι μια σημαντική πτυχή στην περιγραφή και πραγμάτευση των στοχαστικών προβλημάτων. Οι μαθητές θα πρέπει να αναγνωρίζουν ότι μπορεί σε ένα πρόβλημα να υπάρχουν διαφορετικά μοντέλα, να κατανοούν τους περιορισμούς που ενυπάρχουν και να αντιλαμβάνονται γιατί ένα μοντέλο είναι κατάλληλο, ενώ κάποιο άλλο όχι. Για την αντιμετώπιση των δυσκολιών η διδασκαλία των Πιθανοτήτων θα πρέπει να προωθεί και να αναδεικνύει τη στοχαστική σκέψη των μαθητών. Οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να διακρίνουν τα τυχαία από τα αιτιοκρατικά φαινόμενα και να κατανοούν ότι τα χαρακτηριστικά που αποδίδονται στα τυχαία γεγονότα έχουν προεξάρχουσα σημασία στη μάθηση των εννοιών. Η μετάφραση από την καθημερινή γλώσσα στη γλώσσα των συνόλων διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στις Πιθανότητες. Ωστόσο, η λεπτομερής επεξεργασία της "άλγεβρας των συνόλων" δεν είναι απαραίτητη. Η αποτελεσματική διδασκαλία οικοδομεί πάνω στις προϋπάρχουσες γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών. Η αξιοποίηση κατάλληλων λογισμικών δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να εξερευνήσουν τις έννοιες των πιθανοτήτων.

Μετά την ολοκλήρωση της ύλης του Προγράμματος Σπουδών οι μαθητές θα πρέπει μεταξύ άλλων να μπορούν:

- να γνωρίζουν την πολλαπλασιαστική αρχή της απαρίθμησης, τις μεταθέσεις, τις διατάξεις (permutations), τις διατάξεις με επανάληψη και τους συνδυασμούς (combinations) και να τα εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων πιθανοτήτων·
- να αξιοποιούν συνήθεις έννοιες των πιθανοτήτων όπως πείραμα τύχης (randomexperiment), δειγματικός χώρος (samplespace), ενδεχόμενα (events, outcomes), κ.λπ.
- να κατανοούν τον κλασικό και τον γενικό (αξιωματικό) ορισμό της πιθανότητας, τη δεσμευμένη πιθανότητα, τη στοχαστική ανεξαρτησία και να τα χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων·
- να αναγνωρίζουν αυθεντικές καταστάσεις της καθημερινότητας για τις οποίες η διωνυμική και η κανονική κατανομή αποτελούν ενδεδειγμένα μοντέλα. Να εφαρμόζουν αυτές τις κατανομές στη λύση προβλημάτων και να σχολιάζουν κριτικά την καταλληλότητά τους.

Το Πρόγραμμα Σπουδών μαζί με τον Οδηγό Εκπαιδευτικού παρέχουν κατευθυντήριες οδηγίες στους συγγραφείς των σχολικών βιβλίων. Ειδικότερα, χρησιμεύουν ως πηγή πληροφόρησης και βοηθούν τους εκπαιδευτικούς να αναπτύξουν τρόπους δραστηριοποίησης της σκέψης των μαθητών στα Στοχαστικά Μαθηματικά. Οι εκπαιδευτικοί, με την ανανέωση του διδακτικού σχεδιασμού τους, αναμένεται να υποστηρίξουν την ανάπτυξη του στοχαστικού συλλογισμού των μαθητών μέσα από την αξιοποίηση άτυπων και τυπικών στρατηγικών. Οι τύποι πρέπει πάντοτε να αιτιολογούνται. Είναι σημαντικό, οι μαθητές να είναι σε θέση όχι απλώς να μαθαίνουν τους τύπους, αλλά επίσης να έχουν πλούσιες ευκαιρίες ώστε να εικάζουν, να εφευρίσκουν και να βελτιώνουν τις δικές τους αναπαραστάσεις ως εργαλεία για την υποστήριξη της μάθησης. Πρωταρχική σημασία έχει η ανάπτυξη της εννοιολογικής σκέψης των μαθητών και όχι η κατακυριάρχηση αλγεβρικών τεχνικών, οι οποίες στρεβλώσουν και υποβαθμίζουν τη στοχαστική φύση του μαθήματος. Τέλος, οι παραγωγοί θεμάτων και οι αξιολογητές θα πρέπει να διαμορφώνουν μελετημένα εξεταστικά δοκίμια που υπηρετούν με συνέπεια τους στόχους του Προγράμματος Σπουδών των Στοχαστικών Μαθηματικών, το οποίο εκτίθεται στη συνέχεια.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ (Σύνολο Ωρών=50 ώρες)	ΣΤΟΧΟΙ Οι μαθητές να μπορούν να:	ΣΧΟΛΙΑ - ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ
6. Συνδυαστική (10 ώρες)		
6.1 Αρχή απαρίθμησης (2 ώρες)	1.1.4. κατασκευάζουν κατάλληλο δεντροδιάγραμμα σε μια εργασία απαρίθμησης, να διακρίνουν τα βήματα και τους κλάδους του και να υπολογίζουν τα τελικά αποτελέσματα. 1.1.5. εφαρμόζουν την πολλαπλασιαστική αρχή σε αποδείξεις και προβλήματα απαρίθμησης. 1.1.6. διακρίνουν την πολλαπλασιαστική αρχή απαρίθμησης από την προσθετική αρχή απαρίθμησης και να τις εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων.	• Με κατάλληλα παραδείγματα θα πρέπει να δειχθεί ότι το δεντροδιάγραμμα πλεονεκτεί σε σχέση μεάλλα μοντέλα απαρίθμησης όπως είναι τα διαγράμματα του Venn και οι πίνακες διπλής εισόδου. • Ως εισαγωγική δραστηριότητα για το στόχο 1.1.1. προτείνεται η Δ1. Στο πρόβλημα αυτό επειδή τα βήματα είναι δύο, μπορεί να εφαρμοστεί πίνακας διπλής εισόδου ή δεντροδιάγραμμα. • Ενδεικτική εισαγωγική δραστηριότητα για τον στόχο 1.1.2 είναι η Δ2. Βασικός στόχος της δραστηριότητας είναι να βοηθήσει τους μαθητές να εικάσουν τη γενίκευση της πολλαπλασιαστικής αρχής της απαρίθμησης. • Ενδεικτική δραστηριότητα για το στόχο 1.1.3. είναι η Δ3.
6.2 Μεταθέσεις, Διατάξεις και Συνδυασμοί: • Μεταθέσεις (2 ώρες)	1.2.5. αναγνωρίζουν ένα πρόβλημα μεταθέσεων ν διαφορετικών στοιχείων και να το λύνουν.	• Παράλληλα με τις μεταθέσεις εισάγεται ο ορισμός του ν! • Προτείνεται οι μαθητές να εξοικειωθούν με απλές πράξεις όπως: $\frac{9!}{6!}=\frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{6!}=7\cdot 8\cdot 9.$ • Να αποδειχθεί με χρήση της πολλαπλασιαστικής αρχής ο τύπος του πλήθους των μεταθέσεων των ν διαφορετικών στοιχείων: $M_\nu=\nu!$ • Για τον στόχο 1.2.1 προτείνεται να χρησιμοποιηθεί η δραστηριότητα Δ4. • Να επισημανθεί ότι δύο μεταθέσεις ν στοιχείων διαφέρουν μόνο στη σειρά των στοιχείων.
• Διατάξεις (χωρίς επανάθεση, με επανάθεση) (3 ώρες)	1.2.6. αναγνωρίζουν ένα πρόβλημα διάταξης με ή χωρίς επανάληψη ν διαφορετικών στοιχείων ανά κ και το επιλύουν.	• Για το στόχο 1.2.2 προτείνεται η δραστηριότητα Δ5. • Να αποδειχθεί με χρήση της πολλαπλασιαστικής αρχής ότι το πλήθος των διατάξεων ν διαφορετικών στοιχείων ανά κ είναι: $\Delta_\kappa^\nu=\frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$ • Να αποδειχθεί με χρήση της πολλαπλασιαστικής αρχής ότι το πλήθος των διατάξεων με επανάληψη των ν στοιχείων ανά κ, είναι ν^κ.

		• Για τις διατάξεις με επανάληψη δεν θα εισαχθεί συμβολισμός. • Να επισημανθούν τα ακόλουθα: α) Οι μεταθέσεις είναι ειδική περίπτωση διατάξεων των ν διακεκριμένων στοιχείων ανά ν. β) Δύο διατάξεις των ν διακεκριμένων στοιχείων ανά κ (με επανάληψη ή χωρίς) είναι διαφορετικές όταν δεν αποτελούνται από τα ίδια ακριβώς στοιχεία ή αποτελούνται μεν από τα ίδια στοιχεία, αλλά διαφέρουν ως προς τη σειρά των στοιχείων. γ) Στις επαναληπτικές διατάξεις των ν ανά κ μπορεί να έχουμε κ<ν, κ=ν ή κ>ν.
• Συνδυασμοί (3 ώρες)	1.2.7. αναγνωρίζουν ένα πρόβλημα συνδυασμών ν διαφορετικών στοιχείων ανά κ και να το επιλύουν. 1.2.8. διακρίνουν τους συνδυασμούς από τις διατάξεις	• Να αποδειχθεί ότι το πλήθος των συνδυασμών ν διαφορετικών στοιχείων ανά κ είναι: $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$ • Να επισημανθούν τα ακόλουθα: α) Συνδυασμός των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ είναι κάθε υποσύνολο του Α με κ στοιχεία. β) Σε κάθε συνδυασμό με κ στοιχεία, καθεμιά από τις κ! μεταθέσεις των στοιχείων του δεν τον μεταβάλλει. Με άλλα λόγια δύο συνδυασμοί οι οποίοι διαφέρουν μόνο στην κατάταξη των κ στοιχείων λογίζονται ως ο ίδιος συνδυασμός, δηλαδή στους συνδυασμούς δεν ενδιαφέρει η σειρά με την οποία κατατάσσονται τα κ στοιχεία, αλλά μόνο ποια είναι αυτά τα στοιχεία. • Για τους στόχους 1.2.3 και 1.2.4 προτείνεται η δραστηριότητα Δ6 και για τον 1.2.4 προτείνεται επιπλέον η Δ7.
7. Πιθανότητες (επαναλήψεις-συμπληρώσεις) (20 ώρες)		
7.1 Πείραμα τύχης, δειγματικός χώρος, σύνολα, ενδεχόμενα, πράξεις (3 ώρες)	2.1.3. προσδιορίζουν τον πεπερασμένο δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης. 2.1.4. μεταφράζουν σχέσεις ενδεχομένων από τη γλώσσα των συνόλων στην καθημερινή γλώσσα και αντιστρόφως.	• Οι μαθητές, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, να επαναλάβουν συνοπτικά έννοιες που έχουν διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις όπως: πεπερασμένος δειγματικός χώρος, ενδεχόμενα και πράξεις με ενδεχόμενα. • Να δοθούν απλά παραδείγματα για πεπερασμένους δειγματικούς

		χώρους. Για λόγους πληρότητας να δοθεί ένα ενδεικτικό παράδειγμα συνεχούς δειγματικού χώρου π.χ. η διάρκεια ζωής ενός λαμπτήρα. • Τα ενδεχόμενα $A \cap B$, A', $A \cup B$, A-B και $(A-B) \cup (B-A)$ εκφράζονται τόσο στη γλώσσα των συνόλων όσο και στην καθημερινή γλώσσα. • Να αναφερθεί ότι δύο ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα όταν $A \cap B = \varnothing$. • Για τον προσδιορισμό του πεπερασμένου δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης και των ενδεχομένων του, μπορούν να χρησιμοποιούνται ποικίλοι τρόποι αναπαράστασης (π.χ. δεντροδιαγράμματα, διαγράμματα Venn, πίνακες ορθογώνιων πεδίων, κατάλογοι δεδομένων). Ενδεικτική για τους στόχους 2.1.1. και 2.1.2 είναι η δραστηριότητα Δ8. • Με κατάλληλα παραδείγματα να αποσαφηνιστούν οι εκφράσεις «τουλάχιστον» και «το πολύ» που αναφέρονται σε ενδεχόμενα. • Να διατυπωθούν και να αιτιολογηθούν οι νόμοι DeMorgan με χρήση διαγραμμάτων Venn.
7.2 Ορισμός πιθανότητας (5 ώρες) • Κλασικός • Γενικός (αξιωματικός)	2.2.4. διατυπώνουν τον κλασικό και το γενικό (αξιωματικό) ορισμό της πιθανότητας και να τους συσχετίζουν. 2.2.5. χρησιμοποιούν τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας για να υπολογίζουν πιθανότητες ενδεχομένων και να λύνουν προβλήματα. 2.2.6. διακρίνουν τις περιπτώσεις εφαρμογής του κλασικού και του γενικού ορισμού της πιθανότητας.	• Να δοθούν ποικίλες εφαρμογές των μεθόδων της Συνδυαστικής σε αυθεντικά προβλήματα πιθανοτήτων. Ενδεικτικές για τους στόχους 2.2.1. και 2.2.2. είναι οι δραστηριότητες Δ9 και Δ10. • Να γίνει αναφορά στο Νόμο των Μεγάλων Αριθμών για να αποσαφηνιστεί η σύνδεση ανάμεσα στη Στατιστική και τις Πιθανότητες. Ειδικότερα να συνδεθεί η κλασική (θεωρητική) πιθανότητα με την πειραματική πιθανότητα. Η σχετική συχνότητα αποτελεί αξιόπιστο παράγοντα πρόβλεψης ή εκτίμησης της πιθανότητας εμφάνισης ενός ενδεχομένου μετά από πολύ μεγάλο αριθμό επαναλήψεων. • Να ζητηθεί από τους μαθητές να χρησιμοποιούν μοντέλα προσομοίωσης όπως είναι η εκτέλεση ψηφιακών μικροπειραμάτων στον ηλεκτρονικό υπολογιστή, για να συγκρίνουν τη θεωρητική με την πειραματική πιθανότητα (π.χ. χρήση γεννήτριας δεδομένων για λήψη τυχαίων αριθμών, ρίψη κερμάτων, στρίψιμο σβούρας κ.λπ.).

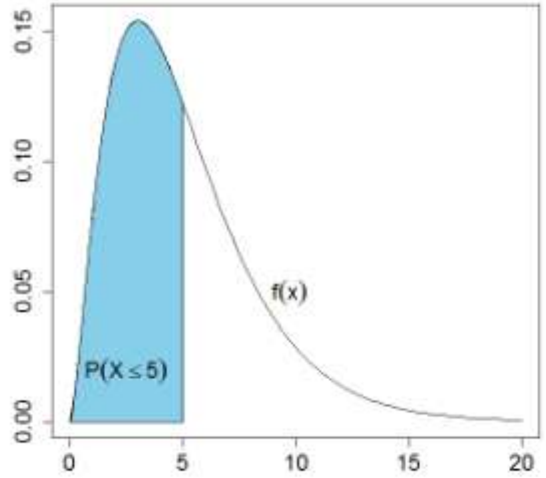
		• Να εισαχθεί ο γενικός (αξιωματικός) ορισμός της πιθανότητας. Ο γενικός ορισμός της πιθανότητας να διατυπωθεί μόνο για πεπερασμένους δειγματικούς χώρους, να συγκριθεί με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ο οποίος και να ερμηνευτεί ως ειδική περίπτωσή του. Ο γενικός ορισμός επεκτείνεται και σε άπειρους δειγματικούς χώρους, ωστόσο δεν αποτελεί στόχο του Λυκείου. Να εφαρμοστεί ο γενικός ορισμός της πιθανότητας στην επίλυση απλών ασκήσεων και προβλημάτων. Ενδεικτική για το στόχο 2.2.3. είναι η δραστηριότητα Δ11.
7.3 Λογισμός πιθανοτήτων (3 ώρες)	2.3.2. εφαρμόζουν τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων στην επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων.	• Για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες: v) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ vi) $P(A')=1-P(A)$ vii) $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$ viii) $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\le P(B)$ • Δίνεται προτεραιότητα στις εφαρμογές των κανόνων λογισμού των πιθανοτήτων σε προβλήματα και όχι σε εξεζητημένες εφαρμογές της άλγεβρας των συνόλων. Ενδεικτικές για το στόχο 2.3.1. είναι οι δραστηριότητες Δ12 και Δ13.
7.4 Δεσμευμένη πιθανότητα Πολλαπλασιαστικός κανόνας – Στοχαστικά ανεξάρτητα ενδεχόμενα, Ολική πιθανότητα, Θεώρημα Bayes (9 ώρες)	2.4.6. ορίζουν τη δεσμευμένη πιθανότητα δύο ενδεχομένων και να εντοπίζουν τον ενδεδειγμένο δειγματικό χώρο που απαιτείται για τον ορισμό της. 2.4.7. αξιοποιούν τη δεσμευμένη πιθανότητα για να ορίζουν τη στοχαστική ανεξαρτησία δύο ενδεχομένων. 2.4.8. αποφαίνονται αν δύο ενδεχόμενα είναι στοχαστικά εξαρτημένα ή όχι και να υπολογίζουν πιθανότητες με αυτά. 2.4.9. λύνουν προβλήματα με χρήση του Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας. 2.4.10. εφαρμόζουν το Θεώρημα του Bayes στην επίλυση προβλημάτων.	• Να επισημανθεί ότι η δεσμευμένη πιθανότητα παρουσιάζεται στις περιπτώσεις όπου μια πληροφορία για την έκβαση ενός πειράματος τύχης μειώνει την αβεβαιότητα συρρικνώνοντας το δειγματικό χώρο. Ενδεικτική εισαγωγική δραστηριότητα για το στόχο 2.4.1. είναι η δραστηριότητα Δ14. • Όταν η γνώση του ενδεχομένου Α, με $P(A)\neq 0$, δεν επηρεάζει την πιθανότητα του ενδεχομένου Β, τότε τα δυο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα και οι πιθανότητες $P(B\|A)$ και $P(B)$ θα είναι ίσες. Συνεπώς προτείνεται να εισαχθεί η στοχαστική ανεξαρτησία ως ειδική περίπτωση της δεσμευμένης πιθανότητας.Για το στόχο 2.4.2. προτείνονται οι δραστηριότητες: Δ15 και Δ16. • Να δειχθεί ότι δύο ενδεχόμενα Α, Β με $P(A)\neq 0$ και $P(B)\neq 0$ είναι στοχαστικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν ισχύει : $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

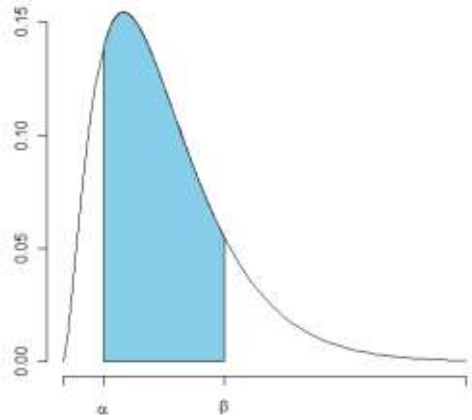
		Για το στόχο 2.4.3. ενδείκνυται η δραστηριότητα Δ17. • Γίνεται διεξοδική παρουσίαση του δεντροδιαγράμματος πιθανοτήτων για στοχαστικά εξαρτημένα και στοχαστικά ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Να μνημονευθεί ότι όταν ακολουθούμε ένα μονοπάτι κατά μήκος ενός κλάδου πολλαπλασιάζουμε τις πιθανότητες, ενώ όταν μεταβαίνουμε ανάμεσα στους κλάδους προσθέτουμε τις πιθανότητες. • Θα πρέπει να επισημανθεί ότι δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα Α, Β με Ρ(Α)≠0 και Ρ(Β)≠0 δεν είναι στοχαστικά ανεξάρτητα. • Να αποδειχθεί ως εφαρμογή ότι αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι στοχαστικά ανεξάρτητα, τότε και τα ενδεχόμενα, Α΄ και Β, Α και Β΄, Α΄ και Β΄ είναι επίσης στοχαστικά ανεξάρτητα. • Στην πλειονότητα των περιπτώσεων η ανεξαρτησία δύο ενδεχομένων προκύπτει από τη φύση του πειράματος ή ενυπάρχει στις υποθέσεις της κατασκευής του μοντέλου που περιγράφει ένα φαινόμενο. • Το Θεώρημα της Ολικής Πιθανότητας (Θ. Ο. Π.) να παρουσιασθεί στην απλούστερη μορφή του, όπου ο δειγματικός χώρος Ω διαμερίζεται σε δυο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄. Επομένως η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Β του Ω μπορεί να υπολογιστεί ως εξής: $P(B)=P(A)\cdot P(B\mid A)+P(A')\cdot P(B\mid A')$ • Το Θεώρημα του Bayes να παρουσιασθεί επίσης στην απλούστερη μορφή του: $P(A\mid B)=\dfrac{P(A)\cdot P(B\mid A)}{P(A)\cdot P(B\mid A)+P(A')\cdot P(B\mid A')}$ όπου Ρ(Β)>0, Ρ(Α)>0, Ρ(Α΄)>0 • Για τους στόχους 2.4.4. και 2.4.5. ενδεικτική είναι η δραστηριότητα Δ18.
8. Κατανομές (20 ώρες)		
Διακριτές Κατανομές 8.1 Διακριτή τυχαία μεταβλητή (3 ώρες)	3.2.4. αναγνωρίζουν την έννοια της διακριτής τυχαίας μεταβλητής.	• Με παραδείγματα από την καθημερινότητα να εισαχθεί η έννοια της τυχαίας μεταβλητής. Να αναφερθεί ότι η τυχαία μεταβλητή είναι μια συνάρτηση που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο του δειγματικού χώρου έναν πραγματικό αριθμό. Ενδεικτική είναι η

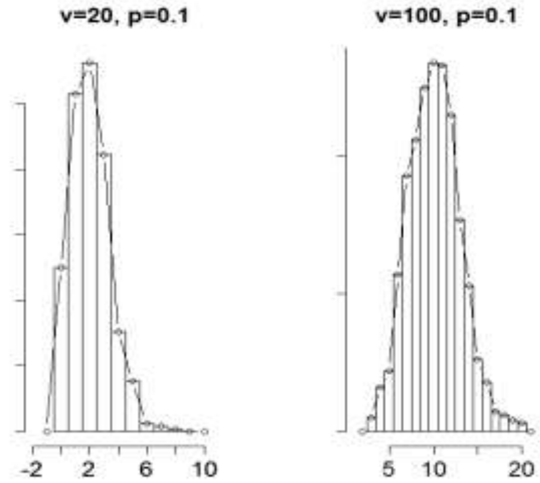
	3.2.5. ορίζουν συνάρτηση πιθανότητας $P(X=x)$ μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής Χ και να την παρουσιάζουν με τη βοήθεια πίνακα ή διαγράμματος.	δραστηριότητα Δ19. • Οι τυχαίες μεταβλητές θα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα, όπως Χή Υ, και οι τιμές που αυτές λαμβάνουν με τα αντίστοιχα πεζά γράμματα, x ή y. • Να τονιστεί ότι ο συμβολισμός$P(X=x)=p(x)$ σημαίνει: «η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή Χ να πάρει την τιμή x είναι p(x)».
	3.2.6. υπολογίζουν πιθανότητες ενδεχομένων της μορφής $P(X=x)$.	• Να παρουσιαστεί ο συμβολισμός του αθροίσματος και να εξηγηθούν οι ιδιότητές του. • Η συνάρτηση πιθανότητας $P(X=x)$ δίνει την πιθανότητα στοιχειωδών ενδεχομένων και ακολουθεί τα αξιώματα της πιθανότητας: $P(X=x)=p(x)\geq 0$ και $\sum_x P(x)=\sum_x P(X=x)=1$.
	3.2.7. αξιοποιούν την αθροιστική συνάρτηση κατανομής για να υπολογίζουν πιθανότητες της μορφής $P(X\leq x)$ και να την παρουσιάζουν με τη βοήθεια διαγράμματος.	• Για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής προτείνεται ο συμβολισμός: $F(x)=P(X\leq x)$ • Η γνώση της πιθανότητας $P(X\leq x)$ είναι θεμελιώδης, γιατί με τη βοήθειά της μπορούμε να υπολογίσουμε πολλές άλλες χρήσιμες πιθανότητες, της διακριτής τυχαίας μεταβλητής Χ όπως την $P(X<x)$, $P(X>x)$ και $P(\alpha<X\leq\beta)$.
	3.2.8. υπολογίζουν την αναμενόμενη τιμή και τη διασπορά διακριτής τυχαίας μεταβλητής σε πραγματικά προβλήματα.	• Να δοθούν οι ιδιότητες της αναμενόμενης τιμής $E(X)$ και της διασποράς $V(X)$ με σκοπό τη χρήση τους στην επίλυση απλών πραγματικών προβλημάτων. • Για τους στόχους 3.1.2., 3.1.3., 3.1.4. και 3.1.5. προτείνεται η Δ20.
8.2 Κατανομή Bernoulli (1 ώρα)	3.3.1 αναγνωρίζουν πότε μια τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την κατανομή Bernoulli.	• Να τονισθεί η σημασία τηςδοκιμασίας Bernoulli ως βασική διαδικασία για τη μελέτη του απλούστερου πειράματος τύχης με δύο πιθανά ενδεχόμενα. • Συμβατικά στο πείραμα (δοκιμή)Bernoulli, το γεγονός που μας ενδιαφέρει το ονομάζουμε «επιτυχία» με πιθανότητα εμφάνισης p και το συμπληρωματικό του «αποτυχία» με πιθανότητα $q=1-p$. • Στο πείραμα Bernoulli ενδιαφέρει η πιθανότητα επιτυχίας σε μία μόνο δοκιμή.

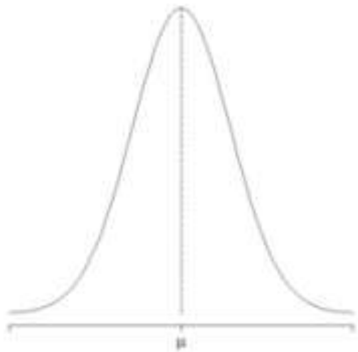
	3.3.2 γνωρίζουν τη συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Bernoulli και να υπολογίζουν την αναμενόμενη τιμή και τη διασπορά της.	• Να δηλωθεί ότι η τυχαία μεταβλητή Χ που μετρά το πλήθος των επιτυχιών σε μία και μόνο επανάληψη του πειράματος ακολουθεί την κατανομή Bernoulli και γράφουμε: Χ~Β(1, p). • Αν Χ~Β(1, p), τότε η αναμενόμενη τιμή της Χ και η διασπορά της δίνονται από τους τύπους: $\mu = E(x) = p$ και $\sigma^2 = V(X) = pq$ • Για τους στόχους 3.2.1. και 3.2.2. προτείνεται η Δ21.
8.3 Διωνυμική Κατανομή Β(ν,p) (4 ώρες)	3.4.7. αναγνωρίζουν πότε μια τυχαία μεταβλητή ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή. 3.4.8. ορίζουν τη συνάρτηση πιθανότητας της Β(ν, p) και να παρουσιάζουν την κατανομή πιθανότητας με τη βοήθεια πίνακα ή διαγράμματος. 3.4.9. υπολογίζουν πιθανότητες της μορφής Ρ(Χ=κ) για κάθε τιμή της τυχαίας μεταβλητής Χ. 3.4.10. βρίσκουν αθροιστικές πιθανότητες της μορφής Ρ(Χ≤κ) χρησιμοποιώντας τον τύπο ή πίνακες. 3.4.11. υπολογίζουν την αναμενόμενη τιμή και τη διασπορά της. 3.4.12. χρησιμοποιούν τη διωνυμική κατανομή στην επίλυση προβλημάτων.	• Να επισημανθεί ότι η διωνυμική κατανομή προκύπτει από την επανάληψη ν ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας. • Να δηλωθεί ότι η τυχαία μεταβλητή Χ η οποία μετρά το πλήθος των επιτυχιών σε ν ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulliμε πιθανότητα επιτυχίας pακολουθεί τη διωνυμική κατανομή και συμβολίζεται: Χ~Β(ν, p). • Έστω κ ο αριθμός των επιτυχιών σε μια διωνυμική κατανομή Β(ν, p). Τότε ο αριθμός των αποτυχιών ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή Β(ν, 1-p). Επομένως η πιθανότητα για κ επιτυχίες είναι ίση με την πιθανότητα για ν-κ αποτυχίες, αφού το πλήθος των επιτυχιών ταυτόχρονα καθορίζει και το πλήθος των αποτυχιών. • Να επισημανθεί ότι ο εκάστοτε διωνυμικός συντελεστής εκφράζει το πλήθος των συνδυασμών με τους οποίους παίρνουμε κ επιτυχίες στις ν δοκιμές. • Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν και οι πίνακες της διωνυμικής κατανομής. • Ο υπολογισμός πιθανοτήτων της μορφήςΡ(Χ≤κ) δίνεται από το άθροισμα των πιθανοτήτων για όλες τις τιμές της τυχαίας μεταβλητής Χ που είναι μικρότερες ή ίσες από κ. Επομένως, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής δίνεται από τα κατάλληλα αθροίσματα πιθανοτήτων. • Αν Χ~Β(ν, p) τότε η αναμενόμενη τιμή και η διασπορά είναι: $E(X) = \nu p$ και $\sigma^2 = V(X) = \nu p(1-p)$. Να δοθούν οι προηγούμενοι τύποι χωρίς απόδειξη. • Οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να χρησιμοποιούν τη

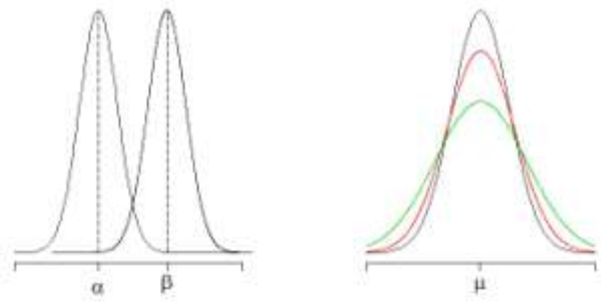
		διωνυμική κατανομή για να μοντελοποιούν μια κατάσταση του πραγματικού κόσμου και να σχολιάζουν κριτικά την καταλληλότητά της. Να δοθούν παραδείγματα. • Για τους στόχους της παραγράφου 3.3 προτείνονται οι Δ22 και Δ23.
Συνεχείς Κατανομές 8.4 Συνεχής τυχαία μεταβλητή (2 ώρες)	3.4.1. αναγνωρίζουν την έννοια της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής.	• Για την κατανόηση της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να διακρίνουν μεταξύ καταστάσεων που αναφέρονται σε διακριτές κατανομές και καταστάσεων που αναφέρονται σε συνεχείς κατανομές. Να δοθούν παραδείγματα. • Να επισημανθεί ότι σε πειράματα συνεχών τυχαίων μεταβλητών, η πιθανότητα υπολογίζεται σε ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών. Χρήσιμα εργαλεία είναι το ιστόγραμμα τυχαίας μεταβλητής και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων. • Για την εισαγωγή στην καμπύλη κατανομής, οι μαθητές με αξιοποίηση κατάλληλου στατιστικού λογισμικού, να πειραματιστούν και να παρατηρήσουν πως όταν για κατάλληλο πλήθος παρατηρήσεων ο αριθμός των κλάσεων ενός ιστογράμματος σχετικών συχνοτήτων μεγαλώνει και το πλάτος των κλάσεων μικραίνει, τότε το αντίστοιχο πολύγωνο τείνει να πάρει τη μορφή μιας ομαλής καμπύλης.
	3.4.2. γνωρίζουν την έννοια της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και τις βασικές ιδιότητές της.	• Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x) της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X είναι μια μη αρνητική συνάρτηση της οποίας το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της και πάνω από τον άξονα x'x ισούται με 1. • Να μην γίνει εκτεταμένη χρήση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας παρά μόνον σε απλές περιπτώσεις συναρτήσεων, π.χ. γραμμικές. • Να σημειωθεί ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x) της τυχαίας μεταβλητής X είναι μια συνάρτηση η οποία δεν υπολογίζει πιθανότητες, όπως κάνει η συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής. • Ο συμβολισμός P(X=x) που χρησιμοποιήθηκε στις διακριτές τυχαίες μεταβλητές δεν εφαρμόζεται στις συνεχείς τ.μ. οι οποίες παίρνουν τιμές σε ένα διάστημα πραγματικών αριθμών.
	3.4.3. αναπαριστούν γραφικά την αθροιστική συνάρτηση	• Να εξηγηθεί ότι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής

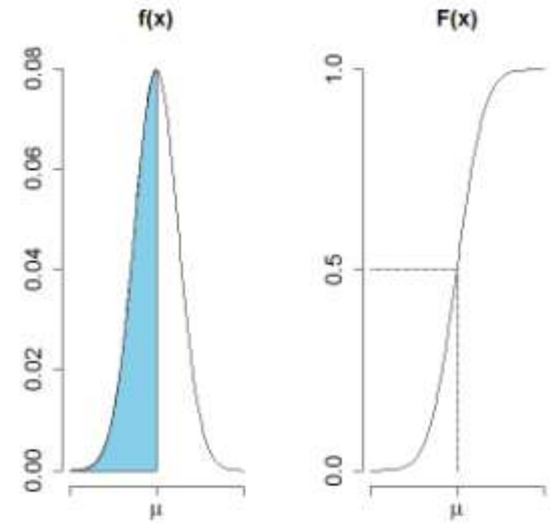
	κατανομής και να γνωρίζουν τη γεωμετρική ερμηνεία της σε απλές περιπτώσεις.	$F(x) = P(X \leq x)$ μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X με πυκνότητα πιθανότητας f(x) υπολογίζεται ως το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη της f(x) και πάνω από τον άξονα x'x, για τιμές μικρότερες ή ίσες του x.  Σημείωση: Η ολοκληρωμένη κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης κατανομής και της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής απαιτούν γνώσεις ολοκληρωτικού λογισμού.
	3.4.4. χρησιμοποιούν την αθροιστική συνάρτηση κατανομής για να αναγνωρίζουν τις πιθανότητες ενδεχομένων ως τα κατάλληλα εμβαδά κάτω από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.	• Να αναφερθεί ότι η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει τιμή σε ένα διάστημα [α,β] ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη της f(x) και πάνω από τον άξονα x'x στο συγκεκριμένο διάστημα.

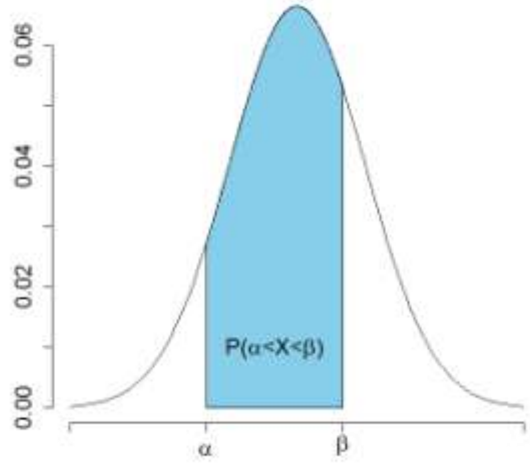
		
	3.4.5. υπολογίζουν τη συνάρτηση κατανομής για δοσμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και αντιστρόφως, σε απλές περιπτώσεις.	• Για κάθε συνεχή τυχαία μεταβλητή X ισχύουν: $P(X = x) = 0$ $P(X \leq x) = P\left(X < x\right)$ $P(\alpha \leq X \leq \beta) = P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha < X < \beta)$ • Επιπλέον ισχύει: $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$
	3.4.6. υπολογίζουν την αναμενόμενη τιμή μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής σε απλές περιπτώσεις.	• Η αναμενόμενη τιμή E(X) υπολογίζεται ως το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη της xf(x) και πάνω από τον άξονα x'x. Ο υπολογισμός της αναμενόμενης τιμής είναι σχετικά εύκολος σε απλές περιπτώσεις (π.χ. f(x)=c, όπου c μία σταθερά). • Να υπογραμμιστεί ότι η αναμενόμενη τιμή και η διασπορά αποτελούν δύο μέτρα που χαρακτηρίζουν τη κατανομή. • Για τους στόχους 3.4.2. έως 3.4.6. προτείνεται η Δ24.

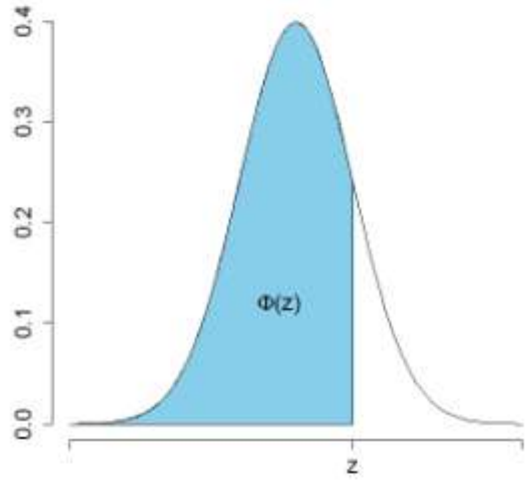
8.5 Κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ (3 ώρες)	3.5.4. αναγνωρίζουν σε αυθεντικά προβλήματα της καθημερινότητας την κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$.	• Να γραφτεί ότι για να δηλώσουμε συμβολικά ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2 τότε γράφουμε: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ • Να επισημανθεί ότι η $N(\mu, \sigma^2)$ είναι μια συνεχής κατανομή με πολλές εφαρμογές στην καθημερινή πραγματικότητα καθώς πολλά από τα φυσικά χαρακτηριστικά (ύψος, βάρος, κ.λπ.) μπορούν να περιγραφούν από την κανονική κατανομή. • Οι μαθητές αναμένεται να χρησιμοποιούν την κανονική κατανομή και να αξιοποιούν τις ιδιότητές της για να μοντελοποιούν καταστάσεις του πραγματικού κόσμου και να σχολιάζουν κριτικά την καταλληλότητά της. • Με τη βοήθεια ιστογράμματος από δεδομένα που ακολουθούν τη διωνυμική κατανομή, παρατηρούμε ότι καθώς το πλήθος των επαναλήψεων ν αυξάνεται τότε το ιστόγραμμα παίρνει μια συμμετρική μορφή και τείνει προς τη κανονική. 
	3.5.5. γνωρίζουν τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $N(\mu, \sigma^2)$ και τις ιδιότητες της καμπύλης της	• Να δοθεί το σχήμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της $N(\mu,\sigma^2)$ καθώς και ο τύπος της. Η συνάρτηση πυκνότητας

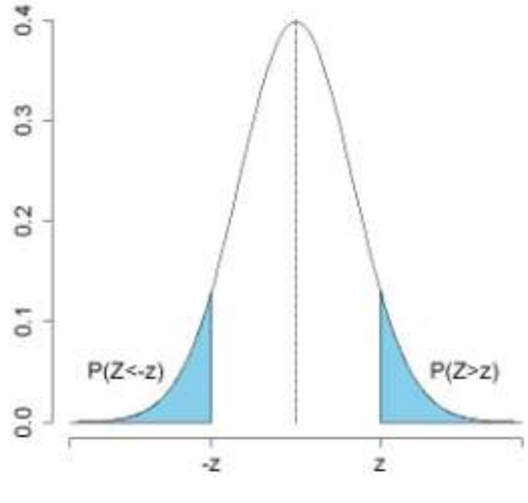
	κανονικής κατανομής. 3.5.6. αξιοποιούν τη γεωμετρική ερμηνεία της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας για να συνδέουν εμβαδά κάτω από την καμπύλη με αντίστοιχες πιθανότητες.	πιθανότητας f(x) για αυτή την κατανομή έχει μορφή καμπάνας (bellshape), παρόμοιο με αυτό που φαίνεται παρακάτω.  • Αν μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ με x, $\mu \in R$ και $\sigma^2 > 0$. • Θα πρέπει να τονιστεί ότι δεν απαιτείται απομνημόνευση του προηγούμενου τύπου. Η γνώση του σχήματος και της συμμετρίας της κανονικής κατανομής είναι απαραίτητη. • Από τις γραφικές παραστάσεις κανονικών κατανομών μπορούν να συγκριθούν οι μέσες τιμές και οι τυπικές τους αποκλίσεις, όπως φαίνεται στα ακόλουθα γραφήματα.

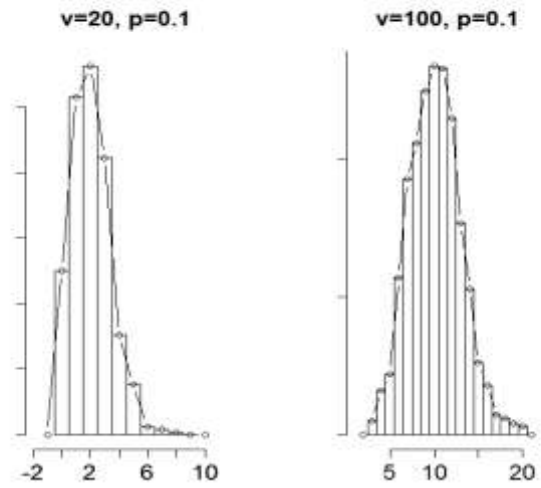
		 • Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής F(x), δηλαδή «η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες της τιμής x», δίνεται από το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη της f(x) και πάνω από τον άξονα x’x για τιμές μικρότερες ή ίσες του x.

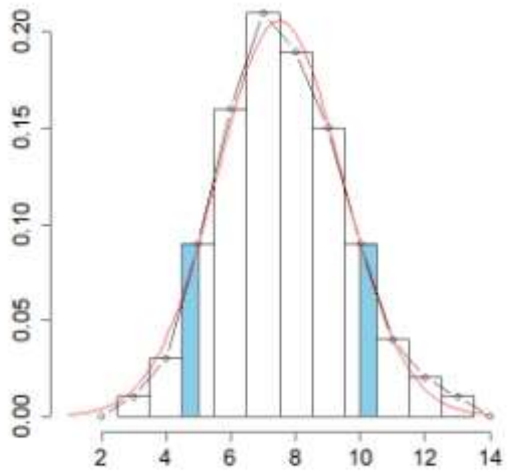
		 Στο γράφημα παρουσιάζεται μια κανονική κατανομή και η αντίστοιχη αθροιστική συνάρτηση κατανομής της, όπου φαίνετε η σύνδεση εμβαδού και πιθανότητας. (Σημείωση: Ο υπολογισμός της συνάρτησης κατανομής επιτυγχάνεται με αριθμητικές μεθόδους με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού.) • Αν X~N (μ, σ^2), τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου «η τυχαία μεταβλητή X να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα [α, β]» δίνεται από το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της f(x) και πάνω από τον άξονα x’x, για τιμές x μεταξύ των α και β.

		
8.6 Τυποποιημένη κανονική κατανομή N(0,1) (5 ώρες)	3.6.5. μετασχηματίζουν οποιαδήποτε κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$ στην N(0,1) και αντίστροφα.	• Να επισημανθεί η σπουδαιότητα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής N(0,1) για λόγους υπολογιστικούς. • Η τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη N(0,1) συμβολίζεται με Z. Ισχύει: Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ τότε $Z \sim N(0,1)$. • Από τις ιδιότητες της αναμενόμενης τιμής και της διασποράς προκύπτει: $E(Z)=0$ και $V(Z)=1$. • Λόγω της σπουδαιότητας της N(0,1), η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της N(0,1) συμβολίζεται με $\varphi(z)$ και η αντίστοιχη αθροιστική συνάρτηση κατανομής με $\Phi(z)$.

		
	3.6.6. χρησιμοποιούν τους πίνακες της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής Φ(z) της N(0,1) για να υπολογίζουν πιθανότητες της μορφής $P(X \le x)$ και$P(\alpha<X\leq\beta)$ καθώς και την τιμή του x για δεδομένες τιμές των μ, σ και Φ(z). 3.6.7. αναγνωρίζουν μια z-τιμή ως τον θετικό ή αρνητικό αριθμό των τυπικών αποκλίσεων $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ από τη μέση τιμή μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής Χ.	• Η N(0,1) είναι η πιο απλή περίπτωση κανονικής κατανομής, και οι τιμές της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής$\Phi(z)=P(Z\leq z)$έχουν υπολογισθεί και παρατίθενται σε πίνακες. • Από τη σχέση $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ προκύπτει: Χ=σZ+μ • Προτείνεται η χρήση κατάλληλου λογισμικού για τον προσδιορισμό πιθανοτήτων και την παραγωγή γραφημάτων. • Να γραφτεί ότι γενικά για όλες τις τιμές του z ισχύει το εξής: $P(Z \le -z) = P(Z \ge z) = 1 - P(Z \le z)$

	3.6.8. εφαρμόζουν την κανονική κατανομή N(0,1) στην επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου.	 Από τη συμμετρία της κανονικής καμπύλης προκύπτει: $\Phi(-z)=1-\Phi(z)$ • Για τους στόχους των παραγράφων 3.5 και 3.6 προτείνονται οι Δ25 και Δ26.
8.7 Προσέγγιση της διωνυμικής από την κανονική κατανομή (2 ώρες)	3.7.1. αναγνωρίζουν τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η διωνυμική προσεγγίζεται από τη κανονική κατανομή.	• Ένας καλός τρόπος παρουσίασης της προσέγγισης της διωνυμικής από τη κανονική είναι μέσω ιστογράμματος από δεδομένα που προέρχονται από τη διωνυμική κατανομή. Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων ν είναι μεγάλο, τότε το πολύγωνο συχνοτήτων γίνεται όλο και πιο ομαλή καμπύλη, και θα τείνει στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $N(\mu,\sigma^2)$.

		 • Ο όρος «ν μεγάλο» είναι ασαφής και είναι αδύνατον να οριστεί από ποια τιμή και πάνω το ν θα θεωρείται μεγάλο. Στη βιβλιογραφία υπάρχουν εμπειρικοί κανόνες που μας βοηθούν προς αυτή τη κατεύθυνση. Για τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η διωνυμική προσεγγίζεται από τη κανονική κατανομή αναφέρονται οι σχέσεις: $νp \geq 5$ και $ν(1-p) \geq 5$
	3.7.2. υπολογίζουν πιθανότητες κάνοντας χρήση της προσέγγισης της διωνυμικής από την κανονική κατανομή.	• Στη B(ν,p), όταν το ν είναι μεγάλο, ο υπολογισμός πιθανοτήτων είναι δύσκολος. Η προσέγγιση προσφέρει λύσεις με πολύ μικρότερο υπολογιστικό κόστος, και με ακρίβεια που εξαρτάται από το ν.
	3.7.3. χρησιμοποιούν τη διόρθωση συνέχειας για τη βελτίωση των αποτελεσμάτων στη λύση προβλημάτων και να την εξηγούν εποπτικά.	• Να εξηγηθεί ότι η διόρθωση της μορφής: $Z = \frac{x \pm 0,5 - μ}{σ}$ οδηγεί σε βελτίωση της προσέγγισης, ειδικά όταν το ν δεν είναι πολύ μεγάλο. • Για παράδειγμα, η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X~B(ν, p) να

		πάρει τιμές μεταξύ 5 και 10 γράφεται με τη βοήθεια της διόρθωσης: $$P(5 < X \leq 10) \cong P(\frac{5-0,5-\mu}{\sigma} < Z < \frac{10+0,5-\mu}{\sigma})$$  • Για τους στόχους της ενότητας 3.7. προτείνεται η Δ27.

Ενδεικτικές Δραστηριότητες

Δ37. (αντιστοιχεί στο στόχο 1.1.1.)

Μια παρέα με 4 κορίτσια και 3 αγόρια παραβρέθηκε σε μια χορευτική εκδήλωση. Καθένα από τα κορίτσια χόρεψε μια μόνο φορά με καθένα από τα αγόρια. Πόσα ζευγάρια χόρεψαν; (Σημειώνεται ότι τα ονόματα των τεσσάρων κοριτσιών ήταν Ελένη, Μαρία, Ρωξάνη και Σοφία, ενώ των τριών αγοριών Ανδρέας, Γιώργος και Κώστας)

Δ38. (αντιστοιχεί στο στόχο 1.1.2.)

Οι ελληνικές πινακίδες κυκλοφορίες έχουν έναν κωδικό. Κάθε κωδικός αποτελείται από 7 χαρακτήρες, το πρώτο μέρος περιέχει 3 ελληνικά γράμματα και το δεύτερο μέρος περιέχει 4 αριθμητικά ψηφία.

Έτσι γίνεται η αρίθμηση όλων των οχημάτων της χώρας με τη σειρά από ΑΑΑ 0001 μέχρι ΩΩΩ 9999.

(Την πινακίδα συμπληρώνει ένα αναγνωριστικό της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης).

(α) Να υπολογίσετε το δυνατό πλήθος των πινακίδων κυκλοφορίας.

(β) Με βάση νέο νόμο αποφασίστηκε να χρησιμοποιούνται το σύστημα ΓΓΓ-ΨΨΨΨ, όπου Γ ένας χαρακτήρας (γράμμα) από τους Α, Β, Ε, Ζ, Η, Ι, Κ, Μ, Ν, Ο, Ρ, Τ, Υ και Χ (14 γράμματα) και Ψ ένα από τα ψηφία 0 έως 9. Να βρείτε τώρα το πλήθος των νέων πινακίδων κυκλοφορίας που συμφωνούν με αυτούς τους περιορισμούς.

Δ39. (αντιστοιχεί στο στόχο 1.1.3.)

Σε ένα ράφι υπάρχουν 6 διαφορετικά αστυνομικά μυθιστορήματα, 5 διαφορετικά ιστορικά μυθιστορήματα και 3 διαφορετικά μυθιστορήματα επιστημονικής φαντασίας. Ο Γιώργος θέλει να επιλέξει ένα μυθιστόρημα. Με πόσους τρόπους μπορεί να κάνει την επιλογή; Η αδελφή του Γιώργου θέλει να επιλέξει ένα μυθιστόρημα από κάθε είδος. Με πόσους τρόπους μπορεί να διαλέξει τα τρία βιβλία;

Δ40. (αντιστοιχεί στο στόχο 1.2.1.)

Κάποιος γνωρίζει ότι ο τετραψήφιος κωδικός της τραπεζικής του κάρτας αποτελείται από τα ψηφία 0, 2, 6, 9 αλλά ξέχασε τη σειρά τους. Πόσες το πολύ δοκιμές πρέπει να κάνει για να βρει τη σωστή σειρά;

Δ41. (αντιστοιχεί στους στόχους 1.1.1. , 1.1.2. , 1.1.3. και 1.2.2.)

Ένα κουτί περιέχει τέσσερις χρωματιστές κιμωλίες, μία κόκκινη, μία πράσινη, μία ροζ και μία άσπρη. Να τραβήξετε μια κιμωλία από το κουτί, να σημειώσετε το χρώμα της και να την ξαναβάλετε στο κουτί. Να επαναλάβετε άλλη μια φορά τη διαδικασία. Να κατασκευάσετε ένα δεντροδιάγραμμα που να περιγράφει το χρώμα και τη σειρά με την οποία μπορούν να εξαχθούν οι κιμωλίες.

(α) Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα χρωματικών αντιστοιχιών είναι δυνατά αν τραβήξουμε δύο κιμωλίες με επανάθεση;

(β) Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα χρωματικών αντιστοιχιών είναι δυνατά αν τραβήξουμε δύο κιμωλίες με επανάθεση και μία ακριβώς από τις κιμωλίες είναι κόκκινη;

(γ) Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα χρωματικών αντιστοιχιών είναι δυνατά αν τραβήξουμε δύο κιμωλίες με επανάθεση και μία τουλάχιστον κιμωλία είναι κόκκινη;

(δ) Να απαντήσετε στα προηγούμενα ερωτήματα αν τραβήξουμε δύο κιμωλίες χωρίς επανάθεση.

Δ42. (αντιστοιχεί στους στόχους 1.2.3. και 1.2.4.)

Δίνεται το σύνολο Ω={α, β, γ, δ, ε}.

α) Να βρείτε όλα τα υποσύνολα του Ω.

β) Πόσα από τα υποσύνολα έχουν 3 στοιχεία;

γ) Σε κάθε υποσύνολο με 3 στοιχεία πόσες μεταθέσεις αντιστοιχούν;

δ) Ποια σχέση συνδέει το πλήθος των υποσυνόλων με τρία στοιχεία και τις διατάξεις Δ_3^5;

Δ43. (αντιστοιχεί στο στόχο 1.2.4.)

Ένα τμήμα με 15 μαθητές πρόκειται να κληρώσει τρεις μαθητές να το εκπροσωπήσουν στη Γενική Συνέλευση του Σχολείου.

α) Με πόσους τρόπους μπορεί να προκύψει η τριάδα των εκπροσώπων του τμήματος από την κλήρωση;

β) Στην περίπτωση που ο $1^{ος}$ της κλήρωσης θα μιλήσει στη Γενική Συνέλευση, ο $2^{ος}$ θα είναι μέλος της εφορευτικής επιτροπής και ο $3^{ος}$ θα είναι αναπληρωματικό μέλος, με πόσους τρόπους μπορεί να προκύψει η τριάδα των εκπροσώπων του τμήματος;

Δ44. (αντιστοιχεί στους στόχους 2.1.1. και 2.1.2.)

Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και βρίσκουμε το άθροισμα των ενδείξεών τους.

α) Να βρείτε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.

β) Να παραστήσετε με αναγραφή τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από τις ιδιότητες: Α: “το άθροισμα των δύο ενδείξεων είναι το πολύ 6” και Β: “το άθροισμα των δύο ενδείξεων είναι τουλάχιστον 5”.

γ) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα Α΄ και Β΄.

Δ45. (αντιστοιχεί στους στόχους 2.2.1 και 2.2.2.)

Σε ένα συρτάρι υπάρχουν 5 όμοιες μπαταρίες, από τις οποίες οι 2 δεν λειτουργούν. Αν επιλέξουμε τυχαία δύο από αυτές ποια είναι η πιθανότητα να λειτουργούν και οι δύο;

Δ46. (αντιστοιχεί στους στόχους 2.2.1 και 2.2.2)

Τρεις κύριοι επιβιβάζονται στο ασανσέρ από το ισόγειο ενός 5όροφου κτιρίου. Ποια είναι η πιθανότητα να κατεβούν όλοι τους σε διαφορετικούς ορόφους;

Δ47. (αντιστοιχεί στο στόχο 2.2.3.)

Ένα κουτί περιέχει 6 κόκκινα, 4 μαύρα και 3 άσπρα σφαιρίδια, όλα του ιδίου μεγέθους. Παίρνουμε τυχαία από το κουτί ένα σφαιρίδιο και σημειώνουμε το χρώμα του. Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε σφαιρίδιο:

α) κόκκινο,

β) άσπρο,

γ) όχι μαύρο,

δ) κόκκινο ή άσπρο,

ε) ούτε κόκκινο ούτε άσπρο.

Δ48. (αντιστοιχεί στο στόχο 2.3.1)

Από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα με 52 φύλλα τραβάμε τυχαία ένα φύλλο. Να βρεθεί η πιθανότητα το φύλλο αυτό να είναι σπαθί ή ντάμα.

Δ49. (αντιστοιχεί στο στόχο 2.3.1)

Ρίχνουμε το κέρμα δύο φορές και μελετάμε τα ενδεχόμενα:

Α: “Να έρθει το πολύ μια φορά κορώνα”,

Β: “Να έρθει τουλάχιστον μια φορά κορώνα”,

Γ: “Να έρθει μια κορώνα και μια γράμματα”,

Δ: “Να έρθει το ίδιο αποτέλεσμα και στις δύο ρίψεις”.

α) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων Α, Β, Γ, Δ.

β) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες: $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(\Gamma')$, $P(B \cap \Delta)$, $P(A-\Gamma)$, $P(B \cup \Gamma')$.

Δ50. (αντιστοιχεί στο στόχο 2.4.1.)

Ρίχνουμε ένα κόκκινο κι ένα άσπρο ζάρι και καταγράφουμε τις ενδείξεις τους. Τότε έχουμε τα ενδεχόμενα:

Α: “Το γινόμενο των ενδείξεων είναι άρτιο”, Β: “Το άθροισμα των ενδείξεων είναι άρτιο”, Γ: “Το κόκκινο ζάρι έχει ένδειξη μικρότερη ή ίση του 3”.

Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P(\Gamma)$, $P(B|A)$, $P(A|B)$, $P(A|\Gamma)$.

Δ51. (αντιστοιχεί στο στόχο 2.4.2.)

Η πιθανότητα να αρέσει στον Άρη μια κινηματογραφική ταινία είναι $P(A)=0{,}70$ και η πιθανότητα να αρέσει στη φίλη του τη Βάνα είναι $P(B)=0{,}60$. Η πιθανότητα να αρέσει η ταινία στον Άρη, αλλά όχι στη Βάνα είναι $P(A\cap B')=0{,}28$.

α) Να βρείτε την πιθανότητα $P(A|B')$ η ταινία να αρέσει στον Άρη με δεδομένο ότι δεν αρέσει στη Βάνα;

β) Να συγκρίνετε τις πιθανότητες $P(A|B')$ και $P(A)$. Τι είδους ενδεχόμενα είναι τα Α και Β΄.

γ) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα.

Δ52. (αντιστοιχεί στους στόχους 2.4.2., 2.4.3)
Σε ένα παιχνίδι που περιλαμβάνει τη ρίψη δύο ζαριών, οι παίκτες ποντάρουν στα ακόλουθα ενδεχόμενα:
Α: “Το πρώτο ζάρι να φέρει μεγαλύτερο αποτέλεσμα από το δεύτερο”.
Β: “Το άθροισμα των αποτελεσμάτων να είναι μεγαλύτερο του οκτώ”.
Γ: “Το άθροισμα των αποτελεσμάτων να είναι άρτιος”.
Βρείτε τα ακόλουθα:
α) Το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.
β) Τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α, Β και Γ.
γ) Έστω ότι το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης είναι άρτιος. Να βρείτε το νέο δειγματικό χώρο και να υπολογίστε τις νέες πιθανότητες των ενδεχομένων Α,Β και Γ.
δ) Να συγκρίνετε τις νέες πιθανότητες με τις αρχικές και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

Δ53. (αντιστοιχεί στο στόχο 2.4.3.)
Διαθέτουμε ένα είδος από ηλεκτρονικές πλακέτες οι οποίες έχουν αξιοπιστία (πιθανότητα) λειτουργίας 90%.
α) Αν συνδέσουμε δυο από αυτές τις πλακέτες σε σειρά τότε το κύκλωμα λειτουργεί μόνον όταν και οι δυο τους λειτουργούν. Ποια είναι η πιθανότητα λειτουργίας του κυκλώματος;
β) Αν συνδέσουμε δύο από αυτές τις πλακέτες παράλληλα τότε το κύκλωμα λειτουργεί όταν τουλάχιστον μια από τις δύο λειτουργεί. Ποια είναι η πιθανότητα λειτουργίας του κυκλώματος;

Δ54. (αντιστοιχεί στους στόχους 2.4.4., 2.4.5.)
Διαθέτουμε ένα αμερόληπτο κέρμα και ένα άλλο που φέρει και στις δύο όψεις κεφαλή. Διαλέγουμε στην τύχη ένα από τα δύο κέρματα και το ρίχνουμε.
α) Να βρείτε την πιθανότητα να φέρουμε κεφαλή.
β) Γνωρίζοντας ότι φέραμε κεφαλή να βρείτε την πιθανότητα το κέρμα που ρίξαμε να έχει τις δύο κεφαλές.

Δ55. (αντιστοιχεί στο στόχο 3.1.1.)
Να δώσετε τα σύνολα τιμών των τυχαίων μεταβλητών που περιγράφουν τα ακόλουθα πειράματα τύχης:
α) Ρίψη ενός νομίσματος.
β) Ρίψη δύο νομισμάτων (Σημείωση: Η τ.μ. μετρά πόσες φορές φέρνουμε Κ).
γ) Ρίψη ενός ζαριού.
δ) Το φύλο των ανθρώπων που απαντούν σε ένα ερωτηματολόγιο.
ε) Ποια ομάδα της Α΄ Εθνικής κατηγορίας υποστηρίζουν.

Δ56. (αντιστοιχεί στους στόχους 3.1.2., 3.1.3., 3.1.4και 3.1.5.)
Σε ένα επιτραπέζιο παιχνίδι χρησιμοποιούμε ένα τετραεδρικό ζάρι με ενδείξεις 1, 2, 3 και 4. Όμως το ζάρι δεν είναι δίκαιο και γνωρίζουμε ότι αν Χ είναι η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού, τότε: $P(X=1)=5\lambda$, $P(X=2)=3\lambda$, $P(X=3)=\lambda$ και $P(X=4)=2\lambda$.

6) Να βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ. μ. Χ.
7) Να γράψετε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Χ.
8) Να παραστήσετε γραφικά την αθροιστική συνάρτηση της Χ.
9) Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή και τη διασπορά της Χ.
10) Να υπολογίσετε τις ακόλουθες πιθανότητες:

i Το ζάρι να φέρει 4.
ii. Το ζάρι να φέρει 2 ή 3
iii. Το ζάρι να φέρει αποτέλεσμα μεγαλύτερο του 1.
iv. Το ζάρι να φέρει αποτέλεσμα μεγαλύτερο του 2.

Δ57. (αντιστοιχεί στους στόχους 3.2.1. και 3.2.2.)

Ένας αγρότης καλλιεργεί δοκιμαστικά ένα νέο φυτό με σκοπό να προχωρήσει στην εκτεταμένη καλλιέργειά του εφόσον πάρει τη προσδοκώμενη σοδιά. Από άλλους αγρότες που έκαναν την ίδια δοκιμαστική καλλιέργεια γνωρίζει ότι 7 στους 10 είχαν θετικό αποτέλεσμα. Αν X είναι η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το συγκεκριμένο πείραμα του αγρότη, να απαντήσετε τα ακόλουθα ερωτήματα:

α) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;
β) Ποιες τιμές παίρνει η X και ποια είναι η κατανομή της;
γ) Να βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής F(x).
δ) Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή E(X) και τη διασπορά V(X).

Δ58. (αντιστοιχεί στους στόχους των παραγράφων 3.2. και 3.3.)

Σε ένα τυχερό παιχνίδι πληρώνουμε 1€ για να επιλέξουμε έναν αριθμό ν από το 0 έως το 36. Στη συνέχεια γίνεται κλήρωση μεταξύ αυτών των αριθμών και σε περίπτωση που κληρωθεί ο αριθμός ν πληρωνόμαστε 35€. Η απόδοση του παιχνιδιού περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή

$$X = \begin{cases} -1, & \text{αν δεν κληρωθεί ο αριθμός } \nu \\ 35, & \text{αν κληρωθεί ο αριθμός } \nu \end{cases}$$

α) Να βρείτε τις πιθανότητες P(X=-1), P(X=35).
β) Να βρείτε την αναμενόμενη τιμή της X και να ερμηνεύσετε το πρόσημό της.
γ) Να βρείτε το ποσό που αναμένεται να εισπράξει ή να χάσει αν παίξει 111 φορές.
δ) Αν παίξει 74 συνεχόμενες φορές, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει τουλάχιστον 2 φορές;

Δ59. (αντιστοιχεί στους στόχους της παραγράφου 3.3.)

Σε ένα τυχερό παιχνίδι ο παίκτης ρίχνει 2 ζάρια με σκοπό να φέρει άθροισμα τουλάχιστον οκτώ. Ο παίκτης παίζει 10 συνεχόμενες φορές και αν φέρει άθροισμα μεγαλύτερο του οκτώ κερδίζει ανάλογα δώρα. Αν X είναι η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το πόσες φορές από τις 10 θα φέρει το επιθυμητό άθροισμα, τότε:

α) Ποια είναι η κατανομή της X;
β) Να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή E(X) και τη διασπορά V(X).
γ) Να δώσετε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής F(x).
δ) Ποια είναι η πιθανότητα να έχει επιτυχία σε ακριβώς 7 από τις 10 ρίψεις;
ε) Ποια είναι η πιθανότητα να έχει επιτυχία σε τουλάχιστον 7 από τις 10 ρίψεις;
στ) Ποια είναι η πιθανότητα να έχει επιτυχία το πολύ σε 7 από τις 10 ρίψεις;

Δ60. (αντιστοιχεί στους στόχους 3.4.2. έως και 3.4.6.)

Έστω ένα εργοστάσιο που συσκευάζει ζάχαρη σε πακέτα των 100γρ. Τα μηχανήματα που χρησιμοποιούνται είναι παλιά και η ποσότητα της ζάχαρης που μπαίνει σε κάθε συσκευασία δεν είναι δυνατόν να είναι πάντα ακριβώς 100γρ. Έστω λοιπόν Y η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το βάρος της ζάχαρης που μπαίνει σε κάθε συσκευασία, και έστω ότι από παλαιότερες μετρήσεις γνωρίζουμε ότι η Y παίρνει τιμές στο διάστημα (95,105). Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y είναι μια σταθερή

συνάρτηση και ίση με c στο διάστημα (95,105) και μηδέν οπουδήποτε αλλού, να υπολογισθούν:
α) Η σταθερά c.
β) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής F(y).
γ) Η πιθανότητα ο αγοραστής να πάρει ένα πακέτο ζάχαρης με ποσότητα μικρότερη από 100γρ.
δ) Η αναμενόμενη τιμή E(Y). [Σημείωση: Η E(Y) να υπολογιστεί με δύο τρόπους]]
ε) Η πιθανότητα η ποσότητα της ζάχαρης να είναι στο διάστημα (99,101), όπως απαιτείται από την επιτροπή πιστοποίησης προϊόντων.

Δ61. (αντιστοιχεί στους στόχους των ενοτήτων 3.5 και 3.6)

Ένας ξυλουργός κόβει ξύλινες σανίδες που θα χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή βιβλιοθηκών. Το μήκος των σανίδων ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μήκος 75εκ και διασπορά 2. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:
α) Μια σανίδα να έχει μήκος μικρότερο από 73εκ.
β) Το μήκος μιας σανίδας να είναι στο διάστημα (74,77).
γ) Το μήκος μιας σανίδας να είναι μεγαλύτερο από 76εκ.
δ) Το μήκος μιας σανίδας να είναι μικρότερο από 72εκ δεδομένου ότι είναι μικρότερο από 73εκ.

Δ62. (αντιστοιχεί στους στόχους των ενοτήτων 3.5 και 3.6)

Ένα μηχάνημα κάνει τρύπες σε μια μεταλλική επιφάνεια με σκοπό να περάσει ένας σωλήνας. Το μηχάνημα είναι ρυθμισμένο να κάνει τρύπες με διάμετρο κατά μέσο όρο 10εκ και τυπική απόκλιση σ=0,15εκ και οποιαδήποτε τρύπα μεταξύ 9,8εκ και 10,2εκ θα είναι αποδεκτή. Αν η τρύπα είναι μεγαλύτερη από 10,2εκ τότε η μεταλλική επιφάνεια αχρηστεύεται και αν η διάμετρος είναι μικρότερη από 9,8εκ τότε ο τεχνίτης ξαναδοκιμάζει να κάνει την τρύπα στη σωστή διάμετρο. Αν θεωρήσουμε ότι οι τρύπες που κάνει το μηχάνημα ακολουθούν την κανονική κατανομή, να υπολογίσετε τα ακόλουθα:
α) Ποια είναι η πιθανότητα η προσπάθεια να ανοιχτεί τρύπα στη μεταλλική επιφάνεια να είναι εντός των αποδεκτών ορίων;
β) Ποια είναι η πιθανότητα να αχρηστευτεί μια μεταλλική επιφάνεια;
γ) Έστω ότι το κόστος μιας μεταλλικής επιφάνειας είναι 5€. Αν το μηχάνημα τρυπήσει διαδοχικά 100 μεταλλικές επιφάνειες, να υπολογίσετε την αναμενόμενη ζημιά που θα προκύψει από την αστοχία του μηχανήματος.

Δ63. (αντιστοιχεί στους στόχους της ενότητας 3.7)

Σε μια διαδικασία ποιοτικού ελέγχου, δοκιμάζονται 1000 νέοι υπολογιστές. Η πιθανότητα να μη λειτουργεί ένας υπολογιστής είναι p=0.01. Κάνοντας χρήση της προσέγγισης της διωνυμικής από την κανονική, να υπολογίσετε:
α) Τον αναμενόμενο αριθμό ελαττωματικών υπολογιστών.
β) Την πιθανότητα να βρεθούν το πολύ 5 ελαττωματικοί υπολογιστές.
γ) Την πιθανότητα ο αριθμός X των ελαττωματικών υπολογιστών να είναι $3<X<7$.
δ) Την πιθανότητα ο αριθμός X των ελαττωματικών υπολογιστών να είναι $3<X<7$ με δεδομένο ότι $X\leq5$.

B_2 (Αναλυτική Γεωμετρία)

Εισαγωγή

Η μελέτη των κωνικών τομών ξεκίνησε στην αρχαία Ελλάδα προκειμένου να απαντηθούν κάποια σημαντικά γεωμετρικά προβλήματα, κυρίως το πρόβλημα διπλασιασμού του κύβου. Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποίησαν γεωμετρικές μεθόδους για να εξετάσουν τις ιδιότητες των κωνικών τομών ενώ σήμερα ο βασικός τρόπος μελέτης τους γίνεται με μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας χωρίς τη χρήση της οποίας η πρόοδος στη μελέτη τους θα ήταν αδύνατη. Οι κωνικές τομές αποτελούν το πρώτο φυσιολογικό βήμα μετά τη μελέτη της ευθείας καθώς περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής $Ax^2 + Bxy + \Gamma y^2 + \Delta x + E y + Z = 0$, όπου στην εξίσωση της ευθείας έχουν προστεθεί και όροι δεύτερης τάξης. Η μελέτη των κωνικών τομών είναι απαραίτητη καθώς πέραν των πολλών εφαρμογών τους (κατασκευή κατόπτρων, τροχιές πλανητών, τροχιές βλημάτων, τροχιές ηλεκτρονίων, λιθοθρυψία, τηλεσκόπιο τύπου Κασγκρέν κ.λπ.) χωρίς την κατανόησή τους δεν μπορεί να προχωρήσει αποτελεσματικά η γνώση σε πιο πολύπλοκα σχήματα που αποτελούνται από καμπύλες που δεν περιγράφονται από μια συναρτησιακή σχέση της μορφής $y = f(x)$.

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο μελετώνται ο κύκλος, η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή με βάση την εστιακή τους ιδιότητα από την οποία προκύπτουν και οι εξισώσεις που τις χαρακτηρίζουν ενώ σε κάθε περίπτωση αποδεικνύεται η εξίσωση της εφαπτομένης τους θεωρώντας τις κωνικές τομές ως καμπύλες που προκύπτουν από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Μέσω των κοινών ιδιοτήτων τους (ανακλαστική και περιγραφή τροχιάς σωμάτων, πλανητών και κομητών) επιτυγχάνεται η ανάδειξη της χρησιμότητας της μελέτης τους.

Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου επιδιώκεται:

- Να διευρύνουν οι μαθητές το πεδίο των Γεωμετρικών τους γνώσεων και με άλλες κατηγορίες γραμμών εκτός της ευθείας και του κύκλου.
- Να γνωρίσουν τις βασικές ιδιότητες των κωνικών τομών.
- Να έρθουν σε επαφή με την ποικιλία των εφαρμογών των κωνικών τομών.

Έτσι, όσον αφορά στον κύκλο, η εξίσωσή του προσδιορίζεται με βάση την ιδιότητα των σημείων του να ισαπέχουν από το κέντρο. Στη συνέχεια με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου αποδεικνύονται οι προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούνται ώστε μια εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ να παριστάνει κύκλο. Η απόδειξη της εξίσωσης της εφαπτομένης του κύκλου σε ένα σημείο του γίνεται με βάση την γνωστή από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ιδιότητά της. Οι μαθητές πρέπει να αντιληφθούν ότι ο ορισμός αυτός δεν έρχεται σε αντίθεση με την έννοια της εφαπτομένης που διδάχθηκαν στην Ανάλυση. Στην κατεύθυνση αυτή χρήσιμο είναι, αφού περιοριστούμε στο πάνω ή στο κάτω ημικύκλιο, να αποδειχθεί ότι η ίδια εξίσωση προκύπτει με χρήση των μεθόδων της ανάλυσης.

Η επόμενη κωνική τομή που εξετάζεται είναι η παραβολή. Η εξίσωση της παραβολής αποδεικνύεται με βάση την ιδιότητα των σημείων της να ισαπέχουν από ευθεία και σημείο εκτός αυτής. Η εξίσωση της υπερβολής αρχικά αποδεικνύεται στην περίπτωση που ο άξονας τετμημένων είναι ο άξονας συμμετρίας της και άξονας τεταγμένων η μεσοκάθετος της απόστασης της εστίας της από τη διευθετούσα. Οι μαθητές γνωρίζουν ήδη από την Άλγεβρα ότι παραβολές ονομάζονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων της μορφής $y = \alpha x^2$, και τον τρόπο με τον οποίο η μορφή της παραβολής σχετίζεται με την παράμετρο α η οποία τώρα αποκτά γεωμετρική ερμηνεία καθώς αντιστοιχεί στην απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα. Η εξίσωση της εφαπτομένη σε σημείο της παραβολής αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας μεθόδους της ανάλυσης. Επίσης αναδεικνύονται οι πολλές εφαρμογές της παραβολής λόγω της ανακλαστικής της ιδιότητας αλλά και το γεγονός ότι περιγράφει την τροχιά ενός βλήματος, ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν την χρησιμότητα της μελέτης της.

Αντίστοιχα, με βάση την εστιακή της ιδιότητα, αποδεικνύεται και η εξίσωση της έλλειψης στις περίπτωση που ο μεγάλος της άξονας συμπίπτει με τον άξονα των τετμημένων ή τον άξονα των τεταγμένων. Κατανοώντας τον ρόλο της εκκεντρότητας της έλλειψης, οι μαθητές είναι σε θέση να αντιληφθούν τον τρόπο με τον οποίον μεταβάλλεται η μορφή της έλλειψης ανάμεσα στις δύο οριακές της θέσεις του κύκλου και της ευθείας. Για την απόδειξη της εξίσωσης της εφαπτομένης σε σημείο της έλλειψης χρησιμοποιούνται και

εδώ μέθοδοι της Ανάλυσης. Τέλος όπως και στην περίπτωση της παραβολής η ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης και το γεγονός ότι περιγράφει τις τροχιές πλανητών συμβάλλουν στην ανάδειξη ενός πραγματιστικού πλαισίου για τη μελέτη της.
Η τελευταία κωνική τομή που μελετάται είναι η υπερβολή. Η εστιακή ιδιότητα, οι συμμετρίες, οι ασύμπτωτες αλλά και η εκκεντρότητα, της υπερβολής που εκφράζονται και μέσω του ορθογωνίου βάσης, συμβάλλουν στην ανάπτυξη μιας διαισθητικής αντίληψης για τη μορφή της. Η ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής και η περιγραφή από αυτήν των τροχιών των κομητών που διαφεύγουν από τη βαρύτητα του Ήλιου ολοκληρώνουν αλλά και ενοποιούν τις εφαρμογές των κωνικών τομών.

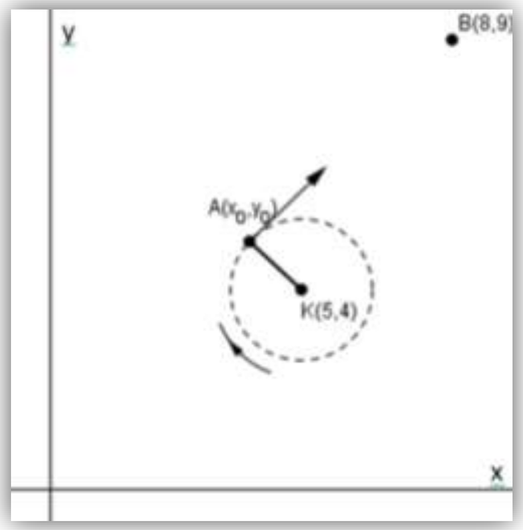
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	**ΣΤΟΧΟΙ** **Οι μαθητές να μπορούν να:**	**ΣΧΟΛΙΑ - ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ**
1. **Κωνικές Τομές (Σύνολο ωρών 25)**		
1.1. Κύκλος (6 ώρες)	1.1.1. βρίσκουν την εξίσωση κύκλου με γνωστό κέντρο και γνωστή ακτίνα. 1.1.2. βρίσκουν την εξίσωση της εφαπτομένης ενός κύκλου. 1.1.3. εξετάζουν αν η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει κύκλο και να βρίσκουν τα στοιχεία του.	• Να γίνει αναφορά στην εξίσωση του κύκλου σε πολικές συντεταγμένες. • Να χρησιμοποιηθεί ο γεωμετρικός ορισμός για την απόδειξη της εφαπτομένης. • Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ1.
1.2. Παραβολή (6 ώρες)	1.2.1. διατυπώνουν τον ορισμό της παραβολής και να αποδεικνύουν την εξίσωσή της. 1.2.2. χρησιμοποιούν τις ιδιότητες της παραβολής για την επίλυση προβλημάτων. 1.2.3. βρίσκουν την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής.	• Να αποδειχθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής με χρήση παραγώγου. • Να γίνει αναφορά στην ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής • Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ2**.**
1.3. Έλλειψη (6 ώρες)	1.3.1. διατυπώνουν τον ορισμό της έλλειψης και γνωρίζουν την εξίσωσή της.	• Να δοθεί ο εξίσωση της έλλειψης χωρίς την απόδειξή της. • Να γίνει αναφορά στην εξίσωση της έλλειψης σε πολικές συντεταγμένες. • Να σχολιασθεί το γεγονός ότι οι κορυφές του μεγάλου άξονα της έλλειψης ακολουθούν τις εστίες σε όποιο άξονα και αν βρίσκονται αυτές. (Οπότε ανάλογα σχηματίζουν και την αντίστοιχη εξίσωση.)
	1.3.2. γνωρίζουν και χρησιμοποιούν τις ιδιότητες της έλλειψης.	• Να γίνει αναφορά στην ανακλαστική ιδιότητα.

	1.3.3. βρίσκουν την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης 1.3.4. βρίσκουν την εκκεντρότητα και αναγνωρίζουν τον ρόλο της στη μορφή της έλλειψης.	• Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ3 • Να αποδειχθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης με χρήση παραγώγου.
1.4. Υπερβολή (7 ώρες)	1.4.1. διατυπώνουν τον ορισμό της υπερβολής και να γνωρίζουν την εξίσωσή της. 1.4.2. γνωρίζουν και χρησιμοποιούν τις ιδιότητες της υπερβολής. 1.4.3. βρίσκουν την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής. 1.4.4. γνωρίζουν και εφαρμόζουν την ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής για τη λύση προβλημάτων. 1.4.5. βρίσκουν τις ασύμπτωτες της υπερβολής, το ορθογώνιο βάσης, την εκκεντρότητα και να αναγνωρίζουν τη σημασία που έχουν για τη μορφή της.	• Να δοθεί η εξίσωση της υπερβολής χωρίς την απόδειξή της. • Να σχολιασθεί το γεγονός ότι οι κορυφές της υπερβολής ακολουθούν τις εστίες σε όποιο άξονα και αν βρίσκονται αυτές. (Οπότε ανάλογα σχηματίζουν και την αντίστοιχη εξίσωση.) • Προτείνεται να γίνει η δραστηριότητα Δ4. • Να αποδειχθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής με χρήση παραγώγου. • Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της υπερβολής (προτείνεται να βρεθεί η ασύμπτωτη του κλάδου της υπερβολής που είναι στο πρώτο τεταρτημόριο και στη συνέχεια από τη συμμετρία της υπερβολής να βρεθούν και οι ασύμπτωτες στα υπόλοιπα τεταρτημόρια)

Ενδεικτικές Δραστηριότητες

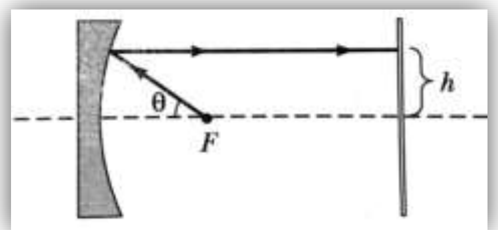
Δ1 (αντιστοιχεί στους στόχους 1.1.1, 1.1.2)

Ένας σφυροβόλος στέκεται στο σημείο $K(5,4)$. Αν το μήκος της αλυσίδας της σφύρας είναι $\sqrt{2}\,m$, να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου $A(x_0, y_0)$ στο οποίο πρέπει να βρίσκεται η σφύρα ώστε όταν την αφήσει αυτή να διέλθει από το σημείο $B(8,9)$.



Δ2 (αντιστοιχεί στον στόχο 1.2.2)

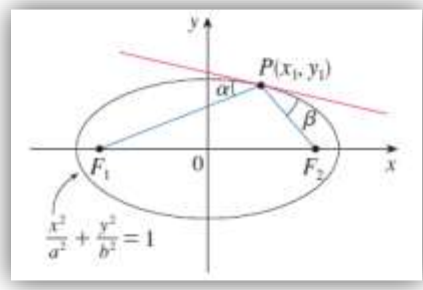
Μια ακτίνα φωτός εκπέμπεται από την εστία ενός παραβολικού κατόπτρου όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Η ακτίνα ανακλάται σε καθρέπτη και κτυπά μια οθόνη που βρίσκεται προς τα δεξιά της, σε ύψος h πάνω από τον οριζόντιο άξονα. Αν η απόσταση της εστίας από την κορυφή της παραβολής είναι 2 εκατοστά και η γωνία θ είναι 60^o, να βρείτε το ύψος h.



Δ3 (αντιστοιχεί στον στόχο 1.3.4)

Έστω σημείο $P(x_1, y_1)$ μιας έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, με εστίες F_1, F_2. Αν α, β είναι οι γωνίες που δημιουργούν τα τμήματα $PF_1,\ PF_2$ με την εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο P, να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta$. Έτσι, οποιαδήποτε ακτίνα εκπέμπεται από τη μία εστία, ανακλάται και καταλήγει στην άλλη εστία.

[**Υπόδειξη:** Ισχύει ότι αν δύο ευθείες (ε_1), (ε_2), τέμνονται κατά γωνία α, τότε $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$, όπου m_1, m_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών (ε_1), (ε_2), αντίστοιχα.]



Δ4 (αντιστοιχεί στον στόχο 1.4.1):

Στο σύστημα ραδιοναυτιλίας LORAN (**LO**ng **RA**nge **N**avigation), δύο ραδιοσταθμοί, που βρίσκονται στο σημεία A, B εκπέμπουν συγχρόνως σήματα προς ένα πλοίο, που βρίσκεται πάνω στο σημείο P. Ο υπολογιστής του πλοίου μετατρέπει τη διαφορά χρόνου στη λήψη των σημάτων, σε διαφορά απόστασης $|PA| - |PB|$, (η διαδικασία αυτή, σύμφωνα με τον ορισμό της υπερβολής, τοποθετεί το πλοίο σε έναν από τους κλάδους της). Αν υποθέσουμε ότι η απόσταση των ραδιοσταθμών A, B είναι 400 μίλια (mi), το πλοίο του διπλανού σχήματος έλαβε το σήμα από το B, 1200 μικροδευτερόλεπτα πριν το σήμα από το A. Με δεδομένο ότι τα ραδιοσήματα ταξιδεύουν με ταχύτητα 980 πόδια (ft) το μικροδευτερόλεπτο, να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης των πιθανών θέσεων του πλοίου.

(*) 1 mi = 5280 ft