



## ΘΑΛΗΣ - Πανεπιστήμιο Πειραιά Μεθοδολογικές προσεγγίσεις για τη μελέτη της ευστάθειας σε προβλήματα λήψης αποφάσεων με πολλαπλά κριτήρια

**Δ3 – Πειραματική αξιολόγηση μέτρων  
ευστάθειας σε αναλυτικές συνθετικές  
διαδικασίες**

**Π3 – Τεχνική έκθεση (πειραματική αξιολόγηση  
μέτρων ευστάθειας σε αναλυτικές-συνθετικές  
διαδικασίες)**



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΚΡΗΤΗΣ



ΕΘΝΙΚΟ  
ΜΕΤΣΟΒΙΟ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

## Στοιχεία παραδοτέου

**Δράση:** Δ3 – Πειραματική αξιολόγηση μέτρων ευστάθειας σε αναλυτικές συνθετικές διαδικασίες

**Τίτλος παραδοτέου:** Π3 – Τεχνική έκθεση (πειραματική αξιολόγηση μέτρων ευστάθειας σε αναλυτικές-συνθετικές διαδικασίες)

**Τύπος παραδοτέου:** S - PU

**Έκδοση:** 02

**Ημερομηνία:** 1 Μαρτίου 2013

**Υπεύθυνος σύνταξης:** Καθηγητής Ιωάννης Σίσκος

**Ομάδας σύνταξης:** Καθηγητής Διονύσης Γιαννακόπουλος  
Καθηγητής Αθανάσιος Σπυριδάκος  
Αναπληρωτής Καθηγητής Ευάγγελος Γρηγορούδης  
Δρ. Νικόλαος Τσότσολας  
Δρ. Ιωάννης Πολίτης  
Νικόλαος Χριστοδουλάκης, MSc.  
Prof. Christian Hurson  
Γεωργία Μουριάδου, MSc.

## Περιεχόμενα

<b>Μέρος I: Πειραματική αξιολόγηση σε μοντέλα αποφάσεων .....</b>	<b>5</b>
<b>1. Εισαγωγή.....</b>	<b>6</b>
<b>2. Η Ανάλυση μεταβελτιστοποίησης στο γραμμικό προγραμματισμό .....</b>	<b>7</b>
<b>3. Το φαινόμενο των πολλαπλών και (ημι-) βέλτιστων λύσεων .....</b>	<b>9</b>
3.1 Πολλαπλές βέλτιστες λύσεις.....	9
3.2 Ημι-βέλτιστες ή σχεδόν βέλτιστες λύσεις.....	10
3.3 Υπολογισμός αριθμού μεταβέλτιστων λύσεων .....	12
<b>4. Μέθοδοι εύρεσης λύσεων κυρτών πολυέδρων .....</b>	<b>14</b>
<b>5. Η μέθοδος των Manas-Nedoma.....</b>	<b>17</b>
<b>6. Ένας Ευρετικός Αλγόριθμος.....</b>	<b>21</b>
<b>7. Η ανάλυση μεταβελτιστοποίησης στις μεθόδους UTA .....</b>	<b>24</b>
7.1 Η αναγκαιότητα της μεταβελτιστοποίησης .....	24
7.2 Μοντέλα ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης στη UTA .....	27
7.3 Μέτρα ευστάθειας των αποτελεσμάτων μεταβελτιστοποίησης.....	32
<b>8. Εφαρμογή στις ομαδικές αποφάσεις .....</b>	<b>36</b>
8.1 Αναγκαιότητα ανάλυσης ευστάθειας σε ομαδικές αποφάσεις .....	36
8.2 Ανάλυση ευστάθειας ομαδικών μοντέλων προτίμησης.....	36
8.3 Ανάλυση Ευστάθειας μέσω οπτικών αλληλεπιδραστικών προσεγγίσεων .....	38
<b>9. Παράδειγμα και Πειραματική Εφαρμογή .....</b>	<b>40</b>
9.1 Παράδειγμα .....	40
9.2 Πειραματική Εφαρμογή .....	43
<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>55</b>
<b>Μέρος II: Πειραματική αξιολόγηση στη MUSA .....</b>	<b>58</b>
<b>1. Εισαγωγή.....</b>	<b>59</b>
<b>2. Μέθοδοι εύρεσης λύσεων κυρτών πολυέδρων .....</b>	<b>60</b>
<b>3. Αναλυτική παρουσίαση αλγορίθμων .....</b>	<b>64</b>
3.1 Ο Αλγόριθμος των Manas - Nedoma .....	65
3.2 Ο αλγόριθμος της Αντίστροφης Simplex.....	75
3.3 Ένας Ευρετικός Αλγόριθμος.....	88
<b>4. Η ανάλυση μεταβελτιστοποίησης στη μέθοδο MUSA .....</b>	<b>95</b>
4.1 Μοντελοποίηση της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης.....	95
4.2 Μοντέλα ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης.....	96
4.3 Έλεγχος Αξιοπιστίας .....	99
4.3.1 Μέσος δείκτης προσαρμογής.....	99
4.3.2 Δείκτης επιπέδου ολικής πρόβλεψης.....	100

---

4.3.3 Μέσος δείκτης ευστάθειας .....	102
4.3.4 Εύρος διακύμανσης βαρών .....	106
4.4 Συγκριτική Αξιολόγηση Αλγορίθμων Ανάλυσης Ευστάθειας στη MUSA .....	106
<b>5. Γεννήτρια Συνόλων Δεδομένων για Έρευνες Ικανοποίησης .....</b>	<b>108</b>
5.1 Στόχοι της γεννήτριας δεδομένων .....	108
5.2 Περιγραφή της γεννήτριας δεδομένων .....	109
5.3 Λογισμικό γεννήτριας δεδομένων .....	112
<b>6. Πειράματα με τεχνητά δεδομένα .....</b>	<b>117</b>
6.1 Τα πειράματα .....	117
<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>122</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ I: Πλήρη Αποτελέσματα Πειραμάτων .....</b>	<b>124</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ II: Πηγαίος Κώδικας .....</b>	<b>156</b>

# ΜΕΡΟΣ Ι: Πειραματική αξιολόγηση σε μοντέλα αποφάσεων

## 1. Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας Τεχνικής Έκθεσης είναι η παρουσίαση των αποτελεσμάτων εφαρμογής της ανάλυσης ευστάθειας σε προβλήματα πολυκριτηριακών ομαδικών αποφάσεων με τη χρήση οπτικών μέσων αναπαράστασης των λύσεων. Αυτό εκτιμάται ότι μπορεί να βοηθήσει τους αποφασίζοντες να συνειδητοποιήσουν αφενός το εύρος του φάσματος των προτεινόμενων βέλτιστων λύσεων, αφετέρου τις «αποστάσεις» που χωρίζουν την κρίση των αποφασιζόντων τόσο μεταξύ τους, όσο και του καθενός χωριστά από ένα συλλογικό μοντέλο απόφασης.

Στην επόμενη παράγραφο περιγράφεται η προσέγγιση της ανάλυσης ευστάθειας (ή ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης) στο πεδίο του γραμμικού προγραμματισμού που αποτελεί βασικό εργαλείο ανάπτυξης μοντέλων απόφασης.

Η τρίτη παράγραφος κάνει αναφορά στη μεταβελτιστοποίηση στα πλαίσια του γραμμικού προγραμματισμού και εστιάζει αφενός στη διαδικασία εύρεσης των πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων ενός γραμμικού προγράμματος και αφετέρου στην προσπάθεια υπολογισμού του αριθμού των λύσεων αυτών πριν ξεκινήσει η διαδικασία αναζήτησής τους. Η αποτύπωση των λύσεων, αλλά και της αναζήτησης μετα(ημι)-βέλτιστων λύσεων με τη μέθοδο των κυρτών υπερπολυέδρων αποτελεί αντικείμενο της τέταρτης παραγράφου.

Στις επόμενες δυο παραγράφους παρουσιάζονται δύο αντιπροσωπευτικές μέθοδοι-αλγόριθμοι που μπορούν να θεωρηθούν ως κατάλληλες προσεγγίσεις αντιμετώπισης του προβλήματος της μεταβελτιστοποίησης. Η πρώτη ανήκει στην κατηγορία των αναλυτικών περιστροφικών μεθόδων ενώ η δεύτερη ανήκει στην κατηγορία των ευρετικών προσεγγίσεων.

Στην έβδομη παράγραφο παρουσιάζονται τα διάφορα μοντέλα μεταβελτιστοποίησης, που βασίζονται σε ευρετικούς αλγόριθμους, στη UTA, η οποία αποτελεί και τη βάση της ερευνητικής μας προσέγγισης, ως η πλέον αναγνωρισμένη διεθνώς σε προβλήματα αναλυτικής συνθετικής προσέγγισης.

Η όγδοη παράγραφος επικεντρώνεται στην εφαρμογή της ανάλυσης ευστάθειας σε ομαδικές αποφάσεις, όπου ο αποφασίζων είναι ένα συλλογικό ολιγομελές όργανο. Γίνεται αναφορά σε σχετικές δημοσιεύσεις που αφορούν κανόνες σύνθεσης των προτιμήσεων του κάθε μέλους της ομάδας και τελικά προτείνεται ένα μοντέλο αναλυτικής-συνθετικής προσέγγισης βασισμένο στη UTA που επιτρέπει μια πολυδιάστατη οπτική ανάλυση της ευστάθειας των λύσεων και προτείνει διαύλους αναθεώρησης και ανατροφοδότησης των δεδομένων του προβλήματος.

Η τελευταία παράγραφος είναι αφιερωμένη σε ένα παράδειγμα και σε μια πειραματική εφαρμογή με χρήση εικονικών τυχαίων δεδομένων προκειμένου να μετρηθεί η αξιοπιστία του μοντέλου.

## 2. Η Ανάλυση μεταβελτιστοποίησης στο γραμμικό προγραμματισμό

Ο γραμμικός προγραμματισμός αποτελεί αναμφίβολα το δημοφιλέστερο εργαλείο της επιχειρησιακής έρευνας αλλά και γενικότερα της διοικητικής επιστήμης. Η μεγάλη επιτυχία των εφαρμογών του σε προβλήματα λήψης αποφάσεων θα πρέπει να αποδοθεί, από τη μια πλευρά, στα επιτεύγματα της έρευνας των μαθηματικών και των οικονομολόγων σε θεωρητικό επίπεδο και, από την άλλη πλευρά, στην επαναστατική ανάπτυξη της πληροφορικής επιστήμης και τεχνολογίας.

Στη μαθηματική γλώσσα ο γραμμικός προγραμματισμός ορίζεται σαν το μοντέλο το οποίο στοχεύει στη βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση) μιας γραμμικής συνάρτησης αγνώστων, υπό εκτίμηση, πραγματικών μεταβλητών, των οποίων το πεδίο τιμών οριοθετείται έμμεσα από γραμμικούς περιορισμούς (ανισοεξισώσεις), που είναι συναρτήσεις των μεταβλητών αυτών. Η βελτιστοποίηση είναι πηγή τεχνητής ευφυΐας με την έννοια του προσδιορισμού βέλτιστων λύσεων σε πολύπλοκα προβλήματα. Οι άγνωστες μεταβλητές πρέπει να επιλέγονται από τον μελετητή με τρόπο ώστε να αντανακλούν απόλυτα (να μοντελοποιούν) το αντικείμενο της απόφασης στο εκάστοτε συγκεκριμένο πρόβλημα και ονομάζονται γι' αυτό μεταβλητές απόφασης. (Σίσκοι, 1998)

Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι ο γραμμικός προγραμματισμός μοντελοποιεί προβλήματα κατανομής περιορισμένων πόρων, μέσων ή χρήσιμων αγαθών σε διάφορες εναλλακτικές και ανταγωνιστικές μεταξύ τους δραστηριότητες, με τρόπο ώστε να βελτιστοποιείται το τελικό αποτέλεσμα.

Η αντιμετώπιση ενός πραγματικού προβλήματος με τη μέθοδο του γραμμικού προγραμματισμού δεν τελειώνει με το προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης. Η απλή επίλυση-έυρεση της βέλτιστης λύσης, με εφαρμογή κάποιας μεθόδου όπως της Simplex, προσκρούει στις εξής παρακάτω κριτικές:

1. Από τη μαθηματική του φύση ένα γραμμικό πρόβλημα που περιλαμβάνει  $l$  μεταβλητές και  $m$  περιορισμούς, γεγονός που συνεπάγεται την εισαγωγή  $m$  μεταβλητών απόκλισης, θα έχει βέλτιστη λύση που περιλαμβάνει τουλάχιστον:  
 $(l + m) - m = l$   
μηδενικές μεταβλητές. Συνεπάγεται λοιπόν, ότι από τις αρχικά προτεινόμενες δραστηριότητες ένας σημαντικός αριθμός ίσως αγνοηθεί, κάτι που ενδέχεται σε ορισμένες περιπτώσεις να προκαλέσει οικονομικές δυσχέρειες σε μια επιχείρηση.
2. Η αποκαλούμενη «βέλτιστη λύση» θεωρείται συχνά ότι είναι μια λύση προνομίου, απομονωμένη από κάθε γειτονική της λύση, χωρίς αυτό να είναι κοινά αποδεκτή θέση από τον κόσμο της επιχείρησης.
3. Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές έχουν συγκεκριμένη ακρίβεια και στην περίπτωση διαχείρισης πολύ μικρών τιμών που αντιστοιχούν στα οριακά καθαρά εισοδήματα της μεθόδου Simplex μπορούν να δώσουν αποτελέσματα που δεν ανταποκρίνονται επακριβώς στην πραγματικότητα.

4. Κατά τη διαμόρφωση του προβλήματος γίνονται ορισμένες παραδοχές, ανάμεσα στις οποίες είναι και η προϋπόθεση των ντετερμινιστικών συντελεστών. Σύμφωνα με αυτή την προϋπόθεση οι συντελεστές  $c_j$ ,  $b_i$  και  $a_{ij}$  του προβλήματος είναι γνωστές σταθερές. Στην πραγματικότητα όμως, οι συντελεστές αυτοί δεν είναι συνήθως ούτε γνωστοί, ούτε σταθεροί, αλλά συνήθως προσδιορίζονται κατά προσέγγιση. Με άλλα λόγια, η διαμόρφωση ενός πραγματικού προβλήματος σε μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού αποτελεί, σχεδόν πάντα μια προσέγγιση της πραγματικότητας. Είναι σαφές πως κάθε τροποποίηση των τιμών των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης ( $c_j$ ), του δεύτερου μέλους ( $b_i$ ) ή της τεχνολογικής μήτρας ( $a_{ij}$ ) είναι ικανή να επιφέρει κάποια αλλαγή της βέλτιστης λύσης.

Οι αριθμητικοί αυτοί συντελεστές είναι συνήθως:

- στοιχεία λογιστικών καταλόγων (μοναδιαίο κέρδος ή κόστος, ποσότητες πρώτης ύλης, ...)
- αποτελέσματα ειδικών τεχνικών αναλύσεων (χρόνος κατασκευής, χημικής αντίδρασης, ...)
- στοιχεία δημοσκοπήσεων ή ερευνών αγοράς (προτιμήσεις των καταναλωτών, κατώτερα ή ανώτερα φράγματα ζήτησης, ...).

Είναι λοιπόν προφανές ότι τα χρησιμοποιούμενα στην πράξη αριθμητικά δεδομένα δεν μπορούν με κανένα τρόπο να θεωρηθούν ως απόλυτα, ακριβή ή βέβαια ώστε να εγγυηθούν την ύπαρξη μιας και μόνης, απομονωμένης λύσης, με τη σφραγίδα της βέλτιστης (Σίσκος, 1992, Ξηρόκωστας, 1991).

Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε τις παραπάνω κριτικές μπορούμε να προχωρήσουμε μετά τη λήψη της βέλτιστης λύσης, σε ανάλυση ευαισθησίας και ανάλυση ευστάθειας. Η δεύτερη είναι το βασικό αντικείμενο που θα διαπραγματευτούμε στο παρόν κεφάλαιο.

Με την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης (ή ανάλυση ευστάθειας) ελέγχουμε τόσο τη μοναδικότητα της λύσης όσο και το ενδεχόμενο ύπαρξης εναλλακτικών λύσεων, των οποίων οι τιμές  $z$  της αντικειμενικής συνάρτησης δε διαφέρουν της βέλτιστης τιμής  $z^*$  παρά κατά μια μικρή (αμελητέα) ποσότητα.

Στη συνέχεια και αφού αναφερθούμε σε κάποιες βασικές παραμέτρους και έννοιες της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης, θα εξετάσουμε δύο μεθόδους-αλγορίθμους που μπορούν να θεωρηθούν ως ενδεικτικές προσεγγίσεις αντιμετώπισης του προβλήματος της μεταβελτιστοποίησης. Θα ξεκινήσουμε με την εξέταση του αλγορίθμου των Manas - Nedoma (1968). Στη συνέχεια θα ακολουθήσει η παρουσίαση μιας ευρεστικής μεθόδου (Siskos, 1982) που αποτελεί μία ρεαλιστική προσέγγιση του προβλήματος της μεταβελτιστοποίησης με τη χρήση ενός αλγορίθμου που είναι οικονομικός από άποψη υπολογιστικού χρόνου.



### 3. Το φαινόμενο των πολλαπλών και (ημι-) βέλτιστων λύσεων

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, με τον όρο ‘ανάλυση ευστάθειας’ ή τον ισοδύναμό του ‘ανάλυση μεταβελτιστοποίησης’ εννοούμε τη διαχείριση των πολλαπλών βέλτιστων και ημιβέλτιστων λύσεων ενός γραμμικού προγράμματος, όπως αυτές ορίζονται παρακάτω.

#### 3.1 Πολλαπλές βέλτιστες λύσεις

Η βέλτιστη λύση ενός γραμμικού προβλήματος που επιτυγχάνεται με τη χρήση της μεθόδου Simplex θεωρείται ότι είναι μοναδική μόνο στην περίπτωση που όλα τα οριακά καθαρά εισοδήματα του βέλτιστου πίνακα Simplex που αντιστοιχούν σε μη βασικές μεταβλητές δεν ισούνται με μηδέν. Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε πολλαπλές βέλτιστες λύσεις. (Siskos, 1984).

Ας θεωρήσουμε το εξής γραμμικό πρόγραμμα :

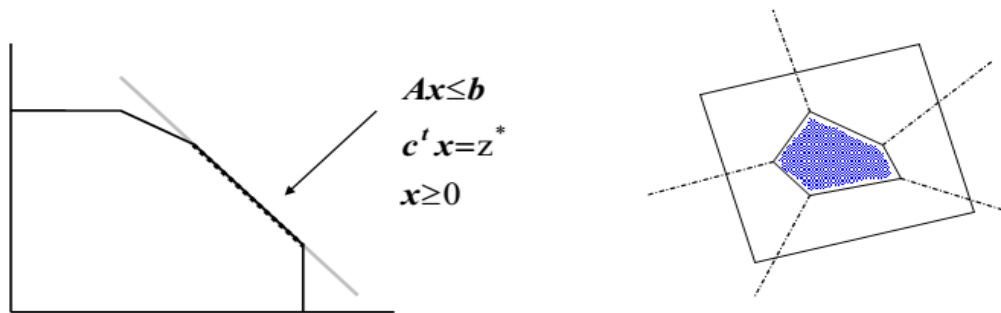
$$\text{Γ.Π.1.1} \left\{ \begin{array}{l} [\max] z = \mathbf{c}^t \mathbf{x} \\ \text{υ.π.} \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

όπου  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}$  και  $\mathbf{c}$  είναι πίνακες διαστάσεων  $m \times n$ ,  $n \times 1$ ,  $m \times 1$  και  $n \times 1$  αντίστοιχα.

Το πρόβλημα των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων (*multiple optimal solutions*) πιστοποιείται, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, όταν εμφανίζονται μηδενικά καθαρά οριακά εισοδήματα στον βέλτιστο πίνακα Simplex για μη βασικές μεταβλητές.

Γεωμετρικά, το φαινόμενο αντιστοιχεί στην περίπτωση που το υπερπολυέδρο της αντικειμενικής συνάρτησης  $z$  είναι παράλληλο μιας πλευράς του υπερπολυέδρου των δυνατών λύσεων (Σχήμα 3.1).

Σε αυτή τη συγκεκριμένη περίπτωση είναι γνωστό ότι η εισαγωγή στη βάση μιας μεταβλητής  $j$  μας δίνει μια καινούργια λύση, με  $z=z^*$ . Όμως δεν μπορούμε εκ των προτέρων να υπολογίσουμε τον αριθμό και τον τύπο των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων του γ.π.. Η αυθαίρετη εξακολούθηση του αλγορίθμου Simplex, μετά την εύρεση της πρώτης βέλτιστης λύσης, μπορεί να μας δώσει άλλες βέλτιστες λύσεις αλλά αυτή η ενέργεια σε καμία περίπτωση δε μπορεί να θεωρηθεί σαν μια μέθοδος συστηματικού ελέγχου όλων των βέλτιστων λύσεων.



Σχήμα 3.1: Πολλαπλές βέλτιστες λύσεις σε 2 και 3 διαστάσεις (Σίσκος, 1998)

Το σύνολο των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων οριοθετείται μαθηματικά από το υπερπολύεδρο του Γ.Π. 1:

$$\begin{cases} \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq z^* - k \quad \text{ΥΠ 1} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

που προκύπτει από την προσθήκη του περιορισμού  $z=z^*$  ( $z^*$  η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης) στο σύνολο των δυνατών λύσεων.

Στην περίπτωση που η βέλτιστη λύση είναι μοναδική το ΥΠ 1 δεν περιέχει παρά μόνο ένα σημείο. Στην αντίθετη περίπτωση, περιέχει άπειρα σημεία (άπειρες λύσεις) και αρκεί να υπολογίσουμε όλες τις κορυφές του ΥΠ 1 (δυνατές βασικές βέλτιστες λύσεις). Κάθε άλλη λύση είναι κυρτός συνδυασμός των λύσεων που αντιστοιχούν στις κορυφές. (Siskos, 1984, Ξηρόκωστας, 1991).

### 3.2 Ημι-βέλτιστες ή σχεδόν βέλτιστες λύσεις

Σε μεγάλο αριθμό περιπτώσεων η βέλτιστη ή οι βέλτιστες λύσεις δεν είναι οι μόνες που ενδιαφέρουν τον αποφασίζοντα. Απεναντίας, ενδεχομένως ο αποφασίζων να ενδιαφέρεται εξίσου και για τις ημιβέλτιστες λύσεις. Αυτό ισχύει, επειδή συχνά είναι αδύνατον να ορίσουμε με μεγάλη ακρίβεια τις τιμές των συντελεστών του γραμμικού μας προβλήματος. Ακόμη, η αντικειμενική συνάρτηση δεν αντικατοπτρίζει πάντα επακριβώς τις προτιμήσεις του αποφασίζοντος (Van de Panne, 1975).

Γενικά, μπορεί να λεχθεί ότι το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού ενός προβλήματος εκφράζει τους πλέον βασικούς στόχους και περιορισμούς, ενώ κάποιοι παράγοντες συχνά μένουν έξω από το μοντέλο, είτε γιατί είναι δύσκολο να τους διαχειριστεί κανείς, είτε γιατί ο αποφασίζων έχει μόνο μια γενική ιδέα σχετικά με αυτούς. Γι αυτό το λόγο η βέλτιστη λύση μπορεί να χαρακτηριστεί είτε ως αδύνατη να πραγματοποιηθεί είτε, αρκετές φορές, έως και επικίνδυνη.

Ο μόνος τρόπος να αντιμετωπίσουμε την παραπάνω προβληματική κατάσταση είναι να θέσουμε υπόψη του αποφασίζοντα εναλλακτικές λύσεις και να του δώσουμε τη δυνατότητα να αποφασίσει ποια τελικά θα επιλέξει. Το ερώτημα είναι ποιες θα είναι αυτές οι

εναλλακτικές λύσεις. Μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση που θα μας βοηθήσει να δώσουμε απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι η ακόλουθη.

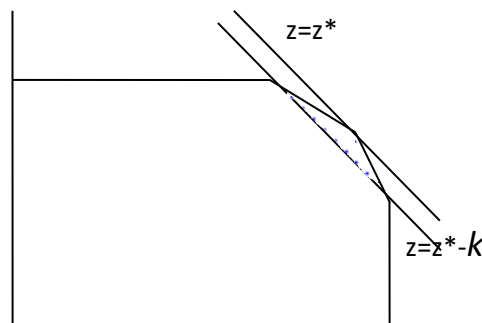
Αρχικά υπολογίζουμε τη βέλτιστη λύση. Στη συνέχεια βρίσκουμε όλες τις βασικές δυνατές λύσεις για τις οποίες η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης διαφέρει της βέλτιστης τιμής  $z^*$  κατά μία μικρή (πρακτικά αμελητέα) προκαθορισμένη ποσότητα  $k$ . Οι λύσεις αυτές ονομάζονται σχεδόν βέλτιστες ή ημιβέλτιστες λύσεις (*near optimal solutions*). Ο αποφασίζων είναι ο υπεύθυνος τόσο για την επιλογή της ποσότητας  $k$ , όσο και για την τελική επιλογή ανάμεσα από τις ημιβέλτιστες λύσεις, αυτής που τον ικανοποιεί περισσότερο (Siskos, 1984, Van de Panne, 1975, Σίσκος, 1992).

Ο χώρος των ημιβέλτιστων λύσεων οριοθετείται από το σύνολο - υπερπολύεδρο (ΥΠ) 2.

$$\begin{cases} \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^t \mathbf{x} \geq z^* - k & \text{ΥΠ 2} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

όπου  $k$  μικρή θετική ποσότητα (αναφερόμαστε πάντα για την περίπτωση μεγιστοποίησης).

Το ΥΠ 2 προκύπτει από το ΥΠ 1 με την αντικατάσταση του περιορισμού  $z=z^*$  με τον περιορισμό  $z \geq z^*-k$ . Στο παρακάτω σχήμα το γραμμοσκιασμένο κομμάτι αντιστοιχεί στο σύνολο των ημιβέλτιστων λύσεων (στις 2 διαστάσεις).

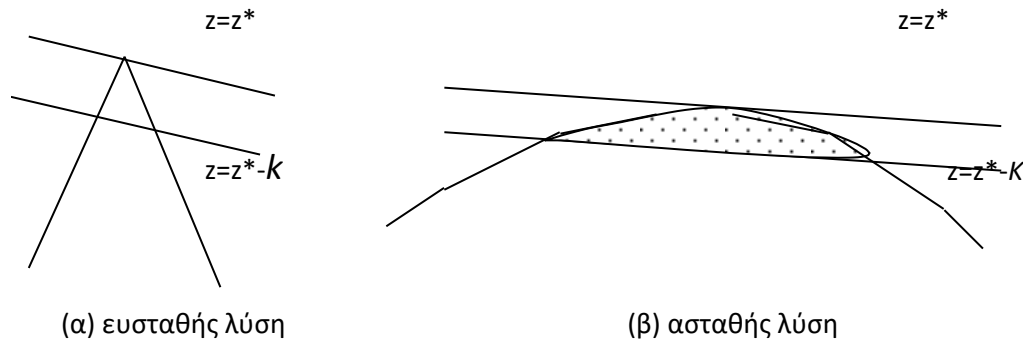


Σχήμα 3.2: Σύνολο ημιβέλτιστων λύσεων σε 2 διαστάσεις (Σίσκος, 1998)

Για  $k=0$  έχουμε  $z=z^*$  και το πρόβλημά μας ταυτίζεται με αυτό των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων.

Η αναζήτηση των ημιβέλτιστων λύσεων βοηθάει στην ανάλυση της ευστάθειας της βέλτιστης λύσης.

Όταν το εύρος των τιμών που παίρνουν οι μεταβλητές στις διάφορες ημιβέλτιστες λύσεις είναι μικρό, τότε λέμε ότι η βέλτιστη λύση μας είναι ευσταθής ενώ στην αντίθετη περίπτωση, ότι η λύση μας είναι ασταθής ή μη ευσταθής. Το φαινόμενο της έλλειψης ευστάθειας της βέλτιστης λύσης είναι αρκετά συνηθισμένο στις πρακτικές εφαρμογές. Αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι πολλά οριακά καθαρά εισοδήματα μη βασικών μεταβλητών της βέλτιστης λύσης, βρίσκονται σε ελάχιστη απόσταση από το μηδέν, σε σημείο μάλιστα που να δημιουργεί αμφιβολίες ακόμη και για τη βελτιστότητα της αρχικής λύσης (Σίσκος, 1992).



Σχήμα 3.3: Αρχή ανάλυσης ευστάθειας (Σίσκος, 1998)

### 3.3 Υπολογισμός αριθμού μεταβέλιστων λύσεων

Η περιοχή των ημιβέλιστων λύσεων (Σχήμα 3.2) ουσιαστικά ορίζει ένα νέο υπερπολύεδρο του οποίου οι κορυφές αντιστοιχούν στις υπό αναζήτηση ημιβέλιστες λύσεις. Δηλαδή έχουμε ένα νέο γ.π. προς επίλυση του οποίου μας ενδιαφέρουν όμως όλες οι εφικτές λύσεις και όχι μόνο αυτή (ή αυτές) που βελτιστοποιούν μία αντικειμενική συνάρτηση.

Το πρόβλημα της αναζήτησης όλων των κορυφών ενός κυρτού υπερπολύεδρου έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές. Πολύ σημαντική σε αυτό το χώρο θεωρείται η εργασία των Matheiss και Rubin (1980) οι οποίοι αναφέρθηκαν στις μέχρι τότε προσεγγίσεις του συγκεκριμένου προβλήματος. Ήδη από το 1952 ο Charnes (Charnes, 1952; Charnes et al., 1953; Charnes and Cooper, 1961) συσχέτισαν την αναζήτηση όλων των βέλιστων λύσεων ενός γ.π. (περίπτωση πολλαπλών βέλιστων λύσεων) με τη συστηματική αναζήτηση όλων των κορυφών ενός υπερπολύεδρου.

Σκόπιμη, προκειμένου να προχωρήσουμε στη συστηματική αναζήτηση των κορυφών του ΥΠ 2., είναι η διαθεσιμότητα των μέσων που θα μας επιτρέψουν μια αρχική εκτίμηση του αριθμού αυτών των κορυφών. Ο αριθμός των κορυφών δεν μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια αλλά έχουν προταθεί μαθηματικές σχέσεις που προσεγγίζουν τον αριθμό αυτό. Με πρώτο το Saaty (1955) ο οποίος ξεκίνησε αποδεικνύοντας ότι ο συνδυασμός των  $m+n$  ανά  $n$  δεν αποτελεί ικανοποιητική εκτίμηση του αριθμού των κορυφών. Το ζητούμενο ήταν να εκτιμηθεί ένα άνω όριο του αριθμού των λύσεων με δεδομένα τους  $m$  περιορισμούς και τις  $n$  μεταβλητές απόφασης.

Ο Klee (1964) πρότεινε μια σχέση που μας δίνει ένα άνω όριο, το οποίο ονομάζουμε  $\bar{r}$ , των κορυφών ενός υπερπολύεδρου που ορίζεται από ένα σύστημα  $m$  εξισώσεων με  $n$  μεταβλητές απόφασης όπου ισχύει ότι  $m+n$  ο αριθμός των υπερεπιπέδων διάστασης  $n-1$  που ορίζουν οι  $m$  περιορισμοί:

$$\bar{r} = \begin{cases} \frac{2(n+m)}{2m+n} \binom{\frac{1}{2}(2m+n)}{m}, & \text{αν } n \text{ ζυγός αριθμός} \\ 2 \binom{\frac{1}{2}(2m+n-1)}{m}, & \text{αν } n \text{ περιττός αριθμός} \end{cases} \quad (1)$$

Τα αποτελέσματα είναι αποθαρρυντικά. Η τιμή του ορίου  $\bar{r}$  αυξάνει με αστρονομική ταχύτητα: για  $(m=3, n=4)$ ,  $\bar{r}=14$ ; για  $(m=10, n=6)$ ,  $\bar{r}=352$ ; για  $(m=10, n=7)$ ,  $\bar{r}=572$  και αυτά τα μεγέθη δεν περιγράφουν παρά μικρά γραμμικά προβλήματα (Klee, 1964).

Η σχέση (1) βελτιώθηκε από τον ίδιο τον Klee το 1971 και έλαβε την εξής μορφή:

$$\bar{r} = \binom{n+m - \text{int}\left(\frac{n+1}{2}\right)}{m} + \binom{n+m - \text{int}\left(\frac{n+2}{2}\right)}{m} \quad (2)$$

Υπό αυτή τη μορφή χρησιμοποιήθηκε και σε επόμενες εργασίες (Amani, 1977; Burton et al., 1987).

Αρχικά ο Klee είχε αποδείξει ότι η σχέση (1) ίσχυε για  $m+n \geq n^2/4 - 1$  αλλά στη συνέχεια αποδείχτηκε ότι η σχέση ήταν ισχυρή για κάθε  $m$  και  $n$  (McMullen, 1970).

Έστω  $\underline{r}$  το κάτω όριο του αριθμού των κορυφών. Ο Grunbaum (1967) πρότεινε την παρακάτω υπόθεση για τα απλά υπερπολύεδρα:

$$\underline{r} = (n-1)m - (n-2)(n+1) \quad \text{για } m \geq n-1 \quad (3)$$

Ο Barnette (1971) απέδειξε τη σχέση (3) δείχνοντας ότι τελικά μπορεί να υπάρχουν υπερπολύεδρα με πολύ λίγες κορυφές.

## 4. Μέθοδοι εύρεσης λύσεων κυρτών πολυέδρων

Η αναζήτηση και εύρεση των σχεδόν βέλτιστων ή πολλαπλών βέλτιστων λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης αντιμετωπίζεται με σειρά αλγορίθμων που ακολουθούν διαφορετικές κατά περίπτωση προσεγγίσεις.

Όπως αναφέρθηκε το σύνολο των πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων οριοθετείται μαθηματικά από κυρτά υπερπολύεδρα τύπου (ΥΠ) 2 στο χώρο με διάσταση  $n$ :

$$\begin{cases} \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^t \mathbf{x} \geq z^* - k \quad \text{ΥΠ 2} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

όπου  $k$  μικρή θετική ποσότητα και στην περίπτωση των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων  $k=0$  (αναφερόμαστε πάντα για την περίπτωση μεγιστοποίησης).

Το πρόβλημα της εύρεσης των κορυφών των υπερπολύεδρων αυτών που ουσιαστικά αντιστοιχούν σε εφικτές (δυνατές) βασικές λύσεις του αντίστοιχου γραμμικού προβλήματος έχει εκτενώς μελετηθεί ήδη από τη δεκαετία του '50. Οι Kaibel και Pfetsch (2003) θεωρούν ως πιθανότερη αιτία της ραγδαίας αύξησης του ερευνητικού ενδιαφέροντος για τη θεωρία των πολυέδρων το δεύτερο μισό του 20<sup>ου</sup> αιώνα την εξέλιξη του γραμμικού προγραμματισμού ως ένα δημοφιλές εργαλείο για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων στη βιομηχανία και το στρατό. Ο αλγόριθμος Simplex του Dantzig που αναπτύχθηκε στα τέλη του '40 ανέδειξε τη χρησιμότητα της γεωμετρικής και συνδυαστικής γνώσης των πολυέδρων στην αναζήτηση και ανάλυση των λύσεων των γραμμικών προβλημάτων.

Μέχρι την ανάπτυξη του αλγόριθμου Simplex η μελέτη των πολυέδρων παρέμενε στο πεδίο της αφηρημένης σκέψης και της φαντασίας. Η έρευνα του Dantzig έφερε την υπολογιστική διάσταση στη μελέτη αυτών (Grunbaum, 1967). Πριν από την έρευνά του, η αποτύπωση ήταν εφικτή μόνο για 2-διάστατα πολύεδρα. Οι τεχνικές που ξεκίνησαν να εφαρμόζονται στη Simplex έκαναν εφικτό τον υπολογισμό οποιουδήποτε μέρους ενός κυρτού πολυέδρου και την αποτύπωση αυτού. Από το 1947 και μετά το πρόβλημα της αναζήτησης του συνόλου των κορυφών ενός κυρτού πολυέδρου που ορίζεται από γραμμικούς περιορισμούς θεωρήθηκε ως πολύ σημαντικό.

Έχει αναπτυχθεί πληθώρα αλγορίθμων για την επίλυση του προβλήματος, οι περισσότεροι εκ των οποίων βασίζονται στην απαρίθμηση όλων των διαθέσιμων εφικτών βάσεων του Γ.Π. 1. Ωστόσο σε όλους αυτούς τους αλγόριθμους, μετά τον υπολογισμό των  $r$  πρώτων κορυφών, ο υπολογιστικό φόρτος υπολογισμού της επόμενης κορυφής αυξάνεται εκθετικά κατά  $r$  στην χειρότερη περίπτωση. Ένας αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος θεωρείται ως αποδοτικός, ή πολυωνυμικού χρόνου, αν ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

1. Θα πρέπει να υπολογίζει τα ακραία σημεία ενός πολυέδρου  $K$  διαδοχικά το ένα μετά το άλλο και να δημιουργεί μία λίστα.
2. Όταν η λίστα των γνωστών κορυφών του  $K$ ,  $\{d_1, \dots, d_r\}$ , περιλαμβάνει  $r$  κορυφές, ο φόρτος ελέγχου για το αν η λίστα περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του  $K$ , και αν όχι, ο

φόρτος υπολογισμού της νέας κορυφής, θα πρέπει να φράσσεται άνω από πολυώνυμο βαθμού  $r$  εξαρτώμενου και από το μέγεθος του Γ.Π.

Σύμφωνα με τον Murty (2009) ο στόχος της ανάπτυξης ενός αποδοτικού αλγορίθμου για το πρόβλημα της εύρεσης των κορυφών είναι περισσότερο μία μαθηματική πρόκληση παρά μία πρακτική.

Οπότε ένα από τα βασικά θέματα του προβλήματος της εύρεσης των κορυφών είναι ο τεράστιος αριθμός των κορυφών των υπερπολυέδρων ακόμα και για μικρά μεγέθους προβλήματα όπως παρουσιάστηκε παραπάνω. Έτσι το ερευνητικό ενδιαφέρον εστιάστηκε στην ανάπτυξη αλγορίθμων που λειτουργούσαν αποδοτικά από άποψη υπολογιστικής πολυπλοκότητας, συνδέοντας την απόδοση με το υπερμέγεθος του εγχειρήματος. Η εκτίμηση της πολυπλοκότητας των αλγορίθμων αυτών έχει απασχολήσει πολύ την ερευνητική κοινότητα και εν τέλει έχει αποδειχθεί ότι το πρόβλημα της εύρεσης του συνόλου των κορυφών ενός πολυέδρου είναι NP-hard, σε κάθε περίπτωση (Khachiyan et al., 2006). Ένα πρόσθετο θέμα εκτός της πολυπλοκότητας των σχετικών αλγορίθμων είναι οι τεράστιες απαιτήσεις σε μνήμη από τη στιγμή που όχι μόνο οι κορυφές αλλά και πληροφορίες για αυτές, π.χ. ποιες είναι οι γειτονικές αυτών, πρέπει να διατηρούνται κατά την δημιουργία των λιστών των κορυφών (Provan, 1994).

Παράλληλα με το πρόβλημα της εύρεσης όλων των εφικτών λύσεων του γραμμικού συστήματος μελετήθηκε και το σχετιζόμενο πρόβλημα της κατάταξης κατά φθίνουσα ή αύξουσα τάξη των τιμών των λύσεων σε σχέση με μία πρόσθετη αντικειμενική συνάρτηση οριζόμενη στο ίδιο υπερπολυέδρου. Το πρόβλημα αυτό παρουσιάζει επιπρόσθετο ενδιαφέρον στο πλαίσιο της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης όπου το ρόλο της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να παίξει η αρχική αντικειμενική συνάρτηση του γραμμικού προγράμματος. Ανάλογα με τον τρόπο που προσεγγίζουν το πρόβλημα οι διαφορετικοί αλγόριθμοι μπορούν να καταταχθούν δύο βασικές κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι αναλυτικοί αλγόριθμοι που υπόσχονται πλήρη αναζήτηση όλων των βασικών εφικτών λύσεων ενός υπερπολυέδρου. Εντός της πρώτης αυτής κατηγορίας συναντάμε δύο υποκατηγορίες αλγορίθμων. Στη μεν πρώτη οι αλγόριθμοι χρησιμοποιούν περιστροφικές μεθόδους (pivotting) ενώ στη δεύτερη υποκατηγορία μη περιστροφικές ή γεωμετρικές.

Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν μέθοδοι που δεν σκοπεύουν στην εύρεση όλων των βασικών δυνατών λύσεων ενός υπερπολυέδρου αλλά ενός αντιπροσωπευτικού συνόλου αυτών με χρήση ευρετικών προσεγγίσεων.

Ο αριθμός των κορυφών ενός υπερπολυέδρου που αντιπροσωπεύει ένα γραμμικό πρόγραμμα είναι συχνά μεγάλος και η εξαντλητική αναζήτησή τους απαιτεί πολύ χρόνο. Οι ευρετικές μέθοδοι μας προσφέρουν μια πολύ καλή διέξοδο στο πρόβλημα αναζήτησης των χιλιάδων λύσεων που πολλές φορές μας είναι αδιάφορες. Συχνότερα μπορεί να υπάρχει ενδιαφέρον για πληροφορίες όπως για παράδειγμα: για την ευστάθεια μιας εκφυλισμένης λύσης, τη στατιστική διασπορά των μεταβλητών των πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων, την επιλογή ενός συνόλου λύσεων αντιπροσωπευτικών κατά κάποια έννοια του υπό μελέτη υπερπολυέδρου, η πιθανή συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών του γραμμικού προγράμματος. Είναι γεγονός όμως, ότι δεν υπάρχουν παρά ελάχιστες αναφορές σε τέτοιες ευρετικές προσεγγίσεις.

Μία τέτοια ευρετική μέθοδος προτάθηκε από τον Winkels (1982), σύμφωνα με την οποία η αναζήτηση των λύσεων δεν περιορίζεται στις κορυφές του υπερπολυέδρου αλλά προχωράει σε πιο συστηματικό τρόπο υπολογισμού των λύσεων μέσα από τη διακριτοποίηση των μεταβλητών χρησιμοποιώντας σταθερό βήμα. Θα μπορούσε το βήμα αυτό να καθοριστεί

αυτόματα εφόσον ο επιθυμητός αριθμός των μεταβέλιτων λύσεων είναι γνωστός στον αναλυτή εξ αρχής.

Μία δεύτερη ευρετική μέθοδος προτάθηκε το 1984 από τον Siskos με στόχο τη μελέτη της ευστάθειας της λύσης και της μελέτης της στατιστικής συμπεριφοράς των μεταβλητών ενός γραμμικού προγράμματος. Βασικό στοιχείο της μεθόδου είναι με απαρχή τη βέλτιστη λύση ενός γραμμικού προγράμματος η επίλυση σειράς γραμμικών προγραμμάτων με κοινή περιοχή εφικτών λύσεων και με αντικειμενικές συναρτήσεις που μεγιστοποιούν και ελαχιστοποιούν έναν ή περισσότερους κυρτούς συνδυασμούς των μεταβλητών του προβλήματος.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο αλγόριθμος των Manas-Nedoma που ανήκει στην κατηγορία των αναλυτικών περιστροφικών μεθόδων και η ευρετική μέθοδος του Siskos (1984).



## 5. Η μέθοδος των Manas-Nedoma

Ένα κυρτό υπερπολύεδρο του τύπου ΥΠ 2 μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα **συνεκτικό γράφημα** (*graph connected*)  $(V,U)$  όπου  $V$  είναι το σύνολο των κόμβων και  $U$  το σύνολο των τόξων που συνδέουν ανά δύο τους κόμβους, και που μπορούμε να τα διαβούμε ακολουθώντας τα βήματα της Simplex. Έτσι, δύο κόμβοι είναι γειτονικοί αν αντιστοιχούν σε δύο βάσεις της Simplex που διαφέρουν κατά μία και μόνη μεταβλητή. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να διαβούμε το τόξο που συνδέει τους δύο γειτονικούς κόμβους κατά τις δύο, αντίθετες, κατευθύνσεις, αφού όπως έχουμε ήδη αποδείξει, κάθε βήμα της Simplex είναι αντιστρέψιμο.

Το γράφημα που αντιστοιχεί σε κάποιο κυρτό υπερπολύεδρο του τύπου ΥΠ 1.2 (έστω με 12 μεταβέλιστες λύσεις) δίνεται στο σχήμα Σχήμα 5.1.

Η αναζήτηση όλων των κορυφών του υπερπολυέδρου ισοδυναμεί με την εξερεύνηση όλων των κόμβων του γραφήματος  $(V,U)$ . Προκειμένου να μοντελοποιήσουμε σε κάποιο βαθμό αυτές τις γενικές ιδέες πρέπει να ορίσουμε κάποια μεγέθη:

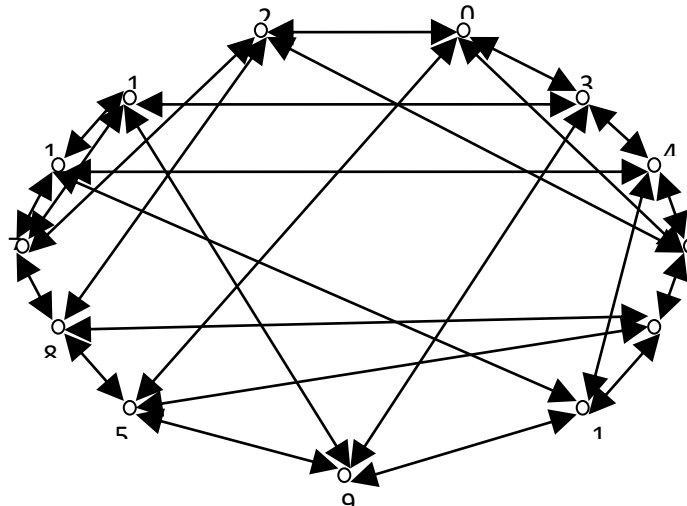
- Το  $V$  (σύνολο των κόμβων του γραφήματος) περιέχει διανύσματα διάστασης  $m$  των οποίων τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί (δείκτες των βάσεων της Simplex)  $u=(i_1, i_2, \dots, i_m)$  με  $1 \leq i_j \leq m, j=1,2,\dots,m$ .
- Δύο διαφορετικοί κόμβοι  $u_1=(i_1, i_2, \dots, i_m)$  και  $u_2=(k_1, k_2, \dots, k_m)$  απέχουν μεταξύ τους κατά μία απόσταση  $d \leq m$  αν  $d$  ακριβώς στοιχεία του  $u_2$  είναι διαφορετικά από αυτά του  $u_1$ . Οι  $u_1$  και  $u_2$  είναι γειτονικές εφόσον έχουν  $d=1$ .
- Ένα τόξο  $(u_1, u_2) \in U$  αν και μόνο αν  $u_1$  και  $u_2$  είναι γειτονικοί. Αν  $M \subset V$ , θέτουμε ως  $\Gamma(M)$  το σύνολο που παίρνουμε από την πρόσθεση στο  $M$  όλων των κόμβων που έχουν ένα γειτονικό κόμβο στο σύνολο  $M$ . Με άλλα λόγια, οι γειτονικοί κόμβοι του  $u_i$  απαρτίζουν το σύνολο  $\Gamma(u_i)$ .

Το πρόβλημα της αναζήτησης όλων των κόμβων ενός γραφήματος  $(V,U)$  τίθεται πλέον διαφορετικά. Αρκεί να βρούμε ένα 'μονοπάτι' που περνάει από όλους τους κόμβους ενός γραφήματος χωρίς να χρειάζεται να κρατάμε στον υπολογιστή, παρά ένα και μοναδικό πίνακα Simplex, προκειμένου να παράξουμε τους νέους κόμβους (Manas and Nedoma, 1968).

Οι Manas και Nedoma το 1968 μας έδωσαν ένα αλγόριθμο του οποίου σκοπός είναι η πραγματοποίηση ενός 'περιπάτου' μέσα στο γράφημα  $(V,U)$  που θα έχει δύο χαρακτηριστικές ιδιότητες:

- 1) να αποφεύγει την αναπαραγωγή (εφόσον αυτό είναι δυνατό) λύσεων που έχουν ήδη υπολογιστεί,
- 2) να κρατάει στη μνήμη του υπολογιστή ένα και μοναδικό πίνακα Simplex.

Ο αλγόριθμος, που μας δίνει τη δυνατότητα εύρεσης όλων των κόμβων του συνεκτικού γραφήματος δουλεύει ως ακολούθως:



Σχήμα 5.1: Γράφημα  $(V,U)$  ενός υπερπολυέδρου (Siskos, 1984)

Ξεκινάμε από ένα αρχικό κόμβο - λύση ( $u_0$ ), που δεν είναι άλλη από τη βέλτιστη λύση του γραμμικού μας προγράμματος, και κατασκευάζουμε δύο πεπερασμένες ακολουθίες συνόλων που περιέχουν κόμβους του γραφήματος.

Η πρώτη ακολουθία συνόλων ( $R_1, R_2, \dots, R_s$ ) περιλαμβάνει τους κόμβους που έχουν ήδη υπολογιστεί (με τον όρο «υπολογισμό κόμβων» εννοούμε τον καθορισμό των συντεταγμένων των αντίστοιχων διανυσμάτων των βασικών δυνατών λύσεων του γραμμικού μας προγράμματος).

Η δεύτερη ακολουθία συνόλων ( $W_1, W_2, \dots, W_s$ ) περιλαμβάνει τους κόμβους που δεν έχουμε ακόμα υπολογίσει αλλά που μπορούν να υπολογιστούν ξεκινώντας από ένα ή περισσότερους κόμβους που ανήκουν στο σύνολο  $R_s$  πραγματοποιώντας μία και μόνη επανάληψη της μεθόδου Simplex. Ο αλγόριθμος περατώνεται όταν αναπόφευκτα μετά από την εκτέλεση ενός πεπερασμένου αριθμού βημάτων θα φτάσουμε στο σημείο, όπου για το σύνολο  $W_s$  θα ισχύει  $W_s = \emptyset$ , δηλαδή θα έχουμε υπολογίσει το σύνολο των σχεδόν βέλτιστων λύσεων.

Ο συνολικός αριθμός των επαναλήψεων της Simplex που πρέπει να πραγματοποιήσουμε προκειμένου να ολοκληρωθεί η εφαρμογή του αλγορίθμου των Manas-Nedoma για ένα γραμμικό πρόγραμμα με  $r$  βασικές δυνατές λύσεις,  $m$  περιορισμούς και  $n$  κύριες μεταβλητές απόφασης ( $l = n + m$  οι συνολικές μεταβλητές απόφασης όπου έχουμε προσθέσει και  $m$  μεταβλητές απόκλισης, οπότε ο  $n$  εκφράζει παράλληλα και των αριθμό των μεταβλητών εκτός βάσης), κυμαίνεται από  $r$  μέχρι  $m \times r$ , στην περίπτωση που υποθέσουμε ότι δεν έχουμε εκφυλισμένες λύσεις. (Siskos, 1984)

Από άποψη υπολογιστικού φόρτου ο αλγόριθμος των Manas-Nedoma κάνει οικονομία στη χρήση μνήμης αφού χρειάζεται κάθε στιγμή να υπάρχει αποθηκευμένος ένας μόνο πίνακας Simplex και ένας πίνακας διαστάσεων  $r \times m$  για τα σύνολα  $R_s$  και  $W_s$ . (Manas and Nedoma, 1968)

Επίσης ο αλγόριθμος στηρίζεται στην αποτελεσματική διαχείριση μιας λίστας αυξανόμενου μεγέθους. Ο αριθμός των στοιχείων της λίστας θα αυξάνεται μέχρι να γίνει ίσος με το συνολικό αριθμό των κορυφών του υπερπολυέδρου (Mattheis and Rubin, 1980).

Ο υπολογιστικός φόρτος του αλγορίθμου είναι μεγαλύτερος σε σύγκριση με τη μέθοδο της αντίστροφης simplex (Van de Panne, 1975) από τη στιγμή που συνολικά χρειάζεται να υπολογίσουμε  $s$  πίνακες Simplex, όπου  $r \leq s \leq r \times m$  με  $r$  τον αριθμό των βασικών δυνατών λύσεων του γραμμικού προγράμματος και  $m$  το πλήθος των περιορισμών του (Siskos, 1984).

Ο αλγόριθμος αποτελείται από έξι βασικά βήματα που απαιτούνται για την εξερεύνηση του συνόλου κορυφών του υπερπολυέδρου του ΓΠ:

**Βήμα 0:** Επίλυση του ΓΠ και εύρεση της βέλτιστης λύσης  $u_0$ .

**Βήμα 1:** Διαβάζουμε τις διαστάσεις του προβλήματος (αριθμός περιορισμών, μεταβλητών) και υπολογίζουμε το μέγιστο αριθμό λύσεων (κορυφές υπερπολυέδρου) σύμφωνα με τη σχέση 1.2. Ορίζουμε τους απαραίτητους πίνακες και διαβάζουμε τα στοιχεία του πίνακα Simplex της λύσης  $u_0$ . Επίσης προσθέτουμε τον νέο περιορισμό που ορίζει το ΥΠ 1.2:

$$c^T x - Y = z^* - k$$

όπου  $Y$  είναι η μεταβλητή απόκλισης του περιορισμού. Οι συντελεστές των στοιχείων του νέου περιορισμού στον επαυξημένο πίνακα υπολογίζονται εύκολα (Siskos, 1984).

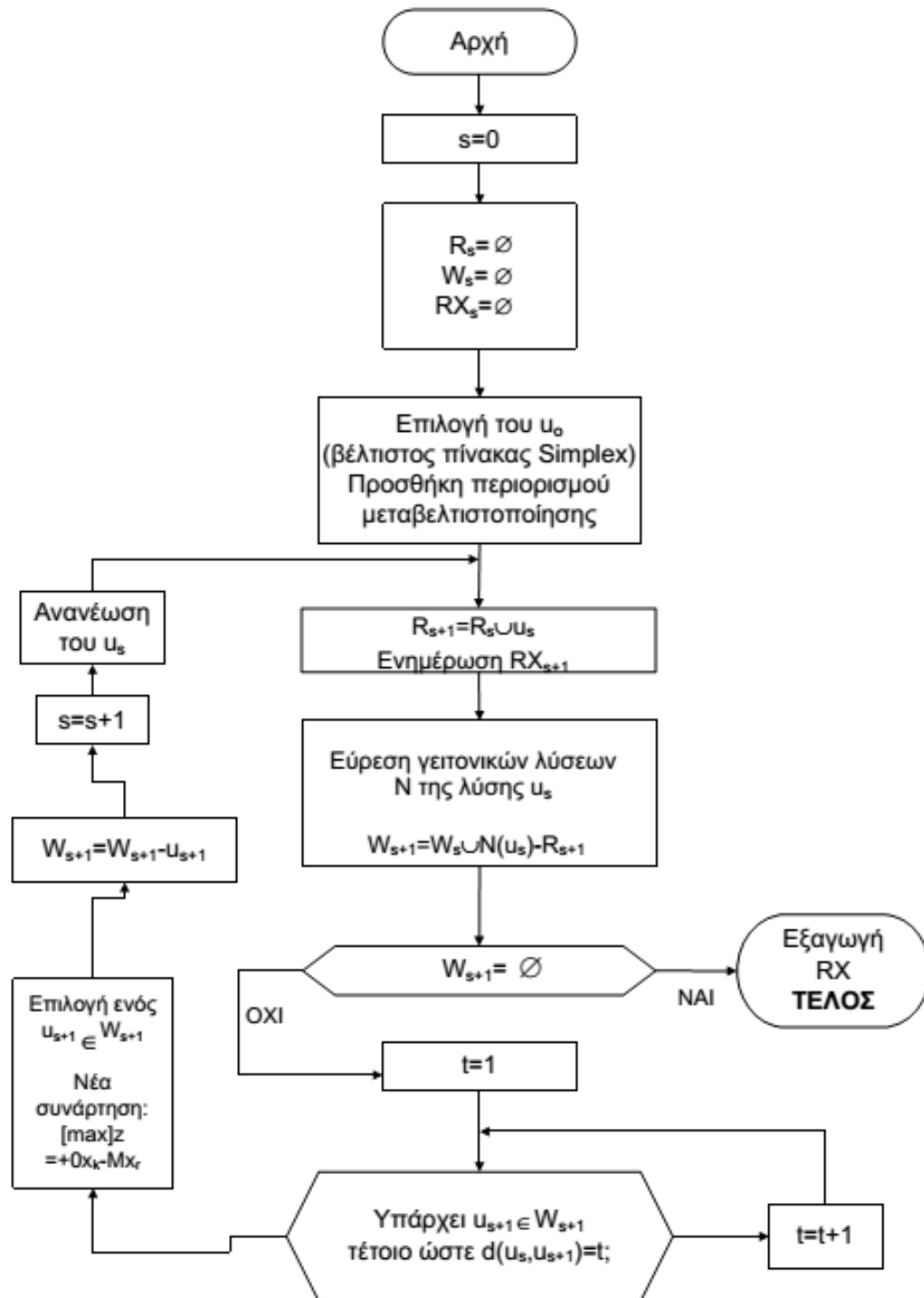
**Βήμα 2:** Ενημερώνουμε το σύνολο λύσεων  $R$  με το διάνυσμα των δεικτών των βασικών μεταβλητών της τρέχουσας λύσης καθώς και το σύνολο  $RX$  με το διάνυσμα των τιμών  $x_B$ .

**Βήμα 3:** Προχωράμε στην εύρεση των γειτονικών λύσεων – κορυφών της τρέχουσας λύσης και ενημερώνουμε την ακολουθία  $W$ .

**Βήμα 4:** Ελέγχουμε αν ο πίνακας  $W$  είναι κενός. Αν όχι, επιλέγουμε την επόμενη λύση-κορυφή. Προκειμένου να οδηγηθούμε στην επιλεγμένη κορυφή ορίζουμε νέα αντικειμενική συνάρτηση. Δίνοντας πολύ μεγάλες αρνητικές τιμές ( $M$ ) στα στοιχεία που είναι εκτός βάσης και μηδέν στα στοιχεία της βάσης.

**Βήμα 5:** Τέλος, αφαιρούμε την νέα λύση  $u_{new}$  από την ακολουθία  $W$  και προχωράμε με χρήση του ΣΥΑ στην παραγωγή της νέας λύσης και επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται το λογικό διάγραμμα του αλγορίθμου:



Σχήμα 5.2: Λογικό διάγραμμα αλγόριθμου Manas-Nedoma

## 6. Ένας Ευρετικός Αλγόριθμος

Όπως είδαμε στις δύο προηγούμενες παραγράφους, υπάρχουν μέθοδοι που μπορούν με αρκετά μεγάλη ακρίβεια να υπολογίσουν το σύνολο των πολλαπλών βέλτιστων ή ημιβέλτιστων λύσεων. Σύμφωνα με τη σχέση (2) ο αριθμός των κορυφών του υπερπολυέδρου των πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων είναι συχνά μεγάλος και η εξαντλητική αναζήτησή τους απαιτεί πολύ χρόνο.

Οι ευρετικές μέθοδοι μας προσφέρουν μια πολύ καλή διεξοδο στο πρόβλημα αναζήτησης των χιλιάδων λύσεων που πολλές φορές μας είναι αδιάφορες. Συχνότερα ενδιαφερόμαστε μόνο για τις πληροφορίες εκείνες που θα μας βοηθήσουν να εξετάσουμε την ευστάθεια της βέλτιστης λύσης μας ή τη στατιστική διασπορά των υπολοίπων λύσεων. Για παράδειγμα η ανάλυση ευστάθειας μπορεί να πραγματοποιηθεί με την επίλυση γραμμικών προγραμμάτων (γ.π.) του τύπου:

$$\Gamma.Π.3 \left\{ \begin{array}{l} [\max] \psi = \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ \text{υ.π.} \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^t \mathbf{x} \geq z^* - k \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

όπου  $p_j, j=1,2,\dots,n$  αριθμητικοί συντελεστές που επιλέγονται κατάλληλα για τον προσδιορισμό των πλέον χαρακτηριστικών πολλαπλών (για  $k=0$ ) ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων. Αν θέσουμε για παράδειγμα  $p_i=1$  και  $p_j=0$  για  $j \neq i$  θα προσδιοριστούν οι σχεδόν βέλτιστες λύσεις που μεγιστοποιούν την τιμή της μεταβλητής  $x_i$  (Σίσκος, 1992).

Η επίλυση του παραπάνω γραμμικού προγράμματος μπορεί να επιτευχθεί με απαρχή το βέλτιστο πίνακα Simplex του αρχικού γραμμικού προγράμματος (Σίσκος, 1998).

Η αντικειμενική συνάρτηση που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο γραμμικό πρόγραμμα είναι ενδεικτική και μπορεί να ποικίλει ανάλογα με το πρόβλημα που καλούμαστε κάθε φορά να λύσουμε. Το σταθερό σημείο του μοντέλου είναι η προσθήκη του περιορισμού:

$$\mathbf{c}^t \mathbf{x} \geq z^* - k \tag{4}$$

στους περιορισμούς του αρχικού προβλήματος, με το  $k$  να παίρνει διάφορες τιμές επιλογής του αποφασίζοντα. Σε πολλές περιπτώσεις ενδείκνυται η έκφραση του  $k$  ως ποσοστού της βέλτιστης τιμής  $z^*$  της αντικειμενικής συνάρτησης.

Στα μοντέλα γραμμικού χρησιμοποιούμε το υπερπολύεδρο που προκύπτει από την προσθήκη του περιορισμού (4) ώστε να «περιπλανηθούμε» στις κορυφές αυτού με τη βοήθεια αντικειμενικών συναρτήσεων που θα μεγιστοποιούν ή θα ελαχιστοποιούν συγκεκριμένες παραμέτρους, ή/και συνδυασμούς παραμέτρων. Με αυτό τον τρόπο

εξετάζουμε την ευστάθεια των αρχικών λύσεων ενώ παράλληλα μας δίνεται η δυνατότητα να μελετήσουμε την επίδραση των μεταβέλιστων λύσεων σε διαφόρους στατιστικούς δείκτες.

Ο ευρετικός αλγόριθμος αποτελείται από πέντε βασικά βήματα που απαιτούνται για την εύρεση των μεταβέλιστων λύσεων.

**Βήμα 0:** Επίλυση του αρχικού ΓΠ και εύρεση της βέλτιστης λύσης  $u_0$ .

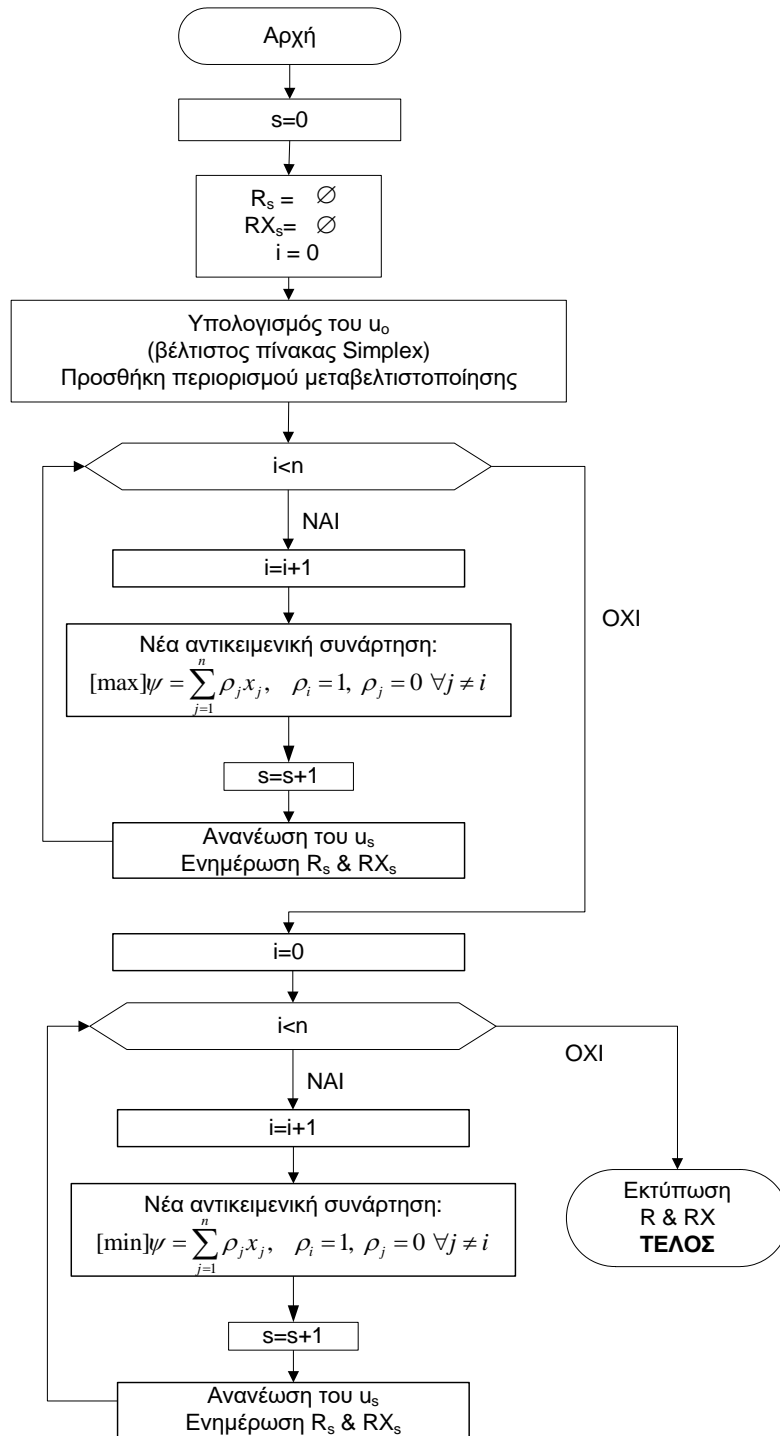
**Βήμα 1:** Διαβάζουμε τις διαστάσεις του προβλήματος (αριθμός περιορισμών, μεταβλητών) και υπολογίζουμε το μέγιστο αριθμό λύσεων ως  $2 \times n$ . Ορίζουμε τους απαραίτητους πίνακες και διαβάζουμε τα στοιχεία του πίνακα Simplex της λύσης  $u_0$ . Επίσης προσθέτουμε τον νέο περιορισμό (4) στον επαυξημένο πίνακα Simplex. Οι συντελεστές του νέου περιορισμού στο βέλτιστο πίνακα Simplex είναι οι αντίθετες τιμές των καθαρών οριακών εισοδημάτων, για τις οποίες ισχύει: Συνεπώς, η τιμή για τη μεταβλητή  $Y$ , στο βέλτιστο πίνακα Simplex του αρχικού γ.π., είναι  $k$  (Siskos, 1984).

**Βήμα 2:** Υπολογίζουμε τις λύσεις των  $n$  γ.π. (ΓΠ 3) για  $[\max] \psi$  με  $n$  διαφορετικές αντικειμενικές συναρτήσεις. Ενημερώνουμε το σύνολο λύσεων  $R$  με το διάλυσμα των δεικτών των βασικών μεταβλητών της τρέχουσας λύσης καθώς και το σύνολο  $RX$  με το διάλυσμα των τιμών  $x_B$ .

**Βήμα 3:** Υπολογίζουμε τις λύσεις των  $n$  γ.π. (ΓΠ 3) για  $[\min] \psi$  με  $n$  διαφορετικές αντικειμενικές συναρτήσεις. Ενημερώνουμε το σύνολο λύσεων  $R$  με το διάλυσμα των δεικτών των βασικών μεταβλητών της τρέχουσας λύσης καθώς και το σύνολο  $RX$  με το διάλυσμα των τιμών  $x_B$ .

**Βήμα 4:** Εξαγωγή των λύσεων των  $2 \times n$  γ.π.

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται το λογικό διάγραμμα του αλγορίθμου:



Σχήμα 6.1: Λογικό διάγραμμα ευρετικού αλγόριθμου

## 7. Η ανάλυση μεταβελτιστοποίησης στις μεθόδους UTA

### 7.1 Η αναγκαιότητα της μεταβελτιστοποίησης

Η μέθοδος UTA, όπως και κάθε άλλη πολυκριτήρια μέθοδος πρέπει να θεωρείται απλά ως ένα εργαλείο που βοηθά στη λήψη αποφάσεων, και σε καμία περίπτωση η προτεινόμενη λύση δεν πρέπει να θεωρείται ως η μοναδική καλή λύση, ενώ και σε κάποιες περιπτώσεις δεν πρέπει να θεωρείται ούτε ως η καλύτερη. Το σωστότερο είναι να θεωρείται ως μία ενδεικτικά καλή λύση που θα μπορεί να αποτελέσει τη βάση για ένα σύνολο λύσεων εξίσου καλών, ή και καλύτερων, σύμφωνα με κάποια κριτήρια τα οποία δεν είχαν συμπεριληφθεί στο αρχικό πρόβλημα.

Η μαθηματική μοντελοποίηση ενός πολυκριτήριου προβλήματος εμπεριέχει και τον καθορισμό των κριτηρίων τα οποία θα πρέπει να βελτιστοποιηθούν συνολικά. Κάποια όμως κριτήρια δεν έχουν συμπεριληφθεί στο σχηματισμό του ολικού κριτηρίου είτε γιατί ήταν δύσκολη η μοντελοποίησή τους, είτε γιατί δεν είναι άμεσα αντιληπτά και παίζουν το ρόλο των παράπλευρων συνεπειών, είτε τέλος γιατί σε ορισμένες περιπτώσεις είναι αρκετά τεχνικά με δυσδιάκριτη φυσική ερμηνεία, όπως για παράδειγμα διάφοροι στατιστικοί δείκτες.

Παράλληλα, πρέπει να σημειωθεί ότι ένα πολυκριτήριο πρόβλημα απόφασης ανήκει στην κατηγορία των προβλημάτων χαμηλού βαθμού δόμησης (ill-structured), είναι δηλαδή πρόβλημα στο οποίο η ορθολογική λύση δεν προϋπάρχει αλλά αποτελεί αντικείμενο προοδευτικής αναζήτησης (Σίσκος, 1998)

Στη UTA υπάρχουν πρόσθετοι λόγοι που καθιστούν την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης επιτακτική. Οι λόγοι αυτοί πηγάζουν από τη χρήση προχωρημένων τεχνικών γραμμικού προγραμματισμού προκειμένου να εκτιμηθούν οι προσθετικές συναρτήσεις χρησιμότητας με τη βοήθεια της ποιοτικής ανάλυσης παλινδρόμησης. Στις προηγούμενες παραγράφους, αναφερθήκαμε στους βασικούς λόγους που επιτάσσουν την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης για την ολοκληρωμένη επίλυση γραμμικών προγραμμάτων.

Οπότε στις αναλύσεις μεταβελτιστοποίησης στη UTA θα πρέπει να ικανοποιήσουμε τόσο τις ανάγκες που προκύπτουν από τη θεωρία της πολυκριτήριας ανάλυσης, που σχετίζονται με την ελλιπή μοντελοποίηση κριτηρίων, όσο και τις ανάγκες της θεωρίας του γραμμικού προγραμματισμού, που σχετίζονται με την ποιότητα της πληροφορίας καθώς και προβλήματα μαθηματικής υφής.

Οι διάφοροι αλγόριθμοι που ανήκουν την οικογένεια UTA οδηγούν στην εκτίμηση μίας βέλτιστης προσθετικής συνάρτησης χρησιμότητας  $u^*(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n u_i [g_i(a)]$  η οποία είναι μία

‘βέλτιστη’ αριθμητική αναπαράσταση της προτιμησιακής σχέσης R που έχει δοθεί από τον αποφασίζοντα. Η επίλυση ενός γραμμικού προγράμματος μας οδηγεί στην εύρεση της λύσης ελαχιστοποιώντας μια αντικειμενική συνάρτηση υπό συγκεκριμένους περιορισμούς. Όμως, αν η βέλτιστη τιμή  $z^*$  της αντικειμενικής συνάρτησης που ελαχιστοποιεί τα σφάλματα  $\sigma(a)$



είναι ίση με μηδέν, αυτό σημαίνει ότι το πολύεδρο των παραδεκτών λύσεων του γραμμικού προγράμματος για τα  $u_i(g_i)$  δεν είναι κενό και ότι πολλές άλλες προσθετικές συναρτήσεις χρησιμότητας μας δίνουν μία ακριβή αναπαράσταση της σχέσης R (Jacquet-Lagrèze and Siskos, 1982).

Ακόμα όμως και στην περίπτωση που η βέλτιστη τιμή  $z^*$  είναι αυστηρά θετική είναι δυνατόν τιμές για την  $z$ , χειρότερες από την  $z^*$ , να μπορούν να βελτιώσουν άλλα τεχνικά κριτήρια που ανήκουν στο χώρο της στατιστικής όπως για παράδειγμα το συντελεστή συσχέτισης του Spearman ή το συντελεστή συσχέτισης του Kendal (‘τ’ του Kendal).

Αναφορικά με το συντελεστή συσχέτισης του Spearman, έστω ότι έχουμε μία ομάδα εναλλακτικών τα οποία έχουμε κατατάξει κατά δύο διαφορετικούς τρόπους (R και R’). Ο συντελεστής συσχέτισης του Spearman  $\rho_s$ , όταν έχουμε  $m$  εναλλακτικές δίνεται από τη σχέση:

$$\rho_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^m \delta_i^2}{m^3 - m} \quad (5)$$

όπου  $\delta_i$  οι διαφορές που υπάρχουν ανάμεσα στις δύο τάξεις της  $i$  εναλλακτικής στις R και R’:

$$\delta = R(i) - R'(i) \quad (6)$$

Στην περίπτωση που η κατάταξη των εναλλακτικών στην R ή/και στην R’ δεν είναι διακριτές (δηλ. υπάρχουν δύο ή περισσότερες εναλλακτικές στην ίδια θέση) τότε η παραπάνω σχέση (5) δε δίνει σωστά αποτελέσματα. Σε αυτές τις περιπτώσεις υλοποιείται η εξής περισσότερο πολύπλοκη σχέση:

$$\rho_s = \frac{\sum_{i=1}^m \left[ R(i) - \frac{m+1}{2} \right] \left[ R'(i) - \frac{m+1}{2} \right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \left[ R(i) - \frac{m+1}{2} \right]^2 \sum_{i=1}^m \left[ R'(i) - \frac{m+1}{2} \right]^2}} \quad (7)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^m R(i)R'(i) - m \left[ \frac{m+1}{2} \right]^2}{\sqrt{\left[ \sum_{i=1}^m R(i)^2 - m \left( \frac{m+1}{2} \right)^2 \right] \left[ \sum_{i=1}^m R'(i)^2 - m \left( \frac{m+1}{2} \right)^2 \right]}}$$

Ο συντελεστής συσχέτισης του Spearman  $\rho_s$  παίρνει τιμές στο πεδίο [-1, 1], με  $\rho_s=1$  όταν η προκύπτουσα διάταξη R’ ταιριάζει απόλυτα με την αρχική διάταξη R και  $\rho_s= -1$ , όταν έχουμε πλήρη αντιστροφή της κατάταξης.

Ο συντελεστής συσχέτισης  $\tau$  του Kendall μοιάζει με τον συντελεστή  $\rho$  του Spearman αλλά χρησιμοποιεί την έννοια των εναρμονισμένων ή συσχετισμένων (concordant) ζευγών τιμών (θέσεις κατάταξης στην περίπτωσή μας) και μη εναρμονισμένων ή μη συσχετισμένων (discordant) ζευγών τιμών, όπως αυτά ορίζονται στην συνέχεια.

Δύο παρατηρήσεις, έστω  $(R_j, R'_j)$  και  $(R_k, R'_k)$ , ονομάζονται εναρμονισμένες ή συσχετισμένες (concordant), αν και τα δύο μέλη της μίας παρατήρησης είναι μεγαλύτερα (ή μικρότερα) από τα αντίστοιχα μέλη της άλλης παρατήρησης. Δηλαδή, αν  $R_j > R_k$  (αντίστοιχα,  $R_j < R_k$ ), τότε  $R'_j > R'_k$  (αντίστοιχα,  $R'_j < R'_k$ ).

Οι παρατηρήσεις  $(R_j, R'_j)$  και  $(R_k, R'_k)$  θα ονομάζονται μη εναρμονισμένες ή μη συσχετισμένες (discordant), αν η διάταξη των πρώτων μελών τους είναι αντίθετη από την διάταξη των

δεύτερων μελών τους, δηλαδή, αν  $R_j > R_k$  (αντίστοιχα,  $R_j < R_k$ ), τότε  $R'_j < R'_k$  (αντίστοιχα,  $R'_j > R'_k$ ).

Ισοδύναμα, δύο ζεύγη παρατηρήσεων  $(R_j, R'_j)$  και  $(R_k, R'_k)$  θα ονομάζονται εναρμονισμένα αν οι διαφορές  $R_j - R_k$  και  $R'_j - R'_k$  έχουν το ίδιο πρόσημο (αν  $(R_j - R_k)(R'_j - R'_k) > 0$ ). Τα ζεύγη  $(R_j, R'_j)$  και  $(R_k, R'_k)$  θα ονομάζονται μη εναρμονισμένα αν οι διαφορές  $R_j - R_k$  και  $R'_j - R'_k$  έχουν αντίθετο πρόσημο (αν  $(R_j - R_k)(R'_j - R'_k) < 0$ ).

Έστω  $m_c$  και  $m_d$  οι αριθμοί των εναρμονισμένων και μη εναρμονισμένων ζευγών παρατηρήσεων, αντίστοιχα. Τα ζεύγη των παρατηρήσεων  $(R_j, R'_j)$  και  $(R_k, R'_k)$ , για τα οποία ισχύει ότι  $R_j = R_k$  ή/και  $R'_j = R'_k$ , δεν είναι ούτε εναρμονισμένα ούτε μη εναρμονισμένα. Τα ζεύγη αυτά ονομάζονται ισοβαθμούνται (tied). Έστω  $m_0$  ο αριθμός των ισοβαθμούντων ζευγών παρατηρήσεων. Επειδή οι  $n$  παρατηρήσεις μπορούν να συνδυασθούν ανά δύο με

$$\binom{m}{2} = m(m-1)/2 \text{ διαφορετικούς τρόπους, έπεται ότι } m_c + m_d + m_0 = \binom{m}{2}.$$

Ο συντελεστής συσχέτισης του Kendall δίνεται από τη σχέση:

$$\tau = \frac{m_c - m_d}{\binom{m}{2}} = \frac{m_c - m_d}{m(m-1)/2} \quad (8)$$

Ο συντελεστής  $\tau$ , δηλαδή, παριστάνει την διαφορά μεταξύ των ποσοστών των εναρμονισμένων και μη εναρμονισμένων ζευγών παρατηρήσεων.

Στην περίπτωση που η κατάταξη των εναλλακτικών στην  $R$  ή/και στην  $R'$  δεν είναι διακριτές (δηλ. υπάρχουν δύο ή περισσότερες εναλλακτικές στην ίδια θέση) τότε η παραπάνω σχέση (8) δε δίνει σωστά αποτελέσματα. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιείται ο διαφοροποιημένος δείκτης  $\tau_b$ :

$$\tau_b = \frac{m_c - m_d}{\sqrt{\left[ m(m-1)/2 - \sum_{i=1}^t t_i(t_i-1)/2 \right] \left[ m(m-1)/2 - \sum_{i=1}^u u_i(u_i-1)/2 \right]}} \quad (9)$$

όπου  $t_i$  είναι ο αριθμός των εναλλακτικών που ισοβαθμούν σε μια συγκεκριμένη θέση στην κατάταξη  $R$ ,  $t$  ο αριθμός των διαφορετικών θέσεων στην κατάταξη  $R$  και αντίστοιχα  $u_i$  είναι ο αριθμός των εναλλακτικών που ισοβαθμούν σε μια συγκεκριμένη θέση στην κατάταξη  $R'$ ,  $u$  ο αριθμός των διαφορετικών θέσεων στην κατάταξη  $R'$ . Όταν δεν έχουμε ισοπαλίες μεταξύ των εναλλακτικών τότε  $\tau = \tau_b$ . Ο συντελεστής συσχέτισης του Kendall παίρνει τιμές στο πεδίο  $[-1, 1]$ .

Στην περίπτωση που  $z^*=0$  η προκύπτουσα διάταξη  $R'$  ταιριάζει απόλυτα με την αρχική διάταξη  $R$ , γεγονός που συνεπάγεται ότι  $\tau(R', R)=1$ . Στην περίπτωση όμως που έχουμε  $z^*>0$  αξίζει να εξετάσουμε την συμπεριφορά ημιβέλτιστων λύσεων (§ 3.2) που πιθανόν να δίνουν  $\tau(R'_j, R) > \tau(R_0, R)$ , όπου  $R'_j$  η διάταξη που προκύπτει από την  $j$  λύσης του προβλήματος κατά τη φάση της μεταβελτιστοποίησης, και  $R_0$  η διάταξη που προκύπτει από την επίλυση του αρχικού γραμμικού προγράμματος.

Ο συντελεστής συσχέτισης του Kendall θεωρείται ως κριτήριο προς βελτιστοποίηση στον αλγόριθμο UTKMEN. Όμως η επίλυση του γραμμικού προγράμματος που προκύπτει απαιτεί τη χρήση τεχνικών μικτού γραμμικού προγραμματισμού γεγονός που οδηγεί σε υπερβολική

αύξηση του υπολογιστικού φόρτου, τόσο από άποψη υπολογισμών όσο και από άποψη αποθήκευσης της πληροφορίας. Έτσι παρατηρούμε ότι η ανάλυση μεταβελτιστοποίησης αποτελεί λύση και στις περιπτώσεις που η μοντελοποίηση ενός κριτηρίου, παρότι εφικτή, δημιουργεί άλλα προβλήματα.

Η εμπειρία που έχει αποκτηθεί από τη χρήση του μοντέλου της UTA επιβεβαιώνει ότι μπορεί να υπάρχουν μη βέλτιστες τιμές της συνάρτησης  $u(\mathbf{g})$ , για τις οποίες  $z > z^*$ , μας δίνουν ασθενείς διατάξεις  $R'$ , που πλησιάζουν περισσότερο στην  $R$  (σύμφωνα με την απόσταση του Spearman ή του Kendal) από ότι η ασθενής διάταξη που συνάγεται από τις βέλτιστες τιμές

$$u^*(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n u_i [g_i(a)].$$

Επίσης μερικά κλασικά φαινόμενα στο μαθηματικό προγραμματισμό, όπως ο πρωτεύον και ο δυϊκός εκφυλισμός, καθώς και φαινόμενα κριτηρίων συσχέτισης στη στατιστική, δε λαμβάνονται υπόψη κατά την αναζήτηση της βέλτιστης λύσης. Οπότε είναι απαραίτητο να εξετάσουμε τις σχεδόν βέλτιστες λύσεις.

## 7.2 Μοντέλα ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης στη UTA

Στη μέθοδο UTA εκτιμάται ένα σύνολο από προσθετικές συναρτήσεις χρησιμότητας, στο τελευταίο βήμα αυτής της διαδικασίας, το οποίο ουσιαστικά αποτελεί μία ανάλυση μεταβελτιστοποίησης, η οποία είναι αναπόσπαστο κομμάτι της όλης διαδικασίας. Ανάλογα με την αρχική βέλτιστη λύση  $z^*$  που θα υπολογίσουμε με την επίλυση του γραμμικού προγράμματος στο 3<sup>ο</sup> βήμα αναζητούμε πολλαπλές ή/και ημιβέλτιστες λύσεις.

Οι νέες λύσεις αναζητούνται σε μία υποπεριοχή του νέου υπερπολυέδρου που οριοθετείται από το νέο περιορισμό:

$$z \leq z^* + \varepsilon \quad (10)$$

όπου  $z^*$  η αρχική βέλτιστη λύση και  $\varepsilon$  μία πολύ μικρή θετική ποσότητα παραχώρησης από τη  $z^*$ , επιλογής του αποφασίζοντα, πολλές φορές εκφρασμένη ως ποσοστό της  $z^*$ . Το  $z$  εξαρτάται από τον αλγόριθμο που θα χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της αρχικής βέλτιστης λύσης. Για παράδειγμα για τον αλγόριθμο UTASTAR η (10) γίνεται:

$$z = \sum_{j=1}^m [\sigma^-(a_j) + \sigma^+(a_j)] \leq z^* + \varepsilon(z^*) \quad (11)$$

όπου το  $\varepsilon$  εκφράζεται ως συνάρτηση της  $z^*$ .

Οπότε τον νέο υπερπολύεδρο (ΥΠ 4) αναζήτησης των λύσεων περιγράφεται από το επόμενο γραμμικό πρόγραμμα (ΓΠ. 4):

$$\sum_{j=1}^m [\sigma^-(a_j) + \sigma^+(a_j)] \leq z^* + \varepsilon(z^*)$$

$$\Delta(a_j, a_{j+1}) \geq \delta \text{ αν } a_j > a_{j+1}$$

$$\Delta(a_j, a_{j+1}) = 0 \text{ αν } a_j \sim a_{j+1}, \quad \forall j=1,2,\dots,m-1 \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{a_i-1} w_{ik} = 1, \quad k = 1, 2, \dots, a_i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

$$w_{ik} \geq 0, \quad \forall i=1, 2, \dots, n \text{ και } k = 1, 2, \dots, a_i - 1,$$

$$\sigma^-(a_j) \geq 0, \quad \sigma^+(a_j) \geq 0 \quad \forall j=1, 2, \dots, m$$

$$\text{όπου } \Delta(a_j, a_{j+1}) = u[g(a_j)] + \sigma^-(a_j) - \sigma^+(a_j) - u[g(a_{j+1})] - \sigma^-(a_{j+1}) + \sigma^+(a_{j+1}) \quad (14)$$

Στην περίπτωση που έχουμε  $z^*=0$  έχουμε τη δυνατότητα να αναζητήσουμε τις πολλαπλές βέλτιστες λύσεις θέτοντας  $\varepsilon=0$ .

Από την άλλη μεριά, μεταβάλλοντας την τιμή του  $\varepsilon$  σε ένα διάστημα τιμών που θα ορίσει ο αναλυτής θα μπορέσει να αποκτήσει μία σαφή εικόνα για την ευστάθεια της

$$u^*(g) = \sum_{i=1}^n u_i [g_i(a)].$$

Όσο μικρότερο είναι το διάστημα των τιμών των μεταβλητών κατά

την επίλυση των γραμμικών προγραμμάτων της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης, τόσο πιο ευσταθής θεωρείται η αρχική μας βέλτιστη λύση.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε αναλυτικότερα τις διαφορετικές προσεγγίσεις που σχετίζονται με το τελευταίο βήμα των αλγορίθμων της UTA και θα εστιάσουμε στα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της κάθε μίας. Οι διαφορές στις προσεγγίσεις συνίστανται κυρίως στην επιλογή διαφορετικών αντικειμενικών συναρτήσεων για τα γραμμικά προγράμματα που δημιουργούνται κατά τις διαδικασίες της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης. Η αξία της κάθε προσέγγισης ελέγχεται με βάση συγκεκριμένους δείκτες που αναπαριστούν αντίστοιχα κριτήρια που θέτει ο αναλυτής.

Μία πρώτη προσέγγιση στην ανάλυση μεταβελτιστοποίησης της UTA έχουμε από τους Jacquet-Lagrèze and Siskos (1982), και την οποία θα ονομάσουμε MAXMIN για λόγους ευκολίας αναφοράς σε αυτή παρακάτω στο κεφάλαιο. Σύμφωνα με την προσέγγισή τους επιδιώκεται η ανάλυση μεταβελτιστοποίησης μέσα από την επίλυση γραμμικών προγραμμάτων που μεγιστοποιούν και ελαχιστοποιούν διαδοχικά για κάθε κριτήριο  $i$  ξεχωριστά την χρησιμότητα  $u_i(g_i^*)$  της ακραίας τιμής αξιολόγησης του κριτηρίου:

$$[\min] u_i(g_i^*) \text{ και } [\max] u_i(g_i^*), \quad i=1, 2, \dots, n$$

Η γενική μορφή των  $2^*n$ , όπου  $n$  ο αριθμός των κριτηρίων, μεταβέλτιστων γραμμικών προγραμμάτων έχει ως εξής:

$$\Gamma\text{Π } 5 \left\{ \begin{array}{l} [\min] \sum_{i=1}^n p_i \sum_{k=1}^{a_i-1} w_{ik} \\ \text{ΥΠ } 4 \end{array} \right. \quad \Gamma\text{Π } 6 \left\{ \begin{array}{l} [\max] \sum_{i=1}^n p_i \sum_{k=1}^{a_i-1} w_{ik} \\ \text{ΥΠ } 4 \end{array} \right.$$

Για κάθε κριτήριο  $j$  με  $j=1, 2, \dots, n$  θέτουμε  $p_i=1$  για  $i=j$  και  $p_i=0$  για  $i \neq j$ . Οπότε σε κάθε περίπτωση ελαχιστοποιούμε ή μεγιστοποιούμε τη χρησιμότητα  $\sum_{k=1}^{a_i-1} w_{ik} = u_i(g_i^*)$  της βέλτιστης τιμής  $g_i^*$  του κριτηρίου  $j$ .

Από την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να ορίσουμε τα διαστήματα μέσα στα οποία θα κυμαίνονται οι τιμές  $u_i [g_i(a)]$ , και ως βέλτιστες τιμές που θα συνθέτουν την προσθετική

συνάρτηση χρησιμότητας  $u^*(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n u_i[g_i(a)]$ , θα θεωρήσουμε το μέσο όρο των τιμών που θα βρούμε από την επίλυση των  $2 \cdot n$  παραπάνω γραμμικών προγραμμάτων.

Μία παραλλαγή του παραπάνω μοντέλου είναι η επίλυση μόνο  $n$  γραμμικών προγραμμάτων της γενικής μορφής ΓΠ 6 κατά τη διαδικασία της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης. Δηλαδή, βρίσκουμε μόνο εκείνες τις μεταβέλτιστες λύσεις που μεγιστοποιούν τις χρησιμότητες  $u_i(g_i^*)$  των ακραίων τιμών αξιολόγησης των  $n$  κριτηρίων. Η προσέγγιση έχει υιοθετηθεί τόσο σε θεωρητικό επίπεδο (Siskos and Yannacopoulos, 1985, Jacquet\_Lagrèze and Siskos, 2001) όσο και σε πρακτικές εφαρμογές όπως για παράδειγμα στο Έμπειρο Πληροφοριακό Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων MARKEX (Ματσατοίνης, 1995).

Μια αρκετά διαφορετική προσέγγιση έχουμε από τους Despotis, Yannacopoulos and Zorounidis (1990), που χρησιμοποιείται μόνο στην περίπτωση που  $z^* > 0$ , είναι η προσπάθεια ελαχιστοποίησης των μέγιστων και ελάχιστων λαθών  $\sigma(a)$  του αρχικού γραμμικού προγράμματος. Για το μοντέλο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το όνομα MIME από τους Beuthe and Scannella (1996).

Στα παραδείγματα που εφαρμόστηκε η MIME επιβεβαιώθηκε ότι η διασπορά των επιμέρους λαθών είναι καθοριστικός παράγοντας για τη διαμόρφωση του  $\tau(R', R)$  (Despotis et al, 1990). Για το λόγο αυτό η προσέγγιση αυτή εξετάζει ημιβέλτιστες λύσεις που ελαχιστοποιούν τη διαφορά  $d$  μεταξύ του μέγιστου και του ελάχιστου σφάλματος. Από τη στιγμή που τα σφάλματα  $\sigma(a)$  παίρνουν τιμές μη αρνητικές η απαίτηση για ελαχιστοποίηση της διαφοράς ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση του μέγιστου σφάλματος  $\sigma(a)$  σύμφωνα με το παρακάτω γραμμικό πρόγραμμα:

$$\text{ΓΠ 7 } \left\{ \begin{array}{l} [\min] d \\ \text{υπό τους περιορισμούς:} \\ \text{περιορισμοί του ΥΠ 4} \\ d - \sigma^+(\alpha_j) \geq 0 \\ d - \sigma^-(\alpha_j) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad d \geq 0 \end{array} \right.$$

Στη ΥΤΑ είδαμε ότι χρησιμοποιούμε στους περιορισμούς των γραμμικών προγραμμάτων δύο πολύ μικρές αριθμητικές ποσότητες, τις  $\delta$  και  $s_i$ , όπου  $i$  το κάθε κριτήριο. Οι ποσότητες αυτές μπορούν έχουν συγκεκριμένη φυσική σημασία.

Η ποσότητα  $\delta$  δηλώνει την ελάχιστη διαφορά ανάμεσα στις ολικές χρησιμότητες δύο οποιωνδήποτε, διαδοχικών στην κατάταξη  $R$ , εναλλακτικών του συνόλου αναφοράς. Έτσι, για δύο διαδοχικές εναλλακτικές  $a_j$  και  $a_{j+1}$  ισχύει:

$$u'[\mathbf{g}(a_j)] - u'[\mathbf{g}(a_{j+1})] \geq \delta \tag{15}$$

Η ποσότητα  $s_i$  δηλώνει την ελάχιστη διαφορά ανάμεσα στις χρησιμότητες δύο διαδοχικών τιμών αξιολόγησης του κριτηρίου. Έτσι, για δύο διαδοχικές τιμές  $g_i^k$  και  $g_i^{k+1}$  του διαστήματος  $i$  έχουμε:

$$u_i(g_i^{k+1}) - u_i(g_i^k) \geq s_i, \quad k = 1, 2, \dots, a_i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{16}$$

Η επιλογή των  $\delta$  και  $s_i$  σε κάποιο βαθμό μπορεί να θεωρηθεί ως αυθαίρετη από τη στιγμή που κατά την επιλογή τους από τον αποφασίζοντα δεν μπορεί να προβλεφθεί με ακρίβεια η επίδρασή του επιπέδου τους στις λύσεις που θα προκύψουν.

Μία από τις προσεγγίσεις, η οποία καλείται MP1 από τους Beuthe and Scannela (1996), θέτει ως κριτήριο την μεγιστοποίηση του  $\delta$ , με στόχο τον καλύτερο διαχωρισμό των διαδοχικών εναλλακτικών. Οπότε το γραμμικό πρόγραμμα θα έχει ως εξής:

$$\text{ΓΠ 8 } \begin{cases} [\max] \delta \\ \text{ΥΠ 4} \\ \delta \geq 0 \end{cases}$$

Οι Beuthe and Scannela (1996) πρότειναν ένα ακόμα μοντέλο ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης που κινείται στην ίδια φιλοσοφία με το MP1. Πρόκειται για το μοντέλο MP2 στα πλαίσια του οποίου επιδιώκεται η μεγιστοποίηση του αθροίσματος ( $\delta+s$ ), με στόχο τον καλύτερο διαχωρισμό τόσο των διαδοχικών εναλλακτικών, όσο και των διαδοχικών τιμών αξιολόγησης των κριτηρίων. Στην προσέγγιση αυτή θεωρούμε ότι  $s=s_i \quad \forall i=1,2,\dots,n$ . Η απλή άθροιση, χωρίς ύπαρξη βαρών, των δύο παραμέτρων είναι εφικτή από μαθηματικής άποψης από τη στιγμή που εκφράζονται σε ίδιες μονάδες χρησιμότητας.

Στην περίπτωση που έχουμε  $z^*=0$ , οι δύο τελευταίες προσεγγίσεις μεταβελτιστοποίησης δικαιολογούνται από τη δυϊκή σχέση της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος προβλήματος της UTA και της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού προβλήματος σε κατάσταση βελτιστότητας:

$$z^* = \sum_{j=1}^m [\sigma^- * (a_j) + \sigma^+ * (a_j)] = \delta \sum_j y_j^* + s \sum_k x_k^* + r^* = 0 \quad (17)$$

όπου  $y_j$  είναι οι δυϊκές μεταβλητές που αντιστοιχούν στους περιορισμούς αυστηρής προτίμησης (12),  $x_k$  οι δυϊκές μεταβλητές των περιορισμών (16) και  $r$  η δυϊκή μεταβλητή του περιορισμού  $\sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1$ . Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή ( $z^*=0$ ) οι διαφορετικές τιμές των  $\delta$  και  $s$  δεν αυξάνουν την τιμή του  $z^*$ . Ωστόσο, στις περιπτώσεις που  $z^*>0$ , κάποιες από τις δυϊκές τιμές θα είναι θετικές με αποτέλεσμα οι διαφορετικές τιμές των  $\delta$  και  $s$  να δίνουν χειρότερο αποτέλεσμα για το  $z^*$ .

Το γραμμικό πρόγραμμα αυτής της προσέγγισης θα έχει την εξής μορφή:

$$\text{ΓΠ 9 } \begin{cases} [\max] (\delta + s) \\ \text{ΥΠ 4} \\ \delta \geq 0, \sigma \geq 0 \end{cases}$$

Στον επόμενο πίνακα δίνονται ο αριθμός των πρόσθετων μεταβλητών, ο αριθμός των πρόσθετων περιορισμών, καθώς και ο αριθμός των γραμμικών προγραμμάτων που θα πρέπει να επιλυθούν στα πλαίσια των διαφορετικών προσεγγίσεων (συμπεριλαμβανομένου και του αναλυτικού αλγόριθμο των Manas-Nedoma) που απαιτούνται για την υλοποίηση της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης:

Πίνακας 7.1: Προσεγγίσεις Ανάλυσης Μεταβελτιστοποίησης

Μοντέλο	Πρόσθετος Αριθμός Μεταβλητών	Πρόσθετος Αριθμός Περιορισμών	Αριθμός Γραμμικών Προγραμμάτων
MAXMIN	-	1	2*n
UTAMIME	1	1+m	1
UTASTARMIME	1	1+2*m	1
UTA2MIME	1	1+  P +2* I	1
MP1	1	1	1
MP2	2	1	1
Manas-Nedoma	1	1	-

Στην περίπτωση του μοντέλου MIME παραθέσαμε τους διαφορετικούς αριθμούς που αντιστοιχούν σε τρεις αλγορίθμους της οικογένειας των UTA. Για τα μοντέλα MAXMIN, MP1 και MP2 οι αριθμοί είναι ίδιοι ανεξάρτητα του αλγορίθμου που θα επιλεγεί για την επίλυση του αρχικού γραμμικού προγράμματος.

Οι Beuthe and Scannella (2001) πραγματοποίησαν μία μελέτη διαφορετικών αλγορίθμων της οικογένειας των UTA σε συνδυασμό με την εφαρμογή διαφορετικών μοντέλων ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης και κατέληξαν σε συγκεκριμένα συμπεράσματα.

Αρχικά, διαπίστωσαν ότι στην περίπτωση που έχουμε  $z^*=0$  η UTAMAXMIN των Jaquet-Lagrèze and Siskos (1982) παρέχει μία πρακτική και αποδοτική μέθοδος εκτίμησης. Καλά αποτελέσματα παρουσίασε επίσης και η UTAMP2. Στην περίπτωση που έχουμε  $z^*=0$ , η UTASTARMAXMIN παρουσιάζει τα καλύτερα αποτελέσματα.

Τέλος, διαπίστωσαν ότι οι παράμετροι  $\delta$ ,  $s$  και  $\epsilon$  παίζουν καθοριστικό ρόλο στην ικανότητα παροχής σωστών εκτιμήσεων από τα γραμμικά προγράμματα. Μέσα από ένα σημαντικό αριθμό προσομοιώσεων κατέληξαν στο γενικό συμπέρασμα ότι μικρές τιμές για τις  $\delta$ ,  $s$  και  $\epsilon$  οδηγούν σε καλύτερα αποτελέσματα στις περιπτώσεις που έχουμε  $z^*>0$ .

Αντιθέτως, όταν  $z^*=0$ , μεγαλύτερες τιμές για τα  $\delta$  και  $s$  δίνουν καλύτερα αποτελέσματα. Στην περίπτωση αυτή η χρήση των μοντέλων MP1 και MP2 μπορεί να μας παράσχει με πρακτικό τρόπο τα άνω όρια των τιμών που θα μπορούσαν να πάρουν οι παράμετροι αυτές.

Παρατηρώντας τα μοντέλα ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης που εξετάσαμε στο Κεφάλαιο αυτό καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι εφαρμόζοντας αυτές τις προσεγγίσεις δε βρίσκουμε όλες τις πολλαπλές ή σχεδόν βέλτιστες λύσεις του υπεπολυέδρου ΥΠ 4 αλλά μόνο κάποιες ακραίες τιμές με αποτέλεσμα να υπάρχει ο κίνδυνος εξαγωγής λάθος συμπερασμάτων αφού υπάρχει ελλιπής πληροφορία. Ο κίνδυνος αυτός είναι σημαντικός αν παρατηρήσουμε ότι γενικά η μέση τιμή, που χρησιμοποιούμε για παράδειγμα στην MIME, είναι ευαίσθητη στην ύπαρξη λίγων ασυνήθιστα μικρών ή μεγάλων μετρήσεων. (Παπαϊωάννου και Λουκά, 1990)

Θα ήταν ίσως χρήσιμη η εφαρμογή αναλυτικής μεθόδου ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης, όπως αυτή των Manas –Nedoma, που πιθανόν θα μας επέτρεπαν να υπολογίσουμε, αν όχι όλες, τουλάχιστον ένα μεγάλο αριθμό πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων, ώστε η μέση τιμή που θα προέκυπτε από αυτές να ανταποκρινόταν περισσότερο στην πραγματικότητα. Με άλλα λόγια η ασθενής διάταξη  $R'$  που θα υπολογίζαμε θα μπορούσε να είναι πιο κοντά

στην αρχική διάταξη R. Τελικός στόχος μας θα ήταν η αύξηση της ποσότητας και της ποιότητας της διαθέσιμης πληροφορίας χωρίς σημαντική αύξηση του υπολογιστικού φόρτου.

### 7.3 Μέτρα ευστάθειας των αποτελεσμάτων μεταβελτιστοποίησης

Η ευστάθεια του μοντέλου προτιμήσεων επηρεάζεται τόσο από τις εκφρασμένες προτιμήσεις του αποφασίζοντος όσο και από τις επιλογές που έχουν γίνει στο πλαίσιο των διαδικασιών κατασκευής του μοντέλου προτιμήσεων (μοντελοποίηση κριτηρίων, βαθμολόγηση των εναλλακτικών στα κριτήρια, επιλογή συνόλου αναφοράς). Σε κάθε περίπτωση επίλυσης του Πολυκριτήριου Γραμμικού προβλήματος απαιτείται να εκτιμηθεί η ευστάθεια του  $n$ -διάστατου υποχώρου των λύσεων. Ένας σημαντικός στόχος είναι να προσδιορισθούν δείκτες που να μπορούν να εκφράσουν το βαθμό της ευστάθειας του  $n$ -διάστατου υποχώρου. Αυτοί μπορεί να είναι οι εξής:

A) Μία αρχική ένδειξη για το μέτρο της ευστάθειας των λύσεων είναι η τυπική απόκλιση των λύσεων που προκύπτει από την τετραγωνική ρίζα της μέσης τετραγωνικής απόκλισης (Μπένος, 1997; Παπαϊωάννου & Λουκά, 1990).

Ο τύπος τυπικής απόκλισης των εκτιμώμενων τιμών κάποιας παραμέτρου  $k$  ορίζεται ως εξής:

$$S_k = \sqrt{\frac{1}{n_{sol} - 1} \sum_{j=1}^{n_{sol}} \left( par_k^j - \frac{\sum_{j=1}^{n_{sol}} par_k^j}{n_{sol}} \right)^2} \quad \text{for } k=1,2,\dots,n_{par} \quad (18)$$

όπου  $S_k$  η τυπική απόκλιση των εκτιμώμενων τιμών του παραμέτρων  $k$ ,  $par_k^j$  η τιμή της  $k$  παραμέτρου που προκύπτει από την επίλυση του  $j$  γραμμικού προγράμματος μεταβελτιστοποίησης,  $n_{par}$  το πλήθος των παραμέτρων και τέλος  $n_{sol}$  ο συνολικός αριθμός των προς επίλυση γραμμικών προγραμμάτων στα πλαίσια της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης.

Η σχέση (18) έπειτα από πράξεις καταλήγει στην παρακάτω μορφή:

$$S_k = \sqrt{\frac{1}{n_{sol} - 1} \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (par_k^j)^2 - \frac{\left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} par_k^j \right)^2}{n_{sol}} \right)} \quad \text{for } k=1,2,\dots,n_{par} \quad (19)$$

Ένας δείκτης που θα μπορούσε να υπολογισθεί είναι ο μέσος δείκτης ευστάθειας (Average Stability Index - ASI) για κάθε κριτήριο  $i$  ο οποίος θα μπορούσε να οριστεί ως η μέση τιμή της κανονικοποιημένης τυπικής απόκλισης των τιμών των παραμέτρων  $k$  του κριτηρίου  $i$  του προβλήματος που θα προκύπτουν κατά τη μεταβελτιστοποίηση:

$$ASI(i) = 1 - \frac{1}{n_{par}} \sum_{k=1}^{n_{par}} \frac{S(i)_k}{Norm} \quad (20)$$



όπου  $S_k$  η τυπική απόκλιση των εκτιμώμενων τιμών των παραμέτρων  $k$  του κριτηρίου  $i$ ,  $n_{par}$  ο αριθμός των παραμέτρων και  $Norm$  ένας συντελεστής κανονικοποίησης, τέτοιος ώστε να επιτρέπει στο δείκτη ASI να λάβει τιμές στο διάστημα  $[0,1]$ . Ο τύπος έπειτα από πράξεις (Τσότσολας, 2009) γράφεται ως εξής:

$$ASI(i) = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{n_{par}} \sqrt{\left( n_{sol} \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (par(i)_k^j)^2 \right) - \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} par(i)_k^j \right)^2 \right)}}{n_{sol} \sqrt{(n_{par} - 1)}} \quad (21)$$

Όπου,  $par_k^j$  η τιμή της παραμέτρου  $k$  που προκύπτει από την επίλυση του  $j$  γραμμικού προγράμματος μεταβελτιστοποίησης και τέλος  $n_{sol}$  ο συνολικός αριθμός των προς επίλυση γραμμικών προγραμμάτων στα πλαίσια της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης. Στην περίπτωση που εφαρμόζουμε τον ευρετικό αλγόριθμο Max-Min ο αριθμός των λύσεων  $n_{sol}$  ισούται με  $2 * n_{par}$ .

Ειδικότερα στην περίπτωση που οι παράμετροι είναι οι μερικές χρησιμότητες του κριτηρίου  $i$  για κάθε σημείο της κλίμακας του κριτηρίου  $i$ , η οποία κλίμακα έχει χωριστεί σε  $(\alpha_i - 1)$  ίσα διαστήματα, έχουμε  $n_{par} = \alpha_i - 1$ . Για παράδειγμα,  $u_k^j$  είναι η μερική χρησιμότητα του σημείου  $k$  της κλίμακας του κριτηρίου, με  $k=2, \dots, \alpha_i$ , που προκύπτει από την επίλυση του  $j$  γραμμικού προγράμματος μεταβελτιστοποίησης. Για  $k=1$  ισχύει πάντα  $u_1^j = 0 \quad \forall j$  γραμμικό πρόγραμμα. Σε αυτή την περίπτωση η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$ASI(i) = 1 - \frac{\sum_{k=2}^{\alpha_i} \sqrt{\left( n_{sol} \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (u(i)_k^j)^2 \right) - \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} u(i)_k^j \right)^2 \right)}}{n_{sol} \sqrt{(\alpha_i - 2)}} \quad (22)$$

Επίσης στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές μετασχηματισμού  $w(i)_k^j = u(i)_{k+1}^j - u(i)_k^j \geq 0 \quad \forall i=1, 2, \dots, n_{cr}, \quad \forall j=1, 2, \dots, n_{sol}$  και  $\forall k=1, 2, \dots, \alpha_i - 1$  της UTASTAR ο ASI( $i$ ) υπολογίζεται ως εξής:

$$ASI(i) = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{\alpha_i - 1} \sqrt{\left( n_{sol} \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (w(i)_k^j)^2 \right) - \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} w(i)_k^j \right)^2 \right)}}{n_{sol} \sqrt{(\alpha_i - 2)}} \quad (23)$$

Ο συνολικός ASI για το κάθε πρόβλημα υπολογίζεται ως η μέση τιμή των ASI( $i$ ) του κάθε κριτηρίου  $i$ :

$$ASI = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ASI(i) \quad (24)$$

Τέλος, υπάρχει δυνατότητα απευθείας υπολογισμού του ASI θεωρώντας ως παραμέτρους τα βάρη των κριτηρίων  $b_i$  τα οποία ισούνται με  $u(i)_{\alpha_i}^j \quad \forall j$  γραμμικό πρόγραμμα. Τότε ο ASI υπολογίζεται ως εξής:

$$ASI = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n_{cr}} \sqrt{\left( n_{sol} \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (u(i)_{a_i}^j)^2 \right) - \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} u(i)_{a_i}^j \right)^2 \right)}}{n_{sol} \sqrt{(n_{cr} - 2)}} \quad (25)$$

Β) Οι μέγιστες και ελάχιστες τιμές της βαρύτητας των κριτηρίων που προκύπτουν από την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης μπορούν να δείξουν το εύρος των τιμών που μπορεί να πάρει η βαρύτητα του κάθε κριτηρίου. Στην περίπτωση που το εύρος είναι μεγάλο (για πολλά από τα κριτήρια) τότε έχουμε και χαμηλό βαθμό ευστάθειας στο εκτιμημένο μοντέλο προτιμήσεων.

Η διερεύνηση ενός τέτοιου δείκτη μπορεί να δώσει μια πρώτη εικόνα της δομής του συνόλου των λύσεων, παρέχοντας τα όρια στα οποία μπορούν να κινηθούν οι τιμές των βαρών των κριτηρίων από την επίλυση του γραμμικού προβλήματος.

Το εύρος της διακύμανσης βαρών παρέχει ένα διάστημα τιμών για την εκτίμηση της σημαντικότητας των κριτηρίων ικανοποίησης. Το εύρος  $WV_i$  υπολογίζεται για το κάθε βάρος  $i$  ως εξής:

$$WV_i = \max\{b_i^j\} - \min\{b_i^j\} \text{ for } j=1,2,\dots,n_{sol} \quad (26)$$

όπου  $b_i^j$  το βάρος του  $i$  κριτηρίου που προκύπτει από την επίλυση του  $j$  γραμμικού προγράμματος μεταβελτιστοποίησης και τέλος  $n_{sol}$  ο συνολικός αριθμός των προς επίλυση γραμμικών προγραμμάτων στα πλαίσια της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης. Το εύρος αυτό μπορεί να αποτυπωθεί και γραφικά παρέχοντας ένα διάγραμμα διακύμανσης βαρών. Επίσης μέσα από την επίλυση των διαφορετικών γραμμικών προγραμμάτων και τον υπολογισμό των διαφορετικών  $b_i^j$  προκύπτει ο πίνακας διακύμανσης βαρών στον οποίο αποτυπώνονται το σύνολο των τιμών για κάθε κριτήριο  $i$  (στήλες) ανά γραμμικό πρόγραμμα  $j$  (γραμμές).

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι εκτός από το μέσο δείκτη ευστάθειας ASI το εύρος διακύμανσης των βαρών  $WV_i$  είναι σε θέση να δώσει πολύτιμες πληροφορίες για την ανάλυση της ευστάθειας των αποτελεσμάτων της μεθόδου UTA. Πιο συγκεκριμένα ο δείκτης υπολογίζει ένα «διάστημα εμπιστοσύνης» για τα εκτιμώμενα βάρη των κριτηρίων. Από την άλλη μεριά ο πίνακας διακύμανσης των βαρών δίνει τη δυνατότητα προσδιορισμού πιθανής ανταγωνιστικότητας των κριτηρίων.

Γ) Ένα άλλο μέτρο ευστάθειας είναι οι κανονικοποιημένες ευκλείδειες αποστάσεις μεταξύ των κορυφών του υπερ-πολύεδρου (ο υπολογισμός των κορυφών μπορεί να γίνει με την επίλυση αλγορίθμου Manas-Nedoma). Αν οι αποστάσεις είναι μικρές και δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ τους, τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχει υψηλός βαθμός ευστάθειας του εκτιμημένου  $n$ -διάστατου χώρου του μοντέλου προτιμήσεων. Σημαντικές διαφοροποιήσεις στις αποστάσεις σημαίνει ότι το υπερ-πολύεδρο εμφανίζει ένα ακανόνιστο σχήμα και συνεπώς η Κεντροβαρική λύση δεν αντιστοιχεί σε ένα αντιπροσωπευτικό μοντέλο προτιμήσεων και απαιτείται περαιτέρω διερεύνηση.

$DK_i K_j$   $i, j=1,2,\dots,\rho$  και  $i \neq j$  (Κανονικοποιημένες Ευκλείδειες Αποστάσεις των Κορυφών)

Δ) Τέλος η ευστάθεια θα μπορούσε να αξιολογηθεί μέσα από τον υπολογισμό του όγκου του υπερ-πολύεδρου που προκύπτει από την επίλυση του αλγορίθμου Manas Nedoma. Ο Όγκος του Υπερ-πολύεδρου (0 V 1) αποτελεί έναν δείκτη της Ευστάθειας του εκτιμημένου μοντέλου προτιμήσεων, ο οποίος συνδυαζόμενος με τις αποστάσεις των κορυφών του υπερ-πολύεδρου

από το βαρύκεντρο (μέση τιμή, τυπική απόκλιση, μέγιστη και ελάχιστη τιμή) δίνουν μια συνολική εικόνα της κανονικότητας ή όχι του υπερ-πολυέδρου.

## 8. Εφαρμογή στις ομαδικές αποφάσεις

### 8.1 Αναγκαιότητα ανάλυσης ευστάθειας σε ομαδικές αποφάσεις

Η Αναλυτική – Συνθετική προσέγγιση, και ειδικά οι μέθοδοι UTA μπορούν να εφαρμοσθούν σε ομαδικές αποφάσεις, είτε με την κατασκευή μιας συλλογικής προσθετικής συνάρτησης προτιμήσεων που να ενσωματώνουν τεχνικές από τη θεωρία της κοινωνικής κρίσης (Social Choice Theory) ή με τη κατασκευή και τη συγκριτική ανάλυση αντίστοιχων ατομικών συναρτήσεων. Σε αυτό το πλαίσιο οι τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού που εφαρμόζονται συχνά οδηγούν σε άπειρες λύσεις καθιστώντας αναγκαία την ανάλυση ευστάθειας του μοντέλου των προτιμήσεων, ούτως ώστε να βρεθεί λύση αντιπροσωπευτική στον (στους) αποφασίζοντα (ες). Ο κύριος στόχος της Αναλυτικής – Συνθετικής προσέγγισης δεν είναι να υποδειχθεί μια απόφαση αλλά να υποστηριχθεί η ανάλυση των ατομικών και συλλογικών μοντέλων προτίμησης, να αυξηθεί η γνώση για τις δομές των προτιμήσεων όλων των συμμετεχόντων και να υποστηριχθούν οι περαιτέρω ενέργειες, όπως οι συμβιβασμοί και οι διαπραγματεύσεις στη διαδικασία λήψης απόφασης σε επίπεδο ομάδας. Η ανάλυση της ευρωστίας των ατομικών και συλλογικών μοντέλων προτίμησης μπορεί να υποστηρίξει την αλληλεπιδραστική φύση της Αναλυτικής – Συνθετικής προσέγγισης.

### 8.2 Ανάλυση ευστάθειας ομαδικών μοντέλων προτίμησης

Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις όπου η Αναλυτική – Συνθετική προσέγγιση χρησιμοποιήθηκε προκειμένου να υποστηρίξει συλλογικές αποφάσεις, κυρίως σε περιπτώσεις μικρής ομάδας αποφασιζόντων. Ο Spyridakos και λοιποί (2001) εφάρμοσαν τη UTA II και το μοντέλο των Cook και Seiford (1978) προκειμένου να εκτιμηθεί μια κοινά αποδεκτή συνάρτηση αξιών, που να αξιολογεί όλες τις θέσεις ευθύνης σε μεγάλο Οργανισμό. Οι Beuthe και Scanella (2001) πραγματοποίησαν μια λεπτομερή ανάλυση που παρουσιάζει τη σχέση μεταξύ της «ποιότητας» των αποτελεσμάτων και της αξίας των παραμέτρων που περιλαμβάνονται στις διαφορετικές μεθόδους UTA. Ο Kadziński και λοιποί (2012) πρότειναν την έννοια της αντιπροσωπευτικής συνάρτησης αξιών που εφαρμόστηκε σε ευσταθή προβλήματα πολλαπλών κριτηρίων και που λύθηκε από την επέκταση των μεθόδων UTAGMS και GRIP.

Οι Spyridakos και Yannacopoulos (2013) παρουσίασαν ένα μεθοδολογικό πλαίσιο και αντίστοιχο λογισμικό, εφαρμόζοντας τις μεθόδους UTA σε ομαδικές αποφάσεις μικρών ομάδων. Η διαδικασία περιλαμβάνει δύο εναλλακτικές διαδρομές. Η πρώτη αφορά την a priori σύνθεση των ατομικών ολικών προτιμήσεων σε μια συλλογική προδιάταξη και ακολούθως στην εκτίμηση του συλλογικού αθροιστικού μοντέλου προτιμήσεων. Ο δεύτερος (a posteriori σύνθεση των ατομικών προτιμήσεων) λειτουργεί με έναν αντίθετο τρόπο, καθότι πρώτα υπολογίζονται οι ατομικές συναρτήσεις αξίας και κατόπιν αυτές συντίθενται σε μια συλλογική. Ο βασικός στόχος αυτής της προσέγγισης είναι να αναλυθούν τα μοντέλα

προτίμησης, τόσο σε ατομικό, όσο και σε συλλογικό επίπεδο, για να εμπλουτισθεί η γνώση σχετικά με τη δομή του προβλήματος απόφασης και των προτιμήσεων του αποφασίζοντων.

Η εκτίμηση των ατομικών και συλλογικών μοντέλων προτίμησης επιτυγχάνεται με τη λύση ενός γραμμικού προγράμματος (LP). Το εκτιμώμενο προσθετικό μοντέλο αξίας παρέχει μια ταξινόμηση των εναλλακτικών ενεργειών αναφοράς όσο το δυνατόν πιο κοντά στην προδιάταξη προτιμήσεων του αποφασίζοντα, ελαχιστοποιώντας το σφάλμα υποεκτίμησης ή υπερεκτίμησης κάποιων εναλλακτικών ενεργειών. Στις περισσότερες από τις περιπτώσεις, και συχνότερα σε περιπτώσεις χωρίς σφάλματα, το γραμμικό πρόγραμμα οδηγεί σε άπειρες λύσεις (χαμηλή ευστάθεια), οι οποίες οριοθετούνται από κυρτό υπερπολύεδρο. Σε αυτήν την περίπτωση τα συστήματα MINORA και MIIDAS περιλαμβάνουν μεταβέλτιστες τεχνικές αναζήτησης λύσεων (πολυδιάστατα σημεία) που υπολογίζονται από τη μεγιστοποίηση της βαρύτητας σε καθένα από τα κριτήρια. Τέλος, η μέση λύση (barycenter) (Σχήμα 8.1) επιλέγεται ως λύση εργασίας. Μια άλλη προσέγγιση μπορεί να είναι η εκτίμηση όλων των ακμών του κυρτού υπερπολύεδρου, και όχι μόνο αυτών που μεγιστοποιούν και ελαχιστοποιούν τα βάρη των κριτηρίων, με την εφαρμογή του αλγορίθμου Manas-Nedoma.

Ο βαθμός ευστάθειας των ατομικών μοντέλων προτίμησης μπορεί να μετρηθεί από ένα σύνολο δεικτών:

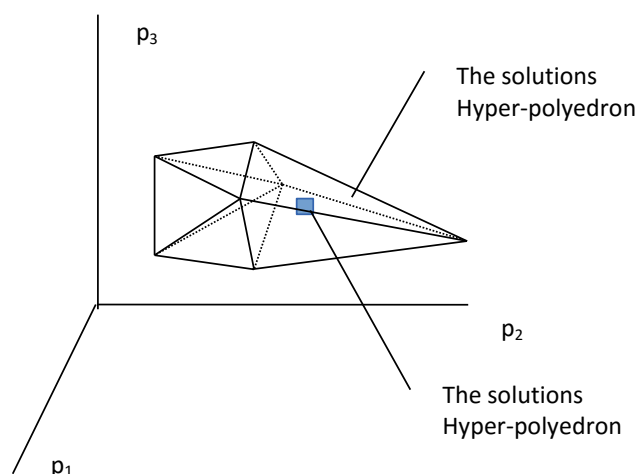
A. Η απόσταση μεταξύ των ελάχιστων και μέγιστων τιμών των βαρών των κριτηρίων (μετα βέλτιστη ανάλυση):  $w_i = (\text{Max}(W_i) - \text{Min}(W_i))$ ,  $i=1,3,\dots,n.$ ,  $w_i$ , το βάρος του κριτηρίου  $i$

B. Η κανονικοποιημένη ευκλείδεια απόσταση των ακμών του υπερπολύεδρου:  $DK_iK_j$ ,  $i, j=1,2,\dots,r$  και  $i \neq j$

Γ. Η ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των barycenters :  $DK_iBC_j$ ,  $i, j=1,2,\dots,r$  και  $i \neq j$

Δ. Την ευκλείδεια απόσταση μεταξύ του Barycenters ( $M_i$ ) των ατομικών μοντέλων προτίμησης:  $DM_{ij}$ ,  $i, j=1,2,\dots, r$  ( $r$ : Αποφασίζων)

Ε. Την ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των Barycenters του συλλογικού μοντέλου προτίμησης ( $M_o$ ) και των ατομικών ( $M_i$ ).



Σχήμα 8.1: Γεωμετρική Αναπαράσταση Λύσεων σε υπερπολύεδρο για τρία κριτήρια

### 8.3 Ανάλυση Ευστάθειας μέσω οπτικών αλληλεπιδραστικών προσεγγίσεων

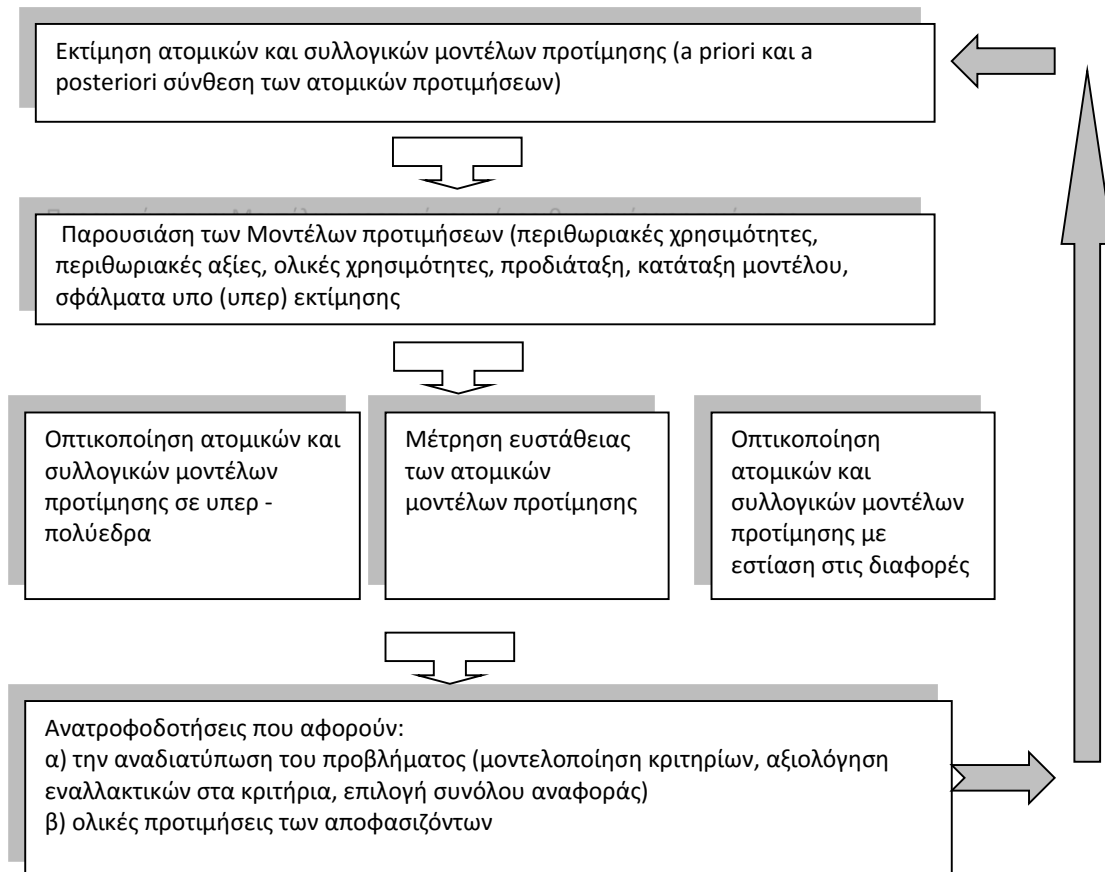
Σκοπός αυτής της προσέγγισης (Robust Analysis through Visual and Interactive (RAVI)) είναι η περαιτέρω ενίσχυση της αναλυτικής συνθετικής προσέγγισης και του αλληλεπιδραστικού χαρακτήρα της υποστήριξης της απόφασης για την εκτίμηση προσθετικών συναρτήσεων αξιών. Σε αυτή τη βάση εμπλουτίζονται οι υφιστάμενοι διάλογοι ανατροφοδότησης των συστημάτων MINORA και MIIDAS, προκειμένου να απαντηθούν ερωτήσεις του τύπου:

- α) πόσο ευσταθείς είναι οι ατομικές συναρτήσεις αξιών
- β) ποια κριτήρια παρουσιάζουν μεγαλύτερη ευαισθησία σε αλλαγές
- γ) Πόσο διαφέρουν μεταξύ τους τα ατομικά μοντέλα προτιμήσεων και πόσο καθένα από αυτά διαφοροποιείται από το συλλογικό μοντέλο
- δ) Ποια κριτήρια παρουσιάζουν τις υψηλότερες ή χαμηλότερες; διαφοροποιήσεις μεταξύ των αποφασιζόντων – μελών της ομάδας DMs

Τα αποτελέσματα των παραπάνω αναλύσεων μπορεί να οδηγήσουν στους ακόλουθους τύπους ανατροφοδοτήσεων:

- α) Αναδιατύπωση του προβλήματος απόφασης στη βάση της αναδιαμόρφωσης των κριτηρίων, της επαναξιολόγησης των εναλλακτικών λύσεων σχετικά με τα κριτήρια και η επιλογή νέου συνόλου αναφοράς.
- β) Αναδιατύπωση της υποκειμενικής κρίσης των αποφασιζόντων στο σύνολο αναφοράς ή στην επαναξιολόγηση των εναλλακτικών λύσεων στα κριτήρια.
- γ) Ενίσχυση της ευστάθειας των ατομικών μοντέλων προτίμησης μέσω τεχνικών μετα-ανάλυσης και πρόσθετων πληροφοριών σχετικά με τις ατομικές προτιμήσεις.

Στο παρακάτω σχήμα παρατίθενται τα βήματα αυτής της διαδικασίας:



Σχήμα 8.2: Τα βήματα και οι ανατροφοδοτήσεις στην ανάλυση ευστάθειας

## 9. Παράδειγμα και Πειραματική Εφαρμογή

### 9.1 Παράδειγμα

Η προτεινόμενη μεθοδολογική προσέγγιση θα παρουσιαστεί μέσω ενός παραδείγματος που αφορά τη συνολική αξιολόγηση θέσεων ευθύνης σε μεγάλο οργανισμό. Στη διαδικασία αξιολόγησης συμμετείχαν τέσσερις εμπειρογνώμονες. Υπήρξαν 25 θέσεις ευθύνης ( $p_1, p_2, \dots, p_{25}$ ) που αξιολογήθηκαν σε 6 κριτήρια (προσόντα που προβλέπονται για τον κάτοχο της κάθε θέσης, διοικούμενο προσωπικό, αποφάσεις που λαμβάνονται, πολλαπλότητα των στόχων, ευθύνη των θέσεων και προϋπολογισμό του τομέα ευθύνης). Από το σύνολο των 25 θέσεων, οι 13 επιλέχθηκαν ως σύνολο αναφοράς και κατατάχθηκαν σε φθίνουσα σειρά ευθύνης ξεχωριστά από κάθε εμπειρογνώμονα σύμφωνα με τις εκτιμήσεις τους (Πίνακας 9.1).

Πίνακας 9.1: Ατομική (DM) και συλλογική (collective-BORDA) προδιάταξη εμπειρογνώμωνων

Positions	DM1	DM2	DM3	DM4	Collective (BORDA)	DM3 After FeedBacks	COLLECTIVE (BORDA) After FeedBacks
$p_3$	1	2	4	6	3	4 (1)	3
$p_{13}$	2	1	2	1	1	2 (3)	1
$p_7$	3	3	1	2	2	1 (2)	2
$p_{17}$	4	4	3	3	4	3 (4)	4
$p_4$	5	6	5	7	5	5	5
$p_{22}$	6	5	7	5	5	7	5
$p_{16}$	7	7	8	9	7	8 (9)	7
$p_{10}$	8	8	6	4	6	6	6
$p_6$	9	9	10	8	8	10 (8)	9
$p_{18}$	10	10	11	10	9	11 (10)	9
$p_{23}$	11	11	12	11	10	12	10
$p_9$	12	12	9	13	11	9 (11)	11
$p_{19}$	13	13	13	12	12	13	12

Τα ατομικά και το συλλογικό μοντέλο προσθετικής χρησιμότητας υπολογίστηκαν, χρησιμοποιώντας τον απλό, αλλά αποτελεσματικό κανόνα σύνθεσης του Borda. Ο Πίνακας 9.2 περιλαμβάνει τα βάρη των κριτηρίων αξιολόγησης μετά την ανάλυση

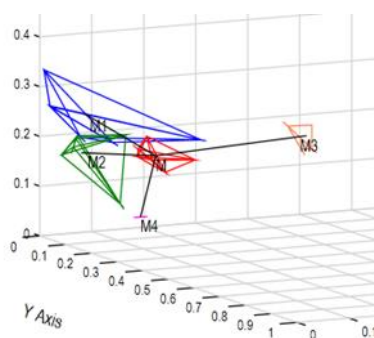


μεταβελτιστοποίησης (Siskos and Yannacopoulos, 1985), όπως αυτά εκτιμήθηκαν σε ατομικό και συλλογικό επίπεδο και στο σχήμα 9.1 τα ίδια αποτελέσματα σε τρισδιάστατη γραφική παράσταση υπό μορφή υπερπολυέδρων (ατομικά και συλλογικό).

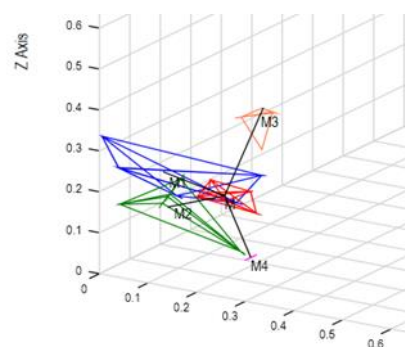
**Πίνακας 9.2:Βάρη κριτηρίων ατομικά και συλλογικά (μετά από μεταβελτιστοποίηση)**

Criteria	DM1			DM2			DM3		
	min	mean	max	min	mean	Max	min	mean	max
Cr 1	0	0.036	0.211	0	0.023	0.121	0.398	0.426	0.452
Cr 2	0	0.12	0.282	0	0.135	0.279	0.144	0.152	0.16
Cr 3	0.211	0.257	0.333	0.112	0.189	0.227	0.162	0.198	0.214
Cr 4	0.198	0.266	0.336	0.217	0.244	0.31	0.058	0.074	0.09
Cr 5	0.158	0.189	0.264	0.167	0.223	0.263	0.105	0.127	0.149
Cr 6	0	0.131	0.199	0.14	0.187	0.311	0.032	0.033	0.034

Criteria	DM4			Collective (Borda S.C.F.)		
	min	mean	max	Min	Mean	max
Cr 1	0.058	0.058	0.058	0.051	0.061	0.165
Cr 2	0.275	0.275	0.275	0.03	0.185	0.279
Cr 3	0.081	0.081	0.081	0.115	0.184	0.231
Cr 4	0.102	0.102	0.102	0.165	0.191	0.22
Cr 5	0.227	0.227	0.227	0.178	0.204	0.235
Cr 6	0.257	0.257	0.257	0.114	0.173	0.23



(a)



(b)

**Σχήμα 9.1: Τρισδιάστατες όψεις υπερπολυέδρων πριν (a) και μετά (b) τις αναδράσεις μεταβελτιστοποίησης (μπλε χρώμα - DM 1, πράσινο - DM 2, Orange - DM3, Coral - DM 4, κόκκινο - Collective).**

Η ανάλυση της ευστάθειας οδηγεί σε μερικά χρήσιμα συμπεράσματα:

- Ο DM4 διατηρεί ένα ευσταθές μοντέλο προτίμησης, ενώ όλοι οι άλλοι παρουσιάζουν ένα υψηλό επίπεδο αστάθειας.
- Η υψηλότερη αστάθεια παρουσιάζεται στον DM1 που ακολουθείται από τον DM2.
- Η δομή των προτιμήσεων των DM1 και DM2 είναι αρκετά στενές μεταξύ τους και απεικονίζονται στην τρισδιάστατη γραφική παράσταση με τη μικρή απόσταση των βαρυκέντρων τους.
- Το αντίθετο, οι DM3 και DM4 φαίνονται να διαφοροποιούνται από τους δύο πρώτους.

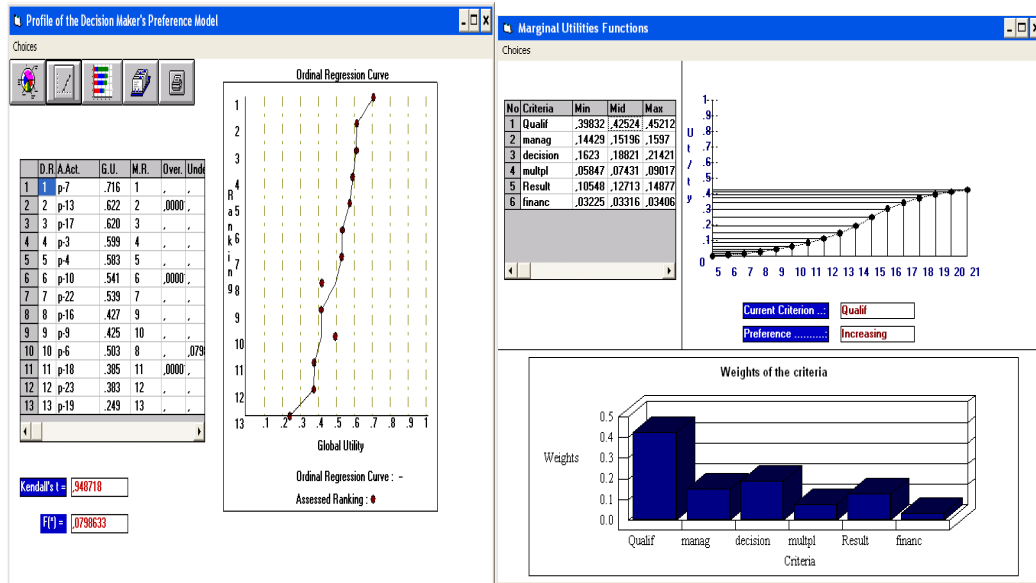
Για τις ανάγκες της παρουσίασης θα επικεντρώσουμε την ανάλυσή μας στον DM3 δεδομένου ότι το μοντέλο προτίμησης έχει μερικές ασυνέπειες σε σχέση με την αρχική προδιάταξη, ως προς τις θέσεις ευθύνης  $r_6$  και  $r_{16}$  που ταξινομούνται σε άλλη θέση σε σχέση με την αρχική (σχήμα 9.2). Αυτό φαίνεται επίσης από την απόσταση των βαρυκέντρων του DM3 τόσο με τους άλλους εμπειρογνώμονες, όσο και με το συλλογικό υπερπολύεδρο (Πίνακας 9.3). Τα ανωτέρω μας οδηγούν για να επανεξετάσουν την περίπτωση του DM3.

**Πίνακας 9.3: Euclidean distances of the barycenters**

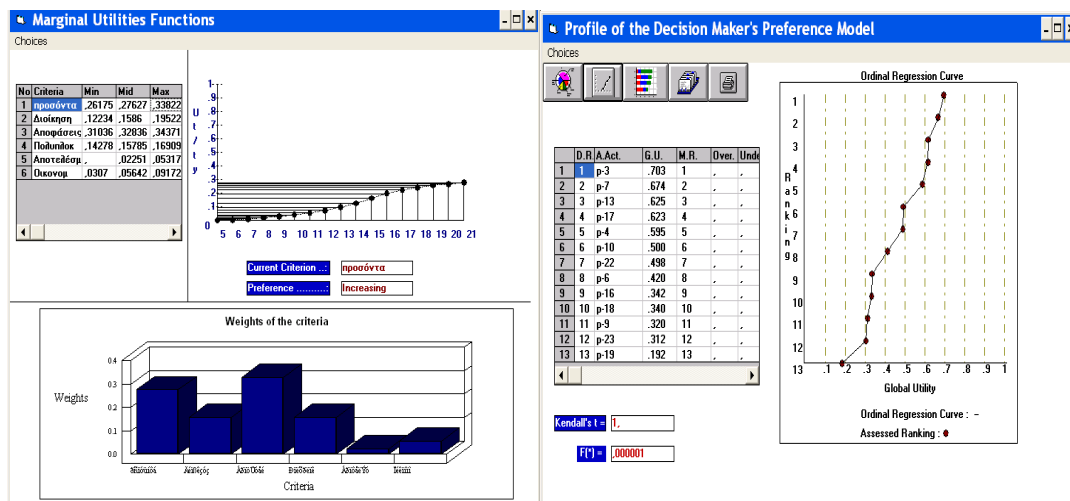
Barycenters	Euclidean Distance (before Feedback)	Euclidean Distance (After FeedBacks)
M1 - M0	0.0546	0.05418
M2 - M0	0.03353	0.03389
M3-M0	0.17004	0.13848
M4-M0	0.07561	0.0760
M1-M2	0.00987	0.00987
M1-M3	0.20613	0.10898
M1- M4	0.0999	0.09999
M2-M3	0.21308	0.14806
M2-M4	0.05674	0.05674
M3-M4	0.22312	0.20783

Προκειμένου να εξηγηθούν και/ή να διορθωθούν οι ασυνέπειες μεταξύ υποκειμενικής κρίσης και μοντέλου προτίμησης του DM3, οι υψηλοί δείκτες διαφοροποίησης από τους άλλους DMs και το επίπεδο ευστάθειας έγινε διάλογος μεταξύ του DM3 και του Συμβούλου Απόφασης. Ο διάλογος οδήγησε σε μια αναθεώρηση των προτιμήσεων του DM3 ως προς την αρχική κατάταξη, η οποία τελικά οδήγησε στην εκτίμηση μιας νέας συλλογικής ταξινόμησης (Πίνακας 9.1), ως συνέπεια της ανασύστασης της νέας προδιάταξης από το μοντέλο προτίμησης του DM3.

Ο Πίνακας 9.3 δείχνει επίσης τη βελτίωση των ευκλειδίων αποστάσεων των βαρυκέντρων.



Σχήμα 9.2: Μοντέλο προσθετικής αξίας για τον DM3 (αρχικό)



Σχήμα 9.3: Μοντέλο προσθετικής αξίας για τον DM3 (μετά από ανάδραση)

## 9.2 Πειραματική Εφαρμογή

Η πειραματική εφαρμογή της Ανάλυσης Ευστάθειας πραγματοποιήθηκε σε ένα πραγματικό πρόβλημα από την οποία εκτιμήθηκε μοντέλο προτιμήσεων στο οποίο εμφανίζεται μεγάλο βαθμός αστάθειας. Το πρόβλημα αφορά την κατάταξη 25 εναλλακτικών αποφάσεων με την μέθοδο UTA II σύμφωνα με τα παρακάτω βήματα:

- Κατασκευάστηκε η συνεπής οικογένεια κριτηρίων.

Το πρόβλημα περιλαμβάνει 6 ποιοτικά κριτήρια εκ των οποίων το Κριτήριο 1 λαμβάνει διακριτές τιμές από 5 έως 21 και τα υπόλοιπα στην κλίμακα Likert 1-5

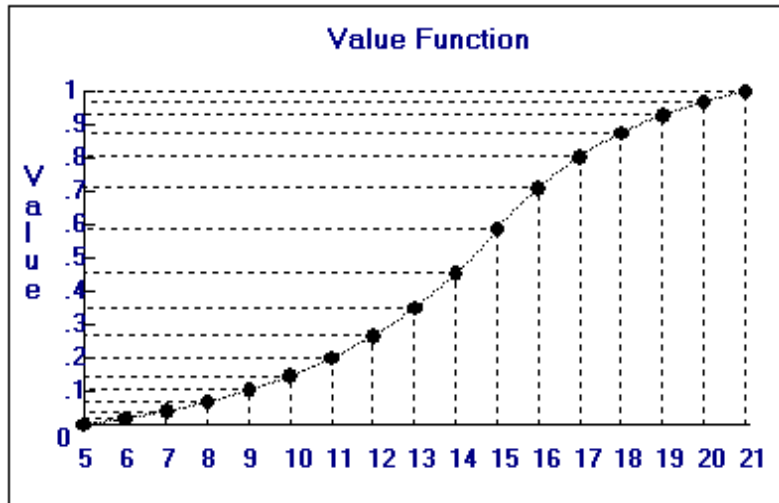
- Βαθμολογήθηκαν οι Εναλλακτικές Ενέργειες (Αποφάσεις) στα κριτήρια σύμφωνα με τον παρακάτω Πίνακα:

Πίνακας 9.4: Πολυκριτήριος πίνακας αξιολόγησης

Εναλλ.Ενέργειες	Κριτ. 1	Κριτ.2	Κριτ.3	Κριτ.4	Κριτ.5	Κριτ.6
p-1	17	1	4	5	4	1
p-2	16	2	4	4	5	1
p-3	15	1	5	5	3	4
p-4	16	3	4	5	3	3
p-5	12	4	2	3	3	3
p-6	16	2	3	4	4	4
p-7	17	2	5	3	5	5
p-8	13	3	3	3	3	3
p-9	16	1	3	3	3	1
p-10	16	3	4	3	3	5
p-11	16	3	4	4	4	4
p-12	15	1	4	3	4	2
p-13	16	3	4	5	4	5
p-14	14	3	3	4	4	5
p-15	15	2	5	4	5	4
p-16	14	2	3	4	5	3
p-17	15	1	5	4	5	3
p-18	14	1	3	4	4	4
p-19	13	3	2	2	2	2
p-20	16	3	4	4	4	5
p-21	14	3	3	3	3	2
p-22	16	2	3	5	4	4
p-23	14	4	2	3	3	3
p-24	13	4	3	4	3	4
p-25	15	5	4	5	5	1
p-26	14	4	4	4	4	1

- Κατασκευάστηκαν οι συναρτήσεις μερικών αξιών των κριτηρίων με την εφαρμογή των διαδραστικών τεχνικών που περιλαμβάνονται στο σύστημα MIIDAS.

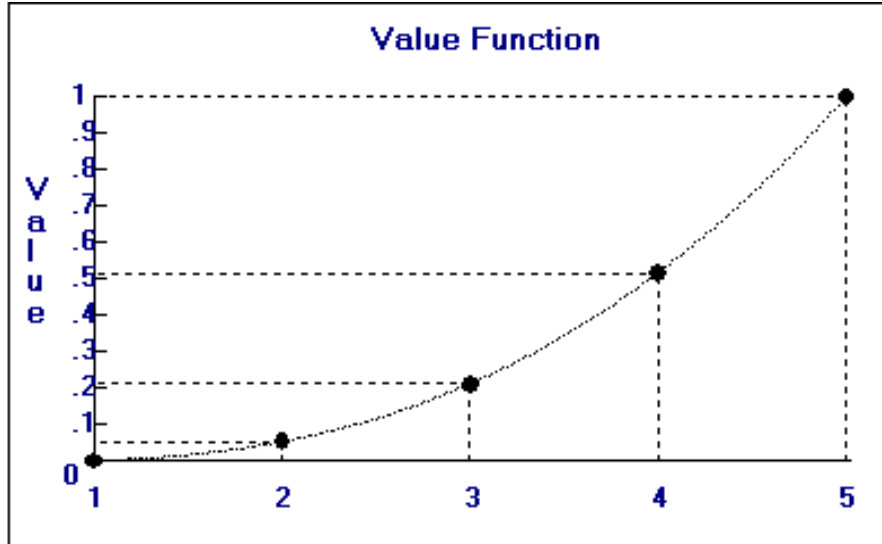
Οι συναρτήσεις είναι:



Σχήμα 9.4: Συνάρτηση αξιών κριτηρίου 1

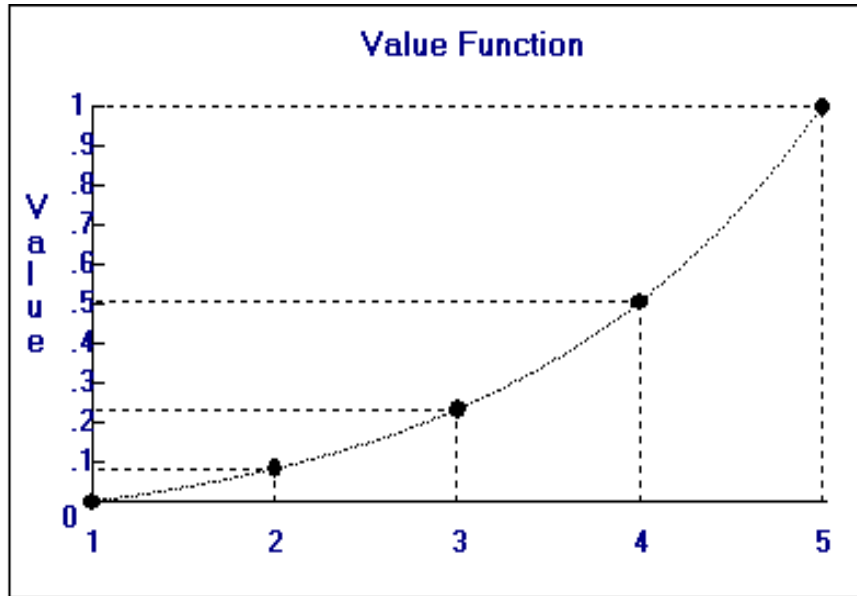
$$\psi = a + be^{cx}, x \in [5,13], \text{ όπου } a = -0.07449, b = 0.05059 \text{ και } c = 0.387$$

$$\psi = a - be^{cx}, x \in [13,21], \text{ όπου } a = -0.4999, b = 0.5294 \text{ και } c = 6.4075$$



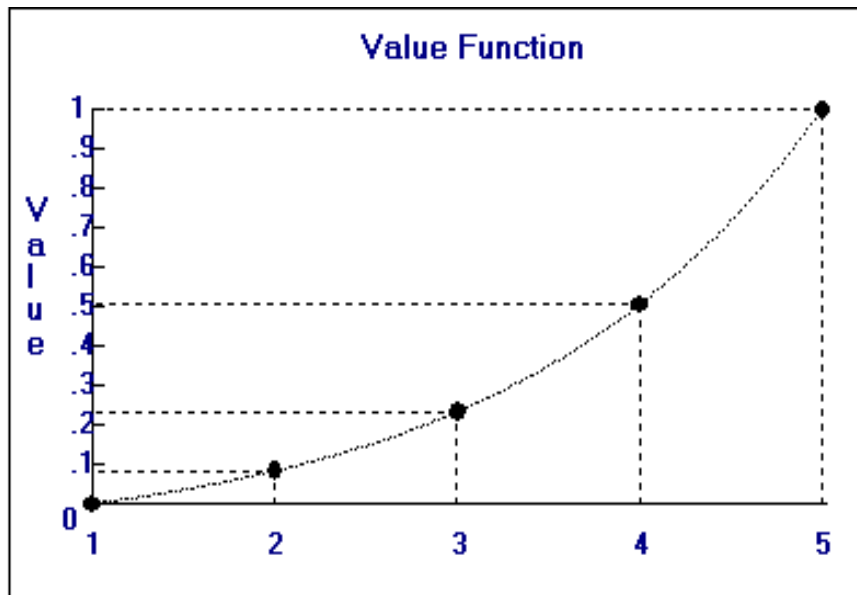
Σχήμα 9.5: Συνάρτηση αξιών κριτηρίου 2

$$\psi = ax^{cx} + b, x \in [1,5] \text{ όπου } a = -0.0084, b = 0.0084 \text{ και } c = 2.079$$



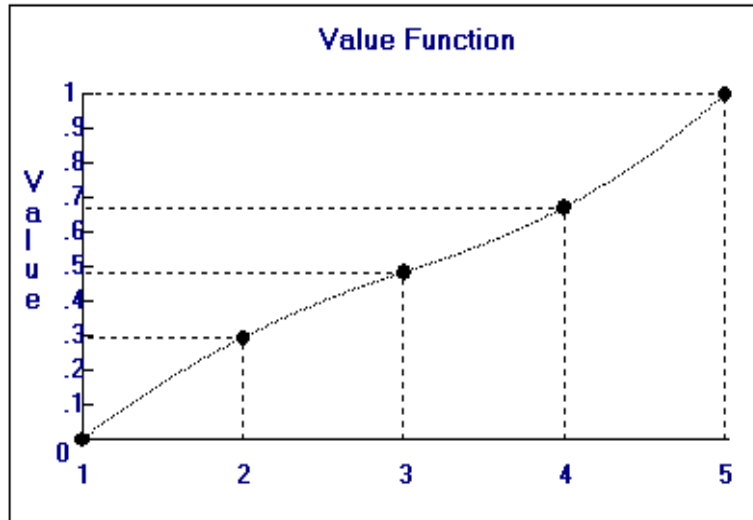
Σχήμα 9.6: Συνάρτηση αξιών κριτηρίου 3

$$\psi = a + be^{cx}, x \in [5,13]] \text{ όπου } a=-.1017811, b=0.0711, c= 0.264651,$$



Σχήμα 9.7: Συνάρτηση αξιών κριτηρίου 4

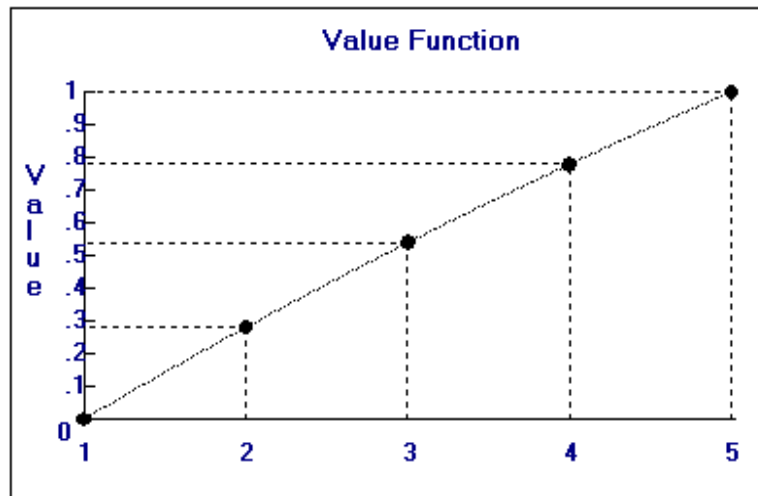
$$\psi = a + be^{cx}, x \in [5,13]] \text{ όπου } a=-.1017811, b=0.0711, c= 0.264651,$$



Σχήμα 9.8: Συνάρτηση αξιών κριτηρίου 5

$a - be^{cx}, x \in [1,3]$ , όπου  $a=0.8332754, b=1.011171, c=-.1935$ ,

$\psi = a + be^{cx}, x \in [3,5]$ , όπου  $a=0.0626, b=0.2500001, c=0.5059$



Σχήμα 9.9: Συνάρτηση αξιών κριτηρίου 6

$\psi = a - be^{cx}, x \in [1,5]$  όπου  $a=3.678393, b=3.810373, c=-0.035251$

- Επιλέχθηκε σύνολο αναφοράς των εναλλακτικών ενεργειών. Από το σύνολο των 26 εναλλακτικών ενεργειών επιλέχθηκαν 13 σαν σύνολο αναφοράς (Πίνακας 6)
- Ο αποφασίζων κατέταξε τις εναλλακτικές ενέργειες του συνόλου αναφοράς εκφράζοντας τις σφαιρικές προτιμήσεις του. Στον Πίνακα που ακολουθεί δίδεται η κατάταξη των εναλλακτικών ενεργειών του Συνόλου Αναφοράς.

Πίνακας 9.5: Πολυκριτήριος πίνακας αξιολόγησης εναλ. ενεργειών αναφοράς

Εναλλ. Ενέργειες	Κατάταξη	Κριτ.1	Κριτ.2	Κριτ.3	Κριτ.4	Κριτ.5	Κριτ.6
p-3	1	15	1	5	5	3	4
p-13	2	16	3	4	5	4	5
p-7	3	17	2	5	3	5	5
p-17	4	15	1	5	4	5	3
p-4	5	16	3	4	5	3	3
p-22	6	16	2	3	5	4	4
p-16	7	14	2	3	4	5	3
p-10	8	16	3	4	3	3	5
p-6	9	16	2	3	4	4	4
p-18	10	14	1	3	4	4	4
p-23	11	14	4	2	3	3	3
p-9	12	16	1	3	3	3	1
p-19	13	13	3	2	2	2	2

- Κατασκευάστηκε το Γραμμικό Πρόγραμμα της UTA II για την εκτίμηση των βαρών των κριτηρίων σύμφωνα με τις σφαιρικές προτιμήσεις του αποφασίζοντος, και επιλύθηκε το Γραμμικό Πρόβλημα. Η επίλυση του Γραμμικού προβλήματος έδωσε λύση με υψηλό βαθμός Αστάθειας και μηδενικό δείκτη F(\*).

Οι νέες δυνατότητες για την ανάλυση της ευστάθειας περιλαμβάνουν τα παρακάτω.

#### 1. Τομογραφία του Υπερ-πολυέδρου των λύσεων του Γραμμικού προβλήματος

Η τομογραφία αποτελεί μια νέα λειτουργία που επιτρέπει την παρουσίαση της δομής της αστάθειας του μοντέλου προτιμήσεων καθώς :

- Ο αποφασίζων επιλέγει κριτήριο.
- Ορίζει το εύρος [μίνκριτ, μακκριτ] στην τιμή της βαρύτητας του κριτηρίου που θέλει να μελετήσει
- Ορίζει το βήμα στη μεταβολή της τιμής του κριτηρίου (step)

Η τεχνική αυτή υλοποιείται σε βήματα. Σε πρώτη φάση ξεκινά με την μικρότερη τιμή στη βαρύτητα του κριτηρίου που έθεσε ο αναλυτής αποφάσεων. Σε κάθε βήμα βρίσκει το τμήμα του υπερπολύεδρου στο οποίο η τιμή της βαρύτητας του επιλεχθέντος κριτηρίου είναι ίση με συγκεκριμένη τιμή. Αυτό επιτυγχάνεται με την επίλυση του γραμμικού προβλήματος της UTA με την προσθήκη μιας ακόμη συνθήκης

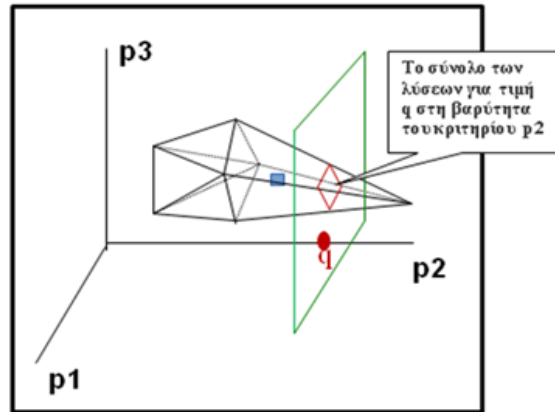
$$r_i = Q_i \text{ όπου } r_i \text{ είναι η βαρύτητα του κριτηρίου } i \text{ και } Q_i = \text{μίνκριτ} + j \text{ step}$$

Οι νέες μέγιστες και ελάχιστες τιμές στις βαρύτητες των κριτηρίων που έχουν υπολογισθεί εμφανίζονται σε πίνακα και σε διάγραμμα παράλληλων συντεταγμένων.

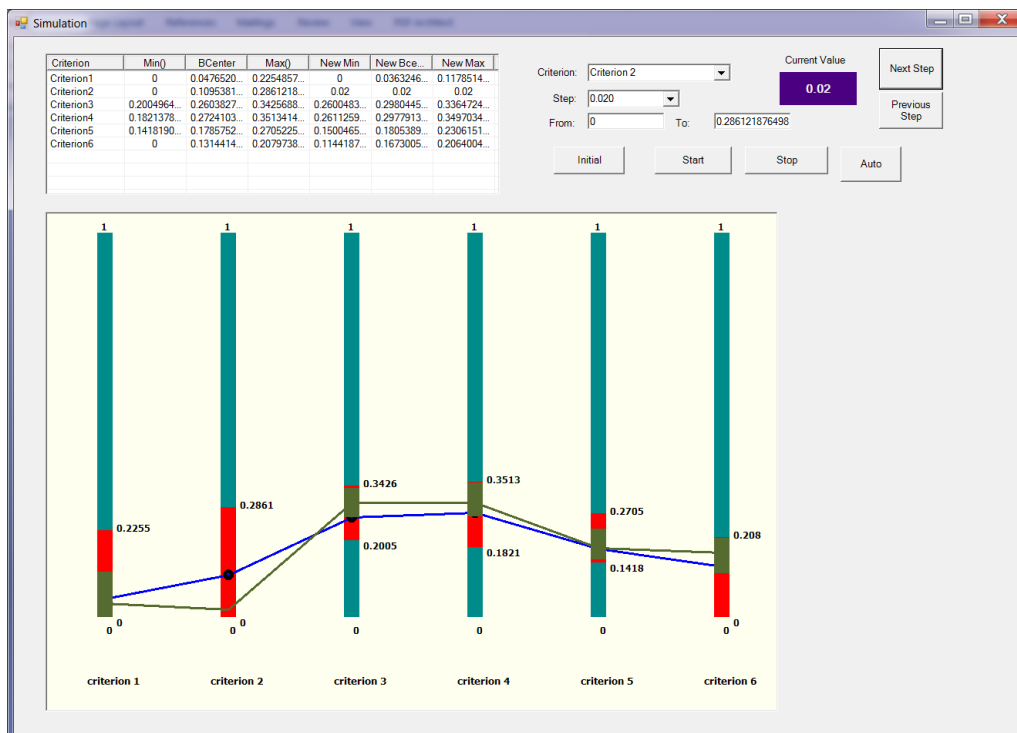


Μια εποπτική παρουσίαση δίνεται στο σχήμα 9.10 όπου για τρία κριτήρια (τρισδιάστατο χώρο) βρίσκουμε το πολύγωνο των λύσεων όταν η τιμή της βαρύτητας του κριτηρίου  $p_2 = q$ .

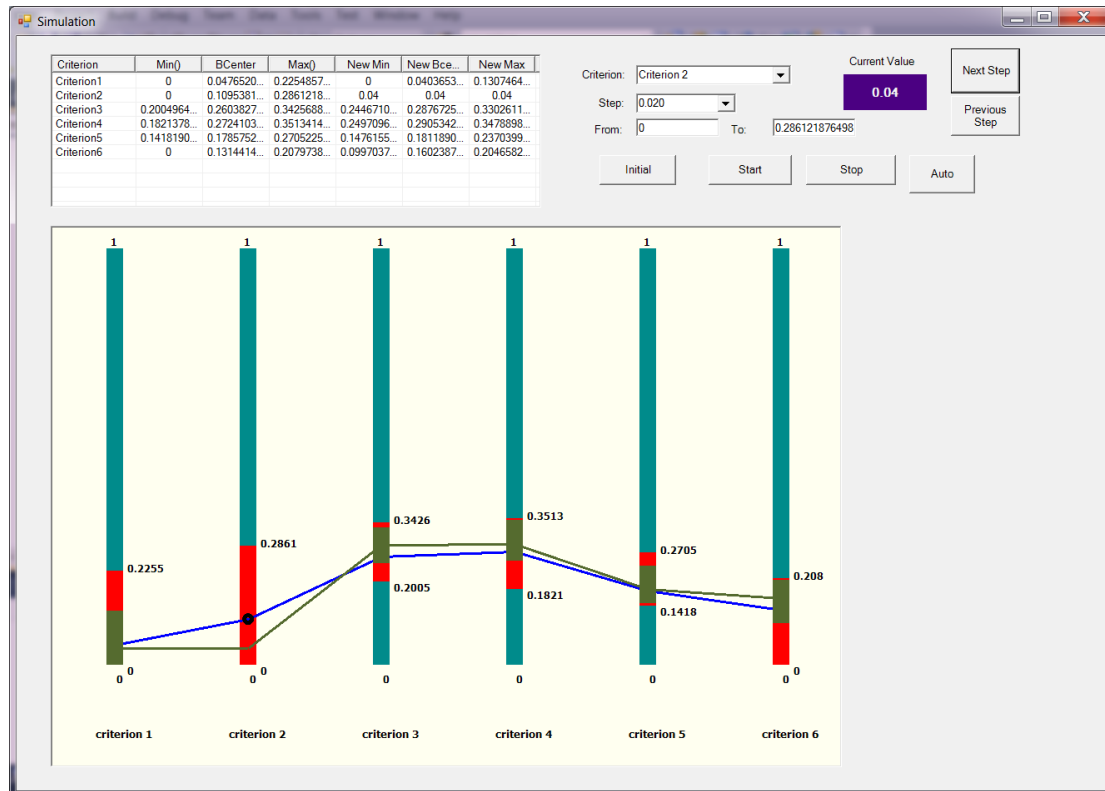
Η τεχνική αυτή λειτουργεί όπως ακριβώς και η τομογραφία όπου λαμβάνουμε δισδιάστατες εγκάρσιες τομές ενός στερεού ως προς έναν άξονα.



Σχήμα 9.10: Εγκάρσια τομή του υπερπολυέδρου για δεδομένη τιμή στη βαρύτητα του κριτηρίου  $p_2$



Σχήμα 9.11: Η τομογραφία του υπερπολυέδρου για τιμή 0.02 στη βαρύτητα του κριτηρίου 2



Σχήμα 9.12: Η τομογραφία του υπερπολύεδρου για τιμή 0.04 στη βαρύτητα του κριτηρίου 2

Στο παράδειγμά μας και στο κριτήριο 2 με βήμα 0.02 υπολογίσαμε τα υπερ-πολύεδρα των λύσεων για τιμές 0,02, 0,04 ....

Όπως φαίνεται στα σχήματα 19 και 20 επιτεύχθηκε μεγαλύτερη ευστάθεια για σταθερές τιμές βαρύτητας στο δεύτερο κριτήριο. Είναι αξιοσημείωτο, ότι υπάρχει διαφοροποίηση της ευστάθειας στα μοντέλα σε συνάρτηση με τη τιμή της βαρύτητας που δίνεται στο κριτήριο 2.

#### Ανάδραση 1: Φράγμα Κριτηρίων

Μια ανάδραση που προκύπτει από την ανάλυση της ευστάθειας του εκτιμημένου μοντέλου προτιμήσεων είναι ο προσδιορισμός μικρότερων διαστημάτων μεταξύ των μέγιστων και ελάχιστων βαρών των κριτηρίων που έχουν εκτιμηθεί από την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης.

Στο παράδειγμά μας παρατηρούμε ότι στο πρώτο, το δεύτερο και το έκτο κριτήριο η ελάχιστη τιμή της βαρύτητας είναι 0, πράγμα που μπορεί να μην ανταποκρίνεται στις πραγματικές διαθέσεις του αποφασίζοντα. Επίσης στο κριτήριο 3 η μέγιστη τιμή βαρύτητας είναι 0.3426 που μπορεί να θεωρείται υψηλή για τις προτιμήσεις του αποφασίζοντα.

Στη ανάδραση αυτή, μέσω διαλόγου με τον αποφασίζοντα, προσπαθούμε να αντλήσουμε νέες ελάχιστες και μέγιστες τιμές στις βαρύτητες των κριτηρίων  $[q_i, Q_i]$  με έμμεσο τρόπο που ανταποκρίνονται καλύτερα στις προτιμήσεις του αποφασίζοντος, επιτυγχάνοντας παράλληλα υψηλότερη ευστάθεια και συρρίκνωση του υπερ-πολύεδρου.

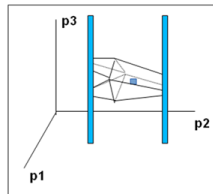
Το γραμμικό πρόγραμμα της UTA εμπλουτίζεται με νέες συνθήκες που αφορούν τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές στις βαρύτητες των κριτηρίων της μορφής:

$$p_i > q_i, \quad p_i < Q_i,$$

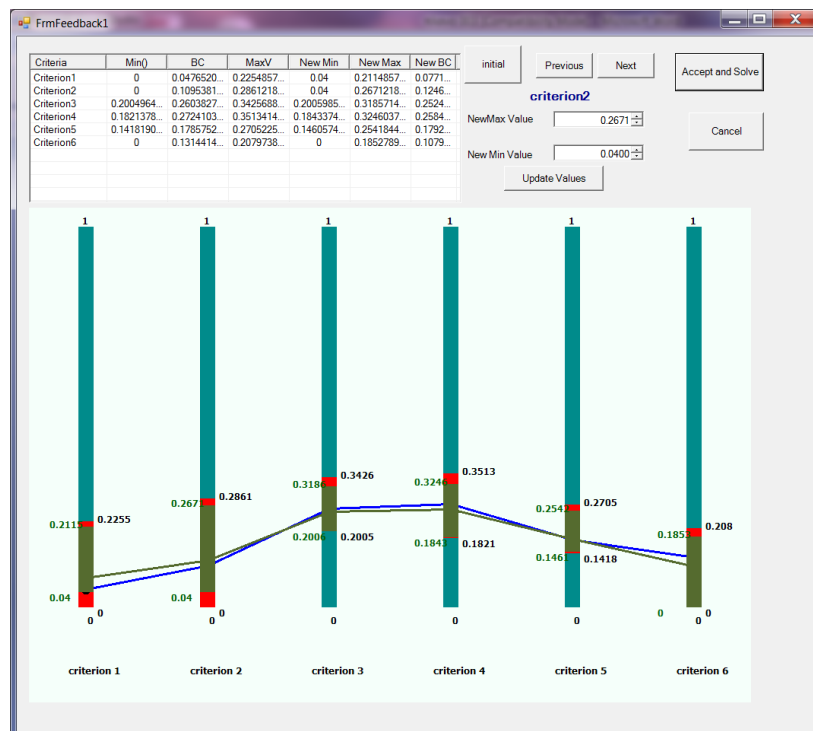
Ουσιαστικά με την εφαρμογή αυτών των δύο περιορισμών περιορίζεται το υπερ-πολύεδρο ως προς τη συγκεκριμένες διαστάσεις του (αυτές στις οποίες θέτουμε περιορισμούς) όπως φαίνεται στο σχήμα 9.13.

Η λύση του γραμμικού προβλήματος θα οδηγήσει σε νέες περισσότερο ευσταθείς λύσεις, όπως φαίνεται και στο παράδειγμά μας που δόθηκαν νέες ελάχιστες και μέγιστες τιμές στις βαρύτητες των κριτηρίων σε δύο φάσεις:

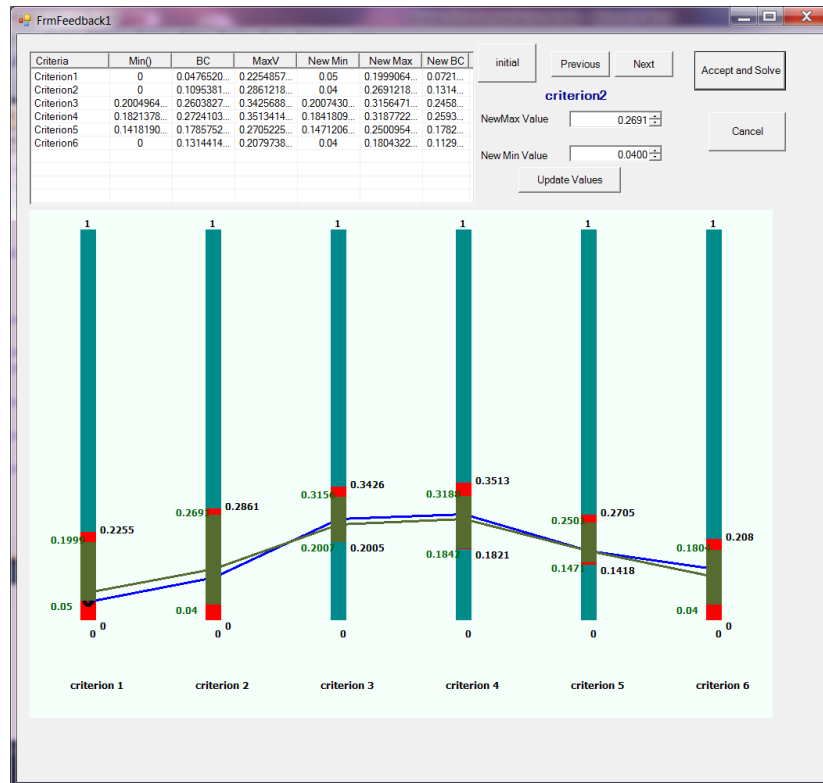
Στην πρώτη φάση η παρέμβαση αφορούσε στα κριτήρια 1 και 2 όπου δόθηκαν μέγιστες και ελάχιστες αποδεκτές τιμές [0.04, 0.2115] και [0.04, 0.2671] αντίστοιχα (Σχήμα 9.14). Το νέο μοντέλο προτιμήσεων παρουσιάζεται στο σχήμα 9.14, ενώ στο σχήμα 9.15 παρουσιάζεται μια ακόμη παρέμβαση στην οποία δόθηκε μικρότερη τιμή στη μέγιστη τιμή της βαρύτητας του κριτηρίου 3 και μεγαλύτερη τιμή στην ελάχιστη τιμή της βαρύτητας του κριτηρίου 6.



**Σχήμα 9.13: Περιορισμός υπερ-πολύεδρου με συνθήκες που προκύπτουν από τις ελάχιστες και μέγιστες αποδεκτές τιμές στη βαρύτητα των κριτηρίων.**



**Σχήμα 9.14: Μεταβολή της ευστάθειας του υπερπολύεδρου μετά την παρέμβαση στις βαρύτητες των κριτηρίου 1 και 2**



**Σχήμα 9.15: Μεταβολή της ευστάθειας του υπερπολύεδρου μετά την παρέμβαση στις βαρύτητες των κριτηρίων 1,2,3 και 6.**

### Ανάδραση 2: Προτεραιότητες Κριτηρίων

Ένα σημαντικό θέμα της αστάθειας των εκτιμημένων μοντέλων προτιμήσεων είναι το γεγονός ότι στο υπερ-πολύεδρο υπάρχουν σημεία των λύσεων που η σημαντικότητα ανάμεσα στα κριτήρια αλλάζει φορά. Δηλαδή υπάρχουν λύσεις που το κριτήριο 1 έχει μεγαλύτερη βαρύτητα από το κριτήριο 2 και άλλες που συμβαίνει το αντίθετο. Το σκεπτικό της ανάδρασης αυτής είναι να προσδιορισθούν περιπτώσεις κριτηρίων στα οποία εμφανίζεται το παραπάνω και στα οποία ο αποφασίζων μπορεί να καθορίσει ποιό από τα δύο είναι το περισσότερο σημαντικό για αυτόν.

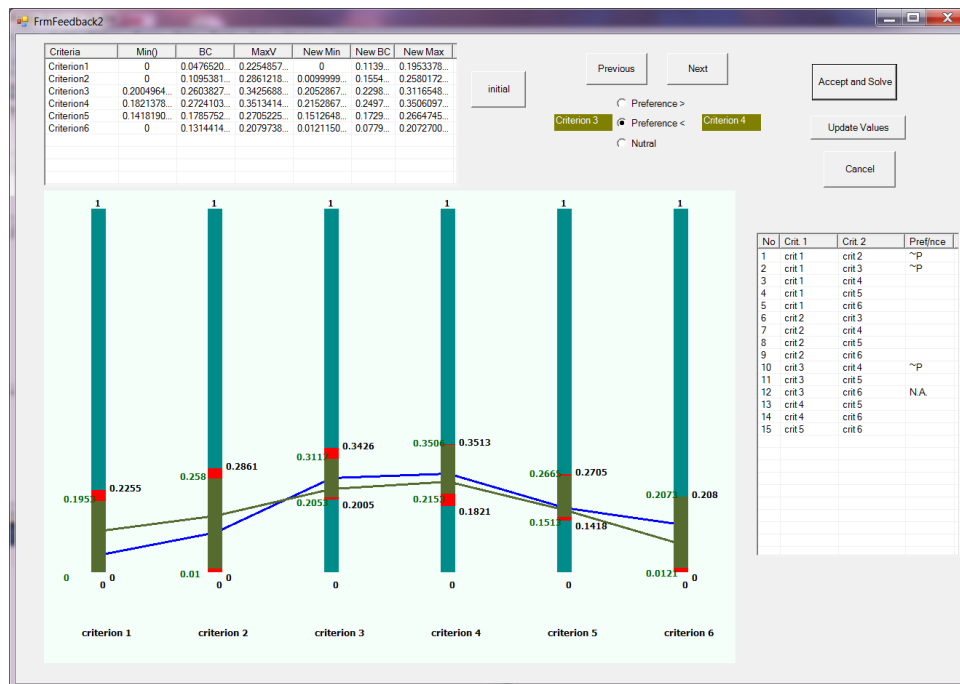
Εφόσον για ένα τουλάχιστον ζεύγος κριτηρίων ( $g_i, g_j$ ) προσδιοριστεί, με έμμεσο τρόπο, προτεραιότητα όσον αφορά στις προτιμήσεις του αποφασίζοντος, τότε το γραμμικό πρόβλημα μπορεί να εμπλουτισθεί με νέα ή νέες συνθήκες της μορφής:

$$p_i > p_j,$$

Το νέο διάνυσμα των βαρών των κριτηρίων είναι φυσικό να εμφανίζει μεγαλύτερη ευστάθεια.

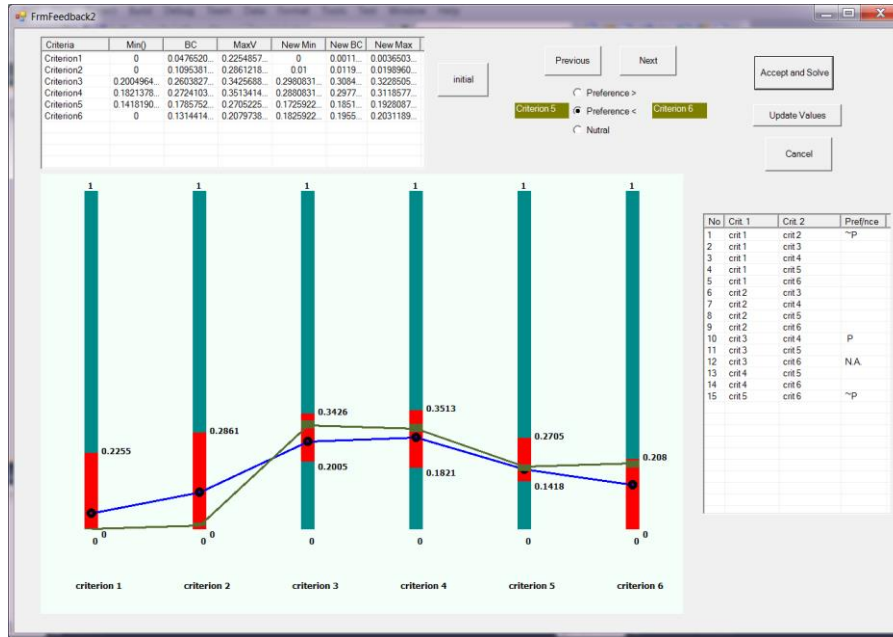
Στο παράδειγμα προσδιορίστηκε ότι το κριτήριο 2 και το κριτήριο 3 είναι για τον αποφασίζοντα περισσότερο σημαντικά από το κριτήριο 1 όπως και το κριτήριο 4 από το κριτήριο 3.

Η λύση του νέου γραμμικού προβλήματος όπως φαίνεται και στο σχήμα 9.16 δίνει ένα καλύτερο μοντέλο προτιμήσεων, από πλευράς ευστάθειας.



Σχήμα 9.16: Αποτελέσματα μετά από ενίσχυση της βαρύτητας των κριτηρίων 2,3 και 4

Αν η παρέμβαση αφορά τις προτιμήσεις όσον αφορά στην προτεραιότητα των κριτηρίων και συγκεκριμένα ότι το κριτήριο 1 είναι σημαντικότερο του κριτηρίου 2, το κριτήριο 3 σημαντικότερο του κριτηρίου 4 και το κριτήριο 6 σημαντικότερο του κριτηρίου 5 τότε τα αποτελέσματα είναι εντυπωσιακά καθώς το εκτιμημένο μοντέλο προτιμήσεων εμφανίζει πολύ μεγάλη ευστάθεια (Σχήμα 9.17).



Σχήμα 9.17: Αποτελέσματα μετά από ενίσχυση της βαρύτητας των κριτηρίων 1,3 και 6

## Βιβλιογραφία

- Amani, O. (1977). Finding all extreme points and extremereays of a convex polyhedral set, *Ekonomicko-Matematicky*, 3, 331-342.
- Barnette, D. W. (1971). The Minimum Number of Vertices of a Simple Polytope, *Israel J. Math*, X, 121-125.
- Beuthe, M. and G. Scannella (1996). Applications comparées des méthodes d'analyse multicritère UTA, R.A.I.R.O, *Operations Research*, 30 (3), 293-315.
- Beuthe, M. and G. Scannella (2001). Comparative analysis of UTA multicriteria methods, *European Journal of Operational Research*, 130 (2), 246-262.
- Burton, R.O., J.S. Gidley, B.S. Baker, and K.J. Reda-Wilson (1987). Nearly optimal linear programming solutions: Some conceptual issues and a farm management application, *American Journal of Agricultural Economics*, 69 (4), 813-818.
- Charnes, A. (1952). Optimality and degeneracy in linear programming, *Econometrica*, 20, 160-170.
- Charnes, A. and W.W. Cooper (1961). *Management Models and Industrial Applications of Linear Programing*, Wiley, New York.
- Charnes, A., W.W. Cooper, and A. Henderson (1953). *An Introduction to Linear Programming*, Wiley, New York.
- Cook, W.D. and L.M Seiford (1978). Priorities ranking and consensus formation, *Management Science*, 20 (16), 59-73.
- Despotis, D., D. Yannacopoulos, and C. Zopounidis (1990). A review of the UTA multicriteria method and some improvements, *Foundation of Computing and Decision Science*, 15 (2), 63-76.
- Grunbaum, B. (1967). *Convex Polytopes*, Wiley, New York.
- Jacquet-Lagrèze, E. and Y. Siskos (1982). Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the UTA method, *European Journal of Operational Research*, 10 (2), 151-164.
- Jacquet-Lagrèze, E. and Y. Siskos (2001). Preference disaggregation: 20 years of MCDA experience, *European Journal of Operational Research*, 130 (2), 233-245.
- Kadzinski, M., S. Greco, and R. Slovinski (2012). Selection of a representative function in robust multiple criteria ranking and choice, *European Journal of Operational Research*, 217, 541-553.
- Kaibel, V. and M.E. Pfetsch (2003). Some algorithmic problems in polytope theory, in: Joswig, M. and N. Takayama (eds.), *Algebra, Geometry, and Software Systems*, Springer-Verlag, 23-47.

- Khachiyan, L., E. Boros, K. Borys, and K. Elbassioni (2006). Generating all vertices of a polyhedron is hard, in: *SODA '06*, January 22-26, Miami.
- Klee, V. (1964). On the number of vertices of a convex polytope, *Canadian Journal of Mathematics*, 16, 701-720.
- Manas, M. and J. Nedoma (1968). Finding all vertices of a convex polyhedron, *Numerische Mathematik*, 12, 226-229.
- Mattheiss, T.H. and D.S. Rubin (1980). A survey and comparison of methods for finding all vertices of convex polyhedral sets, *Mathematics of Operations Research*, 5, 167-185.
- McMullen, P. (1970). The maximum number of faces of a convex polytope, *Mathematika*, XVII, 179-184.
- Murty, K.G. (1971). Adjacency on convex polyhedral, *SIAM*, 377-386.
- Provan, J.S. (1994). Efficient enumeration of the vertices of polyhedra associated with network LP's, *Mathematical Programming*, 63, 47-64.
- Saaty, T.L. (1955). The number of vertices of a polyhedron, *The American Mathematical Monthly*, 62, 326-331.
- Siskos, J. (1984). Le traitement des solutions quasi optimales en programmation linéaire continue: Une synthèse, R.A.I.R.O., *Recherche Opérationnelle*, 18 (4), 381-401.
- Siskos, Y. (1982). A way to deal with fuzzy preferences in multicriteria decision problems, *European Journal of Operation Research*, 10, 314-324.
- Siskos, Y. and D. Yannacopoulos (1985). UTASTAR: An ordinal regression method for building additive value functions, *Investigacao Operacional*, 5 (1), 39-53.
- Spyridakos, A. and D. Yannacopoulos (2013). Incorporating collective functions to multicriteria disaggregation – aggregation approaches for small group decision making, *Annals of Operations Research*, 227 (1), 119-136.
- Spyridakos, A., Y. Siskos, D. Yannacopoulos, and A. Skouris (2001). Multicriteria job evaluation for large organizations, *European Journal of Operational Research*, 130, 375-387.
- Van de Panne, C. (1975). *Methods for Linear and Quadratic Programming*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Winkels, H.M. (1982). A flexible decision aid method for linear multicriteria systems, in: Grauer, M., A. Lewandowski, and A.P. Wierzbicki (eds.), *Multiobjective and Stochastic Optimization*, I.I.A.S.A. Collaborative Series CP-82-182, Laxenburg (Austria), 377-410.
- Ματσατσίνης, Ν.Φ. (1995). Ένα Έμπειρο Σύστημα Υποστήριξης Αποφάσεων Μάρκετινγκ: Μεθοδολογία Υποστήριξης και Ολοκληρωμένη Αρχιτεκτονική, Διδακτορική Διατριβή, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.
- Μπένος, Β. (1997). Στατιστική, Τόμος Α' Περιγραφική Στατιστική, Εκδόσεις Σταμούλη, Πειραιάς.
- Ξηρόκωστας Δ. (1991). *Επιχειρησιακή Έρευνα*, Αθήνα.
- Παπαϊωάννου, Τ., και Σ. Λουκά (1990). *Εισαγωγή στη Στατιστική*, Ιωάννινα.
- Σίσκος, Ι. (1992). *Συμπληρωματικές Σημειώσεις Παραδόσεων Γραμμικού Προγραμματισμού*, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.



Σίσκος, Ι. (1998). *Γραμμικός Προγραμματισμός*, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα.

## ΜΕΡΟΣ II: Πειραματική αξιολόγηση στη MUSA

## 1. Εισαγωγή

Προκειμένου οι αναλυτές που χρησιμοποιούν μεθόδους αναλυτικής συνθετικής προσέγγισης, όπως η μέθοδος MUSA, να έχουν τη δυνατότητα ολοκληρωμένης μελέτης της ευστάθειας και αξιοπιστίας των αποτελεσμάτων που παράγουν οι μέθοδοι αυτοί, καταγράφηκε η ανάγκη ανάπτυξης και υλοποίησης ενός συνόλου από αλγόριθμους. Οι αλγόριθμοι αυτοί, αξιοποιώντας ευρετικές και αναλυτικές προσεγγίσεις, υποστηρίζουν με ουσιαστικό τρόπο τους αναλυτές στην εξαγωγή ευσταθών συμπερασμάτων. Πρόκειται για τις δύο βασικές κατηγορίες αλγορίθμων εύρεσης των λύσεων κατά την ανάλυση μεταβελτιστοποίησης. Στην πρώτη κατηγορία, των ευρετικών προσεγγίσεων, ανήκουν οι αλγόριθμοι που υπόσχονται πλήρη αναζήτηση όλων των βασικών εφικτών λύσεων ενός υπερπολυέδρου. Στη δεύτερη κατηγορία, των αναλυτικών προσεγγίσεων, ανήκουν αλγόριθμοι που δεν σκοπεύουν στην εύρεση όλων των βασικών δυνατών λύσεων ενός υπερπολυέδρου αλλά ενός αντιπροσωπευτικού συνόλου αυτών με χρήση ευρετικών προσεγγίσεων.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται και αξιολογούνται τρεις αντιπροσωπευτικοί αλγόριθμοι που μπορούν να θεωρηθούν ως κατάλληλες προσεγγίσεις αντιμετώπισης του προβλήματος της ανάλυσης ευστάθειας. Οι δύο πρώτοι ανήκουν στην κατηγορία των αναλυτικών περιστροφικών μεθόδων ενώ ο τρίτος ανήκει στην κατηγορία των ευρετικών προσεγγίσεων. Στους αναλυτικούς αλγόριθμους εξετάζεται αρχικά ο κλασικός αλγόριθμος των Manas - Nedoma και στη συνέχεια αλγόριθμος της Αντίστροφης Simplex του C. Van de Panne. Τέλος, εξετάζεται μία ευρετική προσέγγιση του Siskos που προσπαθεί να προσεγγίσει τα αποτελέσματα των αναλυτικών μεθόδων με την εύρεση αξιόπιστου αντιπροσωπευτικού συνόλου λύσεων.

Το ερευνητικό ερώτημα που τίθεται είναι η αξιολόγηση της ποιότητας του αντιπροσωπευτικού δείγματος των μεταβέλτιστων λύσεων που παράγονται μέσω ευρετικών μεθόδων σε σχέση με το σύνολο αυτών των λύσεων που παράγονται μέσω των αναλυτικών μεθόδων. Το ερώτημα απαντάται στην παρούσα τεχνική έκθεση μέσα από την χρήση - αξιολόγηση των σχετικών αλγορίθμων.

## 2. Μέθοδοι εύρεσης λύσεων κυρτών πολυέδρων

Η αναζήτηση και εύρεση των σχεδόν βέλτιστων ή πολλαπλών βέλτιστων λύσεων κατά την ανάλυση ευστάθειας αντιμετωπίζεται με σειρά αλγορίθμων που ακολουθούν διαφορετικές κατά περίπτωση προσεγγίσεις.

Το σύνολο των πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων ενός ΓΠ οριοθετείται μαθηματικά από κυρτά υπερπολύεδρα τύπου ΥΠ 1 στο χώρο με διάσταση  $n$ :

$$\begin{cases} \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^t \mathbf{x} \geq z^* - k \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

όπου  $k$  μικρή θετική ποσότητα και στην περίπτωση των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων  $k=0$  (αναφερόμαστε στην περίπτωση μεγιστοποίησης)

Το πρόβλημα της εύρεσης των κορυφών των υπερπολυέδρων αυτών που ουσιαστικά αντιστοιχούν σε εφικτές (δυνατές) βασικές λύσεις του αντίστοιχου γραμμικού προβλήματος έχει εκτενώς μελετηθεί ήδη από τη δεκαετία του '50. Οι Kaibel και Pfetsch (2003) θεωρούν ως πιθανότερη αιτία της ραγδαίας αύξησης του ερευνητικού ενδιαφέροντος για τη θεωρία των πολυέδρων το δεύτερο μισό του 20<sup>ου</sup> αιώνα την εξέλιξη του γραμμικού προγραμματισμού ως ένα δημοφιλές εργαλείο για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων στη βιομηχανία και το στρατό. Ο αλγόριθμος Simplex του Dantzig που αναπτύχθηκε στα τέλη του '40 ανέδειξε τη χρησιμότητα της γεωμετρικής και συνδυαστικής γνώσης των πολυέδρων στην αναζήτηση και ανάλυση των λύσεων των γραμμικών προβλημάτων.

Μέχρι την ανάπτυξη του αλγόριθμου Simplex η μελέτη των πολυέδρων παρέμενε στο πεδίο της αφηρημένης σκέψης και της φαντασίας. Η έρευνα του Dantzig έφερε την υπολογιστική διάσταση στη μελέτη αυτών (Grunbaum, 1967). Πριν από την έρευνά του, η αποτύπωση ήταν εφικτή μόνο για 2-διάστατα πολύεδρα. Οι τεχνικές που ξεκίνησαν να εφαρμόζονται στη Simplex έκαναν εφικτό τον υπολογισμό οποιουδήποτε μέρους ενός κυρτού πολυέδρου και την αποτύπωση αυτού. Από το 1947 και μετά το πρόβλημα της αναζήτησης του συνόλου των κορυφών ενός κυρτού πολυέδρου που ορίζεται από γραμμικούς περιορισμούς θεωρήθηκε ως πολύ σημαντικό.

Έχει αναπτυχθεί πληθώρα αλγορίθμων για την επίλυση του προβλήματος, οι περισσότεροι εκ των οποίων βασίζονται στην απαρίθμηση όλων των διαθέσιμων εφικτών βάσεων ενός Γ.Π. Ωστόσο σε όλους αυτούς τους αλγόριθμους, μετά τον υπολογισμό των  $r$  πρώτων κορυφών, ο υπολογιστικό φόρτος υπολογισμού της επόμενης κορυφής αυξάνεται εκθετικά κατά  $r$  στην χειρότερη περίπτωση.

Σύμφωνα με τον Murty (2009) ο στόχος της ανάπτυξης ενός αποδοτικού αλγορίθμου για το πρόβλημα της εύρεσης των κορυφών είναι περισσότερο μία μαθηματική πρόκληση παρά μία πρακτική.

Οπότε ένα από τα βασικά θέματα του προβλήματος της εύρεσης των κορυφών είναι ο τεράστιος αριθμός των κορυφών των υπερπολυέδρων ακόμα και για μικρά μεγέθους προβλήματα.

Η περιοχή των ημιβέλτιστων λύσεων (ΥΠ 1) ουσιαστικά ορίζει ένα νέο υπερπολύεδρο του οποίου οι κορυφές αντιστοιχούν στις υπό αναζήτηση ημιβέλτιστες λύσεις. Δηλαδή έχουμε ένα νέο γ.π. προς επίλυση του οποίου μας ενδιαφέρουν όμως όλες οι εφικτές λύσεις και όχι μόνο αυτή (ή αυτές) που βελτιστοποιούν μία αντικειμενική συνάρτηση.

Το πρόβλημα της αναζήτησης όλων των κορυφών ενός κυρτού υπερπολυέδρου έχει απασχολήσει πολλούς ερευνητές. Πολύ σημαντική σε αυτό το χώρο θεωρείται η εργασία των Matheiss και Rubín (1980) οι οποίοι αναφέρθηκαν στις μέχρι τότε προσεγγίσεις του συγκεκριμένου προβλήματος. Ήδη από το 1952 ο Charnes (Charnes, 1952; Charnes et al., 1953; Charnes and Cooper, 1961) συσχέτισαν την αναζήτηση όλων των βέλτιστων λύσεων ενός γ.π. (περίπτωση πολλαπλών βέλτιστων λύσεων) με τη συστηματική αναζήτηση όλων των κορυφών ενός υπερπολυέδρου.

Σκόπιμη, προκειμένου να προχωρήσουμε στη συστηματική αναζήτηση των κορυφών του ΥΠ 1, είναι η διαθεσιμότητα των μέσων που θα μας επιτρέψουν μια αρχική εκτίμηση του αριθμού αυτών των κορυφών. Ο αριθμός των κορυφών δεν μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια αλλά έχουν προταθεί μαθηματικές σχέσεις που προσεγγίζουν τον αριθμό αυτό. Με πρώτο το Saaty (1955) ο οποίος ξεκίνησε αποδεικνύοντας ότι ο συνδυασμός των  $m+n$  ανά  $n$   $\binom{m+n}{m}$  δεν αποτελεί ικανοποιητική εκτίμηση του αριθμού των κορυφών. Το ζητούμενο ήταν να εκτιμηθεί ένα άνω όριο του αριθμού των λύσεων με δεδομένα τους  $m$  περιορισμούς και τις  $n$  μεταβλητές απόφασης.

Ο Klee (1964) πρότεινε μια σχέση που μας δίνει ένα άνω όριο, το οποίο ονομάζουμε  $\bar{r}$ , των κορυφών ενός υπερπολυέδρου που ορίζεται από ένα σύστημα  $m$  εξισώσεων με  $n$  μεταβλητές απόφασης όπου ισχύει ότι  $m+n$  ο αριθμός των υπερεπιπέδων διάστασης  $n-1$  που ορίζουν οι  $m$  περιορισμοί:

$$\bar{r} = \begin{cases} \frac{2(n+m)}{2m+n} \binom{\frac{1}{2}(2m+n)}{m}, & \text{αν } n \text{ ζυγός αριθμός} \\ 2 \binom{\frac{1}{2}(2m+n-1)}{m}, & \text{αν } n \text{ περιττός αριθμός} \end{cases} \quad (1)$$

Τα αποτελέσματα είναι αποθαρρυντικά. Η τιμή του ορίου  $\bar{r}$  αυξάνει με αστρονομική ταχύτητα: για  $(m=3, n=4)$ ,  $\bar{r}=14$ ; για  $(m=10, n=6)$ ,  $\bar{r}=352$ ; για  $(m=10, n=7)$ ,  $\bar{r}=572$  και αυτά τα μεγέθη δεν περιγράφουν παρά μικρά γραμμικά προβλήματα (Klee, 1964).

Η σχέση 1 βελτιώθηκε από τον ίδιο τον Klee (1971) και έλαβε την εξής μορφή:

$$\bar{r} = \binom{n+m - \text{int}\left(\frac{n+1}{2}\right)}{m} + \binom{n+m - \text{int}\left(\frac{n+2}{2}\right)}{m} \quad (2)$$

Υπό αυτή τη μορφή χρησιμοποιήθηκε και σε επόμενες εργασίες (Amani, 1977; Burton et al., 1987).

Αρχικά ο Klee είχε αποδείξει ότι η σχέση (1) ίσχυε για  $m+n \geq n^2/4 - 1$  αλλά στη συνέχεια αποδείχτηκε ότι η σχέση ήταν ισχυρή για κάθε  $m$  και  $n$  (McMullen, 1970).

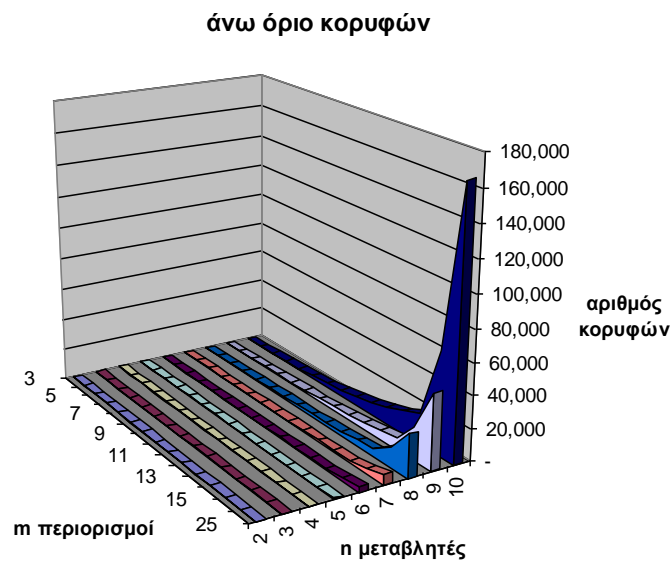
Έστω  $\underline{r}$  το κάτω όριο του αριθμού των κορυφών. Ο Grunbaum (1967) πρότεινε την παρακάτω υπόθεση για τα απλά υπερπολύεδρα:

$$\underline{r} = (n-1)m - (n-2)(n+1) \text{ για } m \geq n-1 \quad (3)$$

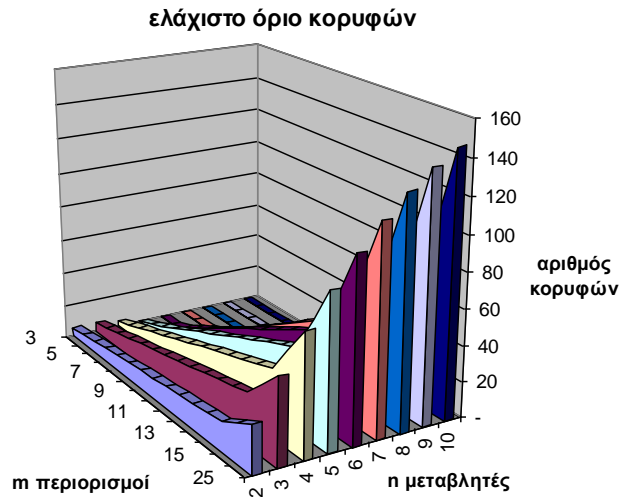
Ο Barnette (1971) απέδειξε τη σχέση (3) δείχνοντας ότι τελικά μπορεί να υπάρχουν υπερπολύεδρα με πολύ λίγες κορυφές.

Έχει δειχθεί ότι σε πληθώρα προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού μεγάλων διαστάσεων, μεταβλητές και περιορισμούς, οι κορυφές των προκυπτουσών υπερπολυέδρων είναι μικρές τον αριθμό. Μάλιστα, καλεί αυτά τα υπερπολύεδρα ως «καλοπροαίρετα» και πιστώνει την υπολογιστική επιτυχία του αλγόριθμου Simplex στην υψηλή συχνότητα τέτοιων προβλημάτων στον πραγματικό κόσμο.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2) και (3) υπολογίστηκαν για προβλήματα διαφορετικών διαστάσεων το άνω όριο  $\bar{r}$  και το ελάχιστο όριο  $\underline{r}$  του αριθμού των κορυφών των υπερπολυέδρων. Οι υπολογισμοί αυτοί παρουσιάζονται αντίστοιχα στα επόμενα δύο διαγράμματα.



Είναι εμφανές ότι ο ρυθμός ανόδου των ορίων, ειδικά του άνω ορίου  $\bar{r}$ , είναι ραγδαίος (π.χ. για 25 περιορισμούς και 10 μεταβλητές το όριο ανέρχεται σε 166,257 κορυφές), γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο υπολογισμός του συνόλου των κορυφών ακόμα και προβλημάτων μεσαίων διαστάσεων είναι υπολογιστικά ασύμφορη έως σχεδόν αδύνατη.



Σχήμα 2.2: Ελάχιστο όριο κορυφών  $\underline{L}$

Έτσι το ερευνητικό ενδιαφέρον εστιάστηκε στην ανάπτυξη αλγορίθμων που λειτουργούσαν αποδοτικά από άποψη υπολογιστικής πολυπλοκότητας, συνδέοντας την απόδοση με το υπερμέγεθος του εγχειρήματος. Η εκτίμηση της πολυπλοκότητας των αλγορίθμων αυτών έχει απασχολήσει πολύ την ερευνητική κοινότητα και εν τέλει έχει αποδειχθεί ότι το πρόβλημα της εύρεσης του συνόλου των κορυφών ενός πολυέδρου είναι NP-hard, σε κάθε περίπτωση (Khachiyan et al., 2006). Ένα πρόσθετο θέμα εκτός της πολυπλοκότητας των σχετικών αλγορίθμων είναι οι τεράστιες απαιτήσεις σε μνήμη από τη στιγμή που όχι μόνο οι κορυφές αλλά και πληροφορίες για αυτές, π.χ. ποιες είναι οι γειτονικές αυτών, πρέπει να διατηρούνται κατά την δημιουργία των λιστών των κορυφών (Provan, 1994).

Παράλληλα με το πρόβλημα της εύρεσης όλων των εφικτών λύσεων του γραμμικού συστήματος μελετήθηκε και το σχετιζόμενο πρόβλημα της κατάταξης κατά φθίνουσα ή αύξουσα τάξη των τιμών των λύσεων σε σχέση με μία πρόσθετη αντικειμενική συνάρτηση οριζόμενη στο ίδιο υπερπολύεδρο. Το πρόβλημα αυτό όπως θα φανεί στη συνέχεια παρουσιάζει επιπρόσθετο ενδιαφέρον στο πλαίσιο της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης όπου το ρόλο της αντικειμενικής συνάρτησης μπορεί να παίξει η αρχική αντικειμενική συνάρτηση του γραμμικού προγράμματος.

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, ανάλογα με τον τρόπο που προσεγγίζουν το πρόβλημα οι διαφορετικοί αλγόριθμοι μπορούν να καταταχθούν δύο βασικές κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι αναλυτικοί αλγόριθμοι που υπόσχονται πλήρη αναζήτηση όλων των βασικών εφικτών λύσεων ενός υπερπολύεδρου. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν αλγόριθμοι που δεν σκοπεύουν στην εύρεση όλων των βασικών δυνατών λύσεων ενός υπερπολύεδρου αλλά ενός αντιπροσωπευτικού συνόλου αυτών με χρήση ευρετικών προσεγγίσεων.

### 3. Αναλυτική παρουσίαση αλγορίθμων

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται και αξιολογούνται τρεις αντιπροσωπευτικοί αλγόριθμοι που μπορούν να θεωρηθούν ως κατάλληλες προσεγγίσεις αντιμετώπισης του προβλήματος της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης. Οι δύο πρώτες ανήκουν στην κατηγορία των αναλυτικών περιστροφικών μεθόδων ενώ η τρίτη ανήκει στην κατηγορία των ευρετικών προσεγγίσεων.

Στους αναλυτικούς αλγόριθμους εξετάζεται αρχικά ο αλγόριθμος των Manas και Nedoma που αξιοποιεί επίσης τη θεωρία των γραφημάτων προσπαθώντας όμως να αποφύγει την αναπαραγωγή (εφόσον αυτό είναι δυνατόν) λύσεων που έχουν ήδη υπολογιστεί.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο αλγόριθμος της Αντίστροφης Simplex του Van De Panne ο οποίος αποτελεί μια προσέγγιση με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το λόγο ότι η αναζήτηση των μεταβελτιστων λύσεων γίνεται κατά φθίνουσα ή αύξουσα τάξη ξεκινώντας από τη βέλτιστη λύση και χρησιμοποιώντας τη δυνατότητα αντιστροφής των βημάτων της simplex για την αναζήτηση των κορυφών του πολυέδρου. Τέλος, εξετάζεται μία ευρετική προσέγγιση του Siskos που προσπαθεί να προσεγγίσει τα αποτελέσματα των αναλυτικών μεθόδων με την εύρεση ενός αντιπροσωπευτικού πλην όμως αξιόπιστου συνόλου λύσεων μειώνοντας με αυτό τον τρόπο δραστικά τον υπολογιστικό φόρτο χωρίς να υπάρχει απώλεια πληροφορίας.

Προκειμένου να διευκολυνθεί αφενός η παρουσίαση των αλγορίθμων και αφετέρου ο συγκριτικός σχολιασμός των διαφορετικών προσεγγίσεων θα χρησιμοποιηθεί για τους τρεις τελευταίους αλγόριθμους το ίδιο παράδειγμα γραμμικό προγράμματος το οποίο ακολουθεί:

Ας θεωρηθεί το εξής γραμμικό πρόγραμμα:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\max] z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ \text{υ.π.} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 18 \\ 2x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right. \quad (\text{ΓΠ 1})$$

Το οποίο στην πρότυπή του μορφή γράφεται ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\max] z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 0x_1 + 0x_2 \\ \text{υ.π.} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1 = 18 \\ 2x_3 + 3x_4 + x_2 = 6 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \bar{1}, \bar{2} \end{array} \right.$$

όπου  $x_1, x_2$  οι μεταβλητές απόκλισης.



Ο αρχικός πίνακας Simplex με την εισαγωγή των μεταβλητών απόκλισης έχει ως εξής:

$c_B$		Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$x_B$
0	$\bar{1}$	1	1	1	1	1	1	1	0	18
0	$\bar{2}$	0	0	2	3	0	0	0	1	6
$c_j$		3	4	5	6	0	0	0	0	
$\Delta_j$		3	4	5	6	0	0	0	0	$z=0$

Ύστερα από δύο επαναλήψεις του αλγορίθμου Simplex λαμβάνεται ο βέλτιστος πίνακας Simplex που είναι ο ακόλουθος:

$c_B$		Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$x_B$
4	2	1	1	1/3	0	1	-1/3	1	-1/3	16
6	4	0	0	2/3	1	0	1/3	0	1/3	2
$c_j$		3	4	5	6	0	0	0	0	
$\Delta_j$		-1	0	-1/3	0	-4	-2/3	0	0	$z^*=76$

Για να ορίσουμε το υπερπολύεδρο ΥΠ.1.2 θέτουμε  $k=20$ , οπότε το σύνολο των λύσεων, για τις οποίες η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης απέχει (είναι μικρότερη) κατά 20 μονάδες από την τιμή της βέλτιστης λύσης (76 μονάδες), οριοθετείται από το υπερπολύεδρο:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 18$$

**p2**

$$2x_3 + 3x_4 \leq 6$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \geq 56$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

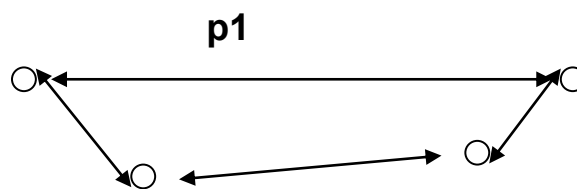
### 3.1 Ο Αλγόριθμος των Manas - Nedoma

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο, ένα κυρτό υπερπολύεδρο που ορίζεται μέσα από ένα Γραμμικό Πρόγραμμα (με  $m$ : περιορισμούς και  $n$ : μεταβλητές απόφασης) μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα συνεκτικό γράφημα (*graph connected*)  $(V,U)$

όπου  $V$  είναι το σύνολο των κόμβων και  $U$  το σύνολο των τόξων που συνδέουν ανά δύο τους κόμβους, και που μπορούμε να τα διαβούμε ακολουθώντας τα βήματα της Simplex. Έτσι, δύο κόμβοι είναι γειτονικοί αν αντιστοιχούν σε δύο βάσεις της Simplex που διαφέρουν κατά μία και μόνη μεταβλητή.

Η αναζήτηση όλων των κορυφών του υπερπολυέδρου ισοδυναμεί με την εξερεύνηση όλων των κόμβων του γραφήματος  $(V,U)$ . Προκειμένου να μοντελοποιηθούν οι γενικές αυτές ιδέες ορίζονται τα παρακάτω μεγέθη:

- Το  $V$  (σύνολο των κόμβων του γραφήματος) περιέχει διανύσματα διάστασης  $m$  των οποίων τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί (δείκτες των βάσεων της Simplex)  $u=(i_1, i_2, \dots, i_m)$  με  $1 \leq i_j \leq m, j=1,2,\dots,m$ .
- Δύο διαφορετικοί κόμβοι  $u_1=(i_1, i_2, \dots, i_m)$  και  $u_2=(k_1, k_2, \dots, k_m)$  απέχουν μεταξύ τους κατά μία απόσταση  $d \leq m$  αν  $d$  ακριβώς στοιχεία του  $u_2$  είναι διαφορετικά από αυτά του  $u_1$ . Οι  $u_1$  και  $u_2$  είναι γειτονικές εφόσον έχουν  $d=1$  (Σχ. 3.1).
- Ένα τόξο  $(u_1, u_2) \in U$  αν και μόνο αν  $u_1$  και  $u_2$  είναι γειτονικοί. Οι γειτονικοί κόμβοι του  $u_i$  απαρτίζουν το σύνολο  $N(u_i)$ .



Σχήμα 3.1: Γράφημα  $(V,U)$

Το πρόβλημα της αναζήτησης όλων των κόμβων ενός γραφήματος  $(V,U)$  τίθεται πλέον διαφορετικά. Αρκεί να βρούμε ένα 'μονοπάτι' που περνάει από όλους τους κόμβους ενός γραφήματος χωρίς να χρειάζεται να κρατάμε στον υπολογιστή, παρά ένα και μοναδικό πίνακα Simplex, προκειμένου να παράξουμε τους νέους κόμβους (Manas & Nedoma, 1968).

Οι Manas και Nedoma το 1968 πρότειναν ένα αλγόριθμο του οποίου σκοπός είναι η πραγματοποίηση ενός 'περιπάτου' μέσα στο γράφημα  $(V,U)$  που θα έχει δύο χαρακτηριστικές ιδιότητες:

- 1) να αποφεύγει την αναπαραγωγή (εφόσον αυτό είναι δυνατό) λύσεων που έχουν ήδη υπολογιστεί,
- 2) να κρατάει στη μνήμη του υπολογιστή ένα και μοναδικό πίνακα Simplex.

Ο αλγόριθμος, που επιτρέπει την εύρεση όλων των κόμβων του συνεκτικού γραφήματος, με ορισμένες λειτουργικές τροποποιήσεις ώστε να μπορεί να υλοποιηθεί αποδοτικά σε λογισμικό, δουλεύει ως ακολούθως:

- Ξεκινάμε από ένα αρχικό κόμβο - λύση ( $u_0$ ) για παράδειγμα από τη βέλτιστη λύση του γραμμικού προγράμματος και κατασκευάζουμε δύο πεπερασμένες ακολουθίες συνόλων που περιέχουν κόμβους του γραφήματος.
- Η πρώτη ακολουθία συνόλων  $(R_1, R_2, \dots, R_s)$  περιλαμβάνει τους κόμβους που έχουν ήδη υπολογιστεί (με τον όρο «υπολογισμένο κόμβων» εννοούμε τον καθορισμό των

συντεταγμένων των αντίστοιχων διανυσμάτων των βασικών δυνατών λύσεων του γραμμικού προγράμματος).

- Η δεύτερη ακολουθία συνόλων ( $W_1, W_2, \dots, W_s$ ) περιλαμβάνει τους κόμβους που δεν έχουν ακόμα υπολογιστεί αλλά που μπορούν να υπολογιστούν ξεκινώντας από ένα ή περισσότερους κόμβους που ανήκουν στο σύνολο  $R_s$  πραγματοποιώντας μία και μόνη επανάληψη της μεθόδου Simplex.

Η κατασκευή των συνόλων  $R$  και  $W$  γίνεται με τον παρακάτω τρόπο:

- Κάθε φορά που παράγεται μία καινούργια λύση  $u_s$  (δηλαδή ένας καινούργιος πίνακας SIMPLEX) ενημερώνουμε την ακολουθία  $R_s$  και την ακολουθία  $RX_s$  η οποία περιέχει τα διανύσματα ( $x_{B1}, x_{B2}, \dots, x_{Bm+1}$ ) για κάθε λύση  $u_s$ . Δηλαδή:

$$R_s = R_{s-1} \cup u_s, \quad RX_s = RX_{s-1} \cup u_s$$

- Στη συνέχεια ελέγχουμε αν οι γειτονικές λύσεις  $N(u_s)$  έχουν ήδη υπολογιστεί (δηλαδή αν  $\in$  στο  $R_s$ ) ή αν έχουν ήδη ενταχθεί στο σύνολο  $W_s$ . Αν δεν ισχύει τίποτα από τα δύο τότε εισάγουμε τα διανύσματα που αποτελούνται από τους δείκτες ( $i_1, i_2, \dots, i_m$ ) των γειτονικών λύσεων  $N(u_s)$  στο  $W_s$ . Δηλαδή:

$$W_s = W_{s-1} \cup N(u_s) - R_s$$

- Στη συνέχεια εξετάζουμε αν υπάρχει λύση στο  $W_s$  που να είναι **γειτονική** στη λύση  $u_s$  (δηλαδή  $d=1$ ). Αν υπάρχει επιλέγουμε να την υπολογίσουμε (αφαιρώντας την από το  $W_s$ ) και παράγοντας τη νέα βάση SIMPLEX. Αλλιώς επιλέγουμε τη λύση εκείνη με το μικρότερο  $d \leq m$  και την υπολογίζουμε πάλι μέσω SIMPLEX.
- Ο αλγόριθμος περατώνεται όταν  $W_s = \emptyset$ . Τότε προχωράμε στην εξαγωγή των συνόλων  $R_s$  και  $RX_s$ .

Σύμφωνα με τους Manas και Nedoma ισχύει η ακόλουθη πρόταση: Αν  $W_s = \emptyset$  τότε  $R_k = V$  (δηλαδή έχουν υπολογιστεί όλες οι συντεταγμένες όλων των διανυσμάτων των πιθανών δυνατών βασικών λύσεων), την οποία μάλιστα αποδεικνύουν στην εργασία τους (Manas & Nedoma, 1968).

Ο αλγόριθμος αποτελείται από έξι βασικά βήματα που απαιτούνται για την εξερεύνηση του συνόλου κορυφών του υπερπολυέδρου του ΓΠ.

**Βήμα 0:** Επίλυση του ΓΠ και εύρεση της βέλτιστης λύσης  $u_0$ .

**Βήμα 1:** Διαβάζουμε τις διαστάσεις του προβλήματος (αριθμός περιορισμών, μεταβλητών) και υπολογίζουμε το μέγιστο αριθμό λύσεων (κορυφές υπερπολυέδρου) σύμφωνα με τη σχέση 2. Ορίζουμε τους απαραίτητους πίνακες και διαβάζουμε τα στοιχεία του πίνακα Simplex της λύσης  $u_0$ . Επίσης προσθέτουμε τον νέο περιορισμό που ορίζει το ΥΠ 1:

$$c^t x - Y = z^* - k$$

όπου  $Y$  είναι η μεταβλητή απόκλισης του περιορισμού. Οι συντελεστών των στοιχείων του νέου περιορισμού στον επαυξημένο πίνακα υπολογίζονται εύκολα όπως θα παρουσιασθεί στην § 3.3.

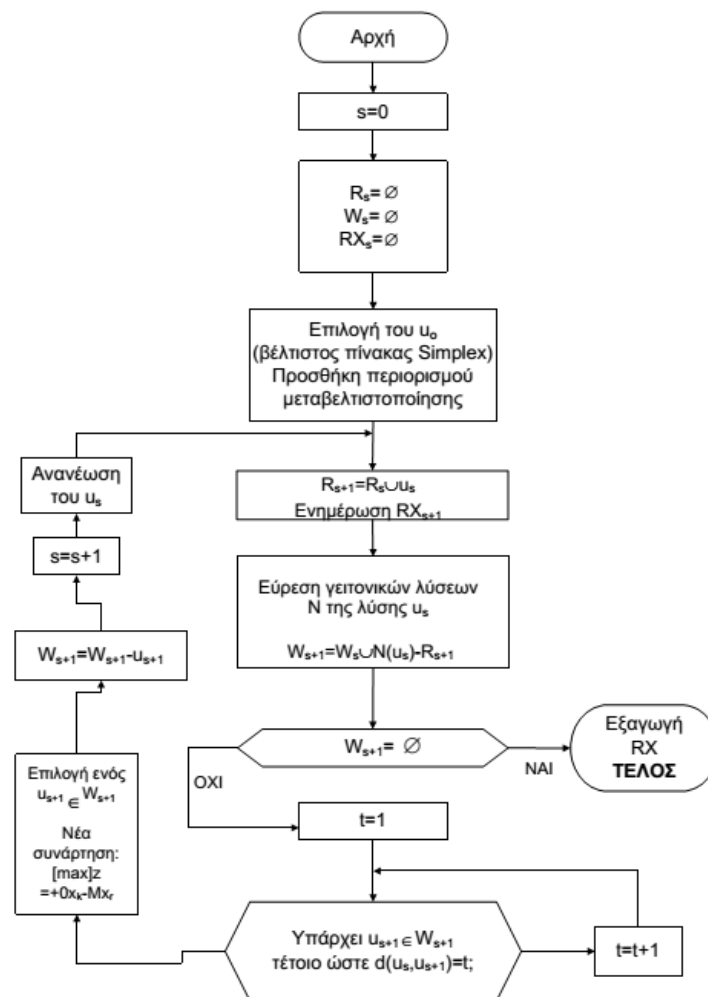
**Βήμα 2:** Ενημερώνουμε το σύνολο λύσεων  $R$  με το διάνυσμα των δεικτών των βασικών μεταβλητών της τρέχουσας λύσης καθώς και το σύνολο  $RX$  με το διάνυσμα των τιμών  $x_B$ .

**Βήμα 3:** Προχωράμε στην εύρεση των γειτονικών λύσεων – κορυφών της τρέχουσας λύσης και ενημερώνουμε την ακολουθία  $W$ .

**Βήμα 4:** Ελέγχουμε αν ο πίνακας  $W$  είναι κενός. Αν όχι, επιλέγουμε την επόμενη λύση-κορυφή. Προκειμένου να οδηγηθούμε στην επιλεγμένη κορυφή ορίζουμε νέα αντικειμενική συνάρτηση. Δίνοντας πολύ μεγάλες αρνητικές τιμές ( $M$ ) στα στοιχεία που είναι εκτός βάσης και μηδέν στα στοιχεία της βάσης.

**Βήμα 5:** Τέλος, αφαιρούμε την νέα λύση  $u_{new}$  από την ακολουθία  $W$  και προχωράμε με χρήση του  $Χpress$  στην παραγωγή της νέας λύσης και επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται το λογικό διάγραμμα του αλγορίθμου:



Σχήμα 3.2: Λογικό Διάγραμμα Αλγορίθμου Manas-Nedoma

Ο συνολικός αριθμός των επαναλήψεων της Simplex που απαιτούνται προκειμένου να εφαρμοσθεί ο αλγόριθμος των Manas-Nedoma είναι σαφώς μικρότερος, συγκρινόμενος με το συνολικό αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται κατά την εφαρμογή της μεθόδου του Tarry. Για ένα γραμμικό πρόγραμμα, έστω με  $r$  βασικές δυνατές λύσεις,  $m$  περιορισμούς και  $n$  κύριες μεταβλητές απόφασης ( $l = n + m$  οι συνολικές μεταβλητές απόφασης όπου έχουμε

προσθέσει και  $m$  μεταβλητές απόκλισης, οπότε ο  $n$  εκφράζει παράλληλα και των αριθμό των μεταβλητών εκτός βάσης), η μέθοδος του Tarry χρειάζεται ακριβώς  $n \times r$  επαναλήψεις της Simplex ώστε να ολοκληρωθεί. Αντίθετα στον αλγόριθμο που εξετάζουμε ο αριθμός των επαναλήψεων που πραγματοποιούμε κυμαίνεται από  $r$  μέχρι  $m \times r$ , στην περίπτωση που υποθέσουμε ότι δεν έχουμε εκφυλισμένες λύσεις. (Siskos, 1984)

Ο τύπος των υπερπολυέδρων όπου ο αριθμός των επαναλήψεων είναι ακριβώς  $r$  (Hamiltonian μονοπάτι μέσα στο γράφημα) δεν έχει ακόμα οριστεί από τους θεωρητικούς. Hamiltonian μονοπάτι σε ένα γράφημα είναι το 'μονοπάτι' εκείνο που μας επιτρέπει να επισκεφτούμε όλους τους κόμβους από μία και μοναδική φορά τον κάθε ένα (Mattheis and Rubin, 1980).

Από άποψη υπολογιστικού φόρτου ο αλγόριθμος των Manas-Nedoma χρειάζεται κάθε στιγμή να υπάρχει αποθηκευμένος ένας πίνακας Simplex και ένας πίνακας διαστάσεων  $r \times m$  για τα σύνολα  $R_s$  και  $W_s$ . Επίσης ο αλγόριθμος στηρίζεται στην αποτελεσματική διαχείριση μιας λίστας αυξανόμενου μεγέθους.

Ο αριθμός των στοιχείων της λίστας θα αυξάνεται μέχρι να γίνει ίσος με το συνολικό αριθμό των κορυφών του υπερπολυέδρου. Συνολικά χρειάζεται να υπολογίσουμε  $r$  πίνακες Simplex, όπου  $r$  ο αριθμός των βασικών δυνατών λύσεων του Γ.Π. 1. (Siskos, 1984).

Θα χρησιμοποιήσουμε το παράδειγμα ΥΠ 1 για να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο των Manas-Nedoma ώστε να γίνουν κατανοητά τα βήματά του. Προκειμένου να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο έχει θεωρηθεί  $k=20$ , και έχει εισαχθεί ο νέος περιορισμός  $3x_1+4x_2+5x_3+6x_4 \geq 56 \Rightarrow 3x_1+4x_2+5x_3+6x_4 - Y = 56$  και έστω:  $x_{\bar{1}} = x_5$ ,  $x_{\bar{2}} = x_6$  και  $Y = x_7$ . Θέτουμε ακόμα,  $s=0$ ,  $R_s = \emptyset$  και  $W_s = \emptyset$ .

Ας θεωρήσουμε ως αρχική λύση τη βέλτιστη λύση του γ.π.,  $u_0 = \{(2,4,7)\}$  με  $z^* = 76$ . Ο Πίνακας 3.1 είναι ο πίνακας Simplex που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση, όπου έχουμε προσθέσει μια γραμμή, που εκφράζει το νέο περιορισμό, με στοιχεία τις αντίθετες τιμές των οριακών καθαρών εισοδημάτων ( $\Delta_j$ ) του βέλτιστου πίνακα (στην § 3.3. παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού των στοιχείων αυτών).

**Πίνακας 3.1: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για  $s=0$**

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	1	1	1/3	0	1	-1/3	0	16
$x_4$	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
$x_7$	1	0	1/3	0	4	2/3	1	20

Θέτουμε  $R_1 = \{(2,4,7)\}$  και βρίσκουμε από τον πίνακα τις λύσεις που μπορούν να προκύψουν πραγματοποιώντας μία και μόνη αλλαγή βάσης, βρίσκουμε δηλαδή τους γειτονικούς κόμβους. Οπότε έχουμε:

$$N(u_0) = \{(1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7)\}$$

και ακόμα

$$W_1 = W_0 \cup N(u_0) - u_0 = \{(1,4,7), (2,3,7), (2,4,5), (2,6,7)\}.$$

Στο  $W_1$  υπάρχουν γειτονικές λύσεις στη  $u_0$  ( $d=1$ ) και μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα μία από αυτές για να συνεχίσουμε τον αλγόριθμο. Επιλέγουμε ως επόμενη λύση τον κόμβο  $u_1=(2,3,7)$  και την υπολογίζουμε.

**Θέτουμε  $s=1$ .** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Πίνακας 3.2: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για  $s=1$

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	1	1	0	-1/2	1	-1/2	0	15
$x_3$	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
$x_7$	1	0	0	-1/2	4	1/2	1	19

Και έχουμε:  $R_2 = R_1 \cup \{u_1\} = \{(2,4,7), (2,3,7)\}$

$$N(u_1) = \{(1,3,7), (2,4,7), (2,3,5), (2,6,7)\}$$

$$W_2 = W_1 \cup N(u_1) - R_2 = \{(1,3,7), (1,4,7), (2,3,5), (2,4,5), (2,6,7)\}$$

Επιλέγουμε  $u_2 = \{(2,6,7)\}$ .

**Θέτουμε  $s=2$ .** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Πίνακας 3.3: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για  $s=2$

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	1	1	1	1	1	0	0	18
$x_6$	0	0	2	3	0	1	0	6
$x_7$	1	0	-1	-2	4	0	1	16

Και έχουμε:  $R_3 = R_2 \cup \{u_2\} = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7)\}$

$$N(u_2) = \{(2,6,1), (2,3,7), (2,4,7), (2,6,5)\}$$

$$W_3 = W_2 \cup N(u_2) - R_3 = \{(1,3,7), (1,4,7), (2,3,5), (2,4,5), (2,6,1), (2,6,5)\}$$

Επιλέγουμε  $u_3 = \{(2,6,1)\}$ .

**Θέτουμε  $s=3$ .** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

**Πίνακας 3.4: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για s=3**

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	0	1	2	3	-3	0	-1	2
$x_6$	0	0	2	3	0	1	0	6
$x_1$	1	0	-1	-2	4	0	1	16

Και έχουμε:  $R_4=R_3 \cup \{u_3\}=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1)\}$

$N(u_3)=\{(3,6,1), (4,6,1), (2,6,5), (2,6,7)\}$

$W_4=W_3 \cup N(u_3)-R_4=\{(1,3,7), (1,4,7), (2,3,5), (2,4,5), (2,6,5), (3,6,1), (4,6,1)\}$

Επιλέγουμε  $u_4=\{(2,6,5)\}$ .

**Θέτουμε s=4.** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

**Πίνακας 3.5: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για s=4**

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	3/4	1	5/4	3/2	0	0	-1/4	14
$x_6$	0	0	2	3	0	1	0	6
$x_5$	1/4	0	-1/4	-1/2	1	0	1/4	4

Και έχουμε:  $R_5=R_4 \cup \{u_4\}=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5)\}$

$N(u_4)=\{(2,6,1), (2,3,5), (2,4,5), (2,6,7)\}$

$W_5=W_4 \cup N(u_4)-R_5=\{(1,3,7), (1,4,7), (2,3,5), (2,4,5), (3,6,1), (4,6,1)\}$

Επιλέγουμε  $u_5=\{(2,4,5)\}$ .

**Θέτουμε s=5.** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

**Πίνακας 3.6: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για s=5**

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	3/4	1	1/4	0	0	-1/2	-1/4	11
$x_4$	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
$x_5$	1/4	0	1/12	0	1	1/6	1/4	5

Και έχουμε:  $R_6=R_5 \cup \{u_5\} = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5)\}$

$N(u_5) = \{(1,4,5), (2,3,5), (2,6,5), (2,4,7)\}$

$W_6=W_5 \cup N(u_5) - R_6 = \{(1,3,7), (1,4,7), (2,3,5), (3,6,1), (4,6,1), (1,4,5)\}$

Επιλέγουμε  $u_6 = \{(2,3,5)\}$ .

**Θέτουμε s=6.** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

**Πίνακας 3.7: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για s=6**

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_2$	3/4	1	0	-3/8	0	-5/8	-1/4	41/4
$x_3$	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
$x_5$	1/4	0	0	-1/8	1	1/8	1/4	19/4

Και έχουμε:  $R_7=R_6 \cup \{u_6\} = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5)\}$

$N(u_6) = \{(1,3,5), (2,4,5), (2,6,5), (2,3,7)\}$

$W_7=W_6 \cup N(u_6) - R_7 = \{(1,3,7), (1,4,7), (3,6,1), (4,6,1), (1,4,5), (1,3,5)\}$

Επιλέγουμε  $u_7 = \{(1,3,5)\}$ .

**Θέτουμε s=7.** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

**Πίνακας 3.8: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για s=7**

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_1$	1	4/3	0	-1/2	0	-5/6	-1/3	41/3
$x_3$	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
$x_5$	0	-1/3	0	0	1	1/3	1/3	4/3



Και έχουμε:  $R_8=R_7 \cup \{u_7\}=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5)\}$

$N(u_7)=\{(2,3,5), (1,4,5), (1,3,6), (1,3,7)\}$

$W_8=W_7 \cup N(u_7)-R_8=\{(1,3,7), (1,4,7), (3,6,1), (4,6,1), (1,4,5)\}$

Επιλέγουμε  $u_8=\{(1,3,7)\}$ .

**Θέτουμε s=8.** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

**Πίνακας 3.9: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για s=8**

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_1$	1	1	0	-1/2	1	-1/2	0	15
$x_3$	0	0	1	3/2	0	1/2	0	3
$x_7$	0	-1	0	0	3	1	1	4

Και έχουμε:  $R_9=R_8 \cup \{u_8\}=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5), (1,3,7)\}$

$N(u_8)=\{(2,3,7), (1,4,7), (1,3,5), (1,3,6)\}$

$W_9=W_8 \cup N(u_8)-R_9=\{(1,4,7), (3,6,1), (4,6,1), (1,4,5)\}$

Επιλέγουμε  $u_9=\{(1,4,7)\}$ .

**Θέτουμε s=9.** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

**Πίνακας 3.10: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για s=9**

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_1$	1	1	1/3	0	1	-1/3	0	16
$x_4$	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
$x_7$	0	-1	0	0	3	1	1	4

Και έχουμε:  $R_{10}=R_9 \cup \{u_9\}=\{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5), (1,3,7), (1,4,7)\}$

$N(u_9)=\{(2,4,7), (1,3,7), (1,4,5), (1,4,6)\}$

$W_{10}=W_9 \cup N(u_9)-R_{10}=\{(3,6,1), (4,6,1), (1,4,5)\}$

Επιλέγουμε  $u_{10}=\{(1,4,5)\}$ .

**Θέτουμε  $s=10$ .** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

**Πίνακας 3.11: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για  $s=10$**

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_1$	1	4/3	1/3	0	0	-2/3	-1/3	44/3
$x_4$	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
$x_5$	0	-1/3	0	0	1	1/3	1/3	4/3

Και έχουμε:  $R_{11}=R_{10} \cup \{u_{10}\} = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5), (1,3,7), (1,4,7), (1,4,5)\}$

$N(u_{10}) = \{(2,4,5), (1,3,5), (1,4,6), (1,4,7)\}$

$W_{11} = W_{10} \cup N(u_{10}) - R_{11} = \{(3,6,1), (4,6,1)\}$

Επιλέγουμε  $u_{11} = \{(1,4,6)\}$ .

**Θέτουμε  $s=11$ .** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

**Πίνακας 3.12: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για  $s=11$**

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_1$	1	2/3	1/3	0	2	0	1/3	52/3
$x_4$	0	1/3	2/3	1	-1	0	-1/3	2/3
$x_6$	0	-1	0	0	3	1	1	4

Και έχουμε:  $R_{12}=R_{11} \cup \{u_{11}\} = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5), (1,3,7), (1,4,7), (1,4,5), (1,4,6)\}$

$\Gamma(u_{11}) = \{(1,2,6), (1,3,6), (1,4,5), (1,4,7)\}$

$W_{12} = W_{11} \cup \Gamma(u_{11}) - R_{12} = \{(3,6,1)\}$

Επιλέγουμε  $u_{12} = \{(1,3,6)\}$ .

**Θέτουμε  $s=12$ .** Ο νέος πίνακας Simplex είναι ο ακόλουθος:

Πίνακας 3.13: Manas-Nedoma, Πίνακας Simplex για  $s=12$

Βάση	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_B$
$x_1$	1	1/2	0	-1/2	5/2	0	1/2	17
$x_3$	0	1/2	1	3/2	-3/2	0	-1/2	1
$x_6$	0	-1	0	0	3	1	1	4

Και έχουμε:  $R_{13}=R_{12} \cup \{u_{12}\} = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (2,6,1), (2,6,5), (2,4,5), (2,3,5), (1,3,5), (1,3,7), (1,4,7), (1,4,5), (1,4,6), (1,3,6)\}$

$\Gamma(u_{12}) = \{(1,2,6), (1,4,6), (1,3,5), (1,3,7)\}$

$W_{13} = W_{12} \cup \Gamma(u_{12}) - R_{12} = \{\emptyset\}$

Οπότε ο αλγόριθμος περατώνεται.

Στο παράδειγμα που παρουσιάστηκε, το 'μονοπάτι' που ακολουθήθηκε προκειμένου να επισκεφτούμε όλους τους κόμβους του γραφήματος είναι ένα 'Hamiltonian μονοπάτι' αφού δε χρειάστηκε να επισκεφτούμε για δεύτερη φορά ένα κόμβο που ήδη είχαμε υπολογίσει.

Οπότε πραγματοποιήσαμε  $s=12$  επαναλήψεις του αλγορίθμου και χρειάστηκε να υπολογίσουμε 12 διαφορετικούς πίνακες Simplex. Παρατηρείται ότι ο συγκεκριμένος αλγόριθμος ενώ κάνει οικονομία μνήμης στον υπολογιστή, αφού χρειάζεται η αποθήκευση ενός και μόνου πίνακα Simplex σε κάθε επανάληψη του, υπάρχει όμως μεγάλος υπολογιστικός φόρτος προκειμένου να υπολογιστούν  $s$  πίνακες Simplex όπου  $r \leq s \leq r \times m$ .

### 3.2 Ο αλγόριθμος της Αντίστροφης Simplex

Ο αλγόριθμος της Αντίστροφης Simplex (*Simplex Inverse*) παρουσιάστηκε από τον Van de Panne ο οποίος παρατήρησε ότι κάθε επανάληψη του αλγορίθμου Simplex είναι αντιστρέψιμη αντικαθιστώντας το ρόλο της μεταβλητής που εισέρχεται στη βάση με το ρόλο της μεταβλητής που εξέρχεται (Van de Panne, 1975).

Με άλλα λόγια, αν σε μία βάση της Simplex εισαχθεί η μεταβλητή  $x_j$  στη θέση της μεταβλητής  $x_{Br}$ , κατά την εκτέλεση της Αντίστροφης Simplex εισάγεται η  $x_{Br}$  στη θέση της  $x_j$ . Ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία μειώνουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης  $z$  κατά μία ποσότητα ίση με αυτή κατά την οποία αυξήθηκε η  $z$  όταν πραγματοποιήσαμε το βήμα της Simplex (Siskos, 1984).

Ο αλγόριθμος της Αντίστροφης Simplex σχεδιάστηκε για να χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση ευστάθειας (μεταβελτιστοποίηση) αλλά χρησιμοποιήθηκε και σαν γενική μέθοδος εύρεσης όλων των ακραίων σημείων ενός συστήματος ανισοτήτων. Όπως ήδη έχει αναφερθεί το σύνολο σχεδόν των βέλτιστων λύσεων να οριοθετείται από το υπερπολύεδρο ΥΠ 1

$$\text{ΥΠ 1} \begin{cases} \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^t \mathbf{x} \geq z^* - k \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}$$

όπου  $k$  μικρή θετική ποσότητα και στην περίπτωση των πολλαπλών βέλτιστων λύσεων  $k=0$  (αναφερόμαστε πάντα για την περίπτωση μεγιστοποίησης)

Αυξάνοντας την τιμή του  $k$  αυξάνουμε και τον αριθμό των σχεδόν βέλτιστων λύσεων. Στην πράξη το  $k$  παίρνει τιμές σχετικά μικρές αλλά ακόμα και σε αυτές τις περιπτώσεις ο αριθμός των σχεδόν βέλτιστων λύσεων μπορεί να είναι πολύ μεγάλος (Van de Panne, 1975).

Η ιδέα στην οποία βασίζεται ο αλγόριθμος της Αντίστροφης Simplex είναι αρκετά απλή. Στη μέθοδο Simplex εισάγονται μεταβλητές στη βάση οι οποίες αυξάνουν την τιμή αντικειμενικής συνάρτησης μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη λύση. Στη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex η βέλτιστη λύση θεωρείται ως σημείο εκκίνησης για την παραγωγή σχεδόν βέλτιστων λύσεων. Σε αυτή και σε επόμενες λύσεις εισάγονται μεταβλητές στη βάση που μειώνουν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ο ποσότητα  $k$  ορίζει το οριακό σημείο μέχρι το οποίο μπορεί αν μειωθεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Η βασική διαφορά ανάμεσα στη μέθοδο Simplex και σε αυτή της Αντίστροφης Simplex είναι ότι στην πρώτη μόνο μια μεταβλητή εισάγεται στη βάση σε κάθε επανάληψη, ενώ στη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex όλες οι τιμές που μειώνουν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης εισάγονται αργά η γρήγορα στη βάση. Επίσης, στη μέθοδο Simplex η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυξάνεται σε κάθε επανάληψη, ενώ αντιθέτως στη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex μειώνεται ή παραμένει τα ίδια σε κάθε επανάληψη, δεδομένου ότι δεν υπάρχουν εκφυλισμένες λύσεις (Van de Panne, 1975).

Ας θεωρήσουμε μία επανάληψη της μεθόδου Simplex σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης.

Ο Πίνακας 3.14 παριστάνει ένα πίνακα Simplex, έστω μετά τη  $p$  επανάληψη.

Πίνακας 3.14: Πίνακας Simplex μετά από την  $p$  επανάληψη

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	...	$k$	...	$r$	...	$m+n$	$\mathbf{x}_B$
$c_{B1}$	1	1	...	$y_{1k}$	...	0	...	$y_{1(m+n)}$	$x_{B1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_{Br}$	$r$	0	...	$y_{rk}$	...	1	...	$y_{r(m+n)}$	$x_{Br}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_{Bj}$	$j$	0	...	$y_{jk}$	...	0	...	$y_{j(m+n)}$	$x_{Bj}$
	$\mathbf{c}_j$	$c_1$	...	$c_k$	...	$c_r$	...	$c_n$	
	$\Delta_j$	-	...	$\Delta_k$	...	-	...	$\Delta_n$	

Έστω ότι κατά την επανάληψη  $p+1$  επανάληψη της μεθόδου Simplex εισάγεται η μεταβλητή  $x_k$  θεωρώντας φυσικά ότι το οριακό καθαρό εισόδημα της μεταβλητής που θα εισαχθεί είναι το μεγαλύτερο θετικό (δηλ.  $\Delta_k = \max_j \Delta_j \quad \forall \Delta_j > 0$ ).

Έστω ακόμα ότι απομακρύνεται από τη βάση την μεταβλητή  $x_{Br}$  θεωρώντας φυσικά ότι ισχύει:

$$\frac{x_{Br}}{y_{rk}} = \min_i \left( \frac{x_{Bi}}{y_{ik}}, y_{ik} > 0 \right) \quad (4)$$

Ο Πίνακας 3.15 είναι ο πίνακας Simplex μετά από την  $p+1$  επανάληψη:

Πίνακας 3.15: Πίνακας Simplex μετά από την  $p+1$  επανάληψη

$c_B$	Βάση	1	...	k	...	r	...	m+n	$x_B$
$c_{B1}$	1	1	...	0	...	$-y_{1k}/y_{rk}$	...	$y_{1(m+n)} - y_{1k}(y_{r(m+n)}/y_{rk})$	$x_{B1} - y_{1k}(x_{Br}/y_{rk})$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$c_{Bk}$	k	0	...	1	...	$1/y_{rk}$	...	$y_{r(m+n)}/y_{rk}$	$x_{Br}/y_{rk}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$c_{Bj}$	j	0	...	0	...	$-y_{jk}/y_{rk}$	...	$y_{j(m+n)} - y_{jk}(y_{r(m+n)}/y_{rk})$	$x_{Bj} - y_{jk}(x_{Br}/y_{rk})$
	$c_j$	$c_1$	...	$c_k$	...	$c_r$	...	$c_n$	
	$\Delta_j$	-	...	-	...	$-\Delta_k/y_{rk}$	...	$\Delta_n - \Delta_k(y_{rn}/y_{rk})$	$z + \Delta_k(x_{Br}/y_{rk})$

Παρατηρείται ότι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυξάνεται κατά  $\Delta_k(x_{Br}/y_{rk})$  και ότι η τιμή του οριακού καθαρού εισοδήματος της μεταβλητής είναι αρνητική και ίση με  $-\Delta_k/y_{rk}$ . Έστω τώρα ότι εισάγεται στη βάση κατά τρόπο αντίστροφο η μεταβλητή  $x_r$ . Από τη στιγμή που η ποσότητα  $-\Delta_k/y_{rk}$  είναι αρνητική η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα μειωθεί. Ειδικότερα για την καινούργια τιμή  $z'$  θα ισχύει:

$$z' = z + \Delta_k \frac{x_{Br}}{y_{rk}} - \frac{\Delta_k}{y_{rk}} \frac{x_{Br}}{y_{rk}} y_{rk} = z \quad (5)$$

Για να εντοπιστεί το διάνυσμα που θα εγκαταλείψει τη βάση εργαζόμαστε ως ακολούθως.

Οι νέες τιμές  $x'_B$  δίνονται από το γενικό τύπο:

$$x'_{Bi} = x_{Bi} - x_{Br} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} - \left( \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \right) \quad (6)$$

που πρέπει να είναι θετική ποσότητα προκειμένου η νέα λύση να είναι δυνατή.

Οπότε αν τεθεί  $x_{Bi} - y_{ik} \frac{x_{Br}}{y_{rk}} = x_{Bi}^*$  και μέσω της σχέσης (6) ισχύει:

$$x_{Bi}^* + \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \geq 0 \quad (7)$$

Παρατηρείται ότι η (7) πληρείται αυτόματα για κάθε  $y_{ik} > 0$ . (Σημ. Η ποσότητα  $y_{rk}$  είναι θετική γιατί η μεταβλητή  $x_k$  έχει εισέλθει προηγουμένως στη βάση.) Οπότε είμαστε σε θέση να απομακρύνουμε τη μεταβλητή  $x_k$  από τη βάση και να εισάγουμε τη μεταβλητή  $x_r$  λαμβάνοντας και πάλι τον Πίνακα 3.14.

Έτσι αποδείχθηκε ότι για κάθε επανάληψη της μεθόδου Simplex υπάρχει μια επανάληψη αντιστροφής η οποία υλοποιείται με την εισαγωγή μιας μη βασικής μεταβλητής με αρνητικό καθαρό οριακό εισόδημα στη βάση και βρίσκοντας τη μεταβλητή που φεύγει από τη βάση με το γνωστό τρόπο που εξασφαλίζει τη θετικότητα των τιμών των βασικών μεταβλητών (Van de Panne, 1975).

Η μέθοδος της Αντίστροφης Simplex θα περιγραφεί τώρα με περισσότερες λεπτομέρειες. Για τους σκοπούς μας θα θεωρήσουμε πάλι την προσθήκη του περιορισμού:

$$z - Y = z^* - k \quad (8)$$

όπου  $Y$  η μεταβλητή απόκλισης.

Οι τιμές που λαμβάνει η μεταβλητή  $Y$  κατά τις επαναλήψεις της μεθόδου της Αντίστροφης Simplex θα πρέπει να είναι θετικές ή μηδέν:

$$Y = z - (z^* - k) \geq 0 \quad (9)$$

Ορίζουμε την ποσότητα  $k_s$  ως την τιμή της  $Y$  κατά την  $s$  επανάληψη. Οι  $k_s$  θα μετράνε την παρέκκλιση που θα έχουμε σε κάθε επανάληψη από το ελάχιστο όριο  $z^* - k$ .

Σαν σημείο εκκίνησης για τον αλγόριθμο της Αντίστροφης Simplex λαμβάνουμε το βέλτιστο πίνακα Simplex στον οποίο έχουμε προσθέσει τον περιορισμό (8). Όπως παρουσιάζεται παρακάτω στην παράγραφο 3.3 οι συντελεστές του νέου περιορισμού στον αρχικό βέλτιστο πίνακα Simplex είναι οι αντίθετες τιμές των καθαρών οριακών εισοδημάτων, για τις οποίες ισχύει:  $\Delta_j^o = -\Delta_j \geq 0$ .

Ο Πίνακας 3.16 είναι ο αρχικός ( $s=0$ ) για τον αλγόριθμο της Αντίστροφης Simplex, ενώ σε κάθε επανάληψη  $s$  του αλγορίθμου ο πίνακας θα έχει τη γενική μορφή που φαίνεται στον Πίνακα 3.17.

Στον αρχικό πίνακα έχουμε  $x_{Bi}^o > 0$  για κάθε  $i$  και  $\Delta_j^o > 0$  για κάθε  $j$ · αν δεν είχαμε θεωρήσει ότι η βέλτιστη λύση  $z^*$  είναι μοναδική θα ίσχυε  $\Delta_j^o \geq 0$ . Η εισαγωγή μιας μη βασικής μεταβλητής, έστω της  $x_k$ , στη βάση θα οδηγούσε σε μείωση  $\Delta_k^o$  της τιμής της  $k_o$ .

Η μεταβλητή  $x_r$  που θα εγκαταλείψει τη βάση καθορίζεται, όπως και κατά την εφαρμογή της Simplex, από την παρακάτω σχέση:

$$\theta_j^o = \frac{x_{Br}^o}{a_{rj}^o} = \min_i \left( \frac{x_{Bi}^o}{a_{ij}^o}, a_{ij}^o > 0 \right) \quad (10)$$

Πίνακας 3.16: Αρχικός (s=0) για τον αλγόριθμο της Αντίστροφης Simplex

Βάση	Μη Βασικές Μεταβλητές			Βασικές Μεταβλητές						Τιμές Βασικών Μεταβλητών
$x_1$	$a_{11}^o$	...	$a_{1j}^o$	1	...	0	...	0	0	$x_{B1}^o$
⋮	⋮		⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	
$x_i$	$a_{ii}^o$	...	$a_{ij}^o$	0	...	1	...	0	0	$x_{Bi}^o$
⋮	⋮		⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	
$x_m$	$a_{mi}^o$	...	$a_{mj}^o$	0	...	0	...	1	0	$x_{Bm}^o$
$\gamma$	$\Delta_i^o$	...	$\Delta_j^o$	0	...	0	...	0	1	$k_o (=k)$

Πίνακας 3.17: Επανάληψη s για τη μέθοδο της Αντίστροφης Simplex

Βάση	Μη Βασικές Μεταβλητές			Βασικές Μεταβλητές						Τιμές Βασικών Μεταβλητών
$x_1$	$a_{11}^s$	...	$a_{1j}^s$	1	...	0	...	0	0	$x_{B1}^s$
⋮	⋮		⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	
$x_i$	$a_{ii}^s$	...	$a_{ij}^s$	0	...	1	...	0	0	$x_{Bi}^s$
⋮	⋮		⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	
$x_m$	$a_{mi}^s$	...	$a_{mj}^s$	0	...	0	...	1	0	$x_{Bm}^s$
$\gamma$	$\Delta_i^s$	...	$\Delta_j^s$	0	...	0	...	0	1	$k_s$

Προκειμένου να βρούμε τη μεταβλητή  $x_k$  που θα εισάγουμε στη βάση εργαζόμαστε ως ακολούθως. Υπολογίζουμε την ποσότητα

$$k_{oj} = k - \Delta_j^o (x_{Br}^o / a_{rj}^o) \quad (11)$$

για κάθε  $j$ .

Επειδή οι λύσεις  $y_s$  που θα βρούμε πρέπει να είναι ταξινομημένες κατά φθίνουσα σειρά θα επιλέξουμε το μεγαλύτερο  $k_{oj}$ . Από τη στιγμή που η τιμή της  $Y$  δεν μπορεί να είναι αρνητική, η δεύτερη τιμή ( $k_1$ ) θα οριστεί από τη σχέση:

$$k_1 = \max_j(k_{oj}, 0) = k_{ok} \quad (12)$$

και υποθέτουμε ότι το ελάχιστο είναι μοναδικό.

Αν το  $k_1 \neq 0$ , ο επόμενος πίνακας λαμβάνεται από την εισαγωγή της αντίστοιχης μη βασικής μεταβλητής  $x_k$  στη βάση, ενώ η βασική μεταβλητή που φεύγει από τη βάση βρίσκεται από τη σχέση (10). Η περίπτωση όπου  $k_1=0$  θα εξεταστεί παρακάτω. Αν στη σχέση (10) για κάποια  $j$  ίσχυε  $\sigma_{ij} \leq 0$  για όλα τα  $i$ , καμία αντίστοιχη κορυφή-λύση δε θα μπορούσε να βρεθεί γιατί σε αυτή τη περίπτωση το  $x_k$  θα αυξανόταν αόριστα και η απώλεια από τη βέλτιστη τιμή  $z^*$  θα αυξανόταν και αυτή αόριστα. Όμως, η μέγιστη απώλεια  $k$  που θα μας δώσει  $k_s=0$  μας ορίζει ένα όριο για τη λύση, έτσι ώστε αυτή η περίπτωση να είναι όμοια με την περίπτωση όπου  $k_1=0$ , και να μπορεί να αντιμετωπιστεί με τον ίδιο τρόπο.

Έχουμε βρει, σύμφωνα με τα παραπάνω, μία μεταβέλτιστη λύση με  $Y=k_1$ . Όλες οι άλλες λύσεις που θα βρούμε θα έχουν τιμές μικρότερες ή ίσες με την τιμή  $k_1$ . Δεν υπάρχει καμία άλλη δυνατή λύση με  $k_s$  ανάμεσα στο  $k$  και στο  $k_1$  γιατί αν υπήρχε μια τέτοια λύση, η βέλτιστη λύση  $z^*$ , που είναι και η αρχική για τον αλγόριθμο της Αντίστροφης Simplex, θα μπορούσε να παραχθεί από αυτή τη λύση σε μία ή περισσότερες επαναλήψεις της μεθόδου Simplex. Αν μπορούσε να παραχθεί σε μία επανάληψη τότε, εκτελώντας την αντίστοιχη επανάληψη στον αλγόριθμο της Αντίστροφης Simplex, σύμφωνα με τη σχέση 12) η λύση αυτή θα είχε επιλεγεί.

Αν μπορούσε να παραχθεί σε περισσότερες από μία επαναλήψεις, η τελευταία λύση πριν τη βέλτιστη θα είχε μεγαλύτερη τιμή από  $k_1$ . Τότε όμως από αυτή τη λύση η βέλτιστη λύση θα μπορούσε να παραχθεί σε μία επανάληψη και εκτελώντας την αντίστοιχη επανάληψη του αλγορίθμου της Αντίστροφης Simplex θα βρίσκαμε πρώτα αυτή τη λύση.

Έχοντας βρει μία δεύτερη δυνατή λύση (μετά από την βέλτιστη που θεωρείται ως αρχική) θα ψάξουμε να βρούμε την επόμενη στη σειρά  $k_s$ , αντιμετωπίζοντας δύο πιθανές περιπτώσεις. Πρώτον, υπάρχουν και άλλες λύσεις που μπορούν να παραχθούν από τον πρώτο πίνακα. Δεύτερον, υπάρχουν λύσεις που μπορούν να παραχθούν από το δεύτερο πίνακα, που είναι αποτέλεσμα της εισαγωγής στη βάση της μεταβλητής  $x_k$ . Οι τελευταίες αυτές λύσεις προκύπτουν από την εισαγωγή στη βάση των μη βασικών μεταβλητών  $x_j$  με  $\Delta_j^1 > 0$ . Αν εισάγουμε στη βάση μη βασικές μεταβλητές με  $\Delta_j^1 < 0$  θα είχαμε  $k_s > k_1$  και σε αυτή την περίπτωση θα παίρναμε ως αποτέλεσμα τη βέλτιστη λύση. Όπως αναφέραμε και παραπάνω δεν υπάρχει περίπτωση να υπάρχει λύση με  $k_s$  ανάμεσα σε ανάμεσα στο  $k$  και στο  $k_1$ , γιατί εφόσον μία μεταβλητή  $x_j$  με  $\Delta_j^1 > 0$  εισαχθεί στη βάση η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μειώνεται, έτσι ώστε η παρέκκλιση από την ελάχιστη τιμή  $z^* - k$  θα είναι μικρότερη από  $k_1$ .

Έτσι, στο δεύτερο πίνακα ( $s=1$ ) για κάθε  $x_j$  με  $\Delta_j^1 > 0$ , έχουμε:

$$\theta_j^1 = \frac{x_{Br}^1}{a_{rj}^1} = \min_i \left( \frac{x_{Bi}^1}{a_{ij}^1}, a_{ij}^1 > 0 \right) \quad (13)$$

Οι τιμές των  $y_1$  που θα παραχθούν από την εισαγωγή της μεταβλητής  $x_j$  στη βάση βρίσκεται από τη σχέση:

$$k_{1j} = k - \Delta_j^1 (x_{Br}^1 / a_{rj}^1) \quad (14)$$



Η επόμενη στην ταξινόμηση κατά φθίνουσα σειρά τιμή των  $k_s$  βρίσκεται από τη σχέση:

$$k_2 = \max_j (k_{0j}, k_{1j}, 0 | k_{0j} < k_1, k_{1j} > 0) \quad (15)$$

υποθέτοντας πάλι ότι το ελάχιστο είναι μοναδικό. Αν η ελάχιστη τιμή αντιστοιχεί σε ένα από τα  $k_{0j}$  η επόμενη λύση παράγεται από τον πίνακα  $s=0$ , ενώ αν αντιστοιχεί σε ένα από τα  $k_{1j}$  η επόμενη λύση παράγεται από τον πίνακα  $s=1$ . Η περίπτωση όπου  $k_2=0$  θα εξεταστεί παρακάτω.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο αλγόριθμος της μεθόδου της Αντίστροφης, παραθέτοντας τα συγκεκριμένα βήματα που ακολουθούνται χωρίζοντας την όλη διαδικασία σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση υπολογίζουμε τις λύσεις για τις οποίες  $0 < Y \leq k$ , ενώ στη δεύτερη φάση υπολογίζουμε τις λύσεις τις πλέον απομακρυσμένες από τη βέλτιστη με  $Y=0$ .

### ΦΑΣΗ 1

**Βήμα 0:** Ξεκινάμε από το βέλτιστο πίνακα Simplex ( $s=0$ ) αφού πρώτα προσθέσουμε μία γραμμή συμπληρωματική που αποτελείται από τις αντίθετες τιμές των οριακών καθαρών εισοδημάτων ( $\Delta_j$ ) του βέλτιστου πίνακα,  $\Delta_j^0 = -\Delta_j \geq 0$ .

Θέτουμε  $Y=k$  (ορίζουμε  $k_0=k$ ).

Υποθέτουμε ότι δεν έχουμε πολλαπλές βέλτιστες λύσεις ( $\Delta_j > 0, \forall j$ ).

Δημιουργούμε δύο σύνολα για την καταγραφή των κορυφών-λύσεων και των τιμών  $x_B$  των λύσεων αυτών. Κατ' αντιστοιχία με τον αλγόριθμο των Manas-Nedoma ονομάζουμε τα σύνολα αυτά  $R_s$  και  $RX_s$ .

**Βήμα 1:** Θεωρούμε ένα πίνακα Simplex  $s$ . Δημιουργούμε ένα κλάδο για κάθε μεταβλητή  $x_j$  που βρίσκεται εκτός βάσης και για τις οποίες ισχύει  $\Delta_j^s > 0$ . Καθορίζουμε τα στοιχεία-οδηγούς  $a_{rj}^s$  (για κάθε  $j$  με  $\Delta_j^s > 0$ ) από τη σχέση:

$$\frac{x_{Br}^s}{a_{rj}^s} = \min_i \left( \frac{x_{Bi}^s}{a_{ij}^s}, a_{ij}^s > 0 \right) \quad (16)$$

**Βήμα 2:** Υπολογίζουμε τις τιμές που θα πάρει η μεταβλητή απόκλισης  $Y$  για κάθε μεταβλητή  $x_j$  που δύναται να εισέλθει στη βάση:

$$k_{sj} = k_s - \Delta_j^s (x_{Br}^s / a_{rj}^s) \quad (17)$$

και προσθέτουμε στο σύνολο  $K_s$  όλα τα  $k_{sj} > 0$ .

**Βήμα 3:** Καθορίζουμε τη μεταβλητή  $x_j$  που θα εισέλθει στη βάση σύμφωνα με τη σχέση:

$$k_{s+1} = \max_j (k_{0j}, k_{1j}, \dots, k_{sj}, 0 | k_{ij} > 0) \quad (18)$$

και αφαιρούμε αυτή την τιμή από το σύνολο  $K_s$  των  $k_{ij} > 0$ .

Ενημερώνουμε το σύνολο λύσεων  $R$  με το διάνυσμα των δεικτών των βασικών μεταβλητών της τρέχουσας λύσης καθώς και το σύνολο  $RX$  με το διάνυσμα των τιμών  $x_B$ .

Σε περίπτωση που έχουμε  $k_{s+1}=0$ , πηγαίνουμε στη **Φάση 2**.

**Βήμα 4:** Εισάγουμε τη μεταβλητή  $x_j$  και απομακρύνουμε τη μεταβλητή  $x_r$  ( $x_j \uparrow$ ,  $x_r \downarrow$ ) στον πίνακα Simplex που αντιστοιχεί η τιμή που θα βρούμε από τη σχέση (18).

Πηγαίνουμε στο Βήμα 1 θέτοντας  $s:=s+1$ .

## ΦΑΣΗ 2

Στην περίπτωση που πλέον δεν υπάρχουν άλλες θετικές τιμές  $k_{1j}, \dots, k_{sj}$  όλες οι υπόλοιπες λύσεις, που μπορούν να παραχθούν από τους πίνακες Simplex δίνουν  $z=z^*-k$ .

Αυτά τα ακραία σημεία (λύσεις) μπορούν να βρεθούν εισάγοντας στη βάση μη βασικές μεταβλητές με  $\Delta_j^s > 0$ , που δεν έχουν ακόμα εισαχθεί στους πίνακες Simplex που έχουν παραχθεί μέχρι τώρα. Αυτές οι μεταβλητές παίρνουν τέτοιες τιμές ώστε οι λύσεις που θα παραχθούν, θα δίνουν τιμές στην αντικειμενική συνάρτηση ακριβώς ίσες με  $z^*-k$ .

Θέλουμε δηλαδή η μείωση της τιμής της  $z$  να είναι ίση με  $k_s$  για κάθε πίνακα Simplex  $s$ . Οπότε πρέπει να ισχύει:

$$k_s = \Delta_j^s \frac{x_{Br}^s}{a_{rj}^s} \Rightarrow \frac{k_s}{\Delta_j^s} = \frac{x_{Br}^s}{a_{rj}^s} \quad (19)$$

Από τον Πίνακα 3.15 παρατηρούμε ότι η τιμή της νεοεισερχόμενης μεταβλητής δίνεται από τη σχέση  $x_j = \frac{x_{Br}}{a_{rj}}$ , οπότε σύμφωνα και με τη σχέση (19) έχουμε:

$$x_{Bj} = \frac{k_s}{\Delta_j^s} \quad (20)$$

Ακόμα θα ισχύει για τις αντίστοιχες τιμές των βασικών μεταβλητών που παραμένουν στη βάση:

$$x_{Bi} = x_{Bi}^s - a_{ij}^s x_{Bj}, \quad \forall i \neq j \quad (21)$$

Στον κάθε πίνακα Simplex  $s$ , αυτές οι λύσεις μπορούν να παραχθούν απομακρύνοντας τη μεταβλητή  $Y$  από τη βάση (οπότε  $Y=0$ ) και εισάγοντας κάθε μεταβλητή  $x_j$  με  $\Delta_j^s > 0$ .

Επειδή καμία περαιτέρω επανάληψη δε χρειάζεται να πραγματοποιηθεί, δεν είναι απαραίτητο να παράγουμε όλα τα στοιχεία του πίνακα Simplex αυτών των λύσεων. Χρειάζεται μόνο να παραχθούν οι τιμές των βασικών μεταβλητών και πιθανώς οι τιμές των  $\Delta_j^{s+1}$ .

Όλες οι μεταβέλτιστες λύσεις, που δίνουν διαφορετική τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση του γ.π. παράγονται ακολουθώντας αυτή τη μέθοδο και αυτό αποδεικνύεται ως ακολούθως. Από κάθε λύση που βρίσκουμε μπορούμε να φτάσουμε στη βέλτιστη λύση με ένα πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων της μεθόδου Simplex. Ο αλγόριθμος της Αντίστροφης Simplex ξεκινώντας από τη βέλτιστη λύση κατά την αντίθετη κατεύθυνση εξετάζει κάθε λύση κατά φθίνουσα σειρά. Αν υπάρχει μονοπάτι που πηγαίνει προς τα πάνω, σίγουρα θα υπάρχει μονοπάτι που πηγαίνει και προς τα κάτω (Siskos, 1984; Van de Panne, 1975).

Για να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο της Αντίστροφης Simplex θα χρησιμοποιήσουμε το παράδειγμα ΓΠ 1.

### Φάση 1

Θέτουμε  $s=0$ ,  $K_s=\{0\}$ ,  $R_s=\emptyset$  και  $RX_s=\emptyset$ .

Ο αρχικός πίνακας της Simplex συμβολίζεται ως 00 στον Πίνακα 18. Θεωρούμε  $k=20$ , οπότε εισάγουμε το νέο περιορισμό:  $3x_1+4x_2+5x_3+6x_4 \geq 56 \Rightarrow 3x_1+4x_2+5x_3+6x_4 -Y=56$ , και έστω:  $x_1 = x_5$ ,  $x_2 = x_6$  και  $Y = x_7$ .

**Βήμα 0:** Ο αλγόριθμος ξεκινάει από το βέλτιστο πίνακα όπου προσθέτουμε μία γραμμή που εκφράζει το νέο περιορισμό και τα στοιχεία της είναι οι αντίθετες τιμές των οριακών καθαρών εισοδημάτων ( $\Delta_j$ ) του βέλτιστου πίνακα. Ο πίνακας Simplex που προκύπτει είναι ο  $s=0$ .

**Βήμα 1:** Οι μεταβλητές που μπορούν να εισαχθούν στη βάση είναι αυτές οι οποίες αντιστοιχούν  $\Delta_j$  θετικά (τελευταία γραμμή του πίνακα Simplex). Στην περίπτωση μας:  $x_1, x_5, x_3, x_6$ . Τα στοιχεία - οδηγό  $\alpha^o_{rj}$  βρίσκονται από τη σχέση (16):

$$\text{Για } j=1, \min\{16/1\}=16/1, \quad \alpha^o_{21}=1$$

$$\text{Για } j=5, \min\{16/1\}=16/1, \quad \alpha^o_{25}=1$$

$$\text{Για } j=3, \min\left\{\frac{16}{\frac{1}{3}}, \frac{2}{\frac{2}{3}}\right\} = \frac{2}{\frac{2}{3}}, \quad \alpha^o_{43}=2/3$$

$$\text{Για } j=3, \min\left\{\frac{2}{\frac{1}{3}}\right\} = \frac{2}{\frac{1}{3}}, \quad \alpha^o_{46}=1/3$$

**Βήμα 2:** Υπολογίζουμε τις τιμές  $k_{0j}$  από τη σχέση (17):

$$k_{01}=20-1 \times 16/1=4, \quad k_{05}=-44, \quad k_{03}=19, \quad k_{06}=16.$$

$$K_0=\{k_{01}, k_{03}, k_{06}, 0\}$$

**Βήμα 3:** Σύμφωνα με τη σχέση (18) έχουμε:

$$k_1=\max\{k_{01}, k_{03}, k_{06}, 0\}=k_{03}=19.$$

Οπότε η μεταβλητή  $x_3$  εισέρχεται στη νέα βάση και η σχεδόν βέλτιστη λύση δίνει τιμή στο  $z$  μειωμένη κατά μία μονάδα από τη βέλτιστη τιμή  $z^*$  ( $z=76-1=75$ ). Η τιμή  $k_{03}$  δε θα συμπεριληφθεί ξανά στο σύνολο της σχέσης (18).

$$R_1=\{(2,4,7)\}$$

**Βήμα 4:** Η είσοδος στη βάση της  $x_3$  και η έξοδος της  $x_4$  μας δίνει τον επόμενο πίνακα Simplex, n<sup>ο</sup>1.

**Θέτουμε s=1** και επιστρέφουμε στο Βήμα 1.

**Βήμα 1:** Οι μεταβλητές που μπορούν να εισαχθούν στη νέα βάση είναι:  $x_1, x_5, x_6$ . Τα στοιχεία - οδηγοί  $\alpha^1_{rj}$  βρίσκονται από τη σχέση (16):

$$\alpha^1_{21}=1 \quad \alpha^1_{25}=1 \quad \alpha^1_{36}=1/2$$

**Βήμα 2:** Υπολογίζουμε τις τιμές  $k_{1j}$  από τη σχέση (17):

$$k_{11}=4, \quad k_{15}=-41, \quad k_{16}=16.$$

$$K_1=\{k_{01}, k_{06}, k_{11}, k_{16}, 0\}$$

**Βήμα 3:** Σύμφωνα με τη σχέση (18) έχουμε:

$k_2=\max\{k_{01}, k_{06}, k_{11}, k_{16}, 0\}=16$  που αντιστοιχεί στις τιμές  $k_{06}$  και  $k_{16}$ . Οπότε μπορούμε να εισάγουμε τη μεταβλητή  $x_6$  μέσα στη βάση είτε από τον πίνακα Simplex n<sup>ο</sup>0 είτε από το n<sup>ο</sup>1.

$$R_2=\{(2,4,7), (2,3,7)\}$$

**Βήμα 4:** Η είσοδος στη βάση του πίνακα n<sup>ο</sup>0 της  $x_6$  και η έξοδος της  $x_4$  μας δίνει τον επόμενο πίνακα Simplex, n<sup>ο</sup>2.

**Θέτουμε s=2** και επιστρέφουμε στο Βήμα 1.

**Βήμα 1:** Οι μεταβλητές που μπορούν να εισαχθούν στη νέα βάση είναι:  $x_1, x_5$ . Τα στοιχεία - οδηγοί  $\alpha^2_{rj}$  βρίσκονται από τη σχέση (16):

$$\alpha^2_{21}=1 \quad \alpha^2_{25}=1$$

**Βήμα 2:** Υπολογίζουμε τις τιμές  $k_{2j}$  από τη σχέση (17):

$$k_{21}=-2, \quad k_{25}=-56.$$

$$K_2=\{k_{01}, k_{11}, 0\}$$

**Βήμα 3:** Σύμφωνα με τη σχέση (18) έχουμε:

$$k_3=\max\{k_{01}, k_{11}, 0\}=k_{01}=k_{11}=4$$

Οπότε μπορούμε να εισάγουμε τη μεταβλητή  $x_1$  μέσα στη βάση είτε από τον πίνακα Simplex n<sup>ο</sup>0 είτε από το n<sup>ο</sup>1.

$$R_3 = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7)\}$$

**Βήμα 4:** Η είσοδος στη βάση του πίνακα n°0 της  $x_1$  και η έξοδος της  $x_2$  μας δίνει τον επόμενο πίνακα Simplex, n°3.

**Θέτουμε  $s=3$**  και επιστρέφουμε στο Βήμα 1.

**Βήμα 1:** Οι μεταβλητές που μπορούν να εισαχθούν στη νέα βάση είναι:  $x_3, x_5, x_6$ . Τα στοιχεία - οδηγού  $a^3_{rj}$  βρίσκονται από τη σχέση (16):

$$a^3_{15}=1 \quad a^3_{43}=2/3 \quad a^3_{46}=1/3$$

**Βήμα 2:** Υπολογίζουμε τις τιμές  $k_{3j}$  από τη σχέση (17):

$$k_{35} = -44, \quad k_{33} = 4, \quad k_{36} = -2.$$

$$K_3 = \{k_{33}, 0\}$$

**Βήμα 3:** Σύμφωνα με τη σχέση (18) έχουμε:

$$k_4 = \max\{k_{33}, 0\} = k_{33} = 4$$

Οπότε μπορούμε να εισάγουμε τη μεταβλητή  $x_3$  μέσα στη βάση από τον πίνακα Simplex n°3.

$$R_4 = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (1,4,7)\}$$

**Βήμα 4:** Η είσοδος στη βάση του πίνακα n°3 της  $x_3$  και η έξοδος της  $x_4$  μας δίνει τον επόμενο πίνακα Simplex, n°4.

**Θέτουμε  $s=4$**  και επιστρέφουμε στο Βήμα 1.

**Βήμα 1:** Οι μεταβλητές που μπορούν να εισαχθούν στη νέα βάση είναι:  $x_5, x_6$ . Τα στοιχεία - οδηγού  $a^4_{rj}$  βρίσκονται από τη σχέση (16):

$$a^4_{15}=1 \quad a^4_{36}=1/2$$

**Βήμα 2:** Υπολογίζουμε τις τιμές  $k_{4j}$  από τη σχέση (17):

$$k_{45} = -41, \quad k_{46} = -2.$$

$$K_4 = \{0\}$$

**Βήμα 3:** Σύμφωνα με τη σχέση (18) έχουμε:

$$k_5 = \max\{0\} = 0$$

$$R_5 = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (1,4,7), (1,3,7)\}$$

Πηγαίνουμε στη Φάση 2.

### Φάση 2

Έχουμε κρατήσει τους πίνακες Simplex n° 0, 1, 2, 3, 4 που κατασκευάσαμε στη Φάση 1 (Πίνακας 3.18) και εφαρμόζουμε τις σχέσεις (20) και (21) χωρίς να επαναλάβουμε τις ίδιες λύσεις με αυτές της Φάσης 1.

Οι νέες αυτές λύσεις αντιστοιχούν σε εισαγωγή στη βάση των  $x_j$  στη θέση της μεταβλητής  $Y$  ( $x_7$ ), η οποία αφού εξέρχεται από τη βάση μηδενίζεται ( $Y=0$ ), δίνοντάς μας σύμφωνα με την (20),  $z=z^*-k=56$ . Οκτώ νέες λύσεις υπολογίζονται στη Φάση 2 (Πίνακας 3.19, n° 5-12).

Η λύση n° 5 για παράδειγμα υπολογίζεται σύμφωνα με τις σχέσεις (20) και (21) από τον πίνακα Simplex n° 0 (όπου  $k_{05} < 0$ ):

$$x_5 = 20/4 = 5, \quad x_2 = 16 - 1 \times 5 = 11, \quad x_4 = 2 - 0 \times 5 = 2$$

$$R_6 = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (1,4,7), (1,3,7), (5,2,4)\}$$

Παρόμοια υπολογίζεται και η λύση n° 6 από τον πίνακα Simplex n° 1 (όπου  $k_{15} < 0$ ):

$$x_5 = 19/4, \quad x_2 = 15 - 1 \times 19/4 = 41/4, \quad x_3 = 3 - 0 \times 19/4 = 3$$

$$R_7 = \{(2,4,7), (2,3,7), (2,6,7), (1,4,7), (1,3,7), (5,2,4), (5,2,3)\}$$

Πίνακας 3.18: Πίνακας Φάσης Α του αλγορίθμου της Αντίστροφης Simplex

Πίνακας Simplex (N°)	Βασικές Μεταβλητές	Μη Βασικές Μεταβλητές			
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
00	$x_5 = 18$ $x_6 = 6$	1	1	1	1
		0	0	2	3
		$x_1$	$x_5$	$x_3$	$x_6$
0	$x_2 = 16$ $x_4 = 2$ $x_7 (Y) = 20$	<b>1</b>	<b>1</b>	1/3	-1/3
		0	0	<b>2/3</b>	<b>1/3</b>
		1	4	1/3	2/3
	$k_{0j}$	4	-44	19	16
		$x_1$	$x_5$	$x_4$	$x_6$
1	$x_2 = 15$ $x_3 = 3$ $x_7 = 19$	<b>1</b>	<b>1</b>	-1/2	-1/2
		0	0	3/2	<b>1/2</b>
		1	4	-1/2	1/2
	$k_{1j}$	4	-41	-	16

		$x_1$	$x_5$	$x_3$	$x_4$
2	$x_2 = 18$	<b>1</b>	<b>1</b>	1	1
	$x_6 = 6$	0	0	2	3
	$x_7 = 16$	1	4	-1	-2
	$k_{2j}$	-2	-56	-	-
		$x_2$	$x_5$	$x_3$	$x_6$
3	$x_1 = 16$	1	<b>1</b>	1/3	-1/3
	$x_4 = 2$	0	0	<b>2/3</b>	<b>1/3</b>
	$x_7 = 4$	-1	3	0	1
	$k_{3j}$	-	-44	4	-2
		$x_2$	$x_5$	$x_4$	$x_6$
4	$x_1 = 15$	1	<b>1</b>	-1/2	-1/2
	$x_3 = 3$	0	0	3/2	<b>1/2</b>
	$x_7 = 4$	-1	3	0	1
	$k_{4j}$	-	-41	-	-2

Ακολουθεί ο πίνακας με το σύνολο των 13 ιεραρχημένων λύσεων από τις φάσεις Α και Β του αλγορίθμου της Αντίστροφης Simplex.

Πίνακας 3.19: Ιεραρχημένες βασικές λύσεις με τον αλγόριθμο της Αντίστροφης Simplex

Λύσεις Ν <sup>ο</sup>	Τιμή της z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
0	76	0	16	0	2	0	0
1	75	0	15	3	0	0	0
2	72	0	18	0	0	0	6
3	60	16	0	0	2	0	0
4	60	15	0	3	0	0	0
5	56	0	11	0	2	5	0
6	56	0	41/4	3	0	19/4	0
7	56	16	2	0	0	0	6
8	56	0	14	0	0	4	6
9	56	44/3	0	0	2	4/3	0
10	56	52/3	0	0	2/3	0	4
11	56	41/3	0	3	0	4/3	0
12	56	17	0	1	0	0	4

Ο αλγόριθμος της Αντίστροφης Simplex χαρακτηρίζεται από το σχετικά γρήγορο έλεγχο των σχεδόν βέλτιστων λύσεων αφού κάθε επανάληψη του αλγορίθμου πραγματοποιείται από μία φορά. Ένα άλλο πλεονέκτημα του αλγορίθμου, ίσως το πιο σημαντικό, είναι ότι η αναζήτηση των λύσεων γίνεται βαθμιδών καθώς η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μειώνεται. Έτσι, μας δίνεται η δυνατότητα να μελετήσουμε την ευστάθεια της βέλτιστης λύσης ενός γραμμικού προγράμματος για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου  $k$ . Είναι λυπηρό το γεγονός ότι η μέθοδος της Αντίστροφης Simplex (σε αυτή ακριβώς τη μορφή της) δε μας εγγυάται την εξαντλητική αναζήτηση όλων των κορυφών του υπερπολυέδρου ΥΠ 2.

Με τη μέθοδο αυτή, επιτρέπεται στους αναλυτές, κυρίως γραμμικών προγραμμάτων μεγάλων διαστάσεων, να αποκτήσουν αρχικά τις σχεδόν βέλτιστες λύσεις τις λιγότερο απομακρυσμένες από τη βέλτιστη  $z^*$ , έτσι ώστε να έχουν τη δυνατότητα να σταματήσουν την αναζήτηση των υπολοίπων λύσεων-κορυφών του ΥΠ 2 σε μία δεδομένη στιγμή.

Το βασικό μειονέκτημα του αλγορίθμου είναι ο μεγάλος χώρος μνήμης που καταλαμβάνουν στον υπολογιστή όλοι οι πίνακες Simplex που παρήχθησαν κατά την εκτέλεση της πρώτης φάσης. Στο παράδειγμα που παρουσιάσαμε χρειάζεται η αποθήκευση πέντε πινάκων Simplex παρόλο που το γραμμικό πρόγραμμα είναι πολύ μικρών διαστάσεων. Υπάρχουν κάποιες τεχνικές που μειώνουν τις απαιτήσεις σε μνήμη αλλά από την άλλη μεριά αυξάνουν τον όγκο των υπολογισμών (Siskos, 1984).

### 3.3 Ένας Ευρετικός Αλγόριθμος

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, ο αριθμός των κορυφών του υπερπολυέδρου των πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων είναι συχνά μεγάλος και η εξαντλητική αναζήτησή τους απαιτεί τεράστιο υπολογιστικό φόρτο. Οι ευρετικές μέθοδοι προσφέρουν μια πολύ καλή διέξοδο στο πρόβλημα αναζήτησης των χιλιάδων λύσεων που πολλές φορές είναι ουσιαστικά αδιάφορες για τον αναλυτή. Συχνότερα μπορεί να ενδιαφέρεται μόνο για τις πληροφορίες εκείνες που θα τον βοηθήσουν να εξετάσει την ευστάθεια της βέλτιστης λύσης μας ή τη στατιστική διασπορά των υπολοίπων λύσεων. Για παράδειγμα σύμφωνα με τον Siskos (1984) η ανάλυση ευστάθειας μπορεί να πραγματοποιηθεί με την επίλυση γραμμικών προγραμμάτων (γ.π.) του τύπου:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\max] \text{ ή } [\min] \psi = \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ \text{υ.π.} \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^t \mathbf{x} \geq z^* - k \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{array} \right.$$

όπου  $p_j, j=1,2,\dots,n$  αριθμητικοί συντελεστές που επιλέγονται κατάλληλα για τον προσδιορισμό χαρακτηριστικών πολλαπλών (για  $k=0$ ) ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων. Αν θέσουμε  $p_i=1$  και  $p_j=0$  για  $j \neq i$  θα προσδιοριστούν οι σχεδόν βέλτιστες λύσεις που μεγιστοποιούν και ελαχιστοποιούν την τιμή της μεταβλητής  $x_i$ .



Η επίλυση του παραπάνω γραμμικού προγράμματος μπορεί να επιτευχθεί με απαρχή το βέλτιστο πίνακα Simplex του αρχικού γραμμικού προγράμματος. Με τον τρόπο αυτό θα επιτευχθεί πολύ μεγάλη οικονομία στον υπολογιστικό φόρτο δεδομένου ότι σε αντίθετη περίπτωση θα έπρεπε να υλοποιηθούν ξανά και ξανά το σύνολο των βημάτων της Simplex που μας οδηγούν στον υπολογισμό λύσεων που βρίσκονται κοντά στην βέλτιστη λύση.

Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε την αρχική βέλτιστη λύση θα πρέπει να υλοποιηθεί ένας αλγόριθμος που θα χρησιμοποιεί έναν επαυξημένο πίνακα Simplex με την προσθήκη του νέου περιορισμού όπως αυτός εμφανίζεται στο ΓΠ 2. Απομένει λοιπόν να προσδιοριστούν οι συντελεστές των στοιχείων του επαυξημένου πίνακα με την προσθήκη του νέου περιορισμού:

$$\mathbf{c}^t \mathbf{x} - Y = z^* - k \quad (22)$$

όπου  $Y$  είναι η μεταβλητή απόκλισης του περιορισμού αυτού.

Το σύστημα των περιορισμών του γραμμικού προγράμματος (ΓΠ 2) γράφεται ως:

$$\begin{aligned} Y - \mathbf{c}^t \mathbf{x} &= -(z^* - k) \\ \mathbf{A}' \mathbf{x} + \bar{\mathbf{I}} \mathbf{x} &= \mathbf{b} \quad \mathbf{p3} \\ \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, Y &\geq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

όπου  $\bar{\mathbf{x}}$  το διάνυσμα των μεταβλητών απόκλισης του αρχικού γ.π. μεγιστοποίησης.

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφεί σε μορφή μήτρας ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c}^t & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{A}' & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \mathbf{x} \\ \bar{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z^* + k \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Εφ' όσον ο πρόσθετος περιορισμός επαληθεύεται από τη βέλτιστη λύση  $\mathbf{x}^*$  του αρχικού γ.π. η μεταβλητή  $Y$  είναι βασική. Η τιμή της σύμφωνα με τη σχέση (23) θα είναι:

$$Y = \mathbf{c}^t \mathbf{x}^* - (z^* - k) = z^* - z^* + k \Rightarrow Y = k \quad (25)$$

Η επαυξημένη βάση γράφεται:

$$\mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c}_B^t \\ 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (26)$$

όπου  $\mathbf{c}_B$  το διάνυσμα των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχούν σε βασικές μεταβλητές του βέλτιστου πίνακα Simplex του αρχικού γ.π. και  $\mathbf{B}$  η βάση του αρχικού γ.π..

Από τη σχέση  $\mathbf{B}_o \mathbf{B}_o^{-1} = \mathbf{I}$  υπολογίζουμε  $\mathbf{B}_o^{-1}$  την που είναι η αντίστροφη της επαυξημένης βάσης και για την οποία έχουμε:

$$\mathbf{B}_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B^t \mathbf{B}^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Ξέρουμε ότι για κάθε βασική λύση ισχύει:

$$\mathbf{I} \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{x}' = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \quad \text{ή} \quad \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

Στην περίπτωση μας η επαυξημένη μήτρα  $A_o$  ισούται με:

$$A_o = \begin{bmatrix} 1 & -c^t & \mathbf{0} \\ 0 & A' & I \end{bmatrix} \quad (28)$$

όπου  $c^t$  το διάνυσμα των συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχούν σε μη βασικές μεταβλητές του αρχικού πίνακα Simplex του αρχικού γ.π..

Οι συντελεστές του βέλτιστου πίνακα Simplex που αντιστοιχούν στο νέο περιορισμό (1<sup>η</sup> γραμμή) υπολογίζονται απλά από το γινόμενο:

$$B_o^{-1}A_o = \begin{bmatrix} 1 & c_B^t \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -c^t & \mathbf{0} \\ 0 & A' & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c_B^t B^{-1}A - c^t & c_B^t B^{-1} \\ 0 & B^{-1}A & B^{-1} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Από τη Simplex έχουμε ότι:

$$c_B^t B^{-1}A' - c^t = -\Delta'$$

όπου  $\Delta'$  το διάνυσμα των οριακών καθαρών εισοδημάτων που αντιστοιχούν στις μη βασικές μεταβλητές του αρχικού πίνακα Simplex του αρχικού γ.π. και

$$c_B^t B^{-1} - \theta = -\Delta$$

όπου  $\Delta$  το διάνυσμα των οριακών καθαρών εισοδημάτων που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές του αρχικού πίνακα Simplex, δηλαδή στις μεταβλητές απόκλισης του αρχικού γ.π. οι οποίες έχουν μηδενικούς συντελεστές στην αντικειμενική συνάρτηση.

Επομένως, οι συντελεστές του νέου περιορισμού στον αρχικό βέλτιστο πίνακα Simplex είναι οι αντίθετες τιμές των καθαρών οριακών εισοδημάτων, για τις οποίες ισχύει:

$$-\Delta' \geq \mathbf{0} \quad (30)$$

$$-\Delta \geq \mathbf{0} \quad (31)$$

Παρόμοια, για το δεύτερο μέλος ισχύει:

$$B_o^{-1}b_o = \begin{bmatrix} 1 & -c_B^t \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(z^* - k) \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B^t B^{-1}b - z^* + k \\ B^{-1}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B^t x_B^* - z^* + k \\ x_B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^* - z^* + k \\ x_B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ x_B^* \end{bmatrix} \quad (32)$$

Συνεπώς, η τιμή για τη μεταβλητή  $Y$ , στο βέλτιστο πίνακα Simplex του αρχικού γ.π., είναι  $k$  (Siskos, 1984).

Σύμφωνα με τις σχέσεις 29 – 32 και αν υποθέσουμε ότι κατά την επανάληψη  $p$  έχουμε λάβει το βέλτιστο πίνακα Simplex (Πίνακας 3.14) τότε ο νέος επαυξημένος πίνακας Simplex θα έχει τη μορφή του Πίνακα 3.20.

Ο ευρετικός αλγόριθμος αποτελείται από πέντε βασικά βήματα που απαιτούνται για την εύρεση των μεταβέλτιστων λύσεων.

**Βήμα 0:** Επίλυση του αρχικού ΓΠ και εύρεση της βέλτιστης λύσης  $u_o$ .

**Βήμα 1:** Διαβάζουμε τις διαστάσεις του προβλήματος (αριθμός περιορισμών, μεταβλητών) και υπολογίζουμε το μέγιστο αριθμό λύσεων ως  $2 \times n$ . Ορίζουμε τους απαραίτητους πίνακες

και διαβάζουμε τα στοιχεία του πίνακα Simplex της λύσης  $u_0$ . Επίσης προσθέτουμε τον νέο περιορισμό όπως παρουσιάζεται στον επαυξημένο πίνακα Simplex.

Πίνακας 3.20: Επαυξημένος Πίνακας Simplex

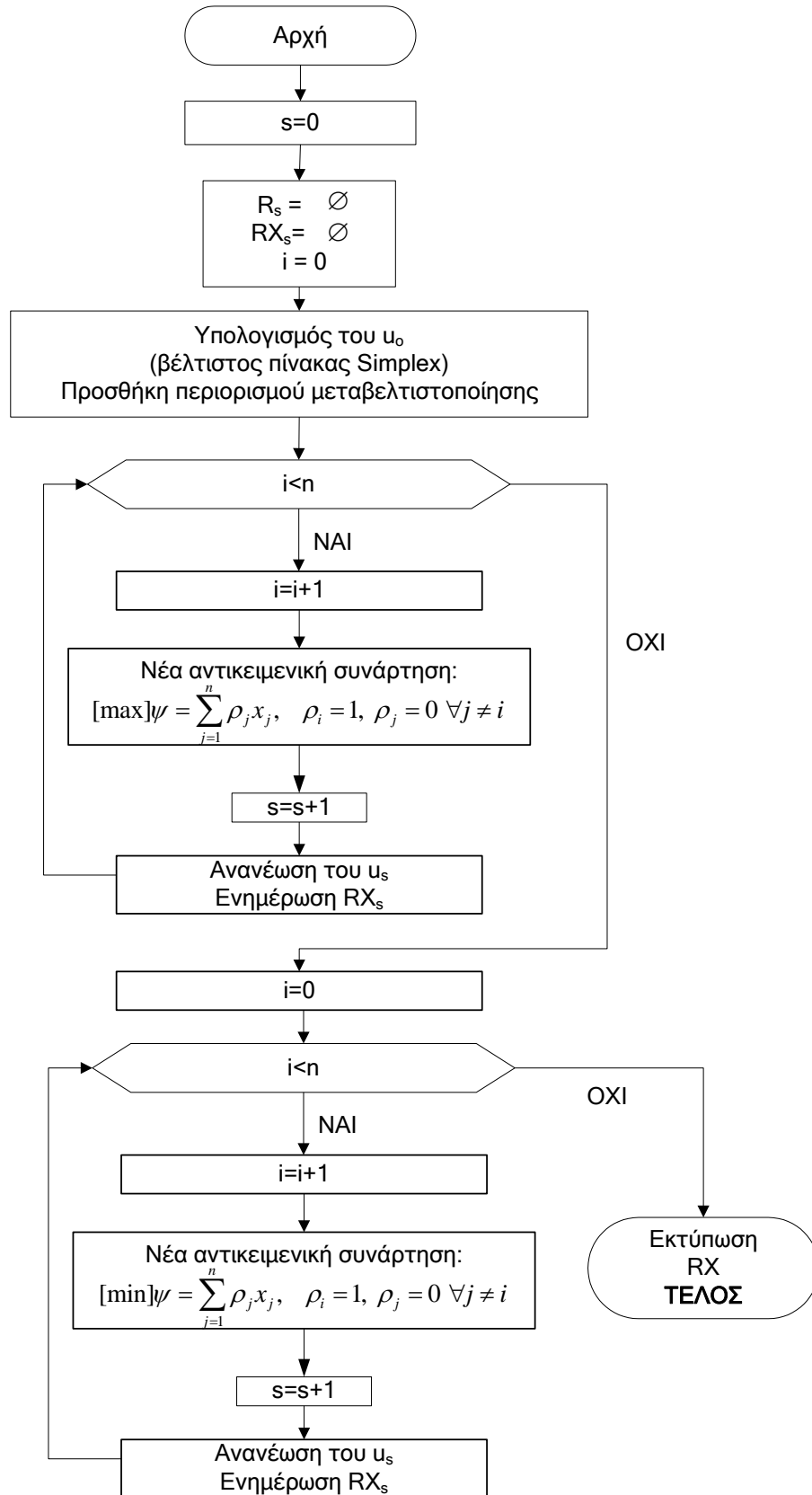
$c_{oB}$	Βάση	1	...	k	...	r	...	m+n	$x_B$
$c_{B1}$	1	1	...	$y_{1k}$	...	0	...	$y_{1(m+n)}$	$x_{B1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_{Br}$	r	0	...	$y_{rk}$	...	1	...	$y_{r(m+n)}$	$x_{Br}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_{Bj}$	j	0	...	$y_{jk}$	...	0	...	$y_{j(m+n)}$	$x_{Bj}$
0	$\gamma$	-	...	$-\Delta k$	...	-	...	$-\Delta n$	k
$c_j$		$c_1$	...	$c_k$	...	$c_r$	...	$c_n$	
$\Delta_j$		-	...	$\Delta k$	...	-	...	$\Delta n$	Z

**Βήμα 2:** Υπολογίζουμε τις λύσεις των  $n$  γ.π. (ΓΠ 2) για  $[\max] \psi$  με  $n$  διαφορετικές αντικειμενικές συναρτήσεις. Ενημερώνουμε το σύνολο λύσεων  $R$  με το διάνυσμα των δεικτών των βασικών μεταβλητών της τρέχουσας λύσης καθώς και το σύνολο  $RX$  με το διάνυσμα των τιμών  $x_B$ .

**Βήμα 3:** Υπολογίζουμε τις λύσεις των  $n$  γ.π. (ΓΠ 2) για  $[\min] \psi$  με  $n$  διαφορετικές αντικειμενικές συναρτήσεις. Ενημερώνουμε το σύνολο λύσεων  $R$  με το διάνυσμα των δεικτών των βασικών μεταβλητών της τρέχουσας λύσης καθώς και το σύνολο  $RX$  με το διάνυσμα των τιμών  $x_B$ .

**Βήμα 4:** Εξαγωγή των λύσεων των  $2 \times n$  γ.π.

Στο επόμενο σχήμα παρουσιάζεται το λογικό διάγραμμα του:



Σχήμα 3.3: Λογικό Διάγραμμα Ευρετικού Αλγόριθμου

Χρησιμοποιώντας πάλι το υπερπολύεδρο ΥΠ 2 θα παρουσιαστεί μέσω του παραδείγματος η διαδικασία υλοποίησης του αλγορίθμου.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 18 \\ 2x_3 + 3x_4 \leq 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \geq 56 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Ας υποθέσουμε ότι αναζητούμε εκείνη τη σχεδόν βέλτιστη λύση που μεγιστοποιεί την τιμή της μεταβλητής  $x_1$  ( $p_1=1, p_2=p_3=p_4=0$ ). Χρησιμοποιώντας τη νέα μεταβλητή απόκλισης  $Y = z - 56 \geq 0$  και παίρνοντας σαν απαρχή τον παραπάνω βέλτιστο πίνακα Simplex, όπου συντελεστές του νέου περιορισμού είναι οι αντίθετες τιμές των οριακών καθαρών εισοδημάτων και το  $Y^*$  ισούται με την ποσότητα  $k = 20$ , καταλήγουμε εύκολα στη ζητούμενη λύση ( $x_1=52/3, x_2=0, x_3=0, x_4=2/3, x_{\bar{1}}=0, x_{\bar{2}}=4$ ) μετά από 2 αλλαγές βάσης. Οι υπολογισμοί δίνονται παρακάτω:

$c_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	Y	$x_B$
0	2	1	1	1/3	0	1	-1/3	0	16
0	4	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
0	Y	1	0	1/3	0	4	2/3	1	20
$c_j$		1	0	0	0	0	0	0	
$\Delta_j$		1	0	0	0	0	0	0	z= 0

$c_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	Y	$x_B$
1	1	1	1	1/3	0	1	-1/3	0	16
0	4	0	0	2/3	1	0	1/3	0	2
0	Y	0	-1	0	0	3	1	1	4
$c_j$		1	0	0	0	0	0	0	
$\Delta_j$		0	-1	-1/3	0	-1	1/3	0	ΥΠ 1

Βάση		1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\gamma$	$x_B$
$c_B$									
1	1	1	2/3	1/3	0	2	0	1/3	52/3
0	4	0	1/3	2/3	1	-1	0	1/3	2/3
0	$\bar{2}$	0	-1	0	0	3	1	1	4
$c_j$		1	0	0	0	0	0	0	
$\Delta_j$		0	-2/3	-1/3	0	-2	0	-1/3	$z = 52/3$

Υπολογίζοντας αντίστοιχα τις υπόλοιπες λύσεις για  $\max$  και  $\min$  των  $\rho_j, j=1,2,\dots,n$  στο ΓΠ 2 έχουμε τον παρακάτω πίνακα για τις  $2 \times n = 8$  μεταβέλιστες λύσεις:

Πίνακας 3.21: Αποτελέσματα Ευρετικού Αλγορίθμου

Μεταβλητές	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$z$	$\gamma$
<b>ΓΠ (i)</b>						
$\max x_1 (i=1)$	17.33	0.00	0.00	0.67	17.33	0.00
$\max x_2 (i=2)$	0.00	18.00	0.00	0.00	18.00	16.00
$\max x_3 (i=3)$	0.00	15.00	3.00	0.00	3.00	19.00
$\max x_4 (i=4)$	0.00	16.00	0.00	2.00	2.00	20.00
$\min x_1 (i=5)$	0.00	16.00	0.00	2.00	0.00	20.00
$\min x_2 (i=6)$	13.67	0.00	3.00	0.00	0.00	0.00
$\min x_3 (i=7)$	15.07	0.00	0.00	1.80	0.00	0.00
$\min x_4 (i=8)$	15.71	0.86	1.08	0.00	0.00	0.00

## 4. Η ανάλυση μεταβελτιστοποίησης στη μέθοδο MUSA

### 4.1 Μοντελοποίηση της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης

Είναι αρκετοί οι λόγοι που καθιστούν αναγκαία την ανάλυση ευστάθειας στην πολυκριτήρια ανάλυση και στον γραμμικό προγραμματισμό, αντίστοιχα. Προφανώς οι ίδιοι λόγοι υφίστανται και στην περίπτωση της μεθόδου MUSA, από τη στιγμή που πρόκειται για μέθοδο που υιοθετεί τις αρχές της πολυκριτήριας ανάλυσης και χρησιμοποιεί προχωρημένες τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού.

Επιπρόσθετα στη μέθοδο MUSA η ανάλυση ευστάθειας εξυπηρετεί και ένα ακόμα σκοπό. Κατά τη διεξαγωγή μίας έρευνας ικανοποίησης των πελατών μπορεί να προκύψουν ομάδες πελατών με διαφορετικές στάσεις ως προς τα προϊόντα ή τις υπηρεσίες. Αυτές οι διαφορετικές στάσεις μεταφράζονται σε διαφορετικές συναρτήσεις προτίμησης, με διαφορετικά βάση στα κριτήρια, κλπ.. Κατά τη διεξαγωγή της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης μπορούν να παρατηρηθούν οι σημαντικές αυτές διαφορές, εφόσον υφίστανται, και οι οποίες οφείλονται στη συλλογική φύση της μεθόδου. Στην περίπτωση αυτή, θα ήταν χρήσιμη μία a posteriori τμηματοποίηση του αρχικού συνόλου των πελατών σε μικρότερες και πιο ομογενοποιημένες ομάδες (Grigoroudis and Siskos, 2002).

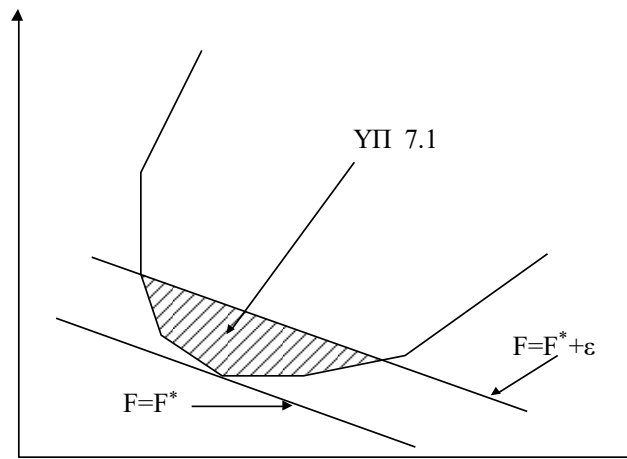
Οι αλγόριθμοι ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια της παραγράφου στηρίζονται στην ευρετική μέθοδο (Siskos, 1984; Σίσκος, 1998) που παρουσιάστηκε στην § 3.3. Ο λόγος που επιλέχθηκε η μέθοδος αυτή είναι κυρίως ο περιορισμένος υπολογιστικός φόρτος σε σχέση με άλλες μεθόδους που επιδιώκουν την εξαντλητική αναζήτηση του συνόλου των μεταβέλτιστων λύσεων. Η υπεροχή της συγκεκριμένης μεθόδου είναι ιδιαίτερα εμφανής κυρίως σε πολύ μεγάλα προβλήματα, όπως είναι τα προβλήματα που καλείται να αντιμετωπίσει η μέθοδος MUSA.

Οι μεταβέλτιστες λύσεις θα αναζητούνται στο υπερπολύεδρο ΥΠ 3 (Σχήμα ) το οποίο οριοθετείται από τους αρχικούς περιορισμούς του προβλήματος και από τον επόμενο νέο περιορισμό:

$$F \leq F^* + \varepsilon \quad (33)$$

όπου  $F^*$  η βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος και  $\varepsilon$  μία μικρή (πρακτικά αμελητέα) προκαθορισμένη θετική ποσότητα. Οπότε το υπερπολύεδρο μοντελοποιείται ως εξής:

$$\text{ΥΠ 3} \quad \begin{cases} F \leq F^* + \varepsilon \\ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{t_{ji}-1} w'_{ik} - \sum_{m=1}^{t_j-1} z'_m - \sigma_j^+ + \sigma_j^- = \gamma(t_j - 1) - \sum_{i=1}^n \gamma_i(t_{ji} - 1) \quad \text{για } j = 1, 2, \dots, M \\ \sum_{m=1}^{\alpha-1} z'_m = 100 - \gamma(\alpha - 1) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\alpha_i-1} w_{ik} = 100 - \sum_{i=1}^n \gamma_i(\alpha_i - 1) \\ z'_m \geq 0, w'_{ik} \geq 0 \quad \forall m, i, k \\ \sigma_j^+ \geq 0, \sigma_j^- \geq 0 \quad \text{για } j = 1, 2, \dots, M \end{cases}$$



Σχήμα 4.1: Ανάλυση Μεταβελτιστοποίησης και ημιβέλτιστες λύσεις (Grigoroudis and Siskos, 2002)

Η φάση της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης ολοκληρώνει τον αλγόριθμο της μεθοδολογίας MUSA και περιλαμβάνει την μορφοποίηση και επίλυση συγκεκριμένου αριθμού γραμμικών προβλημάτων. Ο αριθμός των προβλημάτων εξαρτάται από το μοντέλο που τελικά θα επιλεγεί από τον αναλυτή. Η βασική διαφορά των διαφόρων μοντέλων είναι οι αντικειμενικές συναρτήσεις που ολοκληρώνουν την μοντελοποίηση των νέων γραμμικών προγραμμάτων.

Στην επόμενη παράγραφο ακολουθεί παρουσίαση 5 μοντέλων ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης. Για τα μοντέλα αυτά θα παρατεθεί η μορφή των γραμμικών προγραμμάτων τους ενώ θα γίνει αναφορά και στην υπολογιστική δυσκολία επίλυσής τους, στοιχείο που σχετίζεται τόσο με τον αριθμό των προς επίλυση γ.π. όσο και με τον αριθμό των περιορισμών και των μεταβλητών. (Γρηγορούδης και Σίσκος, 2000; Grigoroudis and Siskos, 2002).

## 4.2 Μοντέλα ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης

Το πρώτο μοντέλο που θα περιγραφεί είναι αυτό που θεωρείται από τους Γρηγορούδη και Σίσκο (2000) ως μέρος του Γενικευμένου Μοντέλου της MUSA. Οι αντικειμενικές συναρτήσεις που συνιστούν τα  $n$  (όσος και ο αριθμός των κριτηρίων ικανοποίησης) γραμμικά προγράμματα, στοχεύουν στην μεγιστοποίηση των βαρών  $b_i$  κάθε κριτηρίου  $i$ . Τα προς επίλυση γραμμικά προγράμματα έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\max] F' = \sum_{k=1}^{\alpha_i-1} w_{ik} \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n \\ \text{ΥΠ 7.1} \end{array} \right. \text{ υπό τους περιορισμούς που οριοθετούν το}$$



όπου  $n$  ο αριθμός των κριτηρίων,  $\alpha_i$  ο αριθμός επιπέδων της κλίμακας ικανοποίησης του κριτηρίου  $i$  και  $w$  οι μεταβλητές που ορίζονται από το μοντέλο της MUSA).

Μία αντιπροσωπευτική τελική λύση για τις μεταβλητές της μεθόδου MUSA υπολογίζεται από τη μέση τιμή των μεταβέλτιστων λύσεων που δίνουν τα γραμμικά προγράμματα ΓΠ 3. Στην περίπτωση όμως που έχουμε ασταθή λύση, που ισοδυναμεί με μεγάλη διακύμανση των μεταβέλτιστων λύσεων, η μέση τιμή δεν είναι απαραίτητα αντιπροσωπευτική των λύσεων.

Εναλλακτικά, θα μπορούσε να εξεταστεί ταυτόχρονα και η επίλυση  $n$  γραμμικών προγραμμάτων τα οποία ελαχιστοποιούν το βάρος  $b_i$  κάθε κριτηρίου  $i$ . Το δεύτερο αυτό μοντέλο ονομάζεται MUSA I και στην περίπτωση αυτή τα  $2 \cdot n$  γραμμικά προγράμματα θα έχουν την παρακάτω μορφή:

$$\text{ΓΠ 4 } \left\{ \begin{array}{l} [\max] F' = \sum_{k=1}^{\alpha_i-1} w_{ik} \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n \\ \text{υπό τους περιορισμούς που} \\ \text{οριοθετούν το ΥΠ 7.1} \end{array} \right. \quad \text{και} \quad \left\{ \begin{array}{l} [\min] F' = \sum_{k=1}^{\alpha_i-1} w_{ik} \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n \\ \text{υπό τους περιορισμούς που} \\ \text{οριοθετούν το ΥΠ 7.1} \end{array} \right.$$

Ένα τρίτο μοντέλο ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης είναι το MUSA II. Στα πλαίσια της εναλλακτικής αυτής προσέγγισης αναζητούμε τις μεταβέλτιστες εκείνες λύσεις, οι οποίες μεγιστοποιούν τα κατώφλια προτίμησης  $\gamma$  και  $\gamma_i$  όπως αυτά έχουν οριστεί στη MUSA. Με την εφαρμογή του μοντέλου αυτού αντιμετωπίζουμε και το πρόβλημα της επιλογής κατάλληλων τιμών για τις συγκεκριμένες παραμέτρους, οι οποίες επηρεάζουν ως σε ένα βαθμό την ευστάθεια των λύσεων, γεγονός που θα επιβεβαιωθεί και από αριθμητικά παραδείγματα στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου.

Τα γραμμικά προγράμματα που πρέπει να επιλυθούν κατά την εφαρμογή του συγκεκριμένου μοντέλου είναι  $n+1$  και έχουν την εξής γενική μορφή:

$$\text{ΓΠ 5 } \left\{ \begin{array}{l} [\max] F' = \gamma \\ \text{υπό τους περιορισμούς που} \\ \text{οριοθετούν το ΥΠ 7.1} \end{array} \right. \quad \text{και} \quad \left\{ \begin{array}{l} [\max] F' = \gamma_i \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n \\ \text{υπό τους περιορισμούς που} \\ \text{οριοθετούν το ΥΠ 7.1} \end{array} \right.$$

Παρόμοια με την προηγούμενη μέθοδο είναι και η MUSA III όπου πλέον εξετάζεται η μεγιστοποίηση των διαδοχικών βημάτων αύξησης των συναρτήσεων  $Y^*$  και  $X^*$  δηλαδή των βασικών μεταβλητών της μεθόδου MUSA  $w_{ik}$  και  $z_m$ . Το μοντέλο αυτό απαιτεί την επίλυση

$(\alpha - 1) + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$  γραμμικών προγραμμάτων της μορφής:

$$\text{ΓΠ 6 } \left\{ \begin{array}{l} [\max] F' = z_m \quad \text{για } m = 1, 2, \dots, \alpha - 1 \\ \text{υπό τους περιορισμούς που} \\ \text{οριοθετούν το ΥΠ 7.1} \end{array} \right. \quad \text{και} \quad \left\{ \begin{array}{l} [\max] F' = w_{ik} \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad k = 1, 2, \dots, \alpha_i - 1 \\ \text{υπό τους περιορισμούς που} \\ \text{οριοθετούν το ΥΠ 7.1} \end{array} \right.$$

Τα δύο τελευταία μοντέλα στηρίζονται στην ίδια φιλοσοφία με τα μοντέλα μεταβελτιστοποίησης της UTA, MP1 και MP2, των Beuthe and Scannella (1996).

Μία αντιπροσωπευτική τελική λύση για τις μεταβλητές των μεθόδων MUSA I, MUSA II και MUSA III υπολογίζεται από τη μέση τιμή των βέλτιστων λύσεων που δίνουν τα γραμμικά προγράμματα ΓΠ 4, ΓΠ 5 και ΓΠ 6, αντίστοιχα.

Ένα τελευταίο μοντέλο που θα εξεταστεί είναι το MUSA IV που στηρίζεται στην προσέγγιση των Despotis et al. (1990) (μέθοδος MIME), και η οποία αφορά την ελαχιστοποίηση της διαφοράς ανάμεσα στη μεγαλύτερη και στη μικρότερη τιμή των μεταβλητών σφάλματος  $\sigma_j^+$  και  $\sigma_j^-$  στην περίπτωση που  $F^* > 0$ . Δεδομένης της μη-αρνητικότητας των μεταβλητών σφάλματος, η συγκεκριμένη προσέγγιση ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση της μεγαλύτερης τιμής των σφαλμάτων. Έτσι, το ένα και μοναδικό γραμμικό πρόγραμμα που θα πρέπει να επιλυθεί στα πλαίσια εφαρμογής του συγκεκριμένου μοντέλου θα έχει την εξής μορφή:

$$\text{ΓΠ 7} \begin{cases} [\min] F' = m_e \\ \text{υπό τους περιορισμούς} \\ m_e - \sigma_j^+ \geq 0 \text{ για } j = 1, 2, \dots, M \\ m_e - \sigma_j^- \geq 0 \text{ για } j = 1, 2, \dots, M \\ \text{και αυτούς που οριοθετούν το ΥΠ 7.1} \end{cases}$$

όπου M είναι ο αριθμός των ερωτώμενων πελατών.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω πέντε μοντέλα ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης στον πίνακα που ακολουθεί παραθέτονται τα χαρακτηριστικά τους εκείνα που διαμορφώνουν μία σαφή εικόνα για τον απαιτούμενο υπολογιστικό φόρτο.

**Πίνακας 4.1: Εναλλακτικές προσεγγίσεις ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης της MUSA**

Ονομασία Μοντέλου	Περιγραφή	Αντικειμενική Συνάρτηση	Αριθμός γ.π. ανάλυσης μετα/ποίησης	Αριθμός περιορισμών	Αριθμός Μεταβλητών
Γενικευμένο MUSA	Μεγιστοποίηση Βαρών	$[\max]F' = b_i$	n	M+3	$2 * M + (\alpha - 1) + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$
MUSA I	Μεγιστοποίηση Ελαχιστοποίηση Βαρών	$[\max]F' = b_i$ $[\min]F' = b_i$	2*n	M+3	$2 * M + (\alpha - 1) + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$
MUSA II	Μεγιστοποίηση κατωφλίων προτίμησης	$[\max]F' = \gamma$ $[\max]F' = \gamma_i$	n+1	M+3	$2 * M + \alpha + \sum_{i=1}^n \alpha_i$
MUSA III	Μεγιστοποίηση βημάτων αύξησης	$[\max]F' = z_m$ $[\max]F' = w_k$	$(\alpha - 1) + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$	M+3	$2 * M + (\alpha - 1) + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$
MUSA IV	Ελαχιστοποίηση διακύμανσης σφαλμάτων	$[\min]F' = m_e$	1	3*M+3	$2 * M + \alpha + \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$

Παρατηρώντας τα διαφορετικά μοντέλα μπορούμε να καταλήξουμε στα παρακάτω γενικά συμπεράσματα (Grigoroudis and Siskos, 2002; Γρηγορούδης και Σίσκος, 2000):

1. Τα κριτήρια ικανοποίησης είναι συνήθως ανταγωνιστικά μεταξύ τους οπότε ίσως είναι περιττή η ταυτόχρονη μεγιστοποίηση και ελαχιστοποίηση των βαρών των κριτηρίων. Έτσι, θα μπορεί να χρησιμοποιείται το Γενικευμένο MUSA αντί του MUSA I χωρίς απώλεια πληροφορίας.
2. Το μοντέλο MUSA III αποτελεί ουσιαστικά επέκταση του μοντέλου MUSA II δεδομένου ότι ισχύει:

$$\begin{cases} \gamma \leq \min_m \{z_m\} \\ \gamma_i \leq \min_k \{w_{ik}\} \end{cases} \quad \forall i \quad (34)$$

3. Στο μοντέλο MUSA IV επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση της διαφοράς ανάμεσα στη μεγαλύτερη και στη μικρότερη τιμή των μεταβλητών σφάλματος. Η προσέγγιση αυτή αν και θεωρείται σημαντικό εργαλείο της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης στο χώρο της ποιοτικής ανάλυσης παλινδρόμησης, δεν κρίνεται απαραίτητη στη συγκεκριμένη περίπτωση. Το μοντέλο MUSA είναι μία μέθοδος προσδιορισμού και ανάλυσης της συλλογικής συμπεριφοράς ενός συνόλου πελατών (collective model). Με αυτό τον τρόπο το μοντέλο διορθώνει τους πελάτες (μη μηδενικές τιμές των μεταβλητών σφάλματος) η συμπεριφορά των οποίων διαφοροποιείται από το γενικό σύνολο. Το μοντέλο MUSA IV αναιρεί αυτή ακριβώς την ιδιότητα της μεθόδου, δεδομένου ότι ισοκατανέμει τα σφάλματα στο σύνολο των πελατών. Επιπρόσθετα, πρέπει να σημειωθεί ότι δεν αντιμετωπίζεται το πρόβλημα ύπαρξης πολλαπλών βέλτιστων ή ημιβέλτιστων λύσεων από τη στιγμή που επιλύεται μόνο ένα γραμμικό πρόγραμμα.

### 4.3 Έλεγχος Αξιοπιστίας

Η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων που παράγονται από την εφαρμογή κάποιου από τα παραπάνω μοντέλα της MUSA σχετίζεται με τα ακόλουθα σημεία (Grigoroudis & Siskos, 2002, Γρηγορούδης & Σίσκος, 2000):

- βαθμός προσαρμογής του μοντέλου στα δεδομένα του προβλήματος αξιολόγησης της ικανοποίησης πελατών (μέσος δείκτης προσαρμογής, δείκτης επιπέδου ολικής πρόβλεψης),
- ευστάθεια των αποτελεσμάτων της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης (μέσος δείκτης ευστάθειας, εύρος διακύμανσης βαρών)

#### 4.3.1 Μέσος δείκτης προσαρμογής

Η προσαρμογή του μοντέλου αφορά στην εύρεση ενός συστήματος αξιών (συναρτήσεις ικανοποίησης, βάρη κριτηρίων) για το σύνολο των πελατών, με τα ελάχιστα δυνατά σφάλματα. Για το λόγο αυτό, οι βέλτιστες τιμές των μεταβλητών σφάλματος υποδηλώνουν την αξιοπιστία του συστήματος αξιών που εκτιμάται. Ο ορισμός ενός κανονικοποιημένου δείκτη προσαρμογής κρίνεται απαραίτητος, δεδομένου ότι η συνολική ποσότητα των

σφαλμάτων εκτίμησης, εξαρτάται από τον αριθμό των πελατών. Έτσι, ο μέσος δείκτης προσαρμογής (Average Fitting Index) της μεθόδου MUSA ορίζεται ως εξής:

$$AFI = 1 - \frac{F^*}{100 \cdot M} \quad (35)$$

όπου  $F^*$  είναι βέλτιστη τιμή του σφάλματος του αρχικού γραμμικού προγράμματος του μοντέλου MUSA και  $M$  είναι ο αριθμός των πελατών.

Ο μέσος δείκτης προσαρμογής παίρνει την τιμή 100% μόνο όταν  $F^*=0$ , δηλαδή όταν το μοντέλο είναι σε θέση να εκτιμήσει ένα σύνολο αξιών για τους πελάτες με μηδενικά σφάλματα. Όμοια, ο μέσος δείκτης προσαρμογής παίρνει την τιμή 0 μόνο όταν  $F^*=100 \cdot M$ , δηλαδή όταν τα ζεύγη των μεταβλητών σφάλματος  $\sigma_j^+$  και  $\sigma_j^-$  παίρνουν την μέγιστη δυνατή τιμή τους. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι  $\sigma_j^+ \cdot \sigma_j^- = 0 \quad \forall j$ , δηλαδή η βέλτιστη λύση περιλαμβάνει μια τουλάχιστον μηδενική μεταβλητή σφάλματος για κάθε πελάτη, δεδομένη ότι η συγκεκριμένη μοντελοποίηση είναι όμοια με αυτή του προγραμματισμού στόχων (Charnes and Cooper, 1961).

#### 4.3.2 Δείκτης επιπέδου ολικής πρόβλεψης

Για τον υπολογισμό αυτού του δείκτη πρέπει πρώτα να κατασκευαστεί ο πίνακας πρόβλεψης ή εκτίμησης της ολικής ικανοποίησης σύμφωνα με τα ακόλουθα βήματα:

1. Για κάθε πελάτη  $j$  υπολογίζεται η εκτίμηση της αξίας ικανοποίησης  $\tilde{y}_j^{*m}$  με βάση τη σχέση
2. Με βάση την προηγούμενη τιμή, για κάθε πελάτη  $j$  υπολογίζεται η εκτίμηση του επιπέδου ικανοποίησης  $\tilde{y}_j^m$  σύμφωνα με τη σχέση:

$$\tilde{y}_j^m = \begin{cases} y_j^1 & \text{if } \tilde{y}_j^{*m} \leq \frac{y^{*2}}{2} \\ y_j^2 & \text{if } \frac{y^{*2}}{2} < \tilde{y}_j^{*m} \leq \frac{y^{*3} + y^{*2}}{2} \\ \vdots & \\ y_j^a & \text{if } \tilde{y}_j^{*m} > \frac{100 + y^{*a-1}}{2} \end{cases} \quad (36)$$

3. Έτσι για κάθε πελάτη  $j$  είναι διαθέσιμο το πραγματικό επίπεδο ολικής ικανοποίησης  $y_j^m$  όπως έχει εκφραστεί από τους ίδιους του πελάτες, καθώς και το εκτιμώμενο επίπεδο ολικής ικανοποίησης  $\tilde{y}_j^m$  όπως έχει υπολογιστεί από τη σχέση (36).
4. Με βάση αυτές τις τιμές είναι δυνατό να υπολογιστεί ο αριθμός των πελατών που ανήκουν σε κάθε εκτιμώμενο και πραγματικό επίπεδο ικανοποίησης και να κατασκευαστεί ο πίνακας πρόβλεψης της ολικής ικανοποίησης.
5. Η γενική μορφή ενός πίνακα πρόβλεψης παρουσιάζεται στο Σχήμα και περιλαμβάνει τα εξής αποτελέσματα, για κάθε πραγματικό και εκτιμώμενο επίπεδο ικανοποίησης:

- $N_{m_1 m_2}$  : αριθμός πελατών που έχουν δηλώσει ότι ανήκουν στο επίπεδο  $m_1$  ολικής ικανοποίησης και το μοντέλο τους κατατάσσει στο  $m_2$  επίπεδο ολικής ικανοποίησης.
- $R_{m_1 m_2}$  : ποσοστό των πελατών του  $m_1$  πραγματικού επιπέδου ολικής ικανοποίησης που το μοντέλο τους κατατάσσει στο  $m_2$  επίπεδο ολικής ικανοποίησης, με  $R_{m_1 m_2} = N_{m_1 m_2} / \sum_{m_2=1}^{\alpha} N_{m_1 m_2} \quad \forall m_1, m_2$
- $C_{m_1 m_2}$  : ποσοστό των πελατών του  $m_2$  εκτιμώμενου επιπέδου ολικής ικανοποίησης που έχουν δηλώσει ότι ανήκουν στο  $m_1$  επίπεδο ολικής ικανοποίησης, με  $C_{m_1 m_2} = N_{m_1 m_2} / \sum_{m_1=1}^{\alpha} N_{m_1 m_2} \quad \forall m_1, m_2$

Ο δείκτης του επιπέδου της ολικής πρόβλεψης (Overall Prediction Level - OPL) εκτιμάται με βάση τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του πίνακα πρόβλεψης:

$$OPL = \sum_{m_1=1}^{\alpha} N_{m_1 m_1} / \sum_{m_1=1}^{\alpha} \sum_{m_2=1}^{\alpha} N_{m_1 m_2} \quad (37)$$

		<b>Προβλεπόμενο επίπεδο ολικής ικανοποίησης</b>									
		$\tilde{y}^1$		$\tilde{y}^2$		$\tilde{y}^j$		$\tilde{y}^{\alpha}$			
<b>Πραγματικό επίπεδο ολικής ικανοποίησης</b>	$y^1$	$N_{11}$ $C_{11}$	$R_{11}$	$N_{12}$ $C_{12}$	$R_{12}$	...	$N_{1j}$ $C_{1j}$	$R_{1j}$	...	$N_{1\alpha}$ $C_{1\alpha}$	$R_{1\alpha}$
	$y^2$	$N_{21}$ $C_{21}$	$R_{21}$	$N_{22}$ $C_{22}$	$R_{22}$	...	$N_{2j}$ $C_{2j}$	$R_{2j}$	...	$N_{2\alpha}$ $C_{2\alpha}$	$R_{2\alpha}$
		⋮									⋮
	$y^i$	$N_{i1}$ $C_{i1}$	$R_{i1}$	$N_{i2}$ $C_{i2}$	$R_{i2}$	...	$N_{ij}$ $C_{ij}$	$R_{ij}$	...	$N_{i\alpha}$ $C_{i\alpha}$	$R_{i\alpha}$
		⋮									⋮
$y^{\alpha}$	$N_{\alpha 1}$ $C_{\alpha 1}$	$R_{\alpha 1}$	$N_{\alpha 2}$ $C_{\alpha 2}$	$R_{\alpha 2}$	...	$N_{\alpha j}$ $C_{\alpha j}$	$R_{\alpha j}$	...	$N_{\alpha \alpha}$ $C_{\alpha \alpha}$	$R_{\alpha \alpha}$	

Σχήμα 4.2: Πίνακας πρόβλεψης ολικής ικανοποίησης (Γρηγορούδης και Σίσκος, 2000)

Γενικά, θα μπορούσε να αναφερθεί ότι η προσαρμογή της μεθόδου MUSA δεν είναι ικανοποιητική όταν υπάρχουν υψηλά ποσοστά πελατών "μακριά" από την κύρια διαγώνιο του πίνακα πρόβλεψης της ολικής ικανοποίησης (δηλαδή σημαντικός αριθμός πελατών που ενώ έχουν δηλώσει ότι είναι πολύ ικανοποιημένοι, το μοντέλο προβλέπει ότι έχουν χαμηλό επίπεδο ικανοποίησης, ή το ακριβώς αντίθετο).

Άλλο χρήσιμο εργαλείο που αφορά στην προσαρμογή των αποτελεσμάτων της μεθόδου και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση και την κατανομή των σφαλμάτων είναι το διάγραμμα διακύμανσης της ολικής συνάρτησης ικανοποίησης (Grigoroudis and Siskos, 2002; Γρηγορούδης και Σίσκος, 2000).

### 4.3.3 Μέσος δείκτης ευστάθειας

Η ευστάθεια των αποτελεσμάτων της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης αποτελεί ένα πρόβλημα ανεξάρτητο από το βαθμό προσαρμογής της μεθόδου MUSA και αποτελεί το βασικό αντικείμενο της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης. Η προτεινόμενη ανάλυση μεταβελτιστοποίησης είναι μία διαδικασία αναζήτησης ημιβέλτιστων λύσεων με συγκεκριμένες επιθυμητές ιδιότητες, η οποία είναι σε θέση να μετρήσει την ευστάθεια των αποτελεσμάτων του μοντέλου.

Πιο συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια της φάσης μεταβελτιστοποίησης έστω ότι επιλύονται  $n_{sol}$  τον αριθμό γραμμικά προγράμματα, τα οποία εκτιμούν  $n_{sol}$  σύνολα λύσεων. Ως τελική λύση για τα βάρη των κριτηρίων υπολογίζεται η μέση τιμή των βαρών που προκύπτουν από την επίλυση των γραμμικών αυτών προγραμμάτων.

Μία αρχική ένδειξη για το μέτρο της αστάθειας των λύσεων είναι η τυπική απόκλιση των λύσεων που προκύπτει από την τετραγωνική ρίζα της μέσης τετραγωνικής απόκλισης (Μπένος, 1991; Παπαϊωάννου και Λουκά, 1990).

Ο τύπος τυπικής απόκλισης των εκτιμώμενων τιμών του βάρους του κριτηρίου  $i$  ορίζεται ως εξής:

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n_{sol} - 1} \sum_{j=1}^{n_{sol}} \left( b_i^j - \frac{\sum_{j=1}^{n_{sol}} b_i^j}{n_{sol}} \right)^2} \quad \text{for } i=1,2,\dots,n_{cr} \quad (38)$$

όπου  $S_i$  η τυπική απόκλιση των εκτιμώμενων τιμών του βάρους του κριτηρίου  $i$ ,  $b_i^j$  το βάρος του  $i$  κριτηρίου που προκύπτει από την επίλυση του  $j$  γραμμικού προγράμματος μεταβελτιστοποίησης,  $n_{cr}$  το πλήθος των κριτηρίων και τέλος  $n_{sol}$  ο συνολικός αριθμός των προς επίλυση γραμμικών προγραμμάτων στα πλαίσια της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης.

Η σχέση (38) έπειτα από πράξεις καταλήγει στην παρακάτω μορφή:

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n_{sol} - 1} \left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (b_i^j)^2 - \frac{\left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} b_i^j \right)^2}{n_{sol}} \right)} \quad \text{for } i=1,2,\dots,n_{cr} \quad (39)$$

Στη συνέχεια η τυπική απόκλιση των βαρών χρησιμοποιείται για να εξαχθεί ο δείκτης εκείνος μέσω του οποίου θα εκφράσουμε το βαθμό ευστάθειας των λύσεων. Έτσι, ο μέσος δείκτης ευστάθειας (Average Stability Index - ASI) θα μπορούσε να οριστεί ως η μέση τιμή της κανονικοποιημένης τυπικής απόκλισης των εκτιμώμενων βαρών  $b_i$  των κριτηρίων του προβλήματος:

$$ASI = 1 - \frac{1}{n_{cr}} \sum_{i=1}^{n_{cr}} \frac{S_i}{Norm} \quad (40)$$

όπου *Norm* είναι ο συντελεστής κανονικοποίησης, τέτοιος ώστε να επιτρέπει στο δείκτη ASI να λάβει τιμές στο διάστημα [0,1] και πιο συγκεκριμένα :

1. Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση που ο δείκτης αυτός γίνεται μέγιστος έχουμε (Παπαδημητρίου, 1989):

$$ASI = 1 \Leftrightarrow b_i^j = b_i \quad \forall i, j \quad (41)$$

Δηλαδή, στην καλύτερη περίπτωση έχουμε μηδενική τυπική απόκλιση:

$$S_i = 0 \Leftrightarrow b_i^j = b_i \quad \forall i, j \quad (42)$$

Όπου

$$b_i = \frac{1}{n_{sol}} \sum_{j=1}^{n_{sol}} b_i^j \quad (43)$$

δηλαδή οι τελικές τιμές των βαρών  $b_i$  είναι οι υπολογιζόμενες μέσες τιμές των  $b_i^j$ . Οπότε ανεξάρτητα του συντελεστή *Norm* ο ASI παίρνει τη μέγιστη τιμή του:

$$ASI = 1 - \frac{1}{n_{cr}} \sum_{i=1}^{n_{cr}} \frac{0}{Norm} \Rightarrow ASI = 1 \quad (44)$$

2. Στη χειρότερη περίπτωση που ο δείκτης γίνεται ελάχιστος (ASI=0) το άθροισμα των τυπικών αποκλίσεων θα παίρνει τη μέγιστη τιμή του  $S_{max}$ . Σε αυτή την περίπτωση ισχύει:

$$ASI = 1 - \frac{1}{n_{cr}} \sum_{i=1}^{n_{cr}} \frac{S_i}{Norm} \Rightarrow ASI = 1 - \frac{1}{n_{cr}} * \frac{S_{max}}{Norm} \Rightarrow ASI = 0 \quad (45)$$

Επομένως αρκεί να βρεθεί ένας συντελεστής κανονικοποίησης *Norm* που θα ισούται με το  $S_{max}/n_{cr}$ .

Κατά τη χειρότερη περίπτωση οι τιμές των  $b_i^j$  θα παίρνουν τιμές ως εξής:

$$b_i^j = \begin{cases} 100 & \text{για } j=k=1+(i-1)\frac{n_{sol}}{n_{cr}}, \dots, (i-1)\frac{n_{sol}}{n_{cr}} + \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \text{ για } i=1, \dots, n_{cr} \\ 0 & \text{για } j \neq k \end{cases} \quad (46)$$

Δηλαδή για το  $1/n_{cr}$  του συνόλου των λύσεων  $n_{sol}$  η τιμή του βάρους για το κάθε ένα κριτήριο θα παίρνει την τιμή 100 και την τιμή 0 για τα υπόλοιπα  $(n_{cr}-1)$  κριτήρια. Οπότε σε κάθε κριτήριο θα έχουμε  $n_{sol}/n_{cr}$  τιμές 100 και  $\frac{n_{sol}(n_{cr}-1)}{n_{cr}}$  τιμές 0. Στην περίπτωση αυτή η μέση τιμή των βαρών των κριτηρίων  $i$  θα ισούται με:

$$b_i = \frac{1}{n_{sol}} \left( 100 \frac{n_{sol}}{n_{cr}} + 0 \frac{n_{sol}(n_{cr}-1)}{n_{cr}} \right) \Rightarrow b_i = \frac{100}{n_{cr}} \quad \forall i \quad (47)$$

Από τη σχέση (39) έχουμε για την τυπική απόκλιση κάθε κριτηρίου  $i$ :

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n_{sol}-1} \left( \sum_{b_i^j=100} \left( 100 - \frac{100}{n_{cr}} \right)^2 + \sum_{b_i^j=0} \left( -\frac{100}{n_{cr}} \right)^2 \right)} \text{ for } i=1, 2, \dots, n_{cr} \Rightarrow \quad (48)$$

$$S_i = \sqrt{\frac{1}{n_{sol}-1} \left( \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( 100 - \frac{100}{n_{cr}} \right)^2 + (n_{cr}-1) \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( -\frac{100}{n_{cr}} \right)^2 \right)} \text{ for } i=1, 2, \dots, n_{cr}$$

Επομένως για τον συντελεστή κανονικοποίησης *Norm* έχουμε:

$$Norm = \frac{S_{max}}{n_{cr}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_{cr}} S_i}{n_{cr}} \Rightarrow$$

$$Norm = \frac{\sum_{i=1}^{n_{cr}} \sqrt{\frac{1}{n_{sol}-1} \left( \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( 100 - \frac{100}{n_{cr}} \right)^2 + (n_{cr}-1) \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( -\frac{100}{n_{cr}} \right)^2 \right)}}{n_{cr}} \Rightarrow \quad (49)$$

$$Norm = \frac{n_{cr} \sqrt{\frac{1}{n_{sol}-1} \left( \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( 100 - \frac{100}{n_{cr}} \right)^2 + (n_{cr}-1) \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( -\frac{100}{n_{cr}} \right)^2 \right)}}{n_{cr}} \Rightarrow$$

$$Norm = \sqrt{\frac{1}{n_{sol}-1} \left( \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( 100 - \frac{100}{n_{cr}} \right)^2 + (n_{cr}-1) \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( -\frac{100}{n_{cr}} \right)^2 \right)}$$

Και αντικαθιστώντας στην (40) και με χρήση της (41) μετά από πράξεις προκύπτει ο τελικός τύπος ASI:



$$\begin{aligned}
 ASI &= 1 - \frac{1}{n_{cr}} \sum_{i=1}^{n_{cr}} \frac{S_i}{\sqrt{\frac{1}{n_{sol}-1} \left( \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( 100 - \frac{100}{n_{cr}} \right)^2 + (n_{cr}-1) \frac{n_{sol}}{n_{cr}} \left( -\frac{100}{n_{cr}} \right)^2 \right)}} \Rightarrow \\
 & \quad \sum_{i=1}^{n_{cr}} \sqrt{\frac{\left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (b_i^j)^2 \right) - \frac{\left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} b_i^j \right)^2}{n_{sol}}}{n_{sol}}} \\
 ASI &= 1 - \frac{1}{n_{cr}} \frac{\sum_{i=1}^{n_{cr}} \sqrt{\frac{\left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (b_i^j)^2 \right) - \frac{\left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} b_i^j \right)^2}{n_{sol}}}{n_{sol}}}}{\sqrt{\frac{100^2 + \frac{100^2}{n_{cr}^2} - 2 * \frac{100^2}{n_{cr}} + \frac{100^2}{n_{cr}^2} (n_{cr}-1)}{n_{cr}} n_{sol}}} \Rightarrow \\
 ASI &= 1 - \frac{1}{n_{cr}} \frac{\sum_{i=1}^{n_{cr}} \sqrt{\frac{\left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (b_i^j)^2 \right) - \frac{\left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} b_i^j \right)^2}{n_{sol}}}{n_{sol}}}}{\sqrt{\frac{100^2 n_{cr}^2 + 100^2 - 2 * 100^2 n_{cr} + 100^2 (n_{cr}-1)}{n_{cr}^2} n_{sol}}} \Rightarrow \\
 ASI &= 1 - \frac{1}{n_{cr}} \frac{\sum_{i=1}^{n_{cr}} \sqrt{\frac{\left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (b_i^j)^2 \right) - \frac{\left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} b_i^j \right)^2}{n_{sol}}}{n_{sol}}}}{\sqrt{\frac{100^2 n_{cr}^2 - 100^2 n_{cr} n_{sol}^2}{n_{cr}^3}}} \Rightarrow \\
 ASI &= 1 - \frac{1}{n_{cr}} \frac{\sum_{i=1}^{n_{cr}} \sqrt{\frac{\left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (b_i^j)^2 \right) - \frac{\left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} b_i^j \right)^2}{n_{sol}}}{n_{sol}}}}{\sqrt{\frac{100^2 n_{cr} (n_{cr}-1) n_{sol}^2}{n_{cr}^3}}} \Rightarrow \\
 ASI &= 1 - \frac{1}{n_{cr}} \frac{\sum_{i=1}^{n_{cr}} \sqrt{\frac{\left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} (b_i^j)^2 \right) - \frac{\left( \sum_{j=1}^{n_{sol}} b_i^j \right)^2}{n_{sol}}}{n_{sol}}}}{\frac{n_{sol}}{n_{cr}} 100 \sqrt{(n_{cr}-1)}}} \tag{50}
 \end{aligned}$$

Η σχέση (50) στην περίπτωση της Γενικευμένης MUSA όπου  $n_{cr} = n_{sol} = n$  ο ASI γίνεται:

$$ASI = 1 - \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{\left( n \left( \sum_{j=1}^n (b_i^j)^2 \right) - \left( \sum_{j=1}^n b_i^j \right)^2 \right)}{100 \sqrt{(n-1)}} \quad (51)$$

ο οποίος με την ειδική αυτή μορφή αναφέρεται και από τους Γρηγορούδη και Σίσκο (2000).

#### 4.3.4 Εύρος διακύμανσης βαρών

Το εύρος της διακύμανσης βαρών παρέχει ένα διάστημα τιμών για την εκτίμηση της σημαντικότητας των κριτηρίων ικανοποίησης. Το εύρος  $WV$  υπολογίζεται για το κάθε βάρος  $i$  ως εξής:

$$WV_i = \max\{b_i^j\} - \min\{b_i^j\} \text{ for } j=1,2,\dots,n_{\text{sol}} \quad (52)$$

όπου  $b_i^j$  το βάρος του  $i$  κριτηρίου που προκύπτει από την επίλυση του  $j$  γραμμικού προγράμματος μεταβελτιστοποίησης και τέλος  $n_{\text{sol}}$  ο συνολικός αριθμός των προς επίλυση γραμμικών προγραμμάτων στα πλαίσια της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης. Το εύρος αυτό μπορεί να αποτυπωθεί και γραφικά παρέχοντας ένα διάγραμμα διακύμανσης βαρών. Επίσης μέσα από την επίλυση των διαφορετικών γραμμικών προγραμμάτων και τον υπολογισμό των διαφορετικών  $b_i^j$  προκύπτει ο πίνακας διακύμανσης βαρών στον οποίο αποτυπώνονται το σύνολο των τιμών για κάθε κριτήριο  $i$  (στήλης) ανά γραμμικό πρόγραμμα  $j$  (γραμμές).

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι εκτός από το μέσο δείκτη ευστάθειας  $ASI$  το εύρος διακύμανσης των βαρών  $WV_i$  είναι σε θέση να δώσει πολύτιμες πληροφορίες για την ανάλυση της ευστάθειας των αποτελεσμάτων της μεθόδου  $MUSA$ . Πιο συγκεκριμένα ο δείκτης υπολογίζει ένα «διάστημα εμπιστοσύνης» για τα εκτιμώμενα βάρη των κριτηρίων. Από την άλλη μεριά ο πίνακας διακύμανσης των βαρών δίνει τη δυνατότητα προσδιορισμού πιθανής ανταγωνιστικότητας των κριτηρίων, δηλαδή ύπαρξης ομάδων πελατών με διαφορετικό επίπεδο σημαντικότητας των κριτηρίων ικανοποίησης.

### 4.4 Συγκριτική Αξιολόγηση Αλγορίθμων Ανάλυσης Ευστάθειας στη $MUSA$

Παρατηρώντας τα μοντέλα ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης της  $MUSA$  που εξετάστηκαν παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα ότι εφαρμόζοντας αυτές τις ευρετικές προσεγγίσεις δε υπολογίζονται όλες οι πολλαπλές ή σχεδόν βέλτιστες λύσεις του υπερπολυέδρου  $ΥΠ 3$  αλλά μόνο κάποιες ακραίες τιμές με αποτέλεσμα να υπάρχει ο κίνδυνος εξαγωγής λάθος συμπερασμάτων αφού υπάρχει ελλιπής πληροφορία. Ο κίνδυνος αυτός είναι σημαντικός αν παρατηρηθεί ότι γενικά η μέση τιμή των βαρών μπορεί να είναι ευαίσθητη στην ύπαρξη λίγων ασυνήθιστα μικρών ή μεγάλων μετρήσεων (Παπαϊωάννου και Λουκά, 1990).

Θα ήταν ίσως χρήσιμη η εφαρμογή κάποιων από τους αναλυτικούς αλγόριθμους ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης που παρουσιάστηκαν στην παρούσα έκθεση και οι οποίες θα επιτρέπανε τον υπολογισμό, αν όχι όλων, τουλάχιστον ενός μεγάλου αριθμού πολλαπλών ή σχεδόν βέλτιστων λύσεων, ώστε η μέση τιμή που θα προέκυπτε από αυτές να

ανταποκρινόταν περισσότερο στην πραγματικότητα. Τελικός στόχος θα έπρεπε να είναι η αύξηση της ποσότητας και της ποιότητας της διαθέσιμης πληροφορίας χωρίς σημαντική αύξηση του υπολογιστικού φόρτου.

Σύμφωνα με τους Du, Pardalos και Wu (2001) τα τελευταία χρόνια η βελτιστοποίηση παρουσίασε μία δραματική αύξηση σε δραστηριότητες. Αυτό είναι μία φυσική συνέπεια των νέων αλγοριθμικών εξελίξεων και της αυξημένης δύναμης των υπολογιστών. Πολλά από αυτά τα προβλήματα μπορεί να είναι πολύ μεγάλα, αν και ότι είναι μεγάλο στη βελτιστοποίηση, αντανακλά όχι μόνο το μέγεθος αλλά και επίσης και την ενυπάρχουσα πολυπλοκότητα του προβλήματος. Γι' αυτά τα προβλήματα, η ακριβής βέλτιστη λύση δεν είναι πάντα υπολογίσιμη σε πραγματικό χρόνο. Συνήθως υπολογίζεται μία προσεγγιστική λύση με διαφόρων ειδών ευρετικούς αλγόριθμους.

Το ερώτημα στο οποίο θα γίνει προσπάθεια να δοθεί απάντηση μέσα από το σχεδιασμό και την υλοποίηση ενός πειράματος είναι κατά πόσο οι ευρετικοί αλγόριθμοι της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης της MUSA παρέχουν πληροφορία ανταγωνιστική ως προς την ποιότητά της σε σύγκριση με τους αναλυτικούς αλγόριθμους. Η αξιολόγηση αυτή θα γίνει μέσα από τη σύγκριση του μέσου δείκτη ευστάθειας ASI και του εύρους διακύμανσης των βαρών  $WV_i$  που θα δίνουν οι διαφορετικοί αναλυτικοί και ευρετικοί αλγόριθμοι.

Για το λόγο αυτό το πείραμα που σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας και που παρουσιάζεται στο επόμενο Κεφάλαιο περιλαμβάνει τους εξής αλγόριθμους:

- Αναλυτικοί Αλγόριθμοι
  - Manas and Nedoma
  - Αντίστροφη Simplex
- Ευρετικοί Αλγόριθμοι
  - Γενικευμένο MUSA
  - MUSA I
  - MUSA III

Στα πλαίσια του πειράματος επιλύουμε πλήρως τη μέθοδο MUSA και στο πλαίσιο αυτό υπολογίζονται οι τιμές των δεικτών ευστάθειας και των δεικτών αξιοπιστίας. Παράλληλα παρέχει χρήσιμα στοιχεία για την εκτίμηση της απόδοσης του κάθε αλγόριθμου. Τα στοιχεία αυτά είναι ο πραγματικός χρόνος επίλυσης του προβλήματος, ο αριθμός των περιστροφών του πίνακα Simplex, η χρησιμοποιούμενη μνήμη RAM και τέλος ο αριθμός των μεταβέλτιστων λύσεων.

## 5. Γεννήτρια Συνόλων Δεδομένων για Έρευνες Ικανοποίησης

Προκειμένου να σχεδιαστούν με τον καλύτερο τρόπο οι αλγόριθμοι μεταβελτιστοποίησης και να αξιολογηθούν σε αρχικό επίπεδο τα παραγόμενα αποτελέσματα, παρουσιάστηκε η ανάγκη δοκιμής τους με χρήση πλήθους συνόλων δεδομένων. Η παραγωγή ενός μεγάλου αριθμού πραγματικών τέτοιων συνόλων αφενός θα ήταν χρονικά και οικονομικά ανέφικτη και αφετέρου δε θα υπήρχε η βεβαιότητα ότι τα σύνολα αυτά θα κάλυπταν δεδομένα με μεγάλο εύρος χαρακτηριστικών. Έτσι παρουσιάστηκε η ανάγκη για τη δημιουργία τεχνητών δεδομένων.

Για το σκοπό αυτό σχεδιάστηκε και αναπτύχθηκε μία μεθοδολογία δημιουργίας συνόλων τεχνητών (συνθετικών) δεδομένων (data set generator) για έρευνες ικανοποίησης με χρήση δομημένων ερωτηματολογίων. Παράλληλα αναπτύχθηκε ένα λογισμικό για τη δημιουργία τεχνητών δεδομένων το οποίο επιτρέπει τη δημιουργία συνόλων δεδομένων που ανταποκρίνονται σε εικονικούς πελάτες με συγκεκριμένη συμπεριφορά. Το λογισμικό αυτό επιτρέπει την εξέταση της συμπεριφοράς της μεθόδου MUSA κάτω από ειδικές-προκαθορισμένες συνθήκες. Με χρήση της γεννήτριας σχεδιάστηκαν πειράματα-δοκιμές για το επόμενο Κεφάλαιο μέσω της παραγωγής συνθετικών δεδομένων. Τα πειράματα αυτά θα επιτρέψουν την εξέταση, τη συγκριτική αξιολόγηση και επιβεβαίωση της αξιοπιστίας των αλγορίθμων ανάλυσης της ευστάθειας.

### 5.1 Στόχοι της γεννήτριας δεδομένων

Όταν ένας ερευνητής επιλέξει ένα εργαλείο για να αναλύσει τα δεδομένα του, είτε αποδέχεται πλήρως είτε δεν αποδέχεται την αξιοπιστία αυτού του λογισμικού και των αντίστοιχων μοντέλων. Πολλά μοντέλα περιλαμβάνουν διάφορα είδη μέτρων για την αξιοπιστία των παρεχόμενων αποτελεσμάτων τα οποία βοηθούν τον ερευνητή να αποδεχθεί μια λύση ή να προσπαθήσει να εκτελέσει την διαδικασία ξανά, πιθανώς δίνοντας διαφορετικές τιμές στις παραμέτρους.

Προκειμένου να συγκριθούν διεξοδικά οι προς μελέτη αλγόριθμοι ευστάθειας, ένας μεγάλος αριθμός από δοκιμαστικές περιπτώσεις για το ίδιο πρόβλημα (ίδια κριτήρια, ίδια επίπεδα ικανοποίησης, ίδιο πληθυσμό) θα πρέπει να εκτελεσθεί. Σε αυτές τις δοκιμαστικές περιπτώσεις διαφορετικά επίπεδα στην κλίμακα ικανοποίησης όπως επίσης και μεγέθη δείγματος πρέπει να δοκιμασθούν. Επιπροσθέτως, ένα μεγάλο εύρος από τιμές για τις παραμέτρους πρέπει να επιλεγεί. Αυτές οι δοκιμαστικές περιπτώσεις χρειάζονται ένα μεγάλο πλήθος από δεδομένα. Όμως, είναι αρκετά δύσκολο να βρεθούν και να χρησιμοποιηθούν πραγματικά σύνολα δεδομένων. Ακόμα, είναι δυσκολότερο να βρεθεί ένα ικανοποιητικό φάσμα από σύνολα δεδομένων διαφορετικής ποιότητας για να μπορεί να γίνει σύγκριση της ανάλυσης των αποτελεσμάτων. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι η δημιουργία τεχνητών δεδομένων χρησιμοποιώντας γεννήτρια δεδομένων.

Τα τεχνητά δεδομένα μπορούν να διαδραματίσουν έναν σημαντικό ρόλο στην αποτίμηση της MUSA. Στις μεθόδους ανάλυσης ικανοποίησης η περιγραφή της συμπεριφοράς του πελάτη απορρέει από τα παραγόμενα σύνολα αποτελεσμάτων. Η μέθοδος MUSA παρέχει μια ολική συνάρτηση  $Y^*$ , και ένα σύνολο από μερικές συναρτήσεις ικανοποίησης  $X_i^*$  που έχουν σχέση με τις απόψεις των πελατών. Θα ήταν χρήσιμο για τον ερευνητή να θεωρεί εκ των προτέρων κάποια χαρακτηριστικά για την συμπεριφορά κάποιων υποθετικών πελατών, να παράγει τεχνητά δεδομένα ικανοποίησης για τους υποθετικούς αυτούς πελάτες ως απαντήσεις σε ερωτηματολόγια και στη συνέχεια να μπορεί να ελέγχει αν τα παραγόμενα αποτελέσματα της επιλεγμένης μεθόδου επαληθεύουν τα χαρακτηριστικά αυτά.

## 5.2 Περιγραφή της γεννήτριας δεδομένων

Ακολουθώντας τις Monte Carlo τεχνικές προσομοίωσης, παράγονται πραγματικά σύνολα δεδομένων, τα οποία βασίζονται στην αναλυτική - συνθετική προσέγγιση (aggregation-disaggregation). Αυτά τα σύνολα δεδομένων έχουν κάποιες ιδιότητες σύμφωνα με το σενάριο που ο χρήστης θέλει να υλοποιηθεί. Η γεννήτρια του συνόλου δεδομένων ακολουθεί μια διαδικασία που αποτελείται από πέντε βήματα:

Βήματα 1, 2 & 3: Σχεδιασμός σεναρίου – Ορισμός παραμέτρων

Σε αυτά τα τρία αρχικά βήματα ο ερευνητής καλείται να ορίσει μερικά από τα βασικά χαρακτηριστικά των δεδομένων της μεθόδου MUSA που θα δημιουργηθούν. Αναπτύσσεται ένα συνολικό σενάριο το οποίο περιλαμβάνει τα κριτήρια, τα οποία ακολουθούν τη δομή δένδρου και τις κλίμακες ικανοποίησης. Σύμφωνα με το μοντέλο, κάθε πελάτης καλείται να εκφράσει τις προτιμήσεις του, δηλαδή την ολική ικανοποίηση και την μερική ικανοποίησή του για κάθε κριτήριο ξεχωριστά, επιλέγοντας το κατάλληλο επίπεδο σε μια κλίμακα ικανοποίησης.

Οι αρχικές παράμετροι που ορίζονται στον γεννήτορα δεδομένων είναι:

- $n$ : αριθμός κριτηρίων ικανοποίησης. Ο χρήστης μπορεί να δώσει ακέραιους αριθμούς.
- $a$ : αριθμός των επιπέδων στην κλίμακα ολικής ικανοποίησης. Ο χρήστης μπορεί να τροποποιήσει τα προεπιλεγμένα ονόματα για τα επίπεδα.
- $a_i$ : αριθμός επιπέδων στην κλίμακα ικανοποίησης για κάθε κριτήριο  $i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ).

Μπορούν επίσης σε αυτό το σημείο να δοθούν τα απαραίτητα στοιχεία για υποκριτήρια.

Βήμα 4: Δημιουργία Συναρτήσεων Ικανοποίησης

Ένα σύνολο συναρτήσεων ικανοποίησης (ολικής ικανοποίησης και μερικής ικανοποίησης για κάθε κριτήριο) δημιουργείται αλληλεπιδραστικά. Ο χρήστης μπορεί προαιρετικά να ορίσει τα επίπεδα απαιτητικότητας  $D$  και  $D_i$  για τους πελάτες όπως επίσης και τα βάρη  $b_i$  για κάθε κριτήριο. Εναλλακτικά το πρόγραμμα μπορεί να δημιουργήσει τις συναρτήσεις χωρίς κανένα περιορισμό. Και στις δυο περιπτώσεις χρησιμοποιείται μια Monte Carlo προσομοίωση για τη δημιουργία των  $y^{*k}$  και  $x_i^*$  τιμών ακολουθώντας ομοιόμορφη κατανομή ( $\sim U(a,b)$ ).

Συγκεκριμένα, σε αυτό το επίπεδο ο χρήστης καλείται να ορίσει τις παρακάτω παραμέτρους:

- D (προαιρετικά): ολικό επίπεδο απαιτητικότητας παίρνοντας τρεις διαφορετικές τιμές (Απαιτητικός, Κανονικός, Μη-Απαιτητικός).
- $D_i$  (προαιρετικά): μερικό επίπεδο απαιτητικότητας παίρνοντας τρεις διαφορετικές τιμές, όπως παραπάνω, για κάθε  $i$ -οστό κριτήριο.
- $b_i$  (προαιρετικά): το βάρος για το  $i$ -οστό κριτήριο.
- $\gamma$  (προαιρετικά): ελάχιστο βήμα κατά το οποίο αυξάνει η συνάρτηση ολικής ικανοποίησης ( $\gamma \leq 100/2 * (\alpha - 1)$ ).
- $\gamma_i$  (προαιρετικά): ελάχιστο βήμα κατά το οποίο αυξάνουν οι συναρτήσεις μερικής ικανοποίησης για κάθε κριτήριο και υποκριτήριο ( $\gamma_i \leq \min \left\{ \frac{100}{2 * (a_i - 1)} \forall i = 1, \dots, n \right\}$ ).

Οι συναρτήσεις δημιουργούνται ακολουθώντας τους κανόνες μονοτονίας και κανονικοποιούνται στο διάστημα  $[0, 100]$ . Αρχικά δημιουργείται η συνάρτηση ολικής ικανοποίησης  $Y^*$ . Η δημιουργία τυχαίων αριθμών  $y^m$  (όπου  $y^m$  είναι η τιμή του επιπέδου ικανοποίησης) ικανοποιεί το ακόλουθο σύνολο περιορισμών:

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{*1} = 0 \\ y^{*a} = 100 \\ \text{If D has been given then} \\ \text{Generate } y^{*\text{int}[(a+1)/2]} \\ \text{if D: Demanding then } y^{*\text{int}[(a+1)/2]} \sim U(0 + [(a-1)/2]\gamma, 33) \\ \text{if D: Neutral then } y^{*\text{int}[(a+1)/2]} \sim U(33, 66) \\ \text{if D: Non-Demanding then } y^{*\text{int}[(a+1)/2]} \sim U(66, 100 - [(a-1)/2]\gamma) \\ \text{Generate } y^{*m} \text{ for } m = a-1, \dots, 3, 2 \\ \text{for } m > (\text{int}[(a+1)/2]): y^{*m} \sim U(y^{*\text{int}[(a+1)/2]} + (m - \text{int}[(a+1)/2])\gamma, y^{*m+1} - \gamma) \\ \text{for } m = (\text{int}[(a+1)/2]): y^{*m} = y^{*\text{int}[(a+1)/2]} \\ \text{for } m < (\text{int}[(a+1)/2]): y^{*m} \sim U((m-1)\gamma, y^{*m+1} - \gamma) \\ \text{else} \\ \text{Generate } y^{*m} : y^{*m} \sim U((m-1)\gamma, y^{*m+1} - \gamma) \text{ for } m = a-1, \dots, 3, 2 \end{array} \right.$$

Μετά τη δημιουργία της συνάρτησης ολικής ικανοποίησης ο χρήστης μπορεί να αλλάξει κάποιες από τις τιμές  $y^{*m}$  της συνάρτησης που επιθυμεί χωρίς να παραβιάσει τους παραπάνω κανόνες. Το επόμενο στάδιο είναι η δημιουργία των μερικών συναρτήσεων ικανοποίησης σύμφωνα με την αναλυτική – συνθετική προσέγγιση. Η δημιουργία των τυχαίων αριθμών  $x_i^{*k}$  (όπου  $x_i^{*k}$  είναι η τιμή του επιπέδου ικανοποίησης) ικανοποιεί το ακόλουθο σύνολο περιορισμών. Για την δημιουργία αυτών των αριθμών χρησιμοποιούνται προσωρινές μεταβλητές  $tx_i^m$ .

If  $b_i$  were not given then Generate  $b_i: b_i \sim U(0,100)$  for  $i=1, 2, \dots, n$

$$b_i = \frac{b_i}{\sum_{i=1}^n b_i}$$

$tx_i^{*1} = 0$  for  $i=1, 2, \dots, n$

$tx_i^{*a} = 100$  for  $i=1, 2, \dots, n$

$\forall i=1,2,\dots,n$  (generation of values)

If  $D_i$  has been given

Generate  $tx_i^{*\text{int}[(a+1)/2]}$

if  $D_i$ : Demanding then  $tx_i^{*\text{int}[(a+1)/2]} \sim U(0 + [(a-1)/2]\gamma_i, 33)$

if  $D_i$ : Neutral then  $tx_i^{*\text{int}[(a+1)/2]} \sim U(33, 66)$

if  $D_i$ : Non-Demanding then  $tx_i^{*\text{int}[(a+1)/2]} \sim U(66, 100 - [(a-1)/2]\gamma_i)$

Generate  $tx_i^{*m}$  for  $m=a-1, \dots, 3, 2$

for  $m > (\text{int}[a+1]/2)$ :  $tx_i^{*m} \sim U(tx_i^{*\text{int}[(a+1)/2]} + (m - \text{int}[(a+1)/2])\gamma_i, tx_i^{*m+1} - \gamma_i)$

for  $m = (\text{int}[a+1]/2)$ :  $tx_i^{*m} = tx_i^{*\text{int}[(a+1)/2]}$

for  $m < (\text{int}[a+1]/2)$ :  $tx_i^{*m} \sim U((m-1)\gamma_i, tx_i^{*m+1} - \gamma_i)$

else

Generate  $tx_i^{*m} : tx_i^{*m} \sim U((m-1)\gamma_i, tx_i^{*m+1} - \gamma_i)$  for  $m=a-1, \dots, 3, 2$

(check the consistence of the partial satisfaction functions)

If  $\left| \sum_{i=1}^n b_i tx_i^{*m} - y^{*m} \right| < D_e \quad \forall m=1,2,\dots,a-1$  then

(calculation of  $x_i^{*k}$  as in relation to  $tx_i^{*m}$  by using linear interpolation)

$\forall i=1,2,\dots,n$

$x_i^{*1} = 0, \quad x_i^{*a_i} = 100$

$$x_i^{*k} = tx_i^{*\left[\text{int}\left(1+(k-1)\left(\frac{a-1}{a_i-1}\right)\right)\right]} + \left[ 1+(k-1)\left(\frac{a-1}{a_i-1}\right) - \text{int}\left(1+(k-1)\left(\frac{a-1}{a_i-1}\right)\right) \right] * \left[ tx_i^{*\left[\text{int}\left(1+(k-1)\left(\frac{a-1}{a_i-1}\right)\right)+1\right]} - tx_i^{*\left[\text{int}\left(1+(k-1)\left(\frac{a-1}{a_i-1}\right)\right)\right]} \right]$$

for  $k=2, \dots, a_i-1$

else

generate again the values  $tx_i^{*m}$

Μετά τη δημιουργία των συναρτήσεων μερικής ικανοποίησης ο χρήστης της γεννήτριας μπορεί να αναμορφώσει τις συναρτήσεις αλλάζοντας μερικές εκ των τιμών  $x_i^{*k}$  χωρίς να παραβιάζονται οι παραπάνω περιορισμοί.

### Βήμα 5: Δημιουργία συνόλου δεδομένων

Το σύνολο δεδομένων πρέπει να έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά τα οποία να βασίζονται στις συναρτήσεις ικανοποίησης που δημιουργήθηκαν στο Βήμα 4. Το κύριο θέμα είναι η δημιουργία συνεπών δεδομένων. Οπότε ζητείται η εξής παράμετρος:

- $D_{dis}$ : μέγιστη επιτρεπόμενη διαφορά (λάθος) για τις τιμές των συναρτήσεων ικανοποίησης [0...100%].

Η τιμή της παραμέτρου  $D_{dis}$  είναι υπεύθυνη για την ποιότητα και την ορθότητα των αποτελεσμάτων που πρόκειται να δημιουργηθούν. Μια μικρή τιμή για την  $D_{dis}$  πλησιάζει περισσότερο τα χαρακτηριστικά ενός ομοιογενούς δείγματος, αλλά στην πραγματικότητα τα ομοιογενή δείγματα είναι σπάνια.

Η γενική υπόθεση της ομοιόμορφης κατανομής δεν μειώνει την αξιοπιστία της γεννήτριας επειδή στις πραγματικές περιπτώσεις οι απαντήσεις δεν ακολουθούν μια ορισμένη στατιστική κατανομή. Στο σημείο αυτό δίνεται η παράμετρος  $M$  που δηλώνει το μέγεθος του δείγματος. Το σύνολο  $M$  των απαντήσεων για κάθε κριτήριο δημιουργείται ακολουθώντας τους παρακάτω κανόνες:

```

For  $c = 1, 2, 3, \dots, M$ 
Generate the answers of the  $c$  customer simulating his/her satisfaction on the  $n$  criteria
 $(v_1^c, v_2^c, \dots, v_n^c): v_i^c \sim U(1, a_i) \quad \forall i \ (i = 1, 2, \dots, n)$ 

If  $\exists k: \left| \sum_{i=1}^n b_i x_i^{v_i^c} - y^{*k} \right| \leq D_{dis}$  then
     $(v_1^c, v_2^c, \dots, v_n^c)$  is accepted and  $y^{c*m}$  is calculated
     $\left| \sum_{i=1}^n b_i x_i^{v_i^c} - y^{c*m} \right| = \min_k \left| \sum_{i=1}^n b_i x_i^{v_i^c} - y^{*k} \right|$ 
else
     $(v_1^c, v_2^c, \dots, v_n^c)$  is rejected and the answers of the  $c$  customer shall be generated again.
    
```

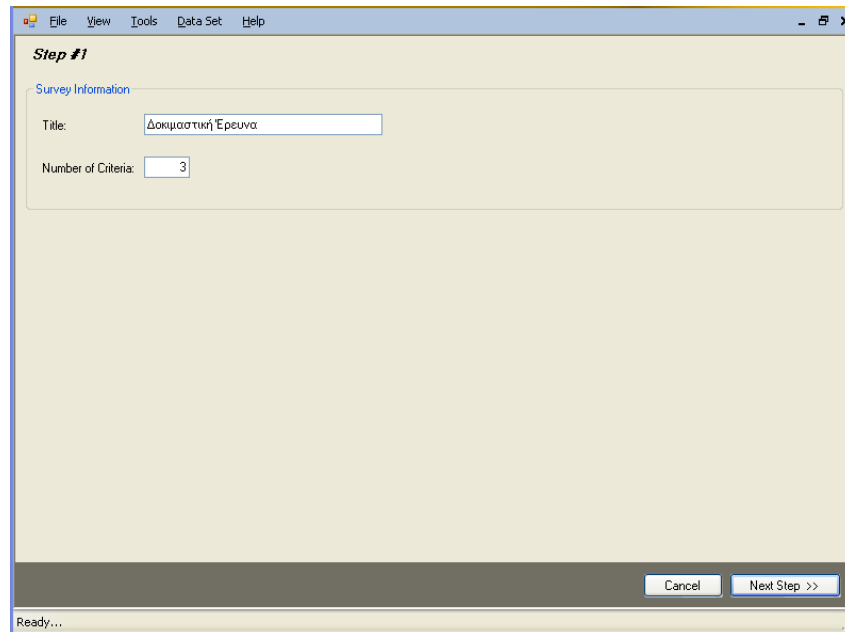
### 5.3 Λογισμικό γεννήτριας δεδομένων

Στη συνέχεια ακολουθεί η παρουσίαση του λογισμικού που δημιουργήθηκε βασιζόμενο στην παραπάνω μέθοδο. Η υλοποίηση του προγράμματος έγινε στο Microsoft Visual Studio .NET με χρήση της γλώσσας προγραμματισμού C#.

Στην τελική μορφή του λογισμικού υπάρχει μια κύρια φόρμα που περιέχει το menu επιλογών και το statusbar. Κάθε νέα φόρμα που περιέχει τις λειτουργίες της γεννήτριας, ανοίγει μέσα σε αυτή την κύρια φόρμα.

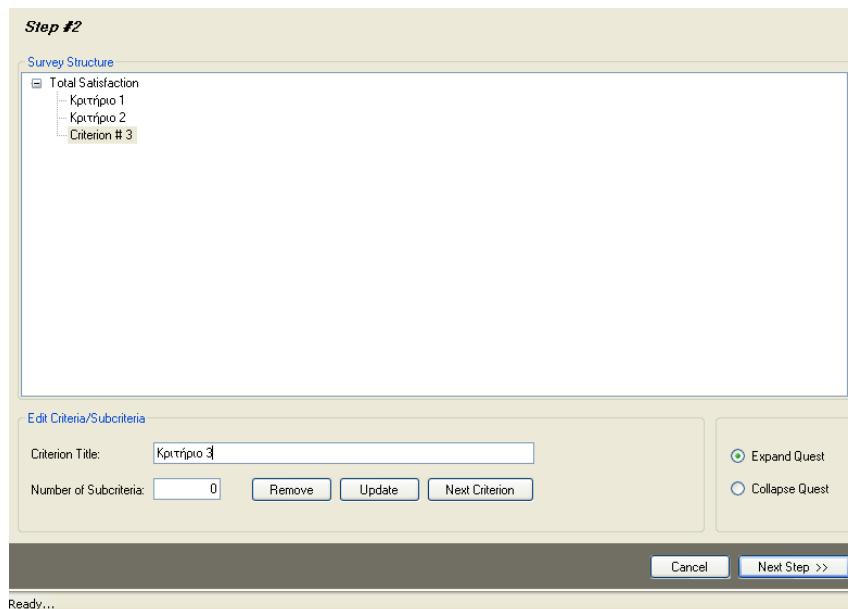
Η δημιουργία ενός νέου σεναρίου (έρευνας) γίνεται σε πέντε βήματα όπως αποτυπώνεται και στο παρακάτω παράδειγμα:



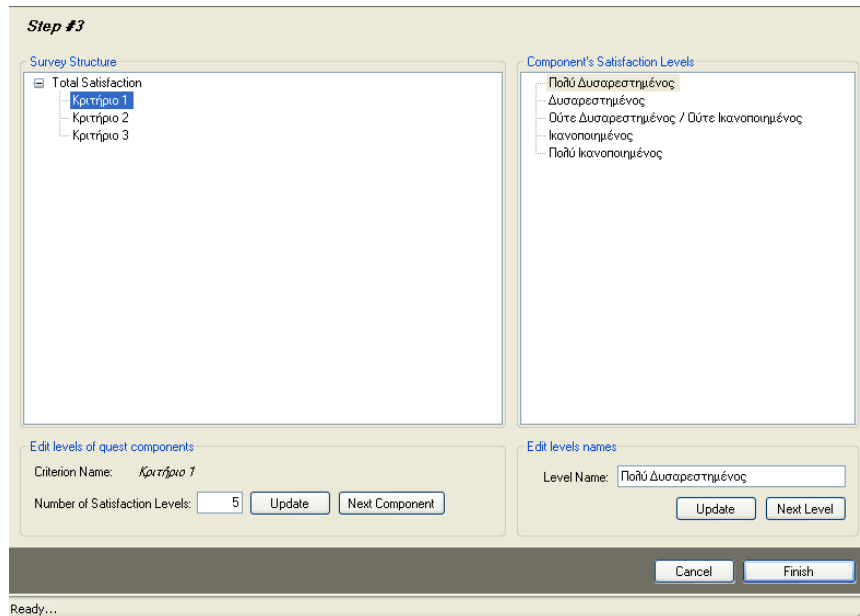


Σχήμα 5.1: 1ο Βήμα Γεννήτριας Δεδομένων

Στο πρώτο βήμα ορίζονται τα κριτήρια ( $n=3$ ) και το όνομα της έρευνας («Δοκιμαστική Έρευνα»). Στο δεύτερο βήμα ορίζονται τα ονόματα των κριτηρίων και ο αριθμός των υποκριτηρίων εφόσον επιθυμούμε τη δημιουργία και υποκριτηρίων. Στο τρίτο βήμα ορίζεται ο αριθμός των επίπεδων ικανοποίησης ( $\alpha=\alpha_i=5$ ) και το λεκτικό τους για κάθε κριτήριο/υποκριτήριο.



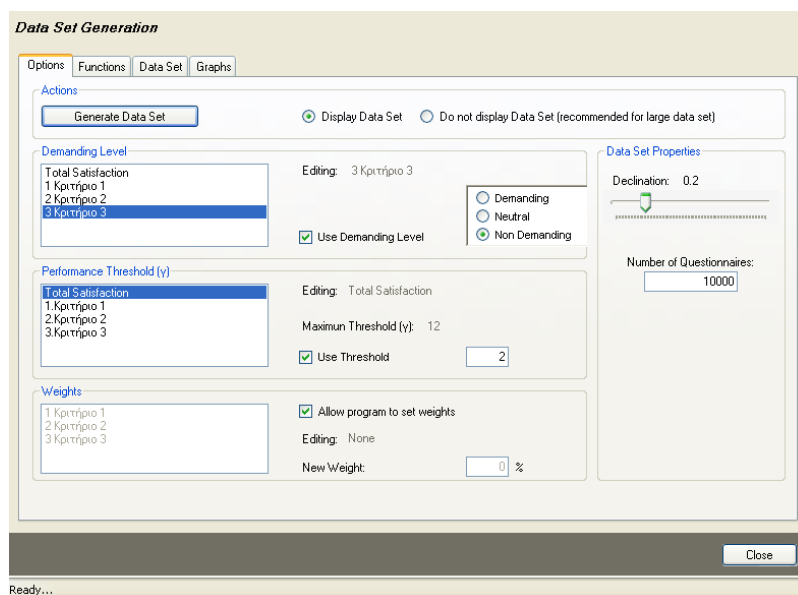
Σχήμα 5.2: 2ο Βήμα Γεννήτριας Δεδομένων



Σχήμα 5.3: 3ο Βήμα Γεννήτριας Δεδομένων

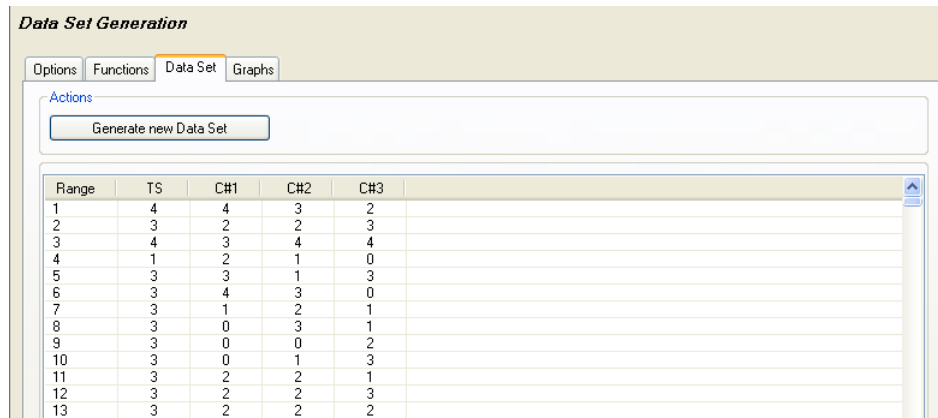
Στο τέταρτο βήμα δίνονται τα στοιχεία για τις συναρτήσεις  $b_i x_i$  με την βοήθεια των οποίων δημιουργούνται τα δεδομένα. Τα στοιχεία αυτά είναι: το ολικό επίπεδο απαιτητικότητας ( $D$ ), τα μερικά επίπεδα απαιτητικότητας ( $D_i$ ), τα ελάχιστα βήματα  $\gamma$  και  $\gamma_i$  και τα βάρη  $b_i$ . εφόσον ο χρήστης το επιθυμεί. Εναλλακτικά μπορεί να αφήσει ελεύθερο το σύστημα να καθορίσει τις τιμές αυτές με τυχαίο τρόπο.

Στο πέμπτο και τελευταίο βήμα δηλώνεται το μέγεθος  $M$  ( $M=10000$ ) του δείγματος και το μέγιστο επιτρεπόμενο λάθος  $D_{dis}$  ( $D_{dis}=0.2$ ) και προχωράμε στη γέννηση των δεδομένων.



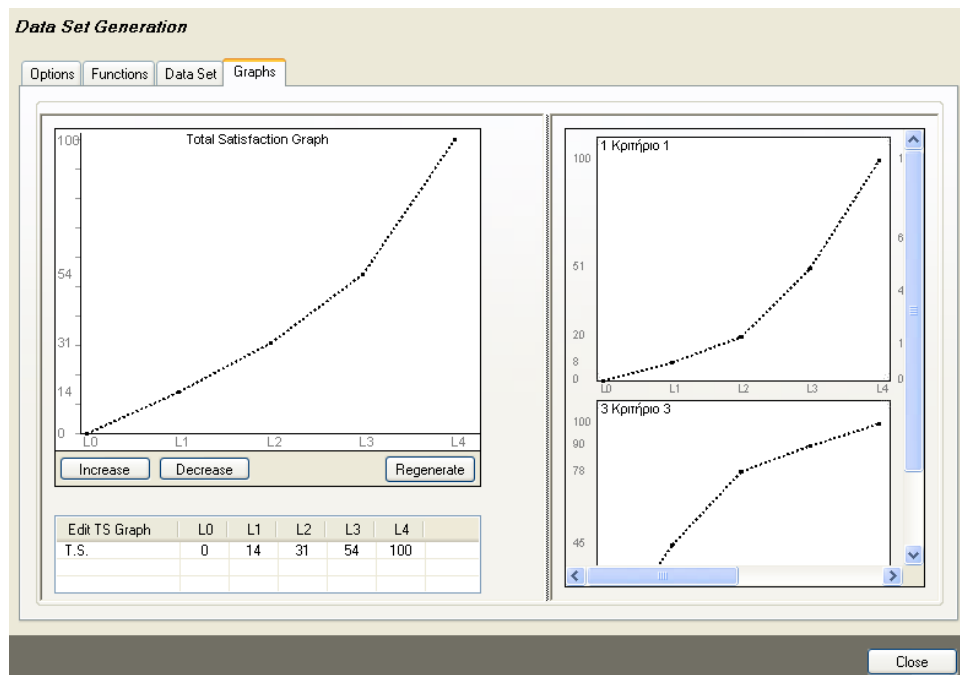
Σχήμα 5.4: 4ο και 5ο Βήμα Γεννήτριας Δεδομένων

Η γέννηση των 10000 απαντημένων ερωτηματολογίων διήρκεσε λιγότερο από 5 sec.



Σχήμα 5.5: Γέννηση 10000 Εγγραφών

Μετά τη δημιουργία των συναρτήσεων ολικής και μερικής ικανοποίησης ο χρήστης της γεννήτριας μπορεί να προχωρήσει σε αλλαγή της μορφής των συναρτήσεων αυτών και να ζητήσει τη δημιουργία καινούργιων σετ δεδομένων.



Σχήμα 5.6: Τροποποίηση Συναρτήσεων Ικανοποίησης

Τα δεδομένα που παράγονται από τη γεννήτρια μπορούν να αποθηκευτούν με δυο τρόπους. Είτε σε Excel μορφή είτε στον MS SQL Server επιλέγοντας αντίστοιχα Save To Excel ή Save To SQL Server από το μενού Data.

## 6. Πειράματα με τεχνητά δεδομένα

Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μια εμπειρική αξιολόγηση των αλγορίθμων ανάλυσης ευστάθειας μέσω της χρήσης συνόλων συνθετικών δεδομένων που παράγει η γεννήτρια.

Στα συμπεράσματα της αξιολόγησης των διαφορετικών αλγορίθμων καταγράφεται η πολύ καλή προσέγγιση των αποτελεσμάτων των ευρετικών αλγορίθμων σε σύγκριση με αυτά των αναλυτικών αλγορίθμων. Με δεδομένο μάλιστα τον ελάχιστο υπολογιστικό φόρτο που απαιτούν είναι σαφές ότι αποτελούν την καλύτερη επιλογή για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων ανάλυσης ικανοποίησης πελάτη.

Η εμπειρική έρευνα αποτελεί σήμερα μια ικανοποιητική μέθοδο, ίσως τη μόνη, για τη σύγκριση εναλλακτικών προσεγγίσεων του ίδιου προβλήματος (Κοΐλιας, 2006). Σε αυτό το Κεφάλαιο γίνεται μια συγκριτική ανάλυση των 2 αναλυτικών (Manas-Nedoma, Αντίστροφη Simplex) και 3 ευρετικών αλγορίθμων (Γενικευμένο MUSA, MUSA I, MUSA III) μεταβελτιστοποίησης που παρουσιάστηκαν στην παρούσα τεχνική έκθεση.

Η συγκριτική ανάλυση εναλλακτικών μεθόδων ανάλυσης δεδομένων που προέρχονται από τη διεξαγωγή ερευνών ικανοποίησης βασίζεται στο σχεδιασμό και την εφαρμογή μιας συγκεκριμένης πειραματικής διαδικασίας, η οποία έχει ως κύριο στόχο τη δημιουργία ενός τυχαίου συνόλου δεδομένων με προκαθορισμένες ιδιότητες. Η πειραματική αυτή διαδικασία αυτή στηρίζεται στη βασική υπόθεση ότι οι κρίσεις και η συμπεριφορά των πελατών μπορούν να εξηγηθούν με βάση ένα σαφώς καθορισμένο σύνολο συναρτήσεων αξιών πάνω σε ένα σύνολο κριτηρίων ικανοποίησης (Κοΐλιας, 2006).

Τα 5 υπό αξιολόγηση μοντέλα εκτελέστηκαν σε "τυχαία" δεδομένα που παρήχθησαν μέσω της γεννήτριας συνόλων δεδομένων που παρουσιάσθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο και έπειτα αξιολογήθηκαν οι επιδόσεις τους όσον αφορά:

- Στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων, που περιλαμβάνει τις μέσες τιμές των μεταβελτιστων λύσεων, τη διακύμανση μέσω της τυπικής απόκλιση των τιμών αυτών (δείκτης ASI - Average Stability Index) και το εύρος των τιμών αυτών (δείκτης WV<sub>i</sub>) καθώς και των τιμών των δεικτών αξιοπιστίας, AFI (Average Fitting Index) και OPL (and Overall Prediction Level) της μεθόδου MUSA.
- Στον υπολογιστικό φόρτο, που περιλαμβάνει το χρόνο επίλυσης, τη χρήση RAM και τον αριθμό των περιστροφών της Simplex

### 6.1 Τα πειράματα

Η διαδικασία των πειραμάτων ξεκίνησε με τη δημιουργία ερευνών με 5 έως 10 ερωτηματολόγια για τη σύγκριση των 5 εναλλακτικών αλγορίθμων μεταβελτιστοποίησης. Η εκκίνηση των πειραμάτων ξεκίνησε με τόσο χαμηλό αριθμό ερωτηματολογίων δεδομένου ότι ακόμα και για τόσο μικρές έρευνες τα δημιουργούμενα γραμμικά προγράμματα της μεθόδου

MUSA έχουν τέτοιο αριθμό περιορισμών και μεταβλητών που οδηγούν σε υπερπολύεδρα με τεράστιο αριθμό κορυφών - λύσεων σύμφωνα με τη σχέση (2).

Δημιουργήθηκαν 9 σύνολα δεδομένων για κάθε διαφορετικό πλήθος ερωτηματολογίων και το κάθε σύνολο διέφερε στον αριθμό των κριτηρίων (3 ή 5 ή 7) και στο ελάχιστο βήμα  $\gamma$  (με  $\gamma_i = \gamma$ ) (1 ή 2 ή 4). Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν 2 σύνολα (με κωδ. Π\_9 και Π\_10) που προέρχονται από το παράδειγμα της § 3.6 του βιβλίου των Γρηγορούδη & Σίσκου (2000). Σε όλα τα σύνολα των πειραμάτων έχουν χρησιμοποιηθεί 5 επίπεδα για την ολική ικανοποίηση και για την μερική ικανοποίηση κάθε κριτηρίου, με εξαίρεση τα σύνολα Π\_9, Π\_10, στα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί 3 επίπεδα για την ολική ικανοποίηση και για την μερική ικανοποίηση κάθε κριτηρίου. Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά μερικών εκ των 36 συνόλων.

Πίνακας 6.1: Ταυτότητα συνόλων τεχνητών δεδομένων

No	Πελάτες	Αριθμ.		Περιορισμοί	Μεταβλητές	Άνω Όριο Κορυφών (σχέση 1.2)
		Κριτηρίων	$\gamma = \gamma_i$			
1	5	3	1	8	26	329,460
2	5	3	2	8	26	329,460
3	5	3	4	8	26	329,460
4	5	5	1	8	34	1,817,046
5	5	5	2	8	34	1,817,046
6	5	5	4	8	34	1,817,046
10	6	3	1	9	28	1,314,610
11	6	3	2	9	28	1,314,610
12	6	3	4	9	28	1,314,610
13	6	5	1	9	36	7,811,375
14	6	5	2	9	36	7,811,375
15	6	5	4	9	36	7,811,375
19	7	3	1	10	30	5,230,016
20	7	3	2	10	30	5,230,016
21	7	3	4	10	30	5,230,016
22	7	5	1	10	38	33,153,120
23	7	5	2	10	38	33,153,120
24	7	5	4	10	38	33,153,120
28	8	3	1	11	32	20,764,055
29	8	3	2	11	32	20,764,055
30	8	3	4	11	32	20,764,055
31	8	5	1	11	40	139,299,615
32	8	5	2	11	40	139,299,615
33	8	5	4	11	40	139,299,615
37	9	3	1	12	34	82,317,690
38	9	3	2	12	34	82,317,690
39	9	3	4	12	34	82,317,690
40	9	5	1	12	42	580,610,160
42	9	5	4	12	42	580,610,160
47	10	3	2	13	36	326,012,925
48	10	3	4	13	36	326,012,925
49	10	5	1	13	44	2,404,321,560
50	10	5	2	13	44	2,404,321,560
51	10	5	4	13	44	2,404,321,560

Στα παραπάνω σύνολα τεχνητών δεδομένων τρέξαμε του αλγορίθμους με χρήση του βασικού αλγορίθμου Simplex με κατώφλι  $\epsilon = 5\% \times F^*$ .

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα πέντε ενδεικτικά σύνολα τεχνητών δεδομένων, αναφορικά με τους δείκτες ποιότητας και ευστάθειας και αναφορικά με τον υπολογιστικό φόρτο. Ο δείκτης και οι τιμές του εύρους διακύμανσης των βαρών (δείκτης  $WV_i$ ) για τα σύνολα αυτά καθώς τα αποτελέσματα των υπολοίπων συνόλων τεχνητών δεδομένων παρουσιάζονται στο Παράρτημα Ι.

Πίνακας 6.2: Ενδεικτικά αποτελέσματα πειραματικής διαδικασίας

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
1 (5)	GM	100%	41.22%	0.001	7	24.953	3
1 (5)	M-I	100%	41.28%	0.001	13	24.953	6
1 (5)	M-III	100%	42.65%	0.001	223	24.953	16
1 (5)	M-N	100%	56.00%	40.015	97367	77.551	58969
1 (5)	R-S	100%	46.45%	0.015	180	213.695	960
10 (6)	GM	83.33%	33.56%	0.001	15	37.273	3
10 (6)	M-I	100%	34.96%	0.001	20	37.273	6
10 (6)	M-III	100%	39.08%	0.001	286	37.273	16
10 (6)	M-N	100%	46.90%	0.413	10874	41.781	5496
10 (6)	R-S	100%	44.67%	0.003	23	61.230	224
11 (6)	GM	100%	50.26%	0.001	8	30.445	3
11 (6)	M-I	100%	47.53%	0.001	21	30.445	6
11 (6)	M-III	100%	51.40%	0.001	328	30.445	16
11 (6)	M-N	100%	55.36%	19.66	62102	57.078	31332
11 (6)	R-S	100%	54.76%	0.012	94	158.855	503
24 (7)	GM	100%	97.08%	0.001	40	57.852	5
24 (7)	M-I	100%	97.52%	0.001	28	57.852	10
24 (7)	M-III	100%	97.62%	0.002	540	57.852	24
24 (7)	M-N	100%	98.07%	30.463	84040	98.914	45131
24 (7)	R-S	100%	98.14%	0.042	67	259.859	984
27 (7)	GM	100%	96.49%	0.002	46	121.691	7
27 (7)	M-I	100%	97.02%	0.002	40	121.691	14
27 (7)	M-III	100%	97.27%	0.003	688	121.691	32
27 (7)	M-N	85.71%	97.48%	41.705	106284	175.227	54107
27 (7)	R-S	100%	97.57%	0.038	32	393.883	576

(GM: Γενικευμένο MUSA, M-I: MUSA I, M-III: MUSA III, M-N: Manas-Nedoma, R-S: Αντίστροφη Simplex)

Η διαδικασία των πειραμάτων συνεχίστηκε με τη δημιουργία 36 ερευνών με 8 έως 20 ερωτηματολόγια (συμπεριλαμβάνονται και 4 σύνολα με κωδ. Π\_12, Π\_13, Π\_15 και Π\_20, τα οποία προέρχονται από το παράδειγμα της § 3.6 του βιβλίου των Γρηγορούδη & Σίσκο (2000)), για τη σύγκριση και των 3 ευρετικών αλγορίθμων μεταβελτιστοποίησης και της Αντίστροφης Simplex. Στον Πίνακα 6.1 παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά μερικών εκ των 36 συνόλων.

Στη συνέχεια εξετάστηκαν άλλα 36 σύνολα για συγκριτική αξιολόγηση των 3 ευρετικών αλγορίθμων με εναλλακτική χρήση της βασικής ή της αναθεωρημένης Simplex και η πειραματική διαδικασία ολοκληρώθηκε με την συγκριτική αξιολόγηση των 3 ευρετικών αλγορίθμων με 27 ακόμα σύνολα τεχνητών δεδομένων και με εναλλακτική χρήση της διαδικασίας “Load Base” (βλ. § 6.6).

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται ενδεικτικά αποτελέσματα για τα παραπάνω σύνολα τεχνητών δεδομένων.

Πίνακας 6.3: Ενδεικτικά αποτελέσματα πειραματικής διαδικασίας

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
56 (12)	GM	100%	98.07%	0.001	17	24.617	3
56 (12)	M-I	100%	98.15%	0.001	17	24.617	6
56 (12)	M-III	100%	98.34%	0.002	223	24.617	16
56 (12)	R-S	100%	98.99%	0.037	169	29.141	1920
65 (15)	GM	86.67%	96.60%	0.004	14	24.324	3
65 (15)	M-I	86.67%	97.05%	0.01	16	24.461	6
65 (15)	M-III	86.67%	97.47%	0.004	272	24.461	16
65 (15)	R-S	93.33%	98.22%	0.352	476	72.316	4572
88 (50)	GM	94%	94.29%	0.002	368	40.008	7
88 (50)	M-I	94%	93.89%	0.004	455	40.008	14
88 (50)	M-III	94%	95.63%	0.009	6690	43.656	32
88 (50)	GM (R.)	90%	92.48%	0.001	217	40.445	7
88 (50)	M-I (R.)	90%	92.47%	0.002	325	40.445	14
88 (50)	M-III (R.)	94%	94.41%	0.004	624	40.445	32
97 (100)	GM	80%	95.03%	0.007	608	52.945	7
97 (100)	M-I	81%	95.29%	0.015	749	55.957	14
97 (100)	M-III	81%	97.18%	0.032	10891	55.957	32
97 (100)	GM (R.)	90%	93.08%	0.002	518	54438	7
97 (100)	M-I (R.)	90%	93.48%	0.003	721	54438	14
97 (100)	M-III (R.)	89%	95.95%	0.007	1617	54438	32
118 (1000)	GM (R.)	75.10%	90.43%	0.019	5372	40.391	3
118 (1000)	M-I (R.)	75.80%	90.34%	1.035	9279	40.238	6
118 (1000)	M-III (R.)	76.60%	93.43%	0.115	23246	39.555	16
118 (1000)	GM (LB.)	75.10%	90.43%	0.004	1649	39.035	3
118 (1000)	M-I (LB.)	75.80%	90.34%	0.008	1125	39.035	6
118 (1000)	M-III (LB.)	76.60%	93.43%	0.021	2343	41.359	16

(R: Αναθεωρημένη (Revised) Simplex, LB: Αναθεωρημένη με “Load Base”)

Το σύνολο των αποτελεσμάτων της συγκριτικής αξιολόγησης με τη χρήση των 135 πειραμάτων παρουσιάζεται στο Παράρτημα Ι.

Από την ανάλυση των τιμών των πειραμάτων προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι αναλυτικοί αλγόριθμοι δεν μπορούν να τρέξουν σε πραγματικό χρόνο για την επίλυση μεγάλων προβλημάτων. Ακόμα και για τα σύνολα των δεδομένων των πειραμάτων με ανάγκη ανάλυσης ελάχιστου αριθμού ερωτηματολογίων (5-20) οι απαιτούμενος χρόνος ήταν σημαντικά μεγάλος. Οπότε η χρήση των ευρετικών αλγορίθμων θεωρείται μονόδρομος για την ανάλυση πραγματικών ερευνών ικανοποίησης με τη χρήση της μεθόδου MUSA



θεωρώντας ότι οι μικρότερες εξ αυτών θα περιλαμβάνουν τουλάχιστον 100 ερωτηματολόγια. Μάλιστα, για τις μεγάλες έρευνες η χρήση ευρετικών αλγορίθμων με τη Revised Simplex και με τη διαδικασία “Load Base” θεωρείται η οικονομικότερη, από άποψη υπολογιστικού φόρτου, επιλογή.

Τα πειράματα όμως οδήγησαν και σε ένα πολύ χρήσιμο επιπλέον συμπέρασμα. Η εξαντλητική αναζήτηση όλων των κορυφών του υπερπολυέδρου που εγγυάται ο αλγόριθμος των Manas και Nedoma ή η αναζήτηση σημαντικού αριθμού κορυφών που υλοποιούν οι άλλοι δύο αναλυτικοί αλγόριθμοι δεν βελτιώνουν σημαντικά την ποιότητα της πληροφορίας γεγονός που αποτυπώνεται στις τιμές των δεικτών. Επομένως τα πειράματα δείχνουν ότι οι ευρετικοί αλγόριθμοι μεταβελτιστοποίησης που χρησιμοποιούνται στην εφαρμογή της MUSA αποδίδουν εξαιρετικά, δεδομένου ότι περιγράφουν ικανοποιητικά τα όρια του υπερπολυέδρου με τον ελάχιστο υπολογιστικό φόρτο.

Τέλος, σε ότι αφορά στους αναλυτικούς αλγόριθμους τα πειράματα έδειξαν ότι ο αλγόριθμος των Manas-Nedoma απαιτεί τεράστιο υπολογιστικό φόρτο ακόμα και για πολύ μικρά προβλήματα, δεδομένου ότι υπολογίζει κάθε κορυφή των υπερπολυέδρων των σχηματιζόμενων γραμμικών προγραμμάτων με αλλαγή βάσης της Simplex. Στον αντίποδα, η Αντίστροφη Simplex βρίσκει ένα σημαντικό αριθμό κορυφών περιγράφοντας ακριβέστερα, σε σχέση με τους ευρετικούς αλγόριθμους, το υπερπολυέδρο σε χρόνο σημαντικά μικρότερο από αυτόν που απαιτείται για τον Manas-Nedoma. Ωστόσο ο αλγόριθμος της Αντίστροφης Simplex απαιτεί τη χρήση μεγάλου όγκου μνήμης RAM χωρίς η απαίτηση αυτή να αντισταθμίζεται από εξοικονόμηση χρόνου.

## Βιβλιογραφία

- Barnette, D. W. (1971). The minimum number of vertices of a simple polytope, *Israel J. Math*, X, 121-125.
- Charnes, A. (1952). Optimality and degeneracy in linear programming, *Econometrica*, 20, 160-170.
- Charnes, A. and W.W. Cooper (1961). *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, Wiley, New York
- Charnes, A., W.W. Cooper, and A. Henderson (1953). *An Introduction to Linear Programming*, Wiley, New York.
- Despotis, D., D. Yannacopoulos, and C. Zopounidis (1990). A review of the UTA multicriteria method and some improvements, *Foundation of Computing and Decision Science*, 15 (2), 63-76.
- Du, D.-Z., P.M. Pardalos, and W. Wu (2001). *Mathematical Theory of Optimization*, Kluwer Academic Publishers.
- Grigoroudis, E. and Y. Siskos (2002). Preference disaggregation for measuring and analysing customer satisfaction: The MUSA method, *European Journal of Operational Research*, 143, 148-170.
- Grunbaum, B. (1967). *Convex Polytopes*, Wiley, New York
- Kaibel, V. and M.E. Pfetsch (2003). Some algorithmic problems in polytope theory, in: Joswig, M. and N. Takayama (eds.), *Algebra, Geometry, and Software Systems*, Springer-Verlag, 23-47.
- Khachiyan, L., E. Boros, K. Borys, and K. Elbassioni (2006). Generating all vertices of a polyhedron is hard, in: *SODA '06*, January 22-26, Miami.
- Klee, V. (1964). On the number of vertices of a convex polytope, *Canadian Journal of Mathematics*, 16, 701-720.
- Manas, M. and J. Nedoma (1968). Finding all vertices of a convex polyhedron. *Numerische Mathematik*, 12, 226-229.
- Mattheiss, T.H. and D.S. Rubin (1980). A survey and comparison of methods for finding all vertices of convex polyhedral sets, *Mathematics of Operations Research*, 5, 167-185.
- McMullen, P. (1970). The maximum number of faces of a convex polytope, *Mathematika*, XVII, 179-184.
- Murty, K.G. (2009). A problem in enumerating extreme points, and an efficient algorithm for one class of polytopes, *Optimization Letters*, 3 (2), 211-237.
- Provan, J.S. (1994). Efficient enumeration of the vertices of polyhedra associated with network LP's, *Mathematical Programming*, 63, 47-64.

- Saaty, T.L. (1955). The number of vertices of a polyhedron, *The American Mathematical Monthly*, 62, 326-331.
- Siskos, Y. (1984). Le traitement des solutionsq optimales en programmation linéaire continue: Une synthèse, R.A.I.R.O., *Recherche Opérationnelle* , 18 (4 ), 381-401.
- Van de Panne, C. (1975). *Methods for Linear and Quadratic Programming*, North Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Γρηγορούδης, Ε. και Σίσκος, Ι. (2000). *Ποιότητα Υπηρεσιών και Μέτρηση Ικανοποίησης του Πελάτη*, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα.
- Κοίλιας, Χ. (2006). *Ένας Αλγόριθμος Μέτρησης Ικανοποίησης του Πελάτη*, Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Σάμος.
- Μπένος, Β. (1997). *Στατιστική, Τόμος Α΄ Περιγραφική Στατιστική*, Εκδόσεις Σταμούλη, Πειραιάς.
- Παπαϊωάννου, Τ. και Λουκά, Σ. (1990). *Εισαγωγή στη Στατιστική*, Ιωάννινα.
- Σίσκος, Ι. (1998). *Γραμμικός Προγραμματισμός*, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι: Πλήρη Αποτελέσματα Πειραμάτων

Σε όλα τα σύνολα των πειραμάτων έχουν χρησιμοποιηθεί 5 επίπεδα για την ολική ικανοποίηση και για την μερική ικανοποίηση κάθε κριτηρίου, με εξαίρεση τα σύνολα Π\_9, Π\_10, Π\_12, Π\_13, Π\_15 και Π\_20, στα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί 3 επίπεδα για την ολική ικανοποίηση και για την μερική ικανοποίηση κάθε κριτηρίου.

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά των 135 συνόλων:

Πίνακας Ι.1: Ταυτότητα συνόλων τεχνητών δεδομένων

No	Πελάτες	Αριθμ. Κριτηρίων	γ=γ <sub>i</sub>	Περιορισμοί	Μεταβλητές	Άνω Όριο Κορυφών (σχέση 2)
1	5	3	1	8	26	329460
2	5	3	2	8	26	329460
3	5	3	4	8	26	329460
4	5	5	1	8	34	1817046
5	5	5	2	8	34	1817046
6	5	5	4	8	34	1817046
7	5	7	1	8	42	7400250
8	5	7	2	8	42	7400250
9	5	7	4	8	42	7400250
10	6	3	1	9	28	1314610
11	6	3	2	9	28	1314610
12	6	3	4	9	28	1314610
13	6	5	1	9	36	7811375
14	6	5	2	9	36	7811375
15	6	5	4	9	36	7811375
16	6	7	1	9	44	34467225
17	6	7	2	9	44	34467225
18	6	7	4	9	44	34467225
19	7	3	1	10	30	5230016
20	7	3	2	10	30	5230016
21	7	3	4	10	30	5230016
22	7	5	1	10	38	33153120
23	7	5	2	10	38	33153120
24	7	5	4	10	38	33153120
25	7	7	1	10	46	157073280
26	7	7	2	10	46	157073280
27	7	7	4	10	46	157073280
28	8	3	1	11	32	20764055
29	8	3	2	11	32	20764055
30	8	3	4	11	32	20764055
31	8	5	1	11	40	139299615
32	8	5	2	11	40	139299615
33	8	5	4	11	40	139299615

No	Πελάτες	Αριθμ. Κριτηρίων	γ=γι	Περιορισμοί	Μεταβλητές	Ανω Όριο Κορυφών (σχέση 2)
34	8	7	1	11	48	703323660
35	8	7	2	11	48	703323660
36	8	7	4	11	48	703323660
Π_9	9	3	2	12	26	7904456
37	9	3	1	12	34	82317690
38	9	3	2	12	34	82317690
39	9	3	4	12	34	82317690
40	9	5	1	12	42	580610160
41	9	5	2	12	42	580610160
42	9	5	4	12	42	580610160
43	9	7	1	12	50	3104160696
44	9	7	2	12	50	3104160696
45	9	7	4	12	50	3104160696
Π_10	10	3	2	13	28	30458900
46	10	3	1	13	36	326012925
47	10	3	2	13	36	326012925
48	10	3	4	13	36	326012925
49	10	5	1	13	44	2404321560
50	10	5	2	13	44	2404321560
51	10	5	4	13	44	2404321560
52	10	7	1	13	52	13537375740
53	10	7	2	13	52	13537375740
54	10	7	4	13	52	13537375740
Π_12	12	3	2	15	32	455657715
55	12	3	1	15	40	5103910680
56	12	3	2	15	40	5103910680
57	12	3	4	15	40	5103910680
58	12	5	1	15	48	40612127220
59	12	5	2	15	48	40612127220
60	12	5	4	15	48	40612127220
61	12	7	1	15	56	2.50205E+11
62	12	7	2	15	56	2.50205E+11
63	12	7	4	15	56	2.50205E+11
Π_13	13	3	2	16	34	1767883500
Π_15	15	3	2	18	38	26747767200
64	15	3	1	18	46	3.15493E+11
65	15	3	2	18	46	3.15493E+11
66	15	3	4	18	46	3.15493E+11
Π_20	20	3	2	23	48	2.43572E+13
73	20	3	1	23	56	3.04836E+14
74	20	3	2	23	56	3.04836E+14
75	20	3	4	23	56	3.04836E+14
76	20	5	1	23	64	2.95237E+15
77	20	5	2	23	64	2.95237E+15
78	20	5	4	23	64	2.95237E+15
79	20	7	1	23	72	2.32202E+16
80	20	7	2	23	72	2.32202E+16
81	20	7	4	23	72	2.32202E+16
82	50	3	1	53	116	2.67121E+32
83	50	3	2	53	116	2.67121E+32

No	Πελάτες	Αριθμ. Κριτηρίων	γ=γί	Περιορισμοί	Μεταβλητές	Ανω Όριο Κορυφών (σχέση 2)
84	50	3	4	53	116	2.67121E+32
85	50	5	1	53	124	3.34653E+33
86	50	5	2	53	124	3.34653E+33
87	50	5	4	53	124	3.34653E+33
88	50	7	1	53	132	3.72425E+34
89	50	7	2	53	132	3.72425E+34
90	50	7	4	53	132	3.72425E+34
91	100	3	1	103	216	2.57343E+62
92	100	3	2	103	216	2.57343E+62
93	100	3	4	103	216	2.57343E+62
94	100	5	1	103	224	3.60845E+63
95	100	5	2	103	224	3.60845E+63
96	100	5	4	103	224	3.60845E+63
97	100	7	1	103	232	4.72593E+64
98	100	7	2	103	232	4.72593E+64
99	100	7	4	103	232	4.72593E+64
100	200	3	1	203	416	3.0392E+122
101	200	3	2	203	416	3.0392E+122
102	200	3	4	203	416	3.0392E+122
103	200	5	1	203	424	4.5398E+123
104	200	5	2	203	424	4.5398E+123
105	200	5	4	203	424	4.5398E+123
106	200	7	1	203	432	6.536E+124
107	200	7	2	203	432	6.536E+124
108	200	7	4	203	432	6.536E+124
109	500	3	1	503	996	7.9908E+299
110	500	3	2	503	996	7.9908E+299
111	500	3	4	503	996	7.9908E+299
112	500	5	1	503	994	3.9741E+299
113	500	5	2	503	994	3.9741E+299
114	500	5	4	503	994	3.9741E+299
115	500	7	1	503	992	1.9745E+299
116	500	7	2	503	992	1.9745E+299
117	500	7	4	503	992	1.9745E+299
118	1000	3	1	1003	1996	#NUM!
119	1000	3	2	1003	1996	#NUM!
120	1000	3	4	1003	1996	#NUM!
121	1000	5	1	1003	1994	#NUM!
122	1000	5	2	1003	1994	#NUM!
123	1000	5	4	1003	1994	#NUM!
124	1000	7	1	1003	1992	#NUM!
125	1000	7	2	1003	1992	#NUM!
126	1000	7	4	1003	1992	#NUM!
127	2000	3	1	2003	3996	#NUM!
128	2000	3	2	2003	3996	#NUM!
129	2000	3	4	2003	3996	#NUM!
130	2000	5	1	2003	3994	#NUM!
131	2000	5	2	2003	3994	#NUM!
132	2000	5	4	2003	3994	#NUM!
133	2000	7	1	2003	3992	#NUM!

No	Πελάτες	Αριθμ. Κριτηρίων	γ=γί	Περιορισμοί	Μεταβλητές	Άνω Όριο Κορυφών (σχέση 2)
134	2000	7	2	2003	3992	#NUM!
135	2000	7	4	2003	3992	#NUM!

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2) υπολογίστηκε στον προηγούμενο πίνακα το άνω όριο  $\bar{r}$  του αριθμού των κορυφών των υπερολπολυέδρων για προβλήματα διαφορετικών διαστάσεων  $m$  (περιορισμών) x  $n$  (μεταβλητών), όπου #NUM!, πολύ μεγάλος αριθμός.

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα 135 τεχνητά σύνολα τεχνητών δεδομένων, αναφορικά με τους δείκτες ποιότητας και ευστάθειας και αναφορικά με τον υπολογιστικό φόρτο.

Πίνακας Ι.2: Αποτελέσματα δεικτών αξιοπιστίας, ευστάθειας & υπολογιστικού φόρτου

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
1 (5)	GM	97.40%	100.00%	41.22%	0.001	7	24.953	3
1 (5)	M-I	97.40%	100.00%	41.28%	0.001	13	24.953	6
1 (5)	M-III	97.40%	100.00%	42.65%	0.001	223	24.953	16
1 (5)	M-N	97.40%	100.00%	56.00%	40.015	97367	77.551	58969
1 (5)	R-S	97.40%	100.00%	46.45%	0.015	180	213.695	960
2 (5)	GM	99.60%	100.00%	27.80%	0.001	13	34.207	3
2 (5)	M-I	99.60%	100.00%	35.17%	0.001	19	34.207	6
2 (5)	M-III	99.60%	100.00%	53.21%	0.001	299	34.207	16
2 (5)	M-N	99.60%	100.00%	46.72%	10.765	65710	67.715	34222
2 (5)	R-S	99.60%	100.00%	48.35%	0.24	113	143.461	768
3 (5)	GM	100.00%	100.00%	76.00%	0.001	16	24.750	3
3 (5)	M-I	100.00%	100.00%	78.55%	0.001	20	24.750	6
3 (5)	M-III	100.00%	100.00%	82.95%	0.001	321	24.750	16
3 (5)	M-N	100.00%	100.00%	83.39%	0.289	9405	30.422	4712
3 (5)	R-S	100.00%	100.00%	83.82%	0.003	29	42.738	234
4 (5)	GM	100.00%	100.00%	41.88%	0.001	60	65.398	5
4 (5)	M-I	100.00%	100.00%	52.05%	0.001	45	65.398	10
4 (5)	M-III	100.00%	100.00%	50.14%	0.002	813	65.398	24
4 (5)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
4 (5)	R-S	100.00%	100.00%	51.26%	0.046	319	73.812	2184
5 (5)	GM	99.20%	100.00%	58.37%	0.002	37	52.570	5
5 (5)	M-I	99.20%	100.00%	64.27%	0.001	39	52.570	10
5 (5)	M-III	99.20%	100.00%	66.23%	0.002	771	52.770	24
5 (5)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
5 (5)	R-S	99.20%	100.00%	70.93%	0.024	241	54.387	1588
6 (5)	GM	96.80%	80.00%	89.84%	0.003	56	48.297	5
6 (5)	M-I	96.80%	100.00%	91.12%	0.001	39	48.297	10
6 (5)	M-III	96.80%	100.00%	92.91%	0.002	857	48.297	24
6 (5)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
6 (5)	R-S	96.80%	100.00%	91.68%	0.123	629	66.324	4032
7 (5)	GM	100.00%	100.00%	41.79%	0.001	82	27.160	7
7 (5)	M-I	100.00%	100.00%	53.48%	0.001	61	27.160	14
7 (5)	M-III	100.00%	100.00%	47.80%	0.003	1555	27.160	32
7 (5)	M-N	-	-	-	-	-	-	-

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
7 (5)	R-S	100.00%	100.00%	45.13%	1.007	1550	89.199	8802
8 (5)	GM	100.00%	100.00%	70.23%	0.002	93	24.504	7
8 (5)	M-I	100.00%	100.00%	75.39%	0.001	67	24.504	14
8 (5)	M-III	100.00%	100.00%	76.93%	0.002	1921	28.828	32
8 (5)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
8 (5)	R-S	100.00%	100.00%	78.32%	8.877	5200	248.234	30160
9 (5)	GM	95.89%	80.00%	96.63%	0.005	53	402.227	7
9 (5)	M-I	95.89%	100.00%	96.94%	0.016	51	404.457	14
9 (5)	M-III	95.89%	100.00%	98.02%	0.017	868	409.871	32
9 (5)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
9 (5)	R-S	95.89%	100.00%	97.20%	0.051	110	419.219	1560
10 (6)	GM	99.33%	83.33%	33.56%	0.001	15	37.273	3
10 (6)	M-I	99.33%	100.00%	34.96%	0.001	20	37.273	6
10 (6)	M-III	99.33%	100.00%	39.08%	0.001	286	37.273	16
10 (6)	M-N	99.33%	100.00%	46.90%	0.413	10874	41.781	5496
10 (6)	R-S	99.33%	100.00%	44.67%	0.003	23	61.230	224
11 (6)	GM	98.00%	100.00%	50.26%	0.001	8	30.445	3
11 (6)	M-I	98.00%	100.00%	47.53%	0.001	21	30.445	6
11 (6)	M-III	98.00%	100.00%	51.40%	0.001	328	30.445	16
11 (6)	M-N	98.00%	100.00%	55.36%	19.66	62102	57.078	31332
11 (6)	R-S	98.00%	100.00%	54.76%	0.012	94	158.855	503
12 (6)	GM	96.00%	100.00%	72.67%	0.001	16	67.594	3
12 (6)	M-I	96.00%	100.00%	73.77%	0.002	25	67.594	6
12 (6)	M-III	96.00%	100.00%	79.43%	0.002	332	67.594	16
12 (6)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
12 (6)	R-S	96.00%	100.00%	80.25%	0.087	799	75.719	3456
13 (6)	GM	99.00%	100.00%	32.84%	0.001	26	24.734	5
13 (6)	M-I	99.00%	100.00%	39.01%	0.001	42	24.734	10
13 (6)	M-III	99.00%	100.00%	44.47%	0.002	597	24.734	24
13 (6)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
13 (6)	R-S	99.00%	100.00%	35.52%	0.222	1494	62.051	5508
14 (6)	GM	100.00%	100.00%	75.77%	0.004	71	84.219	5
14 (6)	M-I	100.00%	100.00%	79.02%	0.002	53	84.219	10
14 (6)	M-III	100.00%	100.00%	80.25%	0.003	1432	84.219	24
14 (6)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
14 (6)	R-S	100.00%	100.00%	82.87%	0.693	1397	100.590	8712
15 (6)	GM	86.00%	100.00%	93.94%	0.002	31	118.781	5
15 (6)	M-I	86.00%	100.00%	94.40%	0.004	29	120.523	10
15 (6)	M-III	86.00%	100.00%	94.68%	0.004	685	120.523	24
15 (6)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
15 (6)	R-S	86.00%	100.00%	95.91%	0.367	870	113.266	6480
16 (6)	M-I	100.00%	100.00%	37.82%	0.004	138	26.488	7
16 (6)	M-III	100.00%	100.00%	51.19%	0.002	91	26.488	14
16 (6)	M-N	100.00%	100.00%	54.61%	0.003	2284	27.125	32
16 (6)	R-S	100.00%	100.00%	55.29%	5.355	4301	234.703	24480
17 (6)	GM	98.42%	100.00%	98.45%	0.001	37	47.023	7
17 (6)	M-I	98.42%	100.00%	98.76%	0.002	50	47.023	14
17 (6)	M-III	98.42%	100.0%	98.76%	0.002	682	47.023	32
17 (6)	M-N	98.42%	83.33%	98.96%	0.104	3939	51.051	2110
17 (6)	R-S	98.42%	100.00%	99.00%	0.001	1	51.051	76



No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
18 (6)	GM	99.76%	100.00%	97.39%	0.002	44	31.441	7
18 (6)	M-I	99.76%	100.00%	97.43%	0.003	50	31.441	14
18 (6)	M-III	99.76%	100.00%	98.66%	0.002	753	31.441	32
18 (6)	M-N	99.76%	100.00%	96.10%	1.111	16535	45.172	9493
18 (6)	R-S	99.76%	100.00%	96.61%	0.008	6	97.480	216
19 (7)	GM	100.00%	100.00%	84.13%	0.002	22	24.422	3
19 (7)	M-I	100.00%	100.00%	82.39%	0.001	33	24.422	6
19 (7)	M-III	100.00%	100.00%	83.94%	0.002	596	24.422	16
19 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
19 (7)	R-S	100.00%	100.00%	85.48%	0.025	225	37.363	1822
20 (7)	GM	99.14%	100.00%	40.37%	0.001	21	42.535	3
20 (7)	M-I	99.14%	100.00%	40.45%	0.002	35	42.539	6
20 (7)	M-III	99.14%	100.00%	50.04%	0.002	464	42.539	16
20 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
20 (7)	R-S	99.14%	100.00%	41.60%	1.645	4203	99.641	13650
21 (7)	GM	97.14%	100.00%	76.81%	0.001	9	25.688	3
21 (7)	M-I	97.14%	100.00%	76.62%	0.001	15	25.688	6
21 (7)	M-III	97.14%	100.00%	80.98%	0.001	233	25.688	16
21 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
21 (7)	R-S	97.14%	100.00%	79.03%	0.02	259	35.914	1568
22 (7)	GM	99.29%	100.00%	39.91%	0.002	57	41.230	5
22 (7)	M-I	99.29%	100.00%	46.10%	0.001	36	41.230	10
22 (7)	M-III	99.29%	100.00%	43.65%	0.002	1028	41.230	24
22 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
22 (7)	R-S	99.29%	100.00%	41.26%	0.551	1201	80.906	8158
23 (7)	GM	98.86%	100.00%	72.65%	0.002	72	107.477	5
23 (7)	M-I	98.86%	100.00%	75.43%	0.006	69	110.270	10
23 (7)	M-III	98.86%	100.00%	76.88%	0.003	1446	110.270	24
23 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
23 (7)	R-S	98.86%	100.00%	78.24%	4.057	2750	211.773	20857
24 (7)	GM	95.14%	100.00%	97.08%	0.001	40	57.852	5
24 (7)	M-I	95.14%	100.00%	97.52%	0.001	28	57.852	10
24 (7)	M-III	95.14%	100.00%	97.62%	0.002	540	57.852	24
24 (7)	M-N	95.14%	100.00%	98.07%	30.463	84040	98.914	45131
24 (7)	R-S	95.14%	100.00%	98.14%	0.042	67	259.859	984
25 (7)	GM	100.00%	100.00%	45.00%	0.002	195	103.707	7
25 (7)	M-I	100.00%	100.00%	54.48%	0.003	106	103.707	14
25 (7)	M-III	100.00%	100.00%	50.65%	0.004	3445	103.707	32
25 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
25 (7)	R-S	100.00%	100.00%	53.98%	7.101	3565	274.469	24444
26 (7)	GM	100.00%	100.00%	73.78%	0.005	191	427.477	7
26 (7)	M-I	100.00%	100.00%	78.14%	0.016	101	431.309	14
26 (7)	M-III	100.00%	100.00%	77.41%	0.018	2849	437.098	32
26 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
26 (7)	R-S	100.00%	100.00%	79.45%	3.901	1697	446.395	12400
27 (7)	GM	93.47%	100.00%	96.49%	0.002	46	121.691	7
27 (7)	M-I	93.47%	100.00%	97.02%	0.002	40	121.691	14
27 (7)	M-III	93.47%	100.00%	97.27%	0.003	688	121.691	32
27 (7)	M-N	93.47%	85.71%	97.48%	41.705	106284	175.227	54107
27 (7)	R-S	93.47%	100.00%	97.57%	0.038	32	393.883	576

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
28 (8)	GM	98.75%	87.50%	42.17%	0.01	19	265.223	3
28 (8)	M-I	98.75%	87.50%	42.16%	0.004	27	265.223	6
28 (8)	M-III	98.75%	100.00%	59.52%	0.011	431	270.277	16
28 (8)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
28 (8)	R-S	98.75%	100.00%	47.57%	0.031	325	277.051	1224
29 (8)	GM	96.25%	100.00%	55.87%	0.003	9	252.160	3
29 (8)	M-I	96.25%	100.00%	55.97%	0.004	14	252.160	6
29 (8)	M-III	96.25%	100.00%	65.66%	0.004	212	254.727	16
29 (8)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
29 (8)	R-S	96.25%	100.00%	52.87%	0.134	502	293.789	2896
30 (8)	GM	96.00%	100.00%	80.22%	0.01	13	236.082	3
30 (8)	M-I	96.00%	100.00%	79.81%	0.004	20	236.082	6
30 (8)	M-III	96.00%	87.50%	79.48%	0.011	303	240.949	16
30 (8)	M-N	96.00%	100.00%	87.28%	23.652	60854	260.148	26746
30 (8)	R-S	96.00%	100.00%	85.33%	0.018	106	149.613	631
31 (8)	GM	99.13%	100.00%	52.66%	0.003	48	157.965	5
31 (8)	M-I	99.13%	100.00%	55.45%	0.002	64	157.965	10
31 (8)	M-III	99.13%	100.00%	64.18%	0.003	877	157.965	24
31 (8)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
31 (8)	R-S	99.13%	100.00%	60.27%	0.041	322	164.277	1700
32 (8)	GM	99.81%	100.00%	99.76%	0.006	24	140.328	5
32 (8)	M-I	99.81%	100.00%	99.79%	0.002	42	140.328	10
32 (8)	M-III	99.81%	100.00%	99.82%	0.003	478	140.328	24
32 (8)	M-N	99.81%	100.00%	98.07%	318.089	154300	261.520	78332
32 (8)	R-S	99.81%	100.00%	99.88%	0.069	35	474.809	648
33 (8)	GM	91.50%	75.00%	95.25%	0.016	24	414.703	5
33 (8)	M-I	91.50%	75.00%	95.91%	0.017	36	415.852	10
33 (8)	M-III	91.50%	75.00%	96.58%	0.017	391	421.148	24
33 (8)	M-N	91.50%	75.00%	97.03%	0.712	7759	430.461	4159
33 (8)	R-S	91.50%	75.00%	97.07%	0.005	4	89.664	124
34 (8)	GM	97.14%	87.50%	96.23%	0.002	52	22.891	7
34 (8)	M-I	97.14%	87.50%	96.36%	0.001	52	22.891	14
34 (8)	M-III	97.14%	87.50%	97.37%	0.003	888	22.891	32
34 (8)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
34 (8)	R-S	97.14%	87.50%	95.69%	0.228	482	74.305	5952
35 (8)	GM	100.00%	100.00%	91.18%	0.002	134	25.996	7
35 (8)	M-I	100.00%	100.00%	91.85%	0.002	133	25.996	14
35 (8)	M-III	100.00%	100.00%	93.08%	0.004	2019	25.996	32
35 (8)	R-S	100.00%	100.00%	93.04%	0.985	1678	44.270	9272
36 (8)	GM	95.36%	100.00%	88.83%	0.002	116	132.062	7
36 (8)	M-I	95.36%	100.00%	90.36%	0.004	73	132.062	14
36 (8)	M-III	95.36%	100.00%	91.50%	0.005	1493	135.227	32
36 (8)	R-S	95.36%	100.00%	91.77%	1.435	1193	175.246	12001
Π_9 (9)	GM	99.78%	100.00%	39.77%	0.016	18	177.145	3
Π_9 (9)	M-I	99.78%	100.00%	37.35%	0.007	25	177.145	6
Π_9 (9)	M-III	99.78%	100.00%	45.64%	0.007	92	148.262	8
Π_9 (9)	M-N	99.78%	100.00%	38.49%	71.192	76864	186.273	39734
Π_9 (9)	R-S	99.78%	100.00%	37.59%	0.029	318	193.254	1192
37 (9)	GM	99.22%	88.89%	95.66%	0.002	9	84.453	3
37 (9)	M-I	99.22%	88.89%	95.42%	0.002	24	84.438	6

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
37 (9)	M-III	99.22%	88.89%	97.00%	0.002	248	84.438	16
37 (9)	R-S	99.22%	100.00%	97.65%	0.102	438	93.496	3528
38 (9)	GM	99.33%	88.89%	25.85%	0.004	22	111.754	3
38 (9)	M-I	99.33%	88.89%	29.65%	0.001	29	111.754	6
38 (9)	M-III	99.33%	100.00%	58.94%	0.003	334	111.754	16
38 (9)	R-S	99.33%	100.00%	33.25%	0.155	804	117.574	3481
39 (9)	GM	96.89%	100.00%	88.36%	0.001	13	104.074	3
39 (9)	M-I	96.89%	100.00%	88.60%	0.002	29	104.074	6
39 (9)	M-III	96.89%	100.00%	91.92%	0.002	312	105.676	16
39 (9)	R-S	96.89%	100.00%	90.23%	0.016	165	111.707	1304
40 (9)	GM	99.78%	100.00%	47.51%	0.001	35	95.734	5
40 (9)	M-I	99.78%	100.00%	55.97%	0.001	37	95.734	10
40 (9)	M-III	99.78%	100.00%	58.05%	0.002	688	95.734	24
40 (9)	R-S	99.78%	100.00%	56.46%	0.061	214	99.906	2568
41 (9)	GM	98.00%	88.89%	69.14%	0.001	59	106.551	5
41 (9)	M-I	98.00%	88.89%	71.98%	0.002	42	106.551	10
41 (9)	M-III	98.00%	88.89%	77.88%	0.003	816	106.551	24
41 (9)	R-S	98.00%	100.00%	75.98%	0.031	227	116.898	1850
42 (9)	GM	94.00%	88.89%	95.62%	0.001	53	100.410	5
42 (9)	M-I	94.00%	88.89%	96.04%	0.001	47	100.410	10
42 (9)	M-III	94.00%	88.89%	96.57%	0.002	971	100.410	24
42 (9)	R-S	94.00%	88.89%	96.48%	1.722	2053	131.414	10946
43 (9)	GM	99.64%	100.00%	99.89%	0.001	64	23.750	7
43 (9)	M-I	99.64%	100.00%	99.90%	0.001	64	23.750	14
43 (9)	M-III	99.64%	100.00%	99.90%	0.002	1120	23.750	32
43 (9)	R-S	99.64%	100.00%	99.86%	0.242	334	35.355	5483
44 (9)	GM	98.75%	87.50%	97.82%	0.002	52	22.930	7
44 (9)	M-I	98.75%	87.50%	97.88%	0.002	54	22.930	14
44 (9)	M-III	98.75%	87.50%	98.03%	0.003	863	23.363	32
44 (9)	R-S	98.75%	100.00%	97.85%	0.032	157	27.387	2208
45 (9)	GM	98.10%	100.00%	96.06%	0.002	95	25.617	7
45 (9)	M-I	98.10%	88.89%	96.42%	0.002	69	25.617	14
45 (9)	M-III	98.10%	88.89%	96.91%	0.003	1092	26.473	32
45 (9)	R-S	98.10%	100.00%	97.10%	0.673	737	43.504	8554
Π_10 (10)	GM	99.80%	100.00%	39.77%	0.003	18	208.961	3
Π_10 (10)	M-I	99.80%	100.00%	37.35%	0.003	25	208.961	6
Π_10 (10)	M-III	99.80%	100.00%	45.64%	0.008	92	173.652	8
Π_10 (10)	M-N	99.80%	100.00%	38.83%	56.393	81405	220.414	43256
Π_10 (10)	R-S	99.80%	100.00%	37.58%	0.075	318	309.469	1296
46 (10)	GM	99.30%	100.00%	43.16%	0.002	18	196.957	3
46 (10)	M-I	99.30%	100.00%	43.37%	0.003	25	196.957	6
46 (10)	M-III	99.30%	100.00%	58.41%	0.005	316	196.957	16
46 (10)	R-S	99.30%	100.00%	48.56%	12.822	5390	232.824	30722
47 (10)	GM	99.40%	100.00%	52.04%	0.005	16	281.086	3
47 (10)	M-I	99.40%	100.00%	50.15%	0.012	34	282.602	6
47 (10)	M-III	99.40%	100.00%	68.12%	0.012	378	287.273	16
47 (10)	R-S	99.40%	100.00%	57.61%	0.032	107	297.848	1156
48 (10)	GM	96.80%	100.00%	94.88%	0.001	14	96.512	3
48 (10)	M-I	96.80%	100.00%	95.16%	0.001	21	96.512	6
48 (10)	M-III	96.80%	100.00%	96.01%	0.002	313	96.512	16

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
48 (10)	R-S	96.80%	100.00%	96.56%	0.089	377	103.281	3168
49 (10)	GM	97.50%	60.00%	97.60%	0.001	29	23.062	5
49 (10)	M-I	97.50%	60.00%	97.87%	0.001	38	23.062	10
49 (10)	M-III	97.50%	60.00%	98.22%	0.002	598	23.668	24
49 (10)	R-S	97.50%	100.00%	98.22%	0.092	316	30.098	3456
50 (10)	GM	96.80%	90.00%	80.61%	0.001	43	24.582	5
50 (10)	M-I	96.80%	90.00%	79.22%	0.001	71	24.582	10
50 (10)	M-III	96.80%	90.00%	86.67%	0.002	711	24.582	24
50 (10)	R-S	96.80%	100.00%	84.65%	0.184	451	33.898	4792
51 (10)	GM	89.20%	100.00%	90.04%	0.003	47	78.168	5
51 (10)	M-I	89.20%	100.00%	90.90%	0.002	54	78.168	10
51 (10)	M-III	89.20%	100.00%	91.61%	0.002	835	78.168	24
51 (10)	R-S	89.20%	100.00%	91.01%	0.12	419	83.965	3514
52 (10)	GM	98.76%	70.00%	98.66%	0.001	55	23.004	7
52 (10)	M-I	98.76%	70.00%	98.73%	0.001	71	23.004	14
52 (10)	M-III	98.76%	70.00%	99.07%	0.003	1205	23.004	32
52 (10)	R-S	98.76%	70.00%	99.34%	0.306	383	35.703	5984
53 (10)	GM	98.39%	100.00%	98.28%	0.001	57	23.988	7
53 (10)	M-I	98.39%	100.00%	98.42%	0.001	83	23.988	14
53 (10)	M-III	98.39%	100.00%	98.57%	0.002	1084	23.988	32
53 (10)	R-S	98.39%	100.00%	97.83%	0.738	1043	39.645	7964
54 (10)	GM	99.43%	100.00%	98.95%	0.002	74	22.762	7
54 (10)	M-I	99.43%	100.00%	98.83%	0.001	67	22.762	14
54 (10)	M-III	99.43%	100.00%	99.05%	0.003	1312	22.762	32
54 (10)	R-S	99.43%	100.00%	98.76%	3.673	2352	62.938	15745
Π_12 (12)	GM	99.83%	100.00%	56.92%	0.001	17	51.961	3
Π_12 (12)	M-I	99.83%	100.00%	54.36%	0.001	20	51.961	6
Π_12 (12)	M-III	99.83%	100.00%	60.44%	0.001	102	52.332	8
Π_12 (12)	R-S	99.83%	100.00%	63.14%	0.035	340	56.867	1824
55 (12)	GM	99.75%	100.00%	56.27%	0.004	31	252.059	3
55 (12)	M-I	99.75%	100.00%	58.47%	0.011	31	254.148	6
55 (12)	M-III	99.75%	100.00%	69.95%	0.01	477	258.902	16
55 (12)	R-S	99.75%	100.00%	64.48%	0.256	616	270.656	4009
56 (12)	GM	97.67%	100.00%	98.07%	0.001	17	24.617	3
56 (12)	M-I	97.67%	100.00%	98.15%	0.001	17	24.617	6
56 (12)	M-III	97.67%	100.00%	98.34%	0.002	223	24.617	16
56 (12)	R-S	97.67%	100.00%	98.99%	0.037	169	29.141	1920
57 (12)	GM	96.67%	83.33%	83.85%	0.001	14	43.047	3
57 (12)	M-I	96.67%	83.33%	83.83%	0.001	23	43.047	6
57 (12)	M-III	96.67%	83.33%	88.57%	0.002	278	43.047	16
57 (12)	R-S	96.67%	91.67%	84.79%	0.021	276	44.484	1499
58 (12)	GM	99.53%	100.00%	99.53%	0.004	36	23.277	5
58 (12)	M-I	99.53%	100.00%	99.54%	0.001	53	23.277	10
58 (12)	M-III	99.53%	100.00%	99.60%	0.002	607	23.277	24
58 (12)	R-S	99.53%	100.00%	99.73%	0.027	109	27.371	1740
59 (12)	GM	99.94%	100.00%	99.84%	0.003	29	208.895	5
59 (12)	M-I	99.94%	100.00%	99.83%	0.004	41	208.895	10
59 (12)	M-III	99.94%	100.00%	99.87%	0.004	453	216.266	24
59 (12)	R-S	99.94%	100.00%	99.93%	0.005	1	216.266	72
59 (12)	R-A	99.94%	100.00%	89.41%	15.595	3759	216.266	35346

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
60 (12)	GM	99.17%	100.00%	98.25%	0.001	45	23.418	5
60 (12)	M-I	99.17%	100.00%	98.34%	0.001	55	23.418	10
60 (12)	M-III	99.17%	100.00%	98.58%	0.002	864	23.418	24
60 (12)	R-S	99.17%	100.00%	98.67%	0.908	1002	41.891	9984
61 (12)	GM	96.19%	91.67%	97.13%	0.002	69	23.246	7
61 (12)	M-I	96.19%	83.33%	97.37%	0.001	65	23.246	14
61 (12)	M-III	96.19%	83.33%	97.66%	0.003	901	23.246	32
61 (12)	R-S	96.19%	91.67%	98.53%	0.41	493	37.469	6811
62 (12)	GM	97.54%	83.33%	99.46%	0.002	54	23.242	7
62 (12)	M-I	97.54%	83.33%	99.47%	0.001	57	23.508	14
62 (12)	M-III	97.54%	83.33%	99.61%	0.003	668	23.508	32
62 (12)	R-S	97.54%	83.33%	99.50%	0.003	18	23.508	500
63 (12)	GM	94.26%	66.67%	99.26%	0.002	63	23.707	7
63 (12)	M-I	94.26%	66.67%	99.31%	0.001	71	23.707	14
63 (12)	M-III	94.26%	66.67%	99.45%	0.003	842	24.516	32
63 (12)	R-S	94.26%	91.67%	98.67%	1.251	1491	42.094	8702
Π_13 (13)	GM	99.85%	100.00%	56.92%	0.002	17	56.066	3
Π_13 (13)	M-I	99.85%	100.00%	54.24%	0.001	24	56.066	6
Π_13 (13)	M-III	99.85%	100.00%	60.44%	0.002	102	56.980	8
Π_13 (13)	R-S	99.85%	100.00%	63.72%	0.15	648	64.191	3522
Π_15 (15)	GM	99.73%	100.00%	99.68%	0.001	9	64.547	3
Π_15 (15)	M-I	99.73%	100.00%	99.67%	0.001	15	64.547	6
Π_15 (15)	M-III	99.73%	100.00%	99.65%	0.001	57	64.547	8
Π_15 (15)	R-S	99.73%	100.00%	98.90%	0.03	215	68.234	1520
64 (15)	GM	96.03%	100.00%	95.84%	0.001	6	24.504	3
64 (15)	M-I	96.03%	100.00%	95.67%	0.001	10	24.797	6
64 (15)	M-III	96.03%	100.00%	96.51%	0.002	260	24.797	16
64 (15)	R-S	96.03%	100.00%	98.36%	5.412	2644	62.652	20935
65 (15)	GM	96.98%	86.67%	96.60%	0.004	14	24.324	3
65 (15)	M-I	96.98%	86.67%	97.05%	0.01	16	24.461	6
65 (15)	M-III	96.98%	86.67%	97.47%	0.004	272	24.461	16
65 (15)	R-S	96.98%	93.33%	98.22%	0.352	476	72.316	4572
66 (15)	GM	95.00%	100.00%	76.74%	0.002	21	23.723	3
66 (15)	M-I	95.00%	100.00%	76.87%	0.001	25	23.723	6
66 (15)	M-III	95.00%	100.00%	85.72%	0.002	384	23.723	16
66 (15)	R-S	95.00%	93.33%	82.73%	4.206	3627	66.082	18341
Π_20 (20)	GM	99.60%	100.00%	99.36%	0.002	11	54.613	3
Π_20 (20)	M-I	99.60%	100.00%	99.33%	0.001	13	54.613	6
Π_20 (20)	M-III	99.60%	100.00%	99.34%	0.001	80	54.613	8
Π_20 (20)	R-S	99.60%	100.00%	98.34%	12.377	4314	107.820	27509
73 (20)	GM	95.78%	90.00%	96.84%	0.002	8	24.676	3
73 (20)	M-I	95.78%	90.00%	97.04%	0.001	12	24.676	6
73 (20)	M-III	95.78%	90.00%	97.56%	0.001	242	24.676	16
73 (20)	GM (R.)	95.78%	95.00%	97.34%	0.001	49	28.531	3
73 (20)	M-I (R.)	95.78%	95.00%	97.27%	0.001	36	28.531	6
73 (20)	M-III (R.)	95.78%	95.00%	98.01%	0.002	60	28.531	16
74 (20)	GM	97.90%	95.00%	95.80%	0.002	11	29.453	3
74 (20)	M-I	97.90%	95.00%	95.88%	0.001	12	29.453	6
74 (20)	M-III	97.90%	95.00%	97.24%	0.002	236	29.453	16
74 (20)	GM (R.)	97.90%	90.00%	95.04%	0.001	43	30.043	3

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
74 (20)	M-I (R.)	97.90%	90.00%	94.20%	0.001	15	30.043	6
74 (20)	M-III (R.)	97.90%	80.00%	96.46%	0.002	61	30.043	16
75 (20)	GM	95.80%	95.00%	93.46%	0.001	10	30.480	3
75 (20)	M-I	95.80%	95.00%	93.88%	0.002	24	30.480	6
75 (20)	M-III	95.80%	95.00%	95.16%	0.002	497	30.480	16
75 (20)	GM (R.)	95.80%	90.00%	93.38%	0.002	40	30.949	3
75 (20)	M-I (R.)	95.80%	90.00%	93.42%	0.001	14	30.949	6
75 (20)	M-III (R.)	95.80%	95.00%	95.93%	0.001	70	30.949	16
76 (20)	GM	96.52%	85.00%	96.04%	0.002	51	31.621	5
76 (20)	M-I	96.52%	85.00%	96.14%	0.001	80	31.621	10
76 (20)	M-III	96.52%	85.00%	97.38%	0.002	896	31.621	24
76 (20)	GM (R.)	96.52%	95.00%	95.50%	0.002	45	31.980	5
76 (20)	M-I (R.)	96.52%	95.00%	95.49%	0.002	42	32.168	10
76 (20)	M-III (R.)	96.52%	95.00%	97.14%	0.002	79	32.168	24
77 (20)	GM	97.30%	95.00%	96.69%	0.002	52	32.543	5
77 (20)	M-I	97.30%	95.00%	97.03%	0.002	65	32.543	10
77 (20)	M-III	97.30%	95.00%	97.55%	0.003	1386	32.543	24
77 (20)	GM (R.)	97.30%	90.00%	96.29%	0.001	60	33.047	5
77 (20)	M-I (R.)	97.30%	90.00%	95.98%	0.001	61	33.047	10
77 (20)	M-III (R.)	97.30%	100.00%	96.80%	0.002	144	33.047	24
78 (20)	GM	94.00%	85.00%	94.77%	0.002	73	33.098	5
78 (20)	M-I	94.00%	85.00%	95.28%	0.001	88	33.098	10
78 (20)	M-III	94.00%	85.00%	96.17%	0.002	1234	33.098	24
78 (20)	GM (R.)	94.00%	80.00%	94.81%	0.002	57	33.617	5
78 (20)	M-I (R.)	94.00%	80.00%	94.97%	0.002	49	33.617	10
78 (20)	M-III (R.)	94.00%	75.00%	96.23%	0.002	124	33.617	24
79 (20)	GM	98.90%	100.00%	92.59%	0.002	100	33.723	7
79 (20)	M-I	98.90%	100.00%	92.52%	0.002	156	33.723	14
79 (20)	M-III	98.90%	100.00%	93.88%	0.004	1868	34.883	32
79 (20)	GM (R.)	98.90%	100.00%	93.09%	0.002	67	35.414	7
79 (20)	M-I (R.)	98.90%	100.00%	81.63%	0.002	62	35.602	14
79 (20)	M-III (R.)	98.90%	100.00%	94.57%	0.003	139	35.602	32
80 (20)	GM	96.20%	95.00%	95.13%	0.001	230	34.590	7
80 (20)	M-I	96.20%	90.00%	95.37%	0.002	203	34.590	14
80 (20)	M-III	96.20%	95.00%	96.42%	0.004	3498	34.590	32
80 (20)	GM (R.)	96.20%	90.00%	94.84%	0.001	81	34.938	7
80 (20)	M-I (R.)	96.20%	90.00%	94.71%	0.003	76	34.957	14
80 (20)	M-III (R.)	96.20%	90.00%	96.06%	0.004	184	34.957	32
81 (20)	GM	96.43%	100.00%	96.15%	0.001	170	35.871	7
81 (20)	M-I	96.43%	100.00%	96.62%	0.002	139	35.871	14
81 (20)	M-III	96.43%	100.00%	97.09%	0.003	2627	35.871	32
81 (20)	GM (R.)	96.43%	90.00%	95.28%	0.001	72	35.992	7
81 (20)	M-I (R.)	96.43%	90.00%	94.74%	0.002	59	35.992	14
81 (20)	M-III (R.)	96.43%	90.00%	96.16%	0.003	121	35.992	32
82 (50)	GM	94.97%	88.00%	94.95%	0.001	26	35.805	3
82 (50)	M-I	94.97%	94.00%	94.96%	0.002	45	35.805	6
82 (50)	M-III	94.97%	96.00%	96.43%	0.003	691	37.812	16
82 (50)	GM (R.)	94.97%	92.00%	94.82%	0.001	86	36.305	3
82 (50)	M-I (R.)	94.97%	92.00%	93.91%	0.001	50	36.305	6
82 (50)	M-III (R.)	94.97%	92.00%	95.79%	0.002	189	36.305	16

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
83 (50)	GM	95.05%	96.00%	90.57%	0.001	24	37.449	3
83 (50)	M-I	95.05%	96.00%	90.62%	0.001	31	37.449	6
83 (50)	M-III	95.05%	96.00%	92.51%	0.002	741	37.449	16
83 (50)	GM (R.)	95.05%	92.00%	89.48%	0.001	90	36.621	3
83 (50)	M-I (R.)	95.05%	92.00%	89.31%	0.001	57	36.621	6
83 (50)	M-III (R.)	95.05%	92.00%	92.76%	0.002	189	36.621	16
84 (50)	GM	94.71%	76.00%	93.42%	0.001	39	37.238	3
84 (50)	M-I	94.71%	78.00%	93.88%	0.002	50	38.066	6
84 (50)	M-III	94.71%	80.00%	96.53%	0.003	718	38.066	16
84 (50)	GM (R.)	94.71%	78.00%	88.28%	0.001	92	37.910	3
84 (50)	M-I (R.)	94.71%	78.00%	87.64%	0.001	61	37.910	6
84 (50)	M-III (R.)	94.71%	92.00%	93.65%	0.002	165	37.789	16
85 (50)	GM	95.97%	86.00%	95.32%	0.002	149	37.629	5
85 (50)	M-I	95.97%	86.00%	95.59%	0.002	167	37.629	10
85 (50)	M-III	95.97%	86.00%	97.06%	0.006	3054	39.973	24
85 (50)	GM (R.)	95.97%	96.00%	93.17%	0.002	150	38.285	5
85 (50)	M-I (R.)	95.97%	96.00%	92.89%	0.002	180	38.285	10
85 (50)	M-III (R.)	95.97%	98.00%	95.06%	0.005	460	38.508	24
86 (50)	GM	96.31%	94.00%	96.21%	0.002	130	38.500	5
86 (50)	M-I	96.31%	94.00%	96.21%	0.003	187	40.125	10
86 (50)	M-III	96.31%	94.00%	97.74%	0.005	2374	41.141	24
86 (50)	GM (R.)	96.31%	90.00%	93.98%	0.002	138	39.500	5
86 (50)	M-I (R.)	96.31%	88.00%	94.20%	0.002	142	39.500	10
86 (50)	M-III (R.)	96.31%	90.00%	96.81%	0.004	403	39.711	24
87 (50)	GM	93.93%	88.00%	94.36%	0.002	177	39.613	5
87 (50)	M-I	93.93%	88.00%	95.33%	0.002	123	39.613	10
87 (50)	M-III	93.93%	88.00%	96.22%	0.006	3384	42.031	24
87 (50)	GM (R.)	93.93%	80.00%	94.55%	0.001	153	39.688	5
87 (50)	M-I (R.)	93.93%	76.00%	94.78%	0.002	167	39.688	10
87 (50)	M-III (R.)	93.93%	76.00%	96.37%	0.003	344	39.688	24
88 (50)	GM	97.33%	94.00%	94.29%	0.002	368	40.008	7
88 (50)	M-I	97.33%	94.00%	93.89%	0.004	455	40.008	14
88 (50)	M-III	97.33%	94.00%	95.63%	0.009	6690	43.656	32
88 (50)	GM (R.)	97.33%	90.00%	92.48%	0.001	217	40.445	7
88 (50)	M-I (R.)	97.33%	90.00%	92.47%	0.002	325	40.445	14
88 (50)	M-III (R.)	97.33%	94.00%	94.41%	0.004	624	40.445	32
89 (50)	GM	95.45%	88.00%	93.48%	0.004	543	41.809	7
89 (50)	M-I	95.45%	86.00%	93.81%	0.005	592	41.809	14
89 (50)	M-III	95.45%	90.00%	95.73%	0.011	8440	44.746	32
89 (50)	GM (R.)	95.45%	90.00%	93.06%	0.002	220	42.246	7
89 (50)	M-I (R.)	95.45%	90.00%	93.54%	0.002	320	42.246	14
89 (50)	M-III (R.)	95.45%	90.00%	95.45%	0.005	662	42.246	32
90 (50)	GM	95.79%	84.00%	94.06%	0.003	488	50.254	7
90 (50)	M-I	95.79%	84.00%	94.81%	0.005	405	51.453	14
90 (50)	M-III	95.79%	84.00%	95.76%	0.012	7564	54.180	32
90 (50)	GM (R.)	95.79%	84.00%	93.05%	0.001	221	50.176	7
90 (50)	M-I (R.)	95.79%	84.00%	93.72%	0.002	240	50.176	14
90 (50)	M-III (R.)	95.79%	84.00%	95.30%	0.004	497	50.176	32
91 (100)	GM	94.94%	82.00%	94.59%	0.002	53	50.285	3
91 (100)	M-I	94.94%	83.00%	94.61%	0.004	97	53.480	6

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
91 (100)	M-III	94.94%	86.00%	96.11%	0.01	1824	55.172	16
91 (100)	GM (R.)	94.94%	87.00%	90.41%	0.001	233	51.156	3
91 (100)	M-I (R.)	94.94%	89.00%	90.40%	0.002	280	50.094	6
91 (100)	M-III (R.)	94.94%	86.00%	94.60%	0.003	604	50.094	16
92 (100)	GM	95.11%	99.00%	87.21%	0.001	16	50.074	3
92 (100)	M-I	95.11%	100.00%	89.40%	0.002	41	50.074	6
92 (100)	M-III	95.11%	100.00%	92.75%	0.006	707	54.996	16
92 (100)	GM (R.)	95.11%	90.00%	95.09%	0.001	174	51.520	3
92 (100)	M-I (R.)	95.11%	90.00%	94.96%	0.001	70	51.520	6
92 (100)	M-III (R.)	95.11%	90.00%	96.84%	0.002	194	51.520	16
93 (100)	GM	94.92%	78.00%	93.91%	0.002	49	50.727	3
93 (100)	M-I	94.92%	78.00%	94.01%	0.003	83	50.727	6
93 (100)	M-III	94.92%	77.00%	96.40%	0.006	787	53.762	16
93 (100)	GM (R.)	94.92%	92.00%	93.00%	0.001	148	51.242	3
93 (100)	M-I (R.)	94.92%	92.00%	92.59%	0.001	121	51.242	6
93 (100)	M-III (R.)	94.92%	91.00%	96.12%	0.003	309	51.242	16
94 (100)	GM	94.45%	85.00%	93.49%	0.005	331	51.277	5
94 (100)	M-I	94.45%	87.00%	93.60%	0.011	446	54.613	10
94 (100)	M-III	94.45%	86.00%	96.27%	0.024	6733	55.051	24
94 (100)	GM (R.)	94.45%	86.00%	90.92%	0.002	307	51.887	5
94 (100)	M-I (R.)	94.45%	85.00%	91.45%	0.002	377	51.887	10
94 (100)	M-III (R.)	94.45%	84.00%	94.85%	0.006	1011	53.699	24
95 (100)	GM	94.44%	88.00%	93.29%	0.005	236	54.773	5
95 (100)	M-I	94.44%	92.00%	93.73%	0.01	374	54.773	10
95 (100)	M-III	94.44%	89.00%	96.00%	0.02	5113	56.109	24
95 (100)	GM (R.)	94.44%	91.00%	90.77%	0.001	299	53.219	5
95 (100)	M-I (R.)	94.44%	89.00%	90.55%	0.002	405	53.219	10
95 (100)	M-III (R.)	94.44%	91.00%	95.44%	0.004	908	53.219	24
96 (100)	GM	93.44%	80.00%	95.39%	0.003	164	55.312	5
96 (100)	M-I	93.44%	80.00%	96.00%	0.005	109	55.312	10
96 (100)	M-III	93.44%	81.00%	97.30%	0.017	4005	65.453	24
96 (100)	GM (R.)	93.44%	74.00%	93.82%	0.002	227	52.535	5
96 (100)	M-I (R.)	93.44%	75.00%	93.59%	0.002	196	52.535	10
96 (100)	M-III (R.)	93.44%	75.00%	96.67%	0.004	484	52.535	24
97 (100)	GM	95.86%	80.00%	95.03%	0.007	608	52.945	7
97 (100)	M-I	95.86%	81.00%	95.29%	0.015	749	55.957	14
97 (100)	M-III	95.86%	81.00%	97.18%	0.032	10981	55.957	32
97 (100)	GM (R.)	95.86%	90.00%	93.08%	0.002	518	54.027	7
97 (100)	M-I (R.)	95.86%	90.00%	93.48%	0.003	721	54.027	14
97 (100)	M-III (R.)	95.86%	89.00%	95.95%	0.007	1617	54.438	32
98 (100)	GM	94.50%	85.00%	93.59%	0.009	737	57.102	7
98 (100)	M-I	94.50%	86.00%	94.35%	0.016	849	57.102	14
98 (100)	M-III	94.50%	84.00%	96.02%	0.039	14555	57.207	32
98 (100)	GM (R.)	94.50%	87.00%	91.44%	0.002	447	54.180	7
98 (100)	M-I (R.)	94.50%	88.00%	92.22%	0.003	541	55.969	14
98 (100)	M-III (R.)	94.50%	90.00%	94.89%	0.006	1250	55.969	32
99 (100)	GM	95.03%	80.00%	95.78%	0.009	829	55.078	7
99 (100)	M-I	95.03%	78.00%	96.15%	0.017	602	57.195	14
99 (100)	M-III	95.03%	79.00%	95.89%	0.042	15321	58.531	32
99 (100)	GM (R.)	95.03%	84.00%	94.39%	0.002	419	54.375	7



No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
99 (100)	M-I (R.)	95.03%	84.00%	94.64%	0.002	439	54.375	14
99 (100)	M-III (R.)	95.03%	84.00%	96.68%	0.006	1074	56.867	32
100 (200)	GM	98.89%	83.50%	99.60%	0.005	41	60.043	3
100 (200)	M-I	98.89%	83.50%	99.61%	0.009	63	60.043	6
100 (200)	M-III	98.89%	80.00%	99.71%	0.036	1415	65.996	16
100 (200)	GM (R.)	98.89%	72.00%	99.37%	0.001	267	58.578	3
100 (200)	M-I (R.)	98.89%	72.00%	99.37%	0.002	156	58.578	6
100 (200)	M-III (R.)	98.89%	75.50%	99.53%	0.004	384	58.578	16
101 (200)	GM	94.60%	85.50%	94.89%	0.013	152	63.410	3
101 (200)	M-I	94.60%	85.50%	94.15%	0.022	195	64.125	6
101 (200)	M-III	94.60%	86.00%	96.91%	0.049	2537	68.004	16
101 (200)	GM (R.)	94.60%	81.00%	90.89%	0.002	328	57.441	3
101 (200)	M-I (R.)	94.60%	81.00%	90.86%	0.002	276	57.441	6
101 (200)	M-III (R.)	94.60%	81.00%	93.90%	0.004	647	59.867	16
102 (200)	GM	90.17%	91.50%	92.10%	0.008	92	63.184	3
102 (200)	M-I	90.17%	91.50%	92.14%	0.016	147	64.648	6
102 (200)	M-III	90.17%	91.50%	96.94%	0.032	1712	73.543	16
102 (200)	GM (R.)	90.17%	91.50%	92.90%	0.001	331	58.195	3
102 (200)	M-I (R.)	90.17%	91.50%	92.93%	0.002	260	58.195	6
102 (200)	M-III (R.)	90.17%	93.50%	96.08%	0.004	457	58.195	16
103 (200)	GM	94.15%	98.50%	94.45%	0.029	574	66.523	5
103 (200)	M-I	94.15%	98.50%	94.56%	0.055	685	73.676	10
103 (200)	M-III	94.15%	97.50%	97.01%	0.115	9484	75.125	24
103 (200)	GM (R.)	94.15%	93.50%	91.35%	0.002	692	59.785	5
103 (200)	M-I (R.)	94.15%	92.50%	91.87%	0.003	766	59.785	10
103 (200)	M-III (R.)	94.15%	93.50%	95.60%	0.009	1746	60.145	24
104 (200)	GM	92.07%	70.50%	95.84%	0.022	385	67.867	5
104 (200)	M-I	92.07%	71.50%	95.69%	0.039	418	68.793	10
104 (200)	M-III	92.07%	71.00%	96.71%	0.123	10449	72.215	24
104 (200)	GM (R.)	92.07%	72.00%	93.33%	0.003	589	63.707	5
104 (200)	M-I (R.)	92.07%	72.50%	93.75%	0.003	517	63.707	10
104 (200)	M-III (R.)	92.07%	71.50%	96.13%	0.007	1172	63.707	24
105 (200)	GM	94.12%	91.00%	94.79%	0.03	531	72.199	5
105 (200)	M-I	94.12%	91.50%	95.18%	0.05	519	79.422	10
105 (200)	M-III	94.12%	91.50%	96.50%	0.126	9437	71.746	24
105 (200)	GM (R.)	94.12%	90.50%	93.97%	0.002	542	61.887	5
105 (200)	M-I (R.)	94.12%	88.50%	94.24%	0.003	588	61.887	10
105 (200)	M-III (R.)	94.12%	88.00%	96.02%	0.008	1534	63.941	24
106 (200)	GM	95.94%	91.50%	95.29%	0.054	1370	70.023	7
106 (200)	M-I	95.94%	90.50%	95.42%	0.109	1362	73.230	14
106 (200)	M-III	95.94%	92.00%	97.13%	0.236	23649	73.781	32
106 (200)	GM (R.)	95.94%	96.50%	93.54%	0.003	943	63.695	7
106 (200)	M-I (R.)	95.94%	96.50%	93.76%	0.006	1270	64.859	14
106 (200)	M-III (R.)	95.94%	96.00%	96.33%	0.013	2907	65.441	32
107 (200)	GM	94.27%	83.00%	94.68%	0.046	1120	69.941	7
107 (200)	M-I	94.27%	83.50%	95.07%	0.085	1381	73.723	14
107 (200)	M-III	94.27%	83.00%	96.81%	0.192	20047	73.078	32
107 (200)	GM (R.)	94.27%	85.50%	92.12%	0.003	824	64.141	7
107 (200)	M-I (R.)	94.27%	84.50%	92.47%	0.005	950	64.141	14
107 (200)	M-III (R.)	94.27%	85.50%	95.57%	0.011	2205	65.004	32

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
108 (200)	GM	93.04%	78.00%	95.50%	0.44	1023	75.727	7
108 (200)	M-I	93.04%	77.50%	96.10%	0.057	668	75.164	14
108 (200)	M-III	93.04%	77.50%	96.67%	0.182	20859	75.609	32
108 (200)	GM (R.)	93.04%	76.00%	94.32%	0.002	624	65.719	7
108 (200)	M-I (R.)	93.04%	76.50%	94.50%	0.005	523	67.082	14
108 (200)	M-III (R.)	93.04%	76.50%	95.97%	0.009	1402	67.082	32
109 (500)	GM (R.)	92.90%	81.20%	95.03%	0.005	2567	28.949	3
109 (500)	M-I (R.)	92.90%	82.20%	95.38%	0.008	4282	32.102	6
109 (500)	M-III (R.)	92.90%	82.00%	96.40%	0.025	10921	32.859	16
109 (500)	GM (LB.)	92.90%	82.20%	95.03%	0.001	854	35.840	3
109 (500)	M-I (LB.)	92.90%	82.20%	95.31%	0.002	515	35.840	6
109 (500)	M-III (LB.)	92.90%	82.00%	96.40%	0.006	1281	40.961	16
110 (500)	GM (R.)	93.97%	86.80%	86.88%	0.006	2982	42.230	3
110 (500)	M-I (R.)	93.97%	91.20%	87.21%	0.01	5120	42.230	6
110 (500)	M-III (R.)	93.97%	91.20%	93.69%	0.03	13007	40.086	16
110 (500)	GM (LB.)	93.97%	86.80%	86.88%	0.001	861	39.094	3
110 (500)	M-I (LB.)	93.97%	91.20%	87.21%	0.003	712	39.094	6
110 (500)	M-III (LB.)	93.97%	91.20%	93.61%	0.009	2132	47.203	16
111 (500)	GM (R.)	95.43%	76.00%	93.98%	0.003	2231	45.898	3
111 (500)	M-I (R.)	95.43%	76.00%	94.34%	0.006	3629	45.742	6
111 (500)	M-III (R.)	95.43%	76.00%	96.17%	0.02	9987	45.742	16
111 (500)	GM (LB.)	95.43%	76.00%	93.98%	0.001	780	44.895	3
111 (500)	M-I (LB.)	95.43%	76.00%	94.06%	0.002	388	44.895	6
111 (500)	M-III (LB.)	95.43%	76.00%	96.23%	0.005	1073	46.859	16
112 (500)	GM (R.)	92.38%	85.80%	86.34%	0.015	5638	47.613	5
112 (500)	M-I (R.)	92.38%	85.60%	87.07%	0.026	9457	44.695	10
112 (500)	M-III (R.)	92.38%	85.60%	93.66%	0.063	21065	45.129	24
112 (500)	GM (LB.)	92.38%	85.80%	86.34%	0.004	1553	44.672	5
112 (500)	M-I (LB.)	92.38%	85.60%	87.19%	0.009	1988	49.926	10
112 (500)	M-III (LB.)	92.38%	85.80%	93.68%	0.02	4312	50.797	24
113 (500)	GM (R.)	92.44%	91.40%	90.71%	0.012	5038	50.461	5
113 (500)	M-I (R.)	92.44%	91.40%	90.97%	0.021	8821	48.316	10
113 (500)	M-III (R.)	92.44%	90.80%	95.57%	0.047	19073	50.008	24
113 (500)	GM (LB.)	92.44%	91.60%	90.72%	0.003	1345	49.051	5
113 (500)	M-I (LB.)	92.44%	92.00%	90.98%	0.007	1738	53.117	10
113 (500)	M-III (LB.)	92.44%	90.80%	95.58%	0.015	3192	54.105	24
114 (500)	GM (R.)	91.32%	85.40%	94.83%	0.008	4191	53.918	5
114 (500)	M-I (R.)	91.32%	83.00%	95.21%	0.014	7174	54.453	10
114 (500)	M-III (R.)	91.32%	86.00%	96.47%	0.041	17657	54.406	24
114 (500)	GM (LB.)	91.32%	83.80%	94.67%	0.002	1188	54.656	5
114 (500)	M-I (LB.)	91.32%	84.20%	94.63%	0.004	997	54.656	10
114 (500)	M-III (LB.)	91.32%	85.60%	96.29%	0.01	2045	52.410	24
115 (500)	GM (R.)	95.72%	95.20%	93.52%	0.031	9127	53.926	7
115 (500)	M-I (R.)	95.72%	95.00%	93.80%	0.051	15805	54.875	14
115 (500)	M-III (R.)	95.72%	95.20%	97.15%	0.12	34283	55.910	32
115 (500)	GM (LB.)	95.72%	95.20%	93.52%	0.008	2313	55.001	7
115 (500)	M-I (LB.)	95.72%	95.00%	93.69%	0.017	3439	55.781	14
115 (500)	M-III (LB.)	95.72%	95.20%	97.15%	0.042	7886	57.066	32
116 (500)	GM (R.)	94.17%	86.00%	90.43%	0.018	7008	61.625	7
116 (500)	M-I (R.)	94.17%	85.20%	91.96%	0.034	12207	58.547	14

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
116 (500)	M-III (R.)	94.17%	85.80%	94.87%	0.089	28376	69.832	32
116 (500)	GM (LB.)	94.17%	86.20%	90.43%	0.004	1674	60.301	7
116 (500)	M-I (LB.)	94.17%	86.20%	91.29%	0.008	1558	60.301	14
116 (500)	M-III (LB.)	94.17%	85.80%	94.87%	0.021	4738	63.969	32
117 (500)	GM (R.)	92.96%	77.40%	92.62%	0.021	7271	29.465	7
117 (500)	M-I (R.)	92.96%	74.40%	94.01%	0.032	12200	30.336	14
117 (500)	M-III (R.)	92.96%	77.80%	95.53%	0.089	29561	30.391	32
117 (500)	GM (LB.)	92.96%	77.40%	92.62%	0.006	2064	44.906	7
117 (500)	M-I (LB.)	92.96%	74.40%	94.01%	0.009	1686	46.501	14
117 (500)	M-III (LB.)	92.96%	77.80%	95.53%	0.023	4580	46.098	32
118 (1000)	GM (R.)	90.67%	75.10%	90.43%	0.019	5372	40.391	3
118 (1000)	M-I (R.)	90.67%	75.80%	90.34%	1.035	9279	40.238	6
118 (1000)	M-III (R.)	90.67%	76.60%	93.43%	0.115	23246	39.555	16
118 (1000)	GM (LB.)	90.67%	75.10%	90.43%	0.004	1649	39.035	3
118 (1000)	M-I (LB.)	90.67%	75.80%	90.34%	0.008	1125	39.035	6
118 (1000)	M-III (LB.)	90.67%	76.60%	93.43%	0.021	2343	41.359	16
119 (1000)	GM (R.)	95.16%	81.30%	88.60%	0.018	6073	53.383	3
119 (1000)	M-I (R.)	95.16%	87.40%	88.54%	0.083	8783	53.355	6
119 (1000)	M-III (R.)	95.16%	83.40%	92.30%	0.087	20500	54.980	16
119 (1000)	GM (LB.)	95.16%	81.30%	88.60%	0.004	1484	51.641	3
119 (1000)	M-I (LB.)	95.16%	81.30%	87.65%	0.005	844	51.641	6
119 (1000)	M-III (LB.)	95.16%	83.40%	92.30%	0.022	2977	52.445	16
120 (1000)	GM (R.)	92.19%	85.40%	90.25%	0.015	4833	63.484	3
120 (1000)	M-I (R.)	92.19%	84.40%	89.86%	0.027	8243	63.367	6
120 (1000)	M-III (R.)	92.19%	86.80%	95.09%	0.078	20511	63.656	16
120 (1000)	GM (LB.)	92.19%	85.40%	90.25%	0.003	1463	54.438	3
120 (1000)	M-I (LB.)	92.19%	85.70%	89.48%	0.007	832	53.094	6
120 (1000)	M-III (LB.)	92.19%	86.80%	95.09%	0.018	1533	53.723	16
121 (1000)	GM (R.)	92.14%	90.90%	86.58%	0.058	10690	61.340	5
121 (1000)	M-I (R.)	92.14%	90.10%	87.68%	0.097	18336	63.270	10
121 (1000)	M-III (R.)	92.14%	92.00%	94.00%	0.248	41661	62.181	24
121 (1000)	GM (LB.)	92.14%	91.10%	86.58%	0.014	2750	62.660	5
121 (1000)	M-I (LB.)	92.14%	90.30%	87.59%	0.026	3333	63.105	10
121 (1000)	M-III (LB.)	92.14%	92.20%	94.04%	0.071	8419	63.160	24
122 (1000)	GM (R.)	96.06%	97.30%	90.91%	0.049	9597	75.723	5
122 (1000)	M-I (R.)	96.06%	96.40%	91.33%	0.08	16310	72.961	10
122 (1000)	M-III (R.)	96.06%	96.50%	91.39%	0.23	40764	73.996	24
122 (1000)	GM (LB.)	96.06%	96.70%	91.03%	0.011	2723	65.223	5
122 (1000)	M-I (LB.)	96.06%	97.00%	86.73%	0.158	16528	67.500	10
122 (1000)	M-III (LB.)	96.06%	96.50%	91.29%	0.652	81260	64.949	24
123 (1000)	GM (R.)	93.27%	82.20%	95.73%	0.035	8558	58.965	5
123 (1000)	M-I (R.)	93.27%	83.40%	95.91%	0.062	14776	60.012	10
123 (1000)	M-III (R.)	93.27%	82.10%	96.93%	0.181	38447	60.578	24
123 (1000)	GM (LB.)	93.27%	81.60%	95.73%	0.009	2371	67.742	5
123 (1000)	M-I (LB.)	93.27%	82.10%	95.77%	0.014	1928	69.609	10
123 (1000)	M-III (LB.)	93.27%	82.10%	96.86%	0.046	6877	69.039	24
124 (1000)	GM (R.)	94.83%	85.50%	92.27%	0.111	17455	81.109	7
124 (1000)	M-I (R.)	94.83%	84.80%	92.75%	0.194	30231	78.840	14
124 (1000)	M-III (R.)	94.83%	85.10%	96.59%	0.444	65953	81.457	32
124 (1000)	GM (LB.)	94.83%	85.30%	87.13%	0.691	72367	77.152	7

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
124 (1000)	M-I (LB.)	94.83%	85.10%	92.60%	0.054	6408	78.219	14
124 (1000)	M-III (LB.)	94.83%	85.10%	96.59%	0.165	18756	78.270	32
125 (1000)	GM (R.)	-	-	-	-	-	-	-
125 (1000)	M-I (R.)	-	-	-	-	-	-	-
125 (1000)	M-III (R.)	97.27%	1.80%	92.76%	1.574	213034	32.281	32
125 (1000)	GM (LB.)	97.27%	83.90%	89.84%	0.017	3453	86.652	7
125 (1000)	M-I (LB.)	97.27%	85.00%	89.36%	0.027	3782	87.234	14
125 (1000)	M-III (LB.)	97.27%	89.70%	92.60%	1.894	232465	85.840	32
126 (1000)	GM (R.)	-	-	-	-	-	-	-
126 (1000)	M-I (R.)	-	-	-	-	-	-	-
126 (1000)	M-III (R.)	-	-	-	-	-	-	-
126 (1000)	GM (LB.)	93.87%	86.40%	91.70%	0.021	3823	30.344	7
126 (1000)	M-I (LB.)	93.87%	86.50%	91.73%	0.028	3447	30.871	14
126 (1000)	M-III (LB.)	93.87%	85.90%	94.95%	0.079	9736	31.777	32
127 (2000)	GM (R.)	95.78%	84.50%	92.48%	0.076	10679	40.574	3
127 (2000)	M-I (R.)	95.78%	84.50%	92.50%	0.0134	18745	41.004	6
127 (2000)	M-III (R.)	95.78%	83.40%	95.80%	0.377	44362	40.199	16
127 (2000)	GM (LB.)	95.78%	86.70%	92.48%	0.014	3082	33.395	3
127 (2000)	M-I (LB.)	95.78%	84.50%	92.62%	0.028	1730	32.340	6
127 (2000)	M-III (LB.)	95.78%	83.40%	95.80%	0.095	6744	33.266	16
128 (2000)	GM (R.)	94.67%	86.90%	88.34%	0.075	11015	47.719	3
128 (2000)	M-I (R.)	94.67%	89.15%	88.45%	0.137	19357	49.012	6
128 (2000)	M-III (R.)	94.67%	87.20%	92.61%	0.438	51181	47.961	16
128 (2000)	GM (LB.)	94.67%	86.90%	88.34%	0.012	3087	42.805	3
128 (2000)	M-I (LB.)	94.67%	89.15%	88.38%	0.031	2557	44.082	6
128 (2000)	M-III (LB.)	94.67%	87.20%	92.61%	0.083	6453	45.508	16
129 (2000)	GM (R.)	95.62%	100.00%	93.43%	0.074	10741	54.309	3
129 (2000)	M-I (R.)	95.62%	100.00%	93.63%	0.128	18481	55.086	6
129 (2000)	M-III (R.)	95.62%	100.00%	97.55%	0.425	49044	55.418	16
129 (2000)	GM (LB.)	95.62%	100.00%	93.43%	0.022	3649	51.555	3
129 (2000)	M-I (LB.)	95.62%	100.00%	93.63%	0.042	3852	50.758	6
129 (2000)	M-III (LB.)	95.62%	100.00%	97.55%	0.115	9577	51.699	16
130 (2000)	GM (R.)	91.58%	89.15%	86.47%	0.206	20325	35.512	5
130 (2000)	M-I (R.)	91.58%	88.55%	87.28%	0.358	34622	36.418	10
130 (2000)	M-III (R.)	91.58%	89.15%	76.18%	10.627	549392	38.414	24
130 (2000)	GM (LB.)	91.58%	89.15%	86.47%	0.054	5803	67.719	5
130 (2000)	M-I (LB.)	91.58%	89.20%	87.16%	0.107	7040	67.512	10
130 (2000)	M-III (LB.)	91.58%	89.20%	90.07%	0.089	45844	68.293	24
131 (2000)	GM (R.)	92.99%	86.85%	89.04%	0.232	21262	47.645	5
131 (2000)	M-I (R.)	92.99%	86.55%	89.60%	0.392	37058	50.199	10
131 (2000)	M-III (R.)	92.99%	86.55%	95.28%	1.037	86196	47.332	24
131 (2000)	GM (LB.)	92.99%	86.85%	89.04%	0.059	5787	35.934	5
131 (2000)	M-I (LB.)	92.99%	86.85%	84.06%	1.223	60194	37.176	10
131 (2000)	M-III (LB.)	92.99%	86.80%	90.26%	1.093	55765	38.270	24
132 (2000)	GM (R.)	93.52%	82.35%	92.95%	0.179	18774	41.328	5
132 (2000)	M-I (R.)	93.52%	82.70%	93.82%	0.323	32352	41.816	10
132 (2000)	M-III (R.)	93.52%	82.30%	96.13%	1.069	91288	43.809	24
132 (2000)	GM (LB.)	93.52%	82.35%	92.95%	0.179	18774	41.328	5
132 (2000)	M-I (LB.)	93.52%	82.70%	93.82%	0.323	32352	41.816	10
132 (2000)	M-III (LB.)	93.52%	82.30%	96.13%	1.069	91288	43.809	24

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	AFI	OPL	ASI	Χρόνος (σε min)	Περιστροφές	RAM (σε MB)	Λύσεις
133 (2000)	GM (R.)	-	-	-	-	-	-	-
133 (2000)	M-I (R.)	-	-	-	-	-	-	-
133 (2000)	M-III (R.)	93.80%	85.05%	95.66%	3.287	188934	37.902	32
133 (2000)	GM (LB.)	93.80%	85.20%	90.54%	0.124	9334	35.844	7
133 (2000)	M-I (LB.)	93.80%	84.75%	90.94%	0.217	12144	36.512	14
133 (2000)	M-III (LB.)	93.78%	85.05%	95.66%	0.496	28375	45.254	32
134 (2000)	GM (R.)	94.91%	87.20%	92.99%	0.401	32517	39.285	7
134 (2000)	M-I (R.)	94.91%	86.75%	93.42%	0.64	52203	39.176	14
134 (2000)	M-III (R.)	-	-	-	-	-	-	-
134 (2000)	GM (LB.)	94.91%	87.10%	92.99%	0.113	10441	36.711	7
134 (2000)	M-I (LB.)	-	-	-	-	-	-	-
134 (2000)	M-III (LB.)	-	-	-	-	-	-	-
135 (2000)	GM (R.)	94.50%	85.05%	92.47%	0.424	32435	50.562	7
135 (2000)	M-I (R.)	94.50%	85.15%	92.83%	0.714	55269	50.887	14
135 (2000)	M-III (R.)	94.50%	85.35%	96.74%	1.789	125843	53.102	32
135 (2000)	GM (LB.)	94.50%	85.10%	92.47%	0.119	9196	36.547	7
135 (2000)	M-I (LB.)	94.50%	85.10%	92.67%	0.222	12718	38.410	14
135 (2000)	M-III (LB.)	94.50%	85.35%	96.74%	0.565	30434	37.270	32

(GM: Γενικευμένο MUSA, M-I: MUSA I, M-III: MUSA III, M-N: Manas-Nedoma, R-S: Αντίστροφη Simplex, R-A: Μία Ρεαλιστική Προσέγγιση, R: Αναθεωρημένη (Revised) Simplex, LB: Αναθεωρημένη με "Load Base")

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα 135 τεχνητά σύνολα τεχνητών δεδομένων, αναφορικά με τις τιμές του εύρους διακύμανσης των βαρών (δείκτης WV<sub>i</sub>).

Πίνακας 1.3: Αποτελέσματα δεικτών WV<sub>i</sub>

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
1 (5)	GM	88.00	0.65	88.00				
1 (5)	M-I	88.00	0.65	88.00				
1 (5)	M-III	86.67	0.00	86.67				
1 (5)	M-N	88.00	0.65	88.00				
1 (5)	R-S	88.00	0.65	88.00				
2 (5)	GM	72.20	72.20	72.20				
2 (5)	M-I	72.20	72.20	72.20				
2 (5)	M-III	72.20	72.20	0.00				
2 (5)	M-N	72.50	72.50	72.50				
2 (5)	R-S	72.20	72.20	72.20				
3 (5)	GM	24.00	24.00	24.00				
3 (5)	M-I	24.00	24.00	24.00				
3 (5)	M-III	24.00	24.00	8.00				
3 (5)	M-N	24.50	24.50	24.50				
3 (5)	R-S	24.00	24.00	24.00				
4 (5)	GM	36.50	75.00	73.00	35.00	75.00		
4 (5)	M-I	36.50	75.00	73.00	35.00	75.00		
4 (5)	M-III	35.00	70.00	73.00	22.33	67.00		
4 (5)	M-N	-	-	-	-	-		

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
4 (5)	R-S	36.50	75.00	73.00	35.00	75.00		
5 (5)	GM	46.20	46.40	23.10	46.40	46.20		
5 (5)	M-I	46.20	46.40	23.10	46.40	46.20		
5 (5)	M-III	46.20	46.00	0.00	4.00	38.20		
5 (5)	M-N	-	-	-	-	-		
5 (5)	R-S	46.00	46.00	23.00	46.00	46.00		
6 (5)	GM	16.40	16.80	2.93	8.80	9.60		
6 (5)	M-I	16.40	16.80	2.93	8.80	9.60		
6 (5)	M-III	12.20	8.00	2.67	0.00	8.00		
6 (5)	M-N	-	-	-	-	-		
6 (5)	R-S	16.40	16.80	2.93	8.80	9.60		
7 (5)	GM	67.00	67.00	67.00	33.50	67.00	67.00	33.50
7 (5)	M-I	67.00	67.00	67.00	33.50	67.00	67.00	33.50
7 (5)	M-III	67.00	0.00	22.33	33.50	67.00	0.00	22.33
7 (5)	M-N	-	-	-	-	-		
7 (5)	R-S	67.38	67.25	67.38	33.56	67.13	67.25	33.56
8 (5)	GM	34.00	34.00	22.00	16.00	32.00	32.00	38.00
8 (5)	M-I	34.00	38.00	22.00	16.00	32.00	32.00	38.00
8 (5)	M-III	34.00	14.00	8.00	8.00	32.00	8.00	0.00
8 (5)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
8 (5)	R-S	34.50	38.25	22.13	16.25	32.50	32.50	38.25
9 (5)	GM	2.06	1.03	2.06	2.06	7.77	7.77	2.06
9 (5)	M-I	2.06	1.03	2.06	2.06	7.77	7.77	2.06
9 (5)	M-III	1.03	0.00	0.46	0.00	0.00	1.03	0.00
9 (5)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
9 (5)	R-S	2.06	1.03	2.06	2.06	7.77	7.77	2.06
10 (6)	GM	84.20	84.20	42.20				
10 (6)	M-I	84.20	84.30	42.20				
10 (6)	M-III	84.20	84.30	28.07				
10 (6)	M-N	84.36	84.54	42.36				
10 (6)	R-S	84.20	84.30	42.20				
11 (6)	GM	37.30	37.90	74.60				
11 (6)	M-I	37.30	37.90	74.60				
11 (6)	M-III	37.30	37.00	74.00				
11 (6)	M-N	35.30	35.30	70.00				
11 (6)	R-S	37.30	37.30	74.00				
12 (6)	GM	34.40	17.80	34.40				
12 (6)	M-I	34.40	17.80	34.40				
12 (6)	M-III	30.40	17.20	30.40				
12 (6)	M-N	-	-	-	-	-		
12 (6)	R-S	34.40	17.80	34.40				
13 (6)	GM	74.60	37.45	74.60	74.60	74.60		
13 (6)	M-I	74.60	37.45	74.60	74.60	74.60		
13 (6)	M-III	74.60	37.23	0.00	0.00	74.60		
13 (6)	M-N	-	-	-	-	-		
13 (6)	R-S	74.72	37.54	74.72	74.72	74.72		
14 (6)	GM	6.40	32.00	36.00	36.00	16.00		
14 (6)	M-I	6.40	32.00	36.00	36.00	16.00		
14 (6)	M-III	6.40	32.00	36.00	36.00	12.80		

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
14 (6)	M-N	-	-	-	-	-		
14 (6)	R-S	6.54	32.72	36.72	36.72	16.54		
15 (6)	GM	2.10	8.20	8.20	8.20	4.10		
15 (6)	M-I	2.10	8.20	8.20	8.20	4.10		
15 (6)	M-III	2.10	8.20	8.20	6.15	0.00		
15 (6)	M-N	-	-	-	-	-		
15 (6)	R-S	2.18	8.36	8.20	8.36	4.10		
16 (6)	M-I	69.00	65.00	65.00	69.00	65.00	33.50	69.00
16 (6)	M-III	70.00	65.00	65.00	69.00	65.00	33.50	69.00
16 (6)	M-N	69.00	4.00	65.00	4.00	31.50	2.00	0.00
16 (6)		-	-	-	-	-	-	-
16 (6)	R-S	70.72	66.08	66.08	69.72	66.08	33.68	69.72
17 (6)	GM	1.90	1.90	1.90	0.96	0.38	1.91	1.90
17 (6)	M-I	1.90	1.90	1.90	0.96	0.38	1.91	1.90
17 (6)	M-III	1.90	1.90	0.00	0.96	0.00	1.91	0.96
17 (6)	M-N	1.91	1.90	1.90	0.96	0.38	1.91	1.91
17 (6)	R-S	1.90	1.90	1.90	0.96	0.38	1.91	1.90
18 (6)	GM	0.14	8.71	0.14	0.14	0.14	0.29	8.71
18 (6)	M-I	0.14	8.71	0.14	0.14	0.14	0.29	8.71
18 (6)	M-III	0.14	0.18	0.14	0.14	0.00	0.15	0.00
18 (6)	M-N	0.72	9.29	0.72	0.72	0.72	1.44	9.29
18 (6)	R-S	0.14	8.71	0.14	0.14	0.14	0.29	8.71
19 (7)	GM	26.66	18.11	8.56				
19 (7)	M-I	26.66	23.34	8.56				
19 (7)	M-III	21.20	22.17	7.78				
19 (7)	M-N	-	-	-				
19 (7)	R-S	26.66	23.34	8.56				
19 (7)	R-A	26.66	23.34	8.56				
20 (7)	GM	76.00	37.07	76.00				
20 (7)	M-I	76.00	37.07	76.00				
20 (7)	M-III	49.13	36.93	24.57				
20 (7)	M-N	-	-	-				
20 (7)	R-S	76.00	37.12	76.00				
21 (7)	GM	19.50	18.50	37.00				
21 (7)	M-I	19.50	18.50	38.00				
21 (7)	M-III	17.00	18.00	35.00				
21 (7)	M-N	-	-	-				
21 (7)	R-S	19.50	18.50	38.00				
22 (7)	GM	79.08	79.08	79.08	26.50	40.71		
22 (7)	M-I	79.08	79.08	79.08	26.50	40.71		
22 (7)	M-III	79.08	0.00	79.08	0.00	39.54		
22 (7)	M-N	-	-	-	-	-		
22 (7)	R-S	79.16	79.16	79.16	26.66	40.66		
23 (7)	GM	31.20	23.20	46.80	23.20	15.60		
23 (7)	M-I	31.20	23.20	46.80	23.20	15.60		
23 (7)	M-III	31.20	23.20	46.40	15.20	11.60		
23 (7)	M-N	-	-	-	-	-		
23 (7)	R-S	31.29	23.20	46.89	23.20	15.60		
24 (7)	GM	3.70	3.40	3.40	1.13	3.40		

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
24 (7)	M-I	3.70	3.40	3.40	1.13	3.40		
24 (7)	M-III	3.40	3.40	0.00	0.00	3.40		
24 (7)	M-N	3.70	3.40	3.40	1.13	3.40		
24 (7)	R-S	3.70	3.40	3.40	1.13	3.40		
25 (7)	GM	66.00	68.00	33.00	33.00	66.00	67.00	33.50
25 (7)	M-I	66.00	68.00	33.00	33.00	66.00	67.00	33.50
25 (7)	M-III	66.00	68.00	20.67	0.00	65.00	3.00	22.33
25 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
25 (7)	R-S	66.49	68.49	33.25	33.25	66.49	67.98	34.24
26 (7)	GM	18.00	32.49	16.00	20.00	32.00	32.00	32.00
26 (7)	M-I	18.00	32.49	16.00	20.00	32.00	32.00	32.00
26 (7)	M-III	18.00	32.00	14.00	14.00	8.00	14.00	16.00
26 (7)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
26 (7)	R-S	18.00	32.49	16.00	20.25	32.49	32.49	32.98
27 (7)	GM	4.57	4.57	4.58	1.52	2.28	1.52	6.86
27 (7)	M-I	4.57	4.57	4.58	1.52	2.28	1.52	6.86
27 (7)	M-III	4.57	4.57	2.29	0.00	0.00	0.00	4.57
27 (7)	M-N	4.57	4.57	4.58	1.52	2.28	1.52	6.86
27 (7)	R-S	4.57	2.29	4.58	1.52	2.28	1.52	6.86
28 (8)	GM	86.75	86.75	0.50				
28 (8)	M-I	86.75	86.75	0.50				
28 (8)	M-III	86.75	86.75	0.00				
28 (8)	M-N	-	-	-				
28 (8)	R-S	86.96	86.96	0.64				
29 (8)	GM	0.75	76.00	76.00				
29 (8)	M-I	0.75	76.00	76.00				
29 (8)	M-III	0.75	76.00	76.00				
29 (8)	M-N	-	-	-				
29 (8)	R-S	0.75	76.00	76.00				
30 (8)	GM	16.53	29.87	15.73				
30 (8)	M-I	16.53	30.40	15.73				
30 (8)	M-III	16.53	30.40	15.20				
30 (8)	M-N	14.13	28.00	15.73				
30 (8)	R-S	16.53	30.40	15.73				
31 (8)	GM	22.92	18.45	68.40	68.40	68.40		
31 (8)	M-I	22.92	18.45	68.40	68.40	68.40		
31 (8)	M-III	22.80	2.35	68.40	68.40	23.35		
31 (8)	M-N	-	-	-	-	-		
31 (8)	R-S	23.21	18.39	69.56	69.56	69.56		
32 (8)	GM	0.30	0.04	0.30	0.30	0.30		
32 (8)	M-I	0.38	0.04	0.30	0.30	0.30		
32 (8)	M-III	0.30	0.00	0.30	0.15	0.30		
32 (8)	M-N	5.70	0.65	3.28	4.56	4.56		
32 (8)	R-S	0.38	0.04	0.30	0.30	0.30		
33 (8)	GM	2.27	6.80	6.80	6.80	2.27		
33 (8)	M-I	2.27	6.80	6.80	6.80	2.27		
33 (8)	M-III	2.27	4.53	2.91	0.00	0.00		
33 (8)	M-N	2.27	6.80	6.80	6.80	2.27		
33 (8)	R-S	2.27	6.80	6.80	6.80	2.27		



No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
34 (8)	GM	0.57	12.00	1.14	1.14	3.43	12.57	1.14
34 (8)	M-I	0.57	12.00	1.14	1.14	3.43	13.72	1.14
34 (8)	M-III	0.57	1.72	1.14	1.14	1.14	1.14	0.00
34 (8)	M-N	-	-	-	-	-	-	-
34 (8)	R-S	0.57	12.00	1.14	1.14	3.43	13.72	1.14
35 (8)	GM	8.00	14.00	7.00	10.00	8.00	8.00	5.00
35 (8)	M-I	8.00	14.00	7.00	10.00	8.00	8.00	5.00
35 (8)	M-III	8.00	14.00	4.00	6.00	8.00	8.00	4.00
35 (8)	R-S	9.92	15.07	7.96	11.92	9.28	8.64	5.96
36 (8)	GM	13.28	6.33	6.64	13.28	18.07	8.07	13.28
36 (8)	M-I	13.28	6.33	6.64	13.28	18.07	8.07	13.28
36 (8)	M-III	13.28	0.00	1.93	13.28	12.36	2.86	12.36
36 (8)	R-S	13.28	6.50	6.64	13.28	17.14	8.07	13.28
Π_9 (9)	GM	86.10	86.10	28.80				
Π_9 (9)	M-I	86.10	86.10	28.80				
Π_9 (9)	M-III	86.10	86.10	28.60				
Π_9 (9)	M-N	87.22	87.21	30.29				
Π_9 (9)	R-S	86.10	86.10	28.80				
37 (9)	GM	3.70	2.82	6.52				
37 (9)	M-I	3.70	2.82	6.52				
37 (9)	M-III	3.70	2.82	6.52				
37 (9)	R-S	3.70	2.82	6.52				
38 (9)	GM	74.15	74.15	74.15				
38 (9)	M-I	74.15	74.15	74.15				
38 (9)	M-III	74.15	74.15	24.77				
38 (9)	R-S	74.40	74.41	74.41				
39 (9)	GM	8.35	11.75	17.40				
39 (9)	M-I	8.35	11.75	17.40				
39 (9)	M-III	8.35	11.75	17.40				
39 (9)	R-S	8.35	11.75	17.40				
40 (9)	GM	69.30	34.65	23.13	69.30	69.30		
40 (9)	M-I	69.40	34.65	23.13	69.30	69.30		
40 (9)	M-III	69.30	34.65	23.10	69.30	0.10		
40 (9)	R-S	69.40	34.65	23.13	69.30	69.30		
41 (9)	GM	18.35	36.70	18.35	36.70	36.70		
41 (9)	M-I	18.35	36.70	18.35	36.70	36.70		
41 (9)	M-III	18.35	36.70	18.35	36.70	1.80		
41 (9)	R-S	18.35	36.70	18.35	36.70	36.70		
42 (9)	GM	8.35	1.08	4.70	4.93	4.70		
42 (9)	M-I	8.35	1.08	4.70	4.93	4.70		
42 (9)	M-III	8.35	0.00	4.70	4.11	4.81		
42 (9)	R-S	8.41	1.08	4.81	5.08	4.81		
43 (9)	GM	0.14	0.14	0.07	0.07	0.14	0.05	0.21
43 (9)	M-I	0.14	0.14	0.07	0.07	0.14	0.05	0.21
43 (9)	M-III	0.14	0.07	0.00	0.00	0.00	0.00	0.14
43 (9)	R-S	0.64	0.64	0.09	0.32	0.64	0.21	0.71
44 (9)	GM	1.00	1.00	4.78	3.82	1.93	2.00	1.00
44 (9)	M-I	1.00	1.00	4.78	3.82	2.00	2.00	1.00
44 (9)	M-III	1.00	0.00	4.78	3.82	1.96	1.96	0.96

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
44 (9)	R-S	1.92	1.92	4.78	4.13	3.99	3.51	2.23
45 (9)	GM	0.86	9.43	0.86	9.00	0.43	0.86	6.57
45 (9)	M-I	0.86	9.43	0.86	9.00	0.43	0.86	6.57
45 (9)	M-III	0.86	9.00	0.00	9.00	0.00	0.86	0.00
45 (9)	R-S	0.86	9.43	0.86	9.00	0.43	0.86	6.57
Π_10 (10)	GM	86.10	86.10	28.80				
Π_10 (10)	M-I	86.10	86.10	28.80				
Π_10 (10)	M-III	86.10	86.10	28.60				
Π_10 (10)	M-N	87.50	87.50	30.67				
Π_10 (10)	R-S	86.10	86.10	28.80				
46 (10)	GM	0.35	85.35	85.35				
46 (10)	M-I	0.35	85.35	85.35				
46 (10)	M-III	0.35	82.70	82.70				
46 (10)	R-S	3.00	87.67	87.67				
47 (10)	GM	68.60	68.60	22.87				
47 (10)	M-I	68.60	68.60	22.87				
47 (10)	M-III	68.60	68.60	22.87				
47 (10)	R-S	69.50	69.50	23.33				
48 (10)	GM	7.20	1.60	7.20				
48 (10)	M-I	7.20	1.60	7.20				
48 (10)	M-III	7.20	1.60	7.20				
48 (10)	R-S	7.20	1.60	7.20				
49 (10)	GM	2.50	0.50	4.37	1.25	4.38		
49 (10)	M-I	2.50	0.50	4.37	1.25	4.38		
49 (10)	M-III	2.50	0.00	4.37	0.00	2.29		
49 (10)	R-S	2.50	0.50	4.37	1.25	4.38		
50 (10)	GM	23.40	23.40	41.20	12.88	1.60		
50 (10)	M-I	23.40	23.40	41.20	12.88	1.60		
50 (10)	M-III	22.60	23.40	41.20	5.60	0.00		
50 (10)	R-S	23.40	23.81	41.20	12.88	1.60		
51 (10)	GM	17.40	17.40	5.40	8.70	5.40		
51 (10)	M-I	17.40	17.40	5.40	8.70	5.40		
51 (10)	M-III	17.40	17.40	1.40	5.90	0.00		
51 (10)	R-S	17.40	17.40	5.40	8.70	5.40		
52 (10)	GM	0.67	0.46	1.86	1.87	1.87	1.00	1.86
52 (10)	M-I	0.67	0.46	1.86	1.87	1.87	1.00	1.86
52 (10)	M-III	0.67	0.00	0.79	0.94	1.87	0.14	1.86
52 (10)	R-S	0.67	0.46	1.86	1.87	1.87	1.00	1.86
53 (10)	GM	1.15	2.21	1.30	1.91	2.01	1.60	2.21
53 (10)	M-I	1.15	2.21	1.90	1.91	2.01	1.60	2.21
53 (10)	M-III	1.01	2.01	0.80	1.47	2.01	1.60	1.20
53 (10)	R-S	3.00	4.50	3.00	4.00	4.50	3.00	4.50
54 (10)	GM	0.28	3.24	1.67	0.28	1.76	0.28	0.28
54 (10)	M-I	0.28	3.29	1.81	0.28	1.91	0.28	0.28
54 (10)	M-III	0.28	3.24	1.57	0.00	1.76	0.28	0.00
54 (10)	R-S	1.00	4.35	2.77	1.00	3.09	0.00	0.50
Π_12 (12)	GM	64.67	43.10	21.60				
Π_12 (12)	M-I	64.67	43.10	21.60				
Π_12 (12)	M-III	64.67	43.07	21.60				

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
Π_12 (12)	R-S	64.67	43.10	21.60				
55 (12)	GM	27.43	55.87	55.87				
55 (12)	M-I	27.43	62.48	55.87				
55 (12)	M-III	27.43	54.87	40.73				
55 (12)	R-S	27.63	63.41	56.92				
56 (12)	GM	2.80	0.70	2.80				
56 (12)	M-I	2.80	0.70	2.80				
56 (12)	M-III	2.80	0.70	2.80				
56 (12)	R-S	2.80	0.70	2.80				
57 (12)	GM	24.00	24.00	2.00				
57 (12)	M-I	24.00	24.00	2.00				
57 (12)	M-III	24.00	24.00	0.00				
57 (12)	R-S	24.00	24.00	2.00				
58 (12)	GM	0.42	0.45	0.30	0.42	0.72		
58 (12)	M-I	0.42	0.45	0.30	0.42	0.79		
58 (12)	M-III	0.42	0.45	0.24	0.42	0.67		
58 (12)	R-S	0.42	0.45	0.30	0.42	0.79		
59 (12)	GM	0.15	0.30	0.30	0.05	0.08		
59 (12)	M-I	0.15	0.30	0.30	0.05	0.08		
59 (12)	M-III	0.15	0.30	0.30	0.05	0.05		
59 (12)	R-S	0.15	0.30	0.30	0.05	0.08		
60 (12)	GM	3.17	1.00	1.00	3.33	1.00		
60 (12)	M-I	3.17	1.00	1.00	3.33	1.00		
60 (12)	M-III	3.17	1.00	1.00	3.33	1.00		
60 (12)	R-S	3.17	1.00	1.00	3.33	1.00		
61 (12)	GM	1.14	8.28	3.71	4.58	2.28	0.76	1.14
61 (12)	M-I	1.14	8.28	5.14	4.58	2.28	0.76	1.14
61 (12)	M-III	1.14	8.28	3.71	4.58	2.28	0.00	0.00
61 (12)	R-S	1.14	8.28	5.14	4.58	2.28	0.76	1.14
62 (12)	GM	0.44	0.13	0.22	0.13	1.78	0.18	1.42
62 (12)	M-I	0.44	0.13	0.22	0.13	1.78	0.18	1.42
62 (12)	M-III	0.44	0.00	0.22	0.00	1.78	0.18	1.42
62 (12)	R-S	0.44	0.13	0.22	0.13	1.78	0.18	1.42
63 (12)	GM	0.92	1.38	0.46	0.69	1.38	0.34	0.17
63 (12)	M-I	0.92	1.38	0.46	0.69	1.38	0.34	0.17
63 (12)	M-III	0.92	1.38	0.00	0.00	1.38	0.00	0.00
63 (12)	R-S	7.45	4.02	1.34	3.72	7.74	1.05	0.93
Π_13 (13)	GM	64.67	43.10	21.60				
Π_13 (13)	M-I	65.16	43.59	21.60				
Π_13 (13)	M-III	64.67	43.07	21.60				
Π_13 (13)	R-S	65.91	43.84	22.35				
Π_15 (15)	GM	0.50	0.27	0.30				
Π_15 (15)	M-I	0.50	0.27	0.40				
Π_15 (15)	M-III	0.50	0.20	0.40				
Π_15 (15)	R-S	2.82	1.50	2.26				
64 (15)	GM	1.98	5.95	5.95				
64 (15)	M-I	1.98	5.95	5.95				
64 (15)	M-III	1.98	5.95	5.95				
64 (15)	R-S	2.17	6.50	6.50				

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
65 (15)	GM	3.40	3.40	3.40				
65 (15)	M-I	3.40	3.40	3.40				
65 (15)	M-III	3.40	3.40	2.40				
65 (15)	R-S	5.38	4.05	5.38				
66 (15)	GM	40.00	0.50	40.00				
66 (15)	M-I	40.00	0.50	40.00				
66 (15)	M-III	40.00	0.00	40.00				
66 (15)	R-S	40.00	0.75	40.00				
Π_20 (20)	GM	1.00	0.53	0.60				
Π_20 (20)	M-I	1.00	0.53	0.80				
Π_20 (20)	M-III	1.00	0.40	0.80				
Π_20 (20)	R-S	5.00	2.67	4.00				
73 (20)	GM	2.54	3.67	3.80				
73 (20)	M-I	2.54	3.67	4.47				
73 (20)	M-III	2.54	2.60	4.47				
73 (20)	GM (R.)	1.46	3.65	3.65				
73 (20)	M-I (R.)	1.46	3.65	3.65				
73 (20)	M-III (R.)	1.46	3.65	3.65				
74 (20)	GM	2.10	4.20	6.30				
74 (20)	M-I	2.10	4.20	6.30				
74 (20)	M-III	2.10	4.20	6.30				
74 (20)	GM (R.)	2.10	6.10	8.20				
74 (20)	M-I (R.)	2.10	6.10	8.20				
74 (20)	M-III (R.)	2.10	6.10	8.20				
75 (20)	GM	8.27	8.27	4.20				
75 (20)	M-I	8.27	8.27	4.20				
75 (20)	M-III	8.20	8.20	4.20				
75 (20)	GM (R.)	8.40	8.40	4.20				
75 (20)	M-I (R.)	8.40	8.40	4.20				
75 (20)	M-III (R.)	8.40	4.40	4.20				
76 (20)	GM	4.31	1.58	4.35	4.85	6.20		
76 (20)	M-I	4.31	1.58	4.35	4.85	6.31		
76 (20)	M-III	3.81	0.00	1.62	3.66	4.72		
76 (20)	GM (R.)	4.85	2.36	4.35	4.85	7.27		
76 (20)	M-I (R.)	4.85	2.36	4.35	5.35	7.28		
76 (20)	M-III (R.)	4.35	0.00	3.85	4.85	5.80		
77 (20)	GM	2.33	2.62	4.52	5.02	3.43		
77 (20)	M-I	2.80	2.62	4.52	5.02	4.07		
77 (20)	M-III	2.72	2.23	2.67	4.21	0.52		
77 (20)	GM (R.)	3.25	2.25	6.75	4.50	3.55		
77 (20)	M-I (R.)	3.86	2.25	8.50	4.50	6.25		
77 (20)	M-III (R.)	2.19	0.05	4.06	2.19	3.98		
78 (20)	GM	8.50	6.00	3.00	7.33	3.00		
78 (20)	M-I	8.50	6.00	3.00	7.83	3.00		
78 (20)	M-III	8.00	4.00	2.67	4.00	0.00		
78 (20)	GM (R.)	8.80	5.90	3.00	7.73	3.00		
78 (20)	M-I (R.)	8.80	6.83	3.00	7.83	3.00		
78 (20)	M-III (R.)	8.33	4.33	2.50	4.00	0.00		
79 (20)	GM	0.55	3.73	10.78	8.35	1.10	23.45	0.73

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
79 (20)	M-I	0.55	3.73	10.78	9.53	1.10	23.45	0.73
79 (20)	M-III	0.55	3.13	9.00	9.53	1.10	22.27	0.00
79 (20)	GM (R.)	0.60	3.40	8.23	10.76	2.05	22.67	1.05
79 (20)	M-I (R.)	0.60	3.40	8.23	10.78	2.05	22.67	1.05
79 (20)	M-III (R.)	0.60	3.07	7.69	10.30	1.22	21.67	0.00
80 (20)	GM	7.32	3.40	1.27	8.40	5.23	8.02	3.42
80 (20)	M-I	8.16	5.50	1.27	8.40	5.23	8.48	3.42
80 (20)	M-III	2.60	3.76	0.00	5.00	5.23	6.26	0.54
80 (20)	GM (R.)	7.87	3.97	1.27	8.71	6.18	7.04	3.42
80 (20)	M-I (R.)	8.27	7.20	1.27	8.71	6.18	8.55	3.42
80 (20)	M-III (R.)	4.83	3.07	0.00	5.00	4.67	6.26	1.00
81 (20)	GM	3.57	3.09	8.81	1.19	1.19	1.78	9.76
81 (20)	M-I	3.57	3.09	9.70	1.19	1.19	1.78	9.76
81 (20)	M-III	1.79	2.86	8.57	0.00	0.89	1.19	8.57
81 (20)	GM (R.)	5.36	3.09	10.12	1.19	1.78	3.57	10.95
81 (20)	M-I (R.)	6.07	3.09	10.71	1.19	1.78	3.57	10.95
81 (20)	M-III (R.)	2.38	2.86	9.16	0.00	0.00	1.19	9.76
82 (50)	GM	5.11	4.43	7.16				
82 (50)	M-I	5.46	4.43	7.80				
82 (50)	M-III	5.11	3.70	7.70				
82 (50)	GM (R.)	6.71	4.15	6.23				
82 (50)	M-I (R.)	8.52	5.56	8.62				
82 (50)	M-III (R.)	4.50	3.74	7.50				
83 (50)	GM	13.23	12.81	3.88				
83 (50)	M-I	13.77	12.81	6.56				
83 (50)	M-III	11.21	11.60	4.51				
83 (50)	GM (R.)	14.47	5.70	14.47				
83 (50)	M-I (R.)	14.47	5.70	14.77				
83 (50)	M-III (R.)	11.38	4.70	10.61				
84 (50)	GM	8.81	3.53	8.59				
84 (50)	M-I	9.07	3.53	8.59				
84 (50)	M-III	6.00	0.08	6.00				
84 (50)	GM (R.)	17.39	4.67	17.38				
84 (50)	M-I (R.)	17.39	4.67	17.38				
84 (50)	M-III (R.)	10.78	0.00	10.78				
85 (50)	GM	5.68	4.66	5.02	5.35	4.60		
85 (50)	M-I	6.70	4.66	6.26	6.36	6.92		
85 (50)	M-III	3.23	1.05	3.51	3.14	2.41		
85 (50)	GM (R.)	5.72	10.24	4.57	9.51	8.16		
85 (50)	M-I (R.)	8.95	11.56	7.63	11.53	11.24		
85 (50)	M-III (R.)	5.21	6.70	4.60	6.61	5.24		
86 (50)	GM	3.35	2.00	3.95	5.50	6.20		
86 (50)	M-I	5.00	2.00	4.68	5.96	7.08		
86 (50)	M-III	2.10	0.00	2.24	3.82	4.16		
86 (50)	GM (R.)	6.28	2.17	5.50	9.61	9.87		
86 (50)	M-I (R.)	7.81	2.17	6.78	11.53	10.57		
86 (50)	M-III (R.)	4.37	1.18	2.08	5.94	2.20		
87 (50)	GM	3.22	6.43	6.41	6.43	6.71		
87 (50)	M-I	3.22	6.43	8.49	7.97	6.71		

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
87 (50)	M-III	3.15	4.00	3.75	3.15	5.61		
87 (50)	GM (R.)	2.25	3.93	7.70	8.97	7.07		
87 (50)	M-I (R.)	2.25	3.93	9.58	10.63	7.07		
87 (50)	M-III (R.)	2.10	0.00	4.02	5.37	4.17		
88 (50)	GM	4.63	6.60	7.98	5.22	4.71	9.05	6.31
88 (50)	M-I	6.86	6.95	8.28	9.00	5.63	10.28	6.89
88 (50)	M-III	3.56	4.60	6.20	2.25	3.18	8.25	3.60
88 (50)	GM (R.)	5.74	9.53	10.53	11.81	6.47	9.87	7.01
88 (50)	M-I (R.)	7.82	10.41	11.66	14.41	7.61	13.14	8.69
88 (50)	M-III (R.)	3.83	3.34	6.87	6.57	5.28	8.02	5.75
89 (50)	GM	6.60	9.35	6.92	9.77	6.09	6.60	6.20
89 (50)	M-I	7.69	11.61	9.67	11.39	6.09	8.67	6.72
89 (50)	M-III	5.59	7.01	5.22	5.86	3.12	3.89	2.12
89 (50)	GM (R.)	7.45	8.00	8.93	9.68	6.29	7.02	6.65
89 (50)	M-I (R.)	9.53	10.88	11.14	11.62	6.29	9.90	7.59
89 (50)	M-III (R.)	5.76	3.01	4.68	5.65	2.43	3.87	3.87
90 (50)	GM	5.95	8.73	1.57	7.08	10.41	5.86	5.57
90 (50)	M-I	7.16	10.67	1.57	7.08	11.59	5.86	5.57
90 (50)	M-III	5.08	7.46	0.00	4.81	7.23	5.59	4.62
90 (50)	GM (R.)	7.81	8.67	1.61	6.30	12.39	6.77	8.68
90 (50)	M-I (R.)	8.76	11.10	1.61	7.15	12.39	6.77	8.68
90 (50)	M-III (R.)	6.83	7.37	0.00	3.53	10.96	4.42	5.88
91 (100)	GM	5.63	7.07	4.99				
91 (100)	M-I	7.84	7.07	6.00				
91 (100)	M-III	6.70	6.11	3.70				
91 (100)	GM (R.)	9.61	8.68	12.92				
91 (100)	M-I (R.)	10.84	9.31	14.32				
91 (100)	M-III (R.)	8.71	4.70	11.89				
92 (100)	GM	2.36	20.19	20.19				
92 (100)	M-I	2.36	20.19	20.19				
92 (100)	M-III	2.36	15.37	13.06				
92 (100)	GM (R.)	1.88	7.10	7.10				
92 (100)	M-I (R.)	1.88	7.10	7.09				
92 (100)	M-III (R.)	1.88	6.18	6.17				
93 (100)	GM	8.98	8.97	2.42				
93 (100)	M-I	8.98	8.97	2.42				
93 (100)	M-III	6.58	6.58	2.42				
93 (100)	GM (R.)	10.33	10.33	2.67				
93 (100)	M-I (R.)	10.33	10.33	2.67				
93 (100)	M-III (R.)	7.20	7.20	0.00				
94 (100)	GM	6.84	6.63	9.41	7.43	6.16		
94 (100)	M-I	7.89	10.45	10.98	8.17	7.44		
94 (100)	M-III	3.70	2.82	6.76	4.87	5.00		
94 (100)	GM (R.)	12.63	8.69	9.07	11.33	8.37		
94 (100)	M-I (R.)	13.60	11.65	11.55	14.71	9.49		
94 (100)	M-III (R.)	11.34	3.96	5.29	7.62	5.20		
95 (100)	GM	8.44	11.15	5.21	7.34	5.51		
95 (100)	M-I	10.54	11.75	6.03	9.05	6.85		
95 (100)	M-III	7.68	6.36	3.24	4.38	1.89		

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
95 (100)	GM (R.)	11.00	14.05	7.83	9.23	8.41		
95 (100)	M-I (R.)	15.87	16.32	11.75	14.36	8.41		
95 (100)	M-III (R.)	6.14	6.46	2.63	3.84	1.59		
96 (100)	GM	2.63	4.24	2.73	7.53	7.53		
96 (100)	M-I	2.63	4.24	2.73	8.23	7.53		
96 (100)	M-III	2.63	0.00	0.00	5.61	2.98		
96 (100)	GM (R.)	2.83	4.93	2.73	12.32	12.32		
96 (100)	M-I (R.)	2.83	4.93	2.73	12.47	12.47		
96 (100)	M-III (R.)	2.81	0.00	0.00	3.68	5.09		
97 (100)	GM	5.96	5.70	5.78	3.69	6.58	5.58	6.01
97 (100)	M-I	7.07	6.99	6.52	5.15	8.44	7.28	6.94
97 (100)	M-III	4.25	2.42	2.37	2.56	2.87	2.47	3.32
97 (100)	GM (R.)	9.18	8.98	6.79	6.82	7.34	7.90	6.85
97 (100)	M-I (R.)	11.94	10.88	8.58	8.32	11.24	9.58	9.05
97 (100)	M-III (R.)	6.00	4.01	2.52	2.66	4.30	2.24	2.98
98 (100)	GM	7.51	7.13	8.57	4.85	8.57	8.37	5.74
98 (100)	M-I	8.86	8.17	10.89	4.85	9.60	8.43	6.06
98 (100)	M-III	6.15	3.95	5.11	0.11	4.02	3.52	3.17
98 (100)	GM (R.)	9.27	9.68	12.11	4.89	11.41	10.87	6.91
98 (100)	M-I (R.)	12.31	12.66	14.61	4.89	12.67	10.87	6.91
98 (100)	M-III (R.)	6.58	4.83	6.00	0.00	4.08	2.76	3.26
99 (100)	GM	4.21	3.17	2.00	5.63	5.06	6.86	6.90
99 (100)	M-I	4.21	3.17	2.00	6.35	7.51	8.02	7.79
99 (100)	M-III	3.66	1.56	0.31	1.91	3.58	4.33	2.80
99 (100)	GM (R.)	4.08	4.12	2.08	6.96	8.27	9.07	9.02
99 (100)	M-I (R.)	4.08	4.12	2.08	9.70	9.80	9.07	9.02
99 (100)	M-III (R.)	3.91	0.95	0.00	2.46	3.22	3.60	4.38
100 (200)	GM	0.41	0.41	0.38				
100 (200)	M-I	0.41	0.53	0.38				
100 (200)	M-III	0.41	0.41	0.00				
100 (200)	GM (R.)	0.41	0.80	0.80				
100 (200)	M-I (R.)	0.41	0.80	0.80				
100 (200)	M-III (R.)	0.41	0.80	0.80				
101 (200)	GM	4.31	5.58	6.66				
101 (200)	M-I	6.04	7.74	8.45				
101 (200)	M-III	4.19	4.38	4.66				
101 (200)	GM (R.)	9.29	11.68	8.51				
101 (200)	M-I (R.)	9.29	13.67	10.31				
101 (200)	M-III (R.)	8.12	11.51	5.92				
102 (200)	GM	9.57	8.66	7.04				
102 (200)	M-I	10.96	10.77	9.31				
102 (200)	M-III	6.06	3.03	3.03				
102 (200)	GM (R.)	6.83	8.62	7.48				
102 (200)	M-I (R.)	9.52	9.54	8.79				
102 (200)	M-III (R.)	6.29	4.58	3.04				
103 (200)	GM	3.53	4.87	8.30	6.41	6.61		
103 (200)	M-I	6.38	5.15	10.59	8.24	8.62		
103 (200)	M-III	2.50	2.37	2.20	3.54	2.93		
103 (200)	GM (R.)	7.32	7.28	12.57	8.19	12.45		

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
103 (200)	M-I (R.)	10.07	7.28	16.96	11.93	13.68		
103 (200)	M-III (R.)	4.51	2.40	6.27	4.83	3.36		
104 (200)	GM	4.88	4.49	2.63	4.16	5.95		
104 (200)	M-I	4.88	7.31	2.63	7.35	7.89		
104 (200)	M-III	3.14	3.43	0.00	4.00	2.74		
104 (200)	GM (R.)	6.22	7.93	2.77	9.55	9.94		
104 (200)	M-I (R.)	6.22	9.73	2.77	11.64	10.76		
104 (200)	M-III (R.)	6.04	2.29	0.00	4.00	3.90		
105 (200)	GM	6.32	3.46	6.23	5.96	6.04		
105 (200)	M-I	6.32	3.46	8.38	8.54	8.23		
105 (200)	M-III	5.24	0.00	6.17	2.05	1.33		
105 (200)	GM (R.)	7.04	3.48	7.54	7.87	6.40		
105 (200)	M-I (R.)	7.04	3.48	9.47	10.62	8.40		
105 (200)	M-III (R.)	7.04	0.00	2.63	4.96	0.80		
106 (200)	GM	5.79	5.24	6.46	5.01	6.33	3.76	4.65
106 (200)	M-I	6.90	5.86	9.00	6.95	8.75	6.16	6.06
106 (200)	M-III	3.88	3.13	3.90	1.62	3.01	2.47	2.51
106 (200)	GM (R.)	6.70	5.20	7.33	6.06	11.12	7.85	6.38
106 (200)	M-I (R.)	9.36	5.89	11.52	6.06	13.00	10.47	8.50
106 (200)	M-III (R.)	5.39	3.92	3.80	1.93	5.49	2.57	2.20
107 (200)	GM	4.92	7.29	5.96	7.39	5.33	4.65	5.47
107 (200)	M-I	6.98	7.71	8.17	9.28	7.60	7.63	5.47
107 (200)	M-III	5.47	3.37	4.74	3.75	2.96	2.11	1.47
107 (200)	GM (R.)	8.78	9.28	8.50	9.64	8.80	7.94	6.23
107 (200)	M-I (R.)	11.78	9.80	13.00	14.72	12.23	10.44	6.23
107 (200)	M-III (R.)	7.05	1.76	4.84	2.84	3.05	3.42	1.57
108 (200)	GM	6.32	8.42	2.58	2.31	5.13	7.06	2.02
108 (200)	M-I	6.32	11.47	2.58	2.31	5.13	7.06	2.02
108 (200)	M-III	5.30	4.89	0.00	0.00	1.14	2.72	0.00
108 (200)	GM (R.)	9.97	10.67	2.84	2.61	5.71	8.75	2.17
108 (200)	M-I (R.)	9.97	12.74	2.84	2.61	5.71	8.75	2.17
108 (200)	M-III (R.)	9.35	6.14	0.00	0.00	1.53	5.71	0.00
109 (500)	GM (R.)	4.21	7.18	5.09				
109 (500)	M-I (R.)	4.21	7.93	5.09				
109 (500)	M-III (R.)	4.21	6.42	3.08				
109 (500)	GM (LB.)	4.21	7.18	5.09				
109 (500)	M-I (LB.)	4.21	7.93	5.09				
109 (500)	M-III (LB.)	4.21	6.42	3.08				
110 (500)	GM (R.)	13.73	15.95	12.26				
110 (500)	M-I (R.)	16.74	17.10	16.02				
110 (500)	M-III (R.)	8.36	10.35	5.92				
110 (500)	GM (LB.)	13.73	15.95	12.26				
110 (500)	M-I (LB.)	16.74	17.10	16.02				
110 (500)	M-III (LB.)	8.36	10.35	5.92				
111 (500)	GM (R.)	4.15	7.48	7.48				
111 (500)	M-I (R.)	4.15	8.73	7.48				
111 (500)	M-III (R.)	4.14	6.55	4.00				
111 (500)	GM (LB.)	4.15	7.48	7.48				
111 (500)	M-I (LB.)	4.15	8.73	7.48				



No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
111 (500)	M-III (LB.)	4.14	5.24	4.00				
112 (500)	GM (R.)	14.20	14.25	20.35	14.85	12.03		
112 (500)	M-I (R.)	17.91	19.09	26.77	19.69	14.71		
112 (500)	M-III (R.)	9.30	2.00	12.94	7.69	3.65		
112 (500)	GM (LB.)	14.20	14.25	20.35	14.85	12.03		
112 (500)	M-I (LB.)	17.91	19.09	26.77	19.69	14.71		
112 (500)	M-III (LB.)	9.30	2.00	12.94	7.69	3.65		
113 (500)	GM (R.)	9.25	10.67	10.04	9.90	9.34		
113 (500)	M-I (R.)	13.92	14.54	13.70	15.18	14.21		
113 (500)	M-III (R.)	7.46	3.56	2.99	3.00	1.88		
113 (500)	GM (LB.)	8.93	10.67	10.04	9.90	9.34		
113 (500)	M-I (LB.)	13.92	14.54	13.70	15.18	14.21		
113 (500)	M-III (LB.)	7.46	3.38	2.99	3.00	2.24		
114 (500)	GM (R.)	2.38	2.47	10.34	10.34	4.11		
114 (500)	M-I (R.)	2.38	2.47	10.56	10.34	4.11		
114 (500)	M-III (R.)	2.38	0.00	6.00	6.00	0.00		
114 (500)	GM (LB.)	2.38	2.47	10.34	10.34	4.11		
114 (500)	M-I (LB.)	2.38	2.47	10.56	10.34	4.11		
114 (500)	M-III (LB.)	2.38	0.00	6.00	6.00	0.00		
115 (500)	GM (R.)	8.05	6.67	5.93	6.49	8.09	6.88	6.80
115 (500)	M-I (R.)	11.59	10.86	6.11	10.25	11.96	10.61	10.20
115 (500)	M-III (R.)	4.41	1.81	1.50	1.36	1.41	1.30	1.29
115 (500)	GM (LB.)	8.05	6.67	5.93	6.49	8.09	6.88	6.80
115 (500)	M-I (LB.)	11.59	10.86	6.11	10.25	11.96	10.61	10.20
115 (500)	M-III (LB.)	4.41	1.81	1.50	1.36	1.41	1.30	1.29
116 (500)	GM (R.)	13.65	7.25	10.06	17.24	4.73	16.04	4.03
116 (500)	M-I (R.)	15.21	7.25	13.00	19.49	4.73	19.63	4.03
116 (500)	M-III (R.)	12.08	2.16	3.72	6.28	1.47	7.33	0.26
116 (500)	GM (LB.)	13.65	7.25	10.06	17.24	4.73	16.04	4.03
116 (500)	M-I (LB.)	15.21	7.25	13.00	19.49	4.73	19.63	4.03
116 (500)	M-III (LB.)	12.08	2.07	3.72	6.28	1.47	7.33	0.26
117 (500)	GM (R.)	7.16	10.51	8.96	2.80	3.63	10.23	11.90
117 (500)	M-I (R.)	7.16	14.17	8.96	2.80	3.63	11.55	13.65
117 (500)	M-III (R.)	6.25	4.88	2.90	0.00	0.00	1.94	5.72
117 (500)	GM (LB.)	7.16	10.51	8.96	2.80	3.63	10.23	11.90
117 (500)	M-I (LB.)	7.16	14.17	8.96	2.80	3.63	11.55	13.65
117 (500)	M-III (LB.)	6.25	4.88	2.90	0.00	0.00	1.94	5.72
118 (1000)	GM (R.)	8.44	12.00	10.47				
118 (1000)	M-I (R.)	13.59	12.77	11.36				
118 (1000)	M-III (R.)	12.10	9.05	6.96				
118 (1000)	GM (LB.)	8.44	12.00	10.47				
118 (1000)	M-I (LB.)	13.59	12.77	11.36				
118 (1000)	M-III (LB.)	12.10	9.05	6.96				
119 (1000)	GM (R.)	6.12	12.58	18.30				
119 (1000)	M-I (R.)	6.12	12.58	18.30				
119 (1000)	M-III (R.)	4.97	8.59	12.42				
119 (1000)	GM (LB.)	6.12	12.58	18.30				
119 (1000)	M-I (LB.)	6.12	12.58	18.30				
119 (1000)	M-III (LB.)	4.97	8.59	12.42				

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
120 (1000)	GM (R.)	2.06	15.61	15.61				
120 (1000)	M-I (R.)	0.00	15.61	15.61				
120 (1000)	M-III (R.)	2.06	9.62	9.62				
120 (1000)	GM (LB.)	2.06	15.61	15.61				
120 (1000)	M-I (LB.)	2.06	15.61	15.61				
120 (1000)	M-III (LB.)	2.06	9.62	9.62				
121 (1000)	GM (R.)	13.06	14.00	15.39	12.28	16.03		
121 (1000)	M-I (R.)	18.55	19.76	22.27	18.63	16.03		
121 (1000)	M-III (R.)	5.47	3.61	3.41	3.68	5.64		
121 (1000)	GM (LB.)	13.06	14.00	15.39	12.28	16.03		
121 (1000)	M-I (LB.)	18.55	19.76	22.27	18.63	16.03		
121 (1000)	M-III (LB.)	5.28	3.42	3.09	3.65	5.39		
122 (1000)	GM (R.)	7.93	14.96	20.96	5.18	2.43		
122 (1000)	M-I (R.)	7.93	14.96	22.11	5.18	2.43		
122 (1000)	M-III (R.)	6.33	8.46	18.29	2.75	0.75		
122 (1000)	GM (LB.)	7.93	14.96	19.82	5.18	2.43		
122 (1000)	M-I (LB.)	7.93	14.96	60.00	5.18	0.60		
122 (1000)	M-III (LB.)	6.05	10.05	58.13	3.03	1.03		
123 (1000)	GM (R.)	1.93	2.42	7.44	7.44	3.40		
123 (1000)	M-I (R.)	1.93	2.42	7.44	7.44	3.40		
123 (1000)	M-III (R.)	1.88	0.00	3.05	3.05	0.00		
123 (1000)	GM (LB.)	1.93	2.42	7.44	7.44	3.40		
123 (1000)	M-I (LB.)	1.93	2.42	7.44	7.44	3.40		
123 (1000)	M-III (LB.)	1.93	0.00	3.17	3.17	0.00		
124 (1000)	GM (R.)	7.05	10.13	7.87	8.84	7.28	8.79	7.56
124 (1000)	M-I (R.)	8.51	15.14	13.05	13.06	12.07	9.63	11.60
124 (1000)	M-III (R.)	4.51	2.99	1.48	1.63	1.40	1.67	1.85
124 (1000)	GM (LB.)	8.51	27.17	18.28	19.20	7.00	9.63	21.71
124 (1000)	M-I (LB.)	8.51	15.14	13.05	13.06	12.07	9.63	11.60
124 (1000)	M-III (LB.)	4.51	2.99	1.48	1.63	1.40	1.67	1.85
125 (1000)	GM (R.)	-	-	-	-	-	-	-
125 (1000)	M-I (R.)	-	-	-	-	-	-	-
125 (1000)	M-III (R.)	40.63	9.82	5.82	4.03	0.00	0.00	4.00
125 (1000)	GM (LB.)	31.07	20.44	13.10	8.75	0.95	2.81	8.90
125 (1000)	M-I (LB.)	32.66	20.81	14.47	8.75	0.95	2.81	8.90
125 (1000)	M-III (LB.)	20.28	7.82	4.45	4.03	0.00	0.00	4.00
126 (1000)	GM (R.)	-	-	-	-	-	-	-
126 (1000)	M-I (R.)	-	-	-	-	-	-	-
126 (1000)	M-III (R.)	-	-	-	-	-	-	-
126 (1000)	GM (LB.)	4.26	7.52	14.64	2.92	9.65	8.86	14.64
126 (1000)	M-I (LB.)	4.26	7.52	14.64	2.92	9.65	8.86	20.00
126 (1000)	M-III (LB.)	3.87	0.00	4.68	0.00	3.67	1.43	9.16
127 (2000)	GM (R.)	11.63	3.75	7.98				
127 (2000)	M-I (R.)	11.63	3.75	7.98				
127 (2000)	M-III (R.)	7.60	1.46	6.60				
127 (2000)	GM (LB.)	11.63	3.75	7.98				
127 (2000)	M-I (LB.)	11.63	3.75	7.98				
127 (2000)	M-III (LB.)	7.60	1.46	6.60				
128 (2000)	GM (R.)	13.75	12.31	10.76				

No (μέγεθος)	Αλγόριθμος	WV1	WV2	WV3	WV4	WV5	WV6	WV7
128 (2000)	M-I (R.)	16.85	12.31	13.85				
128 (2000)	M-III (R.)	11.39	9.27	6.91				
128 (2000)	GM (LB.)	13.75	12.31	10.76				
128 (2000)	M-I (LB.)	16.85	12.31	13.85				
128 (2000)	M-III (LB.)	11.39	9.27	6.91				
129 (2000)	GM (R.)	6.28	6.80	7.60				
129 (2000)	M-I (R.)	8.76	8.05	8.02				
129 (2000)	M-III (R.)	4.46	2.01	2.44				
129 (2000)	GM (LB.)	6.28	6.80	7.60				
129 (2000)	M-I (LB.)	8.76	8.05	8.02				
129 (2000)	M-III (LB.)	4.46	2.01	2.44				
130 (2000)	GM (R.)	14.17	12.80	14.58	14.05	15.53		
130 (2000)	M-I (R.)	20.68	17.85	21.02	20.75	19.98		
130 (2000)	M-III (R.)	7.64	4.35	3.38	2.93	4.45		
130 (2000)	GM (LB.)	14.17	12.80	14.58	14.05	15.53		
130 (2000)	M-I (LB.)	20.68	17.85	21.02	20.75	19.98		
130 (2000)	M-III (LB.)	19.07	27.39	25.39	11.45	10.45		
131 (2000)	GM (R.)	11.11	10.91	11.10	11.33	11.91		
131 (2000)	M-I (R.)	17.83	10.91	16.91	17.54	17.48		
131 (2000)	M-III (R.)	7.15	3.93	2.28	2.27	3.81		
131 (2000)	GM (LB.)	11.11	10.91	11.10	11.33	11.91		
131 (2000)	M-I (LB.)	32.30	4.88	20.75	23.42	36.35		
131 (2000)	M-III (LB.)	7.15	3.93	2.28	2.27	3.81		
132 (2000)	GM (R.)	9.46	9.49	4.29	9.89	4.41		
132 (2000)	M-I (R.)	11.76	9.49	4.29	12.02	4.41		
132 (2000)	M-III (R.)	4.44	6.00	0.00	3.36	0.00		
132 (2000)	GM (LB.)	9.46	9.49	4.29	9.89	4.41		
132 (2000)	M-I (LB.)	11.76	9.49	4.29	12.02	4.41		
132 (2000)	M-III (LB.)	4.44	6.00	0.00	3.36	0.00		
133 (2000)	GM (R.)	-	-	-	-	-	-	-
133 (2000)	M-I (R.)	-	-	-	-	-	-	-
133 (2000)	M-III (R.)	5.62	1.71	2.05	1.72	2.51	6.06	2.00
133 (2000)	GM (LB.)	9.99	9.85	9.64	9.09	10.17	11.31	8.77
133 (2000)	M-I (LB.)	16.15	15.56	14.97	14.85	11.27	18.71	8.77
133 (2000)	M-III (LB.)	5.62	1.71	2.05	1.72	2.51	6.06	2.00
134 (2000)	GM (R.)	7.77	7.36	7.54	8.29	7.57	7.87	4.76
134 (2000)	M-I (R.)	11.79	11.81	11.87	12.88	10.06	12.25	4.76
134 (2000)	M-III (R.)	-	-	-	-	-	-	-
134 (2000)	GM (LB.)	7.77	7.36	7.54	8.29	7.57	7.87	4.76
134 (2000)	M-I (LB.)	-	-	-	-	-	-	-
134 (2000)	M-III (LB.)	-	-	-	-	-	-	-
135 (2000)	GM (R.)	8.15	8.24	8.17	7.70	7.62	7.65	7.71
135 (2000)	M-I (R.)	13.19	13.01	13.01	8.31	10.20	12.41	12.56
135 (2000)	M-III (R.)	4.35	0.93	1.70	1.84	1.75	2.14	0.99
135 (2000)	GM (LB.)	8.15	8.24	8.17	7.70	7.62	7.65	7.71
135 (2000)	M-I (LB.)	13.19	13.01	13.01	8.31	10.20	12.41	12.56
135 (2000)	M-III (LB.)	4.34	0.93	1.69	1.84	1.75	2.14	0.99

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ: Πηγαίος Κώδικας

### **Αλγόριθμος *Manas-Nedoma***

```
using System;
using System.Text;
using System.Collections;
using MathNet.Numerics.LinearAlgebra;

namespace MusaAPI
{
    class Program
    {
        #region Main Function

        static void Main()
        {
            postManasNedoma post = new postManasNedoma();

            //////////////////////////////////////

            post._variables = 4;
            post._bounds = 2;

            post.rows = post._bounds;
            post.cols = post._variables + post._bounds;

            post._iters = 0;

            post.CONSESSION_MAN = 20;
            post.GAMMA_ARRAY = new ArrayList();
            post.W_ARRAY = new ArrayList();
            post.R_ARRAY = new ArrayList();

            post.ITERATIONS = 0;
            post.STEP = 0;

            post.RESULTS = new ArrayList();

            //////////////////////////////////////

            int rows = post._bounds;
            int cols = post._variables + post._bounds;

            post.make_lp(rows, cols);

            // Set variables
            post.set_variables(cols - rows);

            // Set slack variables
            post.set_slack_variables(rows);
        }
    }
}
```

```

// Set slack basis constraints
//set_basis_constraints(rows);

// Set slack variables basis
post.set_basis(post.SLACK_VARIABLES);

// Set x axis header
post.set_x_axis_header(cols - rows, rows);

// Set matrix
post.set_matrix_row(0, new double[] { 1, 1, 1, 1, 1, 0 });
post.set_matrix_row(1, new double[] { 0, 0, 2, 3, 0, 1 });

// Set right hand side
post.set_right_hand_side(new double[] { 18, 6 });

// Set objective function
post.set_objective_function(new double[] { 3, 4, 5, 6, 0, 0 });

// Set marginal net incomes
post.set_marginal_net_incomes(new double[] { 3, 4, 5, 6, 0, 0 });

// Set objective
post.set_objective(0);

// Set iterations
post.set_iterations(0);

post.lp_solve();
post.lp_post_optimization();

Console.WriteLine("Done!");
Console.Read();
Console.Read();
}

#endregion
}

public class postManasNedoma
{
    #region Variables Definition

    public string[] VARIABLES;           // LP Variables
    public string[] SLACK_VARIABLES;    // LP Slack Variables
    public double[] BASIS_CONSTRAINTS;  // Basis Constraints
    public string[] BASIS;              // Basis
    public string[] xAXIS_HEADER;       // Axis x header
    public Matrix MATRIX;               // Matrix
    public double[] RIGHT_HARD_SIDE;    // Right Hand Side
    public double[] OBJECTIVE_FUNCTION; // Objective
    public double[] MARGINAL_NET_INCOMES; // Marginal Net Incomes
    public double OBJECTIVE_VALUE;      // Objective Value
    public ArrayList RESULTS;           // Results

    // Post Optimization
    public double CONSESSION_MAN;       // Manas Nedoma Concession
    public ArrayList GAMMA_ARRAY;       // Gamma Array
    public ArrayList W_ARRAY;           // W Array
    
```

```

public ArrayList R_ARRAY;          // R Array

// Process variables
public int ITERATIONS;           // Iterations
public int STEP;                 // Step

////////////////////////////////////
public int _variables;
public int _bounds;
public int rows;
public int cols;
public int _iters = 0;

#endregion

#region Enumerators Definition

public enum constraint_type
{
    LE = 1,
    EQ = 3,
    GE = 2,
}

#endregion

#region LP Initialization

public void make_lp(Int32 rows, Int32 cols)
{
    VARIABLES = make_variables(cols - rows);
    BASIS_CONSTRAINTS = make_basis_constraints(rows);
    BASIS = make_basis(rows);
    xAXIS_HEADER = make_x_axis_header(cols);
    MATRIX = make_matrix(rows, cols);
    RIGHT_HARD_SIDE = make_right_hand_side(rows);
    OBJECTIVE_FUNCTION = make_objective_function(cols);
    MARGINAL_NET_INCOMES = make_marginal_net_incomes(cols);
}

#endregion

#region Make Functions

private string[] make_variables(Int32 rows)
{
    return new string[rows];
}

private double[] make_variables_constraints(Int32 rows)
{
    return new double[rows];
}

private double[] make_basis_constraints(Int32 rows)
{
    return new double[rows];
}

```

```

private string[] make_basis(Int32 rows)
{
    return new string[rows];
}

private string[] make_x_axis_header(Int32 cols)
{
    return new string[cols];
}

private Matrix make_matrix(Int32 rows, Int32 cols)
{
    return new Matrix(rows, cols);
}

private double[] make_right_hand_side(Int32 rows)
{
    return new double[rows];
}

private double[] make_objective_function(Int32 cols)
{
    return new double[cols];
}

private double[] make_marginal_net_incomes(Int32 cols)
{
    return new double[cols];
}

#endregion

#region Set Functions

public void set_iterations(int _iter)
{
    ITERATIONS = _iter;
}

public void set_objective(double _obj)
{
    OBJECTIVE_VALUE = _obj;
}

public void set_marginal_net_incomes_item(int rowIdx, double _value)
{
    MARGINAL_NET_INCOMES[rowIdx] = _value;
}

public void set_marginal_net_incomes(double[] _values)
{
    for (int i = 0; i < _values.Length; i++)
        MARGINAL_NET_INCOMES[i] = _values[i];
}

public void set_objective_function_item(int rowIdx, double _value)
{
    OBJECTIVE_FUNCTION[rowIdx] = _value;
}

```

```
public void set_objective_function(double[] _values)
{
    for (int i = 0; i < _values.Length; i++)
        OBJECTIVE_FUNCTION[i] = _values[i];
}

public void set_right_hand_side_Item(int rowIdx, double _value)
{
    RIGHT_HARD_SIDE[rowIdx] = _value;
}

public void set_right_hand_side(double[] _values)
{
    for (int i = 0; i < _values.Length; i++)
        RIGHT_HARD_SIDE[i] = _values[i];
}

private void set_matrix_item(int rowIdx, int colIdx, double _value)
{
    MATRIX[rowIdx, colIdx] = _value;
}

public void set_matrix_row(int rowIdx, double[] _row)
{
    for (int i = 0; i < _row.Length; i++)
        MATRIX[rowIdx, i] = _row[i];
}

public void set_x_axis_header(int _vars, int _bounds)
{
    for (int i = 0; i < _vars; i++)
        xAXIS_HEADER[i] = "x_" + (i + 1).ToString();

    for (int i = _vars; i < _bounds + _vars; i++)
        xAXIS_HEADER[i] = "sv_" + (i - _vars + 1).ToString();
}

private void set_x_axis_header_item(int rowIdx, string _value)
{
    xAXIS_HEADER[rowIdx] = _value;
}

private void set_basis_item(int rowIdx, string _value)
{
    BASIS[rowIdx] = _value;
}

public void set_basis(string[] _values)
{
    for (int i = 0; i < _values.Length; i++)
        BASIS[i] = _values[i];
}

private void set_basis_constraints_item(int rowIdx, double _value)
{
    BASIS_CONSTRAINTS[rowIdx] = _value;
}
```



```
private void set_basis_constraints(double[] bases)
{
    BASIS_CONSTRAINTS = bases;
}

public void set_variables(int _rows)
{
    VARIABLES = new string[_rows];
    for (int i = 0; i < _rows; i++)
        VARIABLES[i] = string.Format("x_{0}", i + 1);
}

public void set_slack_variables(int _cols)
{
    SLACK_VARIABLES = new string[_cols];
    for (int i = 0; i < _cols; i++)
        SLACK_VARIABLES[i] = string.Format("sv_{0}", i + 1);
}

#endregion

#region Get Functions

public int get_basis_item(int basis_item)
{
    for (int i = 0; i < xAXIS_HEADER.Length; i++)
        if (BASIS[basis_item] == xAXIS_HEADER[i])
            return i;
    return -1;
}

public int get_w_array_idx(ArrayList list, Object obj)
{
    int countEquals = 0;
    int count = 0;
    for (int i = 0; i < list.Count; i++)
    {
        count = ((string[])list[i]).Length;
        countEquals = 0;
        for (int ii = 0; ii < count; ii++)
            for (int iii = 0; iii < count; iii++)
                if (((string[])list[i])[ii] == ((string[])obj)[iii])
                    countEquals++;
        if (countEquals == count)
            return i;
    }
    return -1;
}

#endregion

#region Add Functions

public void add_column()
{
    cols++;

    Matrix tmp_matrix = new Matrix(rows, cols);
    double[] tmp_column = new double[rows];
}
```

```
Array.Resize(ref xAXIS_HEADER, cols);
xAXIS_HEADER[cols - 1] = string.Format("x_{0}", cols);

for (int i = 0; i < MATRIX.RowCount; i++)
{
    tmp_matrix[i, cols - 1] = 0;
    for (int ii = 0; ii < MATRIX.ColumnCount; ii++)
        tmp_matrix[i, ii] = MATRIX[i, ii];
}

MATRIX = tmp_matrix;
}

public void add_row()
{
    rows++;
    Matrix tmp_matrix = new Matrix(rows, cols);

    Array.Resize(ref BASIS, rows);
    BASIS[rows - 1] = string.Format("x_{0}", cols);

    Array.Resize(ref BASIS_CONSTRAINTS, rows);
    BASIS_CONSTRAINTS[rows - 1] = 0;

    Array.Resize(ref OBJECTIVE_FUNCTION, cols);
    OBJECTIVE_FUNCTION[cols - 1] = 0;

    Array.Resize(ref MARGINAL_NET_INCOMES, cols);
    MARGINAL_NET_INCOMES[cols - 1] = 0;

    Array.Resize(ref RIGHT_HARD_SIDE, rows);
    RIGHT_HARD_SIDE[rows - 1] = CONSESSION_MAN;

    for (int i = 0; i < MATRIX.RowCount; i++)
        for (int ii = 0; ii < MATRIX.ColumnCount; ii++)
            tmp_matrix[i, ii] = MATRIX[i, ii];

    MATRIX = tmp_matrix;

    for (int ii = 0; ii < MATRIX.ColumnCount; ii++)
        tmp_matrix[rows - 1, ii] = exec_marginal_net_incomes_man(MARGINAL_NET_INCOMES)[ii];
    tmp_matrix[rows - 1, cols - 1] = 1;
}

#endregion

#region Display Functions

public void display_iteration(double[] _basis_constr, string[] _basis, Matrix _matrix,
    double[] _right_hand_side, double[] _objective_function, double[] _marginal_net_incomes,
    int _iterations, string _header)
{
    StringBuilder sb = new StringBuilder();
    String line = String.Empty.PadLeft(7 * (cols + 3), '-') + "\r\n";

    sb.Append(_header); sb.Append("\r\n"); sb.Append(line);

    sb.Append("CONST".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append(" |");
```

```

sb.Append("BASIS".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");

for (int i = 0; i < _variables; i++)
{ sb.Append(VARIABLES[i].ToString().PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); }

for (int i = 0; i < _bounds; i++)
{ sb.Append(SLACK_VARIABLES[i].ToString().PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); }
sb.Append("RHS".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); sb.Append("\r\n"); sb.Append(line);

for (int i = 0; i < rows; i++)
{
    sb.Append(BASIS_CONSTRAINTS[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
    sb.Append(BASIS[i].ToString().PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
    for (int ii = 0; ii < cols; ii++)
    { sb.Append(MATRIX[i, ii].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); }
    sb.Append(RIGHT_HARD_SIDE[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
sb.Append("\r\n");
} sb.Append(line);

sb.Append("OBJECTIVE FUN".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
for (int i = 0; i < cols; i++)
{ sb.Append(OBJECTIVE_FUNCTION[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); }
sb.Append("\r\n");

sb.Append("MARG NET INCO".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
for (int i = 0; i < cols; i++)
{ sb.Append(MARGINAL_NET_INCOMES[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); }

sb.Append(OBJECTIVE_VALUE.ToString().PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); sb.Append("\r\n");
sb.Append(line);

    Console.WriteLine(sb);
}

public void display_manas_nedoma(double[] _basis_constr, string[] _basis, Matrix _matrix,
double[] _right_hand_side, double[] _objective_function, double[] _marginal_net_incomes,
int _iterations, string _header)
{
    StringBuilder sb = new StringBuilder();
    String line = String.Empty.PadLeft(7 * (cols + rows), '-') + "\r\n";

    sb.Append(_header); sb.Append("\r\n"); sb.Append(line);

    sb.Append("CONST".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
    sb.Append("BASIS".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");

    for (int i = 0; i < cols; i++)
    { sb.Append(xAXIS_HEADER[i].ToString().PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); }

    sb.Append("RHS".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); sb.Append("\r\n"); sb.Append(line);
    for (int i = 0; i < rows; i++)
    {
        sb.Append(BASIS_CONSTRAINTS[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
        sb.Append(BASIS[i].ToString().PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
        for (int ii = 0; ii < cols; ii++)
        { sb.Append(MATRIX[i, ii].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); }
        sb.Append(RIGHT_HARD_SIDE[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
sb.Append("\r\n");
} sb.Append(line);
}

```

```

    Console.Write(sb);
}

#endregion

#region Execution Functions

private double exec_calculation(int col)
{
    double ret = double.MaxValue;
    for (int i = 0; i < BASIS_CONSTRAINTS.Length; i++)
    {
        if (MATRIX[i, col] > 0)
            if (ret > RIGHT_HARD_SIDE[i] / MATRIX[i, col])
                ret = RIGHT_HARD_SIDE[i] / MATRIX[i, col];
    }
    return ret;
}

private double exec_matrix_col_multiplation(int rows, double[] col1, double[] col2)
{
    double ret = 0;
    for (int i = 0; i < rows; i++)
        ret += col1[i] * col2[i];
    return ret;
}

private double[] exec_marginal_net_incomes(double[] _values)
{
    double[] matrix_col;
    for (int i = 0; i < cols; i++)
    {
        matrix_col = MATRIX.GetColumnVector(i).CopyToArray();
        _values[i] = OBJECTIVE_FUNCTION[i] - exec_matrix_col_multiplation(rows, BASIS_CONSTRAINTS,
matrix_col);
    }
    return _values;
}

private double[] exec_marginal_net_incomes_man(double[] _values)
{
    double[] matrix_col;
    for (int i = 0; i < cols; i++)
    {
        matrix_col = MATRIX.GetColumnVector(i).CopyToArray();
        _values[i] = -(OBJECTIVE_FUNCTION[i] - exec_matrix_col_multiplation(rows, BASIS_CONSTRAINTS,
matrix_col));
    }
    return _values;
}

private int exec_matrix_var_up(double[] _marginal_net_incomes)
{
    int ret = 0;
    double curr_mni = _marginal_net_incomes[0];
    for (int i = 0; i < _marginal_net_incomes.Length; i++)
        if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]) && _marginal_net_incomes[i] > curr_mni)
            {

```

```

        ret = i;
        curr_mni = _marginal_net_incomes[i];
    }
    return ret;
}

private int exec_basis_var_down(int _matrix_up, Matrix _matrix, double[] _rhs)
{
    int theta = 0;
    double[] tmp = new double[rows];
    double less_vall = 0;
    for (int i = 0; i < rows; i++)
        if (_matrix[i, _matrix_up] > 0)
            tmp[i] = _rhs[i] / _matrix[i, _matrix_up];
        else
            tmp[i] = double.MaxValue;
    less_vall = double.MaxValue;
    for (int i = 0; i < rows; i++)
        if (tmp[i] < less_vall)
        {
            theta = i;
            less_vall = tmp[i];
        }
    return theta;
}

private Matrix exec_change_basis(int _basis_var_down, ref string[] _basis, ref double[] _basis_constr,
    int _matrix_var_up, Matrix _matrix)
{
    int tmp_driver_row = _basis_var_down;
    int tmp_driver_col = _matrix_var_up;

    string tmp_basis_item = _basis[_basis_var_down];
    double tmp_basis_constr_item = _basis_constr[_basis_var_down];

    Matrix tmp_matrix = (Matrix)_matrix.Clone();

    _basis[_basis_var_down] = xAXIS_HEADER[_matrix_var_up];
    _basis_constr[_basis_var_down] = OBJECTIVE_FUNCTION[_matrix_var_up];

    for (int i = 0; i < cols; i++)
        tmp_matrix[tmp_driver_row, i] /= _matrix[tmp_driver_row, tmp_driver_col];

    for (int i = 0; i < rows; i++)
        if (i != tmp_driver_row)
            for (int ii = 0; ii < cols; ii++)
                tmp_matrix[i, ii] = tmp_matrix[tmp_driver_row, ii] * -_matrix[i, tmp_driver_col] + _matrix[i, ii];

    return tmp_matrix;
}

private double[] exec_change_rhs(int _basis_var_down, double[] _rhs, int _matrix_var_up, Matrix _matrix)
{
    int tmp_driver_row = _basis_var_down;
    int tmp_driver_col = _matrix_var_up;

    double _rhs_val = _rhs[tmp_driver_row] / _matrix[tmp_driver_row, tmp_driver_col];
    _rhs[tmp_driver_row] = _rhs_val;
}

```

```

for (int i = 0; i < rows; i++)
    if (i != tmp_driver_row)
        _rhs[i] = _rhs[i] - (_matrix[i, tmp_driver_col] * _rhs_val);

for (int i = 0; i < _rhs.Length; i++)
    if (_rhs[i] < 0.000001)
        _rhs[i] = 0.000001;

return _rhs;
}

private void exec_iteration()
{
    OBJECTIVE_FUNCTION = new double[cols];
    int[] D_ARRAY = new int[W_ARRAY.Count];
    ArrayList int_W_ARRAY = new ArrayList();
    int[] int_BASIS = new int[BASIS.Length];
    int d = 0;

    for (int i = 0; i < W_ARRAY.Count; i++)
    {
        d = BASIS.Length;
        int_BASIS = new int[BASIS.Length];
        string[] curr_w = (string[])W_ARRAY[i];
        for (int ii = 0; ii < curr_w.Length; ii++)
        {
            for (int iii = 0; iii < BASIS.Length; iii++)
                if (curr_w[ii] == BASIS[iii])
                    d--;

            // Make int W_ARRAY
            for (int j = 0; j < xAXIS_HEADER.Length; j++)
                if (curr_w[ii] == xAXIS_HEADER[j])
                {
                    int_BASIS[ii] = j;
                    j = xAXIS_HEADER.Length;
                }
        }
        int_W_ARRAY.Add(int_BASIS);
        D_ARRAY[i] = d;
    }

    int curr_pos = 0;
    int min_d = int.MaxValue;
    for (int i = 0; i < D_ARRAY.Length; i++)
        if (D_ARRAY[i] <= min_d)
        {
            curr_pos = i;
            min_d = D_ARRAY[i];
        }

    for (int i = 0; i < OBJECTIVE_FUNCTION.Length; i++)
        OBJECTIVE_FUNCTION[i] = -1000000;

    for (int i = 0; i < ((int[])int_W_ARRAY[curr_pos]).Length; i++)
        OBJECTIVE_FUNCTION[((int[])int_W_ARRAY[curr_pos])[i]] = 0;

    for (int i = 0; i < BASIS_CONSTRAINTS.Length; i++)
        BASIS_CONSTRAINTS[i] = OBJECTIVE_FUNCTION[conv_str_to_int(BASIS[i])];
}

```

```

    lp_solve();

    W_ARRAY.RemoveAt(curr_pos);
}

#endregion

#region Calculation Functions

private double calculate_objective(int _rows, double[] _basis_constraints, double[] _rhs)
{
    double ret = 0;
    for (int i = 0; i < _rows; i++)
        ret += _basis_constraints[i] * _rhs[i];
    return ret;
}

public void calc_r_array()
{
    string[] tmpR = (string[])BASIS.Clone();
    R_ARRAY.Add(tmpR);
}

public void calc_g_array()
{
    string[] tmpGamma;
    int basis_var_down = 0;
    GAMMA_ARRAY = new ArrayList();

    for (int i = 0; i < MATRIX.ColumnCount; i++)
        if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]) && check_if_has_positive_item(MATRIX.GetColumnVector(i)))
            {
                tmpGamma = (string[])BASIS.Clone();
                basis_var_down = exec_basis_var_down(i, MATRIX, RIGHT_HARD_SIDE);
                tmpGamma[basis_var_down] = xAXIS_HEADER[i];
                if (!check_if_inserted(R_ARRAY, tmpGamma))
                    GAMMA_ARRAY.Add(tmpGamma);
            }
}

public void calc_w_array()
{
    ArrayList tmpW_ARRAY = (ArrayList)W_ARRAY.Clone();
    string[] tmpW = (string[])BASIS.Clone();
    int w_idx = -1;

    for (int i = 0; i < GAMMA_ARRAY.Count; i++)
        if (!check_if_exists(tmpW_ARRAY, (string[])GAMMA_ARRAY[i]))
            W_ARRAY.Add((string[])GAMMA_ARRAY[i]);

    for (int i = 0; i < R_ARRAY.Count; i++)
        {
            w_idx = get_w_array_idx(W_ARRAY, R_ARRAY[i]);
            if (w_idx != -1)
                W_ARRAY.RemoveAt(w_idx);
        }
}
}

```

```
#endregion

#region Check Functions

public bool check_marginal_net_incomes(double[] _values)
{
    for (int i = 0; i < _values.Length; i++)
        if (_values[i] > 0 && !check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]))
            return true;
    return false;
}

public bool check_if_in_base(string _value)
{
    for (int i = 0; i < BASIS.Length; i++)
        if (BASIS[i] == _value)
            return true;
    return false;
}

public bool check_if_completed()
{
    if (W_ARRAY.Count == 0)
        return false;
    return true;
}

public bool check_if_has_positive_item(double[] _values)
{
    for (int i = 0; i < _values.Length; i++)
        if (_values[i] > 0)
            return true;
    return false;
}

public bool check_if_inserted(ArrayList r_list, string[] basis)
{
    bool allSame = true;
    for (int i = 0; i < r_list.Count; i++)
    {
        allSame = true;
        for (int ii = 0; ii < ((string[])r_list[i]).Length; ii++)
            if (((string[])r_list[i])[ii] != basis[ii])
                allSame = false;
        if (allSame)
            return true;
    }
    return false;
}

public bool check_if_exists(ArrayList list, string[] item)
{
    int countEquals = 0;
    int count = 0;
    for (int i = 0; i < list.Count; i++)
    {
        count = ((string[])list[i]).Length;
        countEquals = 0;
    }
}
```



```

    for (int ii = 0; ii < count; ii++)
        for (int iii = 0; iii < count; iii++)
            if (((string[])list[i])[ii] == ((string[])item)[iii])
                countEquals++;
    if (countEquals == count)
        return true;
    }
return false;
}

#endregion

#region Convert Functions

private int conv_str_to_int(string str)
{
    for (int i = 0; i < xAXIS_HEADER.Length; i++)
        if (xAXIS_HEADER[i] == str)
            return i;
    return -1;
}

#endregion

#region Solve Functions

public int lp_solve()
{
    int matrix_var_up = 0;
    int basis_var_down = 0;

    MARGINAL_NET_INCOMES = exec_marginal_net_incomes(MARGINAL_NET_INCOMES);

    // Solve Simplex
    do
    {
        matrix_var_up = exec_matrix_var_up(MARGINAL_NET_INCOMES);
        basis_var_down = exec_basis_var_down(matrix_var_up, MATRIX, RIGHT_HARD_SIDE);

        RIGHT_HARD_SIDE = exec_change_rhs(basis_var_down, RIGHT_HARD_SIDE, matrix_var_up, MATRIX);
        MATRIX = exec_change_basis(basis_var_down, ref BASIS, ref BASIS_CONSTRAINTS, matrix_var_up,
MATRIX);
        OBJECTIVE_VALUE = calculate_objective(rows, BASIS_CONSTRAINTS, RIGHT_HARD_SIDE);
        MARGINAL_NET_INCOMES = exec_marginal_net_incomes(MARGINAL_NET_INCOMES);
    } while (check_marginal_net_incomes(MARGINAL_NET_INCOMES));

    return (0);
}

public int lp_post_optimization()
{
    int _iters = 0;

    add_column();
    add_row();

    display_manas_nedoma(BASIS_CONSTRAINTS, BASIS, MATRIX, RIGHT_HARD_SIDE,
        OBJECTIVE_FUNCTION, MARGINAL_NET_INCOMES, ITERATIONS,
        string.Format("MANAS NEDOMA METHOD\r\nINITIAL SIMPLEX TABLE"));
}

```

```

Console.Read();

// Solve Simplex
do
{
    Console.Read();
    _iters++;
    set_iterations(_iters);

    calc_r_array();
    calc_g_array();
    calc_w_array();

    exec_iteration();

    display_manas_nedoma(BASIS_CONSTRAINTS, BASIS, MATRIX, RIGHT_HARD_SIDE,
        OBJECTIVE_FUNCTION, MARGINAL_NET_INCOMES, ITERATIONS,
        string.Format("\r\nITERATION:{0}", ITERATIONS));
    Console.Read();

} while (check_if_completed());

return (0);
}

#endregion
}
}

```

### **Αλγόριθμος Reverse Simplex**

```

using System;
using System.Text;
using System.Collections;
using MathNet.Numerics.LinearAlgebra;

namespace MusaAPI
{
    class Program
    {
        #region Main Function

        static void Main()
        {
            postReverseSimplex post = new postReverseSimplex();

            //////////////////////////////////////

            post._variables = 4;
            post._bounds = 2;

            post.rows = post._bounds;
            post.cols = post._variables + post._bounds;

            post._iters = 0;

```

```
// For post optimization
post.REV_MARGINAL_NET_INCOMES_VAL = 20;

// ArrayLists for all the steps
post.BASIS_CONSTRAINTS_ARRAY = new ArrayList();
post.BASIS_ARRAY = new ArrayList();
post.MATRIX_ARRAY = new ArrayList();
post.RIGHT_HAND_SIDE_ARRAY = new ArrayList();
post.KAPPA_VALUES_ARRAY = new ArrayList();

post.ITERATIONS = 0;
post.STEP = 0;

post.RESULTS = new ArrayList();

////////////////////////////////////

int rows = post._bounds;
int cols = post._variables + post._bounds;

post.make_lp(rows, cols);

// Set variables
post.set_variables(cols - rows);

// Set slack variables
post.set_slack_variables(rows);

// Set slack basis constraints
//set_basis_constraints(rows);

// Set slack variables basis
post.set_basis(post.SLACK_VARIABLES);

// Set x axis header
post.set_x_axis_header(cols - rows, rows);

// Set matrix
post.set_matrix_row(0, new double[] { 1, 1, 1, 1, 1, 0 });
post.set_matrix_row(1, new double[] { 0, 0, 2, 3, 0, 1 });

// Set right hand side
post.set_right_hand_side(new double[] { 18, 6 });

// Set objective function
post.set_objective_function(new double[] { 3, 4, 5, 6, 0, 0 });

// Set marginal net incomes
post.set_marginal_net_incomes(new double[] { 3, 4, 5, 6, 0, 0 });

// Set objective
post.set_objective(0);

// Set iterations
post.set_iterations(0);

post.lp_solve();

Console.Read();
```

```

    post.lp_post_optimization();

    Console.WriteLine("Done!");
    Console.Read();
}

#endregion

public class postReverseSimplex
{
    #region Variables Definition

    public string[] VARIABLES;           // LP Variables
    public string[] SLACK_VARIABLES;     // LP Slack Variables
    public double[] BASIS_CONSTRAINTS;   // Basis Constraints
    public ArrayList BASIS_CONSTRAINTS_ARRAY; // Basis Constraints
    public string[] BASIS;               // Basis
    public ArrayList BASIS_ARRAY;        // Basis Array
    public string[] xAXIS_HEADER;       // Axis x header
    public Matrix MATRIX;                // Matrix
    public ArrayList MATRIX_ARRAY;       // Matrix Array
    public double[] RIGHT_HARD_SIDE;     // Right Hand Side
    public ArrayList RIGHT_HAND_SIDE_ARRAY; // Right Hand Side Array
    public double[] OBJECTIVE_FUNCTION;  // Objective
    public double[] MARGINAL_NET_INCOMES; // Marginal Net Incomes
    public double OBJECTIVE_VALUE;       // Objective Value
    public ArrayList RESULTS;            // Results

    // Post Optimization
    public double[] REV_MARGINAL_NET_INCOMES; // Reverse Marginal Net Incomes
    public double REV_MARGINAL_NET_INCOMES_VAL; // Reverse Marginal Net Incomes Value
    public double[] KAPPA_VALUES;           // Kappa Values
    public ArrayList KAPPA_VALUES_ARRAY;    // ArrayList Kappa Values

    // Process variables
    public int ITERATIONS;                 // Iterations
    public int STEP;                       // Step

    ////////////////////////////////////////
    public int _variables;
    public int _bounds;
    public int rows;
    public int cols;
    public int _iters = 0;
    double BigM;

    #endregion

    #region Enumerators Definition

    public enum constraint_type
    {
        LE = 1,
        EQ = 3,
        GE = 2,
    }
}

```

```
#endregion

#region LP Initialization

public void make_lp(Int32 rows, Int32 cols)
{
    VARIABLES = make_variables(cols - rows);
    BASIS_CONSTRAINTS = make_basis_constraints(rows);
    BASIS = make_basis(rows);
    xAXIS_HEADER = make_x_axis_header(cols);
    MATRIX = make_matrix(rows, cols);
    RIGHT_HARD_SIDE = make_right_hand_side(rows);
    OBJECTIVE_FUNCTION = make_objective_function(cols);
    MARGINAL_NET_INCOMES = make_marginal_net_incomes(cols);
}

#endregion

#region Make Functions

private string[] make_variables(Int32 rows)
{
    return new string[rows];
}

private double[] make_variables_constraints(Int32 rows)
{
    return new double[rows];
}

private double[] make_basis_constraints(Int32 rows)
{
    return new double[rows];
}

private string[] make_basis(Int32 rows)
{
    return new string[rows];
}

private string[] make_x_axis_header(Int32 cols)
{
    return new string[cols];
}

private Matrix make_matrix(Int32 rows, Int32 cols)
{
    return new Matrix(rows, cols);
}

private double[] make_right_hand_side(Int32 rows)
{
    return new double[rows];
}

private double[] make_objective_function(Int32 cols)
{
    return new double[cols];
}

}
```

```
private double[] make_marginal_net_incomes(Int32 cols)
{
    return new double[cols];
}

#endregion

#region Set Functions

public void set_iterations(int _iter)
{
    ITERATIONS = _iter;
}

public void set_objective(double _obj)
{
    OBJECTIVE_VALUE = _obj;
}

public void set_marginal_net_incomes_item(int rowIdx, double _value)
{
    MARGINAL_NET_INCOMES[rowIdx] = _value;
}

public void set_marginal_net_incomes(double[] _values)
{
    for (int i = 0; i < _values.Length; i++)
        MARGINAL_NET_INCOMES[i] = _values[i];
}

public void set_objective_function_item(int rowIdx, double _value)
{
    OBJECTIVE_FUNCTION[rowIdx] = _value;
}

public void set_objective_function(double[] _values)
{
    for (int i = 0; i < _values.Length; i++)
        OBJECTIVE_FUNCTION[i] = _values[i];
}

public void set_right_hand_side_item(int rowIdx, double _value)
{
    RIGHT_HARD_SIDE[rowIdx] = _value;
}

public void set_right_hand_side(double[] _values)
{
    for (int i = 0; i < _values.Length; i++)
        RIGHT_HARD_SIDE[i] = _values[i];
}

private void set_matrix_item(int rowIdx, int colIdx, double _value)
{
    MATRIX[rowIdx, colIdx] = _value;
}

public void set_matrix_row(int rowIdx, double[] _row)
```

```
{
    for (int i = 0; i < _row.Length; i++)
        MATRIX[rowIdx, i] = _row[i];
}

public void set_x_axis_header(int _vars, int _bounds)
{
    for (int i = 0; i < _vars; i++)
        xAXIS_HEADER[i] = "x_" + (i + 1).ToString();

    for (int i = _vars; i < _bounds + _vars; i++)
        xAXIS_HEADER[i] = "sv_" + (i - _vars + 1).ToString();
}

private void set_x_axis_header_item(int rowIdx, string _value)
{
    xAXIS_HEADER[rowIdx] = _value;
}

private void set_basis_item(int rowIdx, string _value)
{
    BASIS[rowIdx] = _value;
}

public void set_basis(string[] _values)
{
    for (int i = 0; i < _values.Length; i++)
        BASIS[i] = _values[i];
}

private void set_basis_constraints_item(int rowIdx, double _value)
{
    BASIS_CONSTRAINTS[rowIdx] = _value;
}

private void set_basis_constraints(double[] bases)
{
    BASIS_CONSTRAINTS = bases;
}

public void set_variables(int _rows)
{
    VARIABLES = new string[_rows];
    for (int i = 0; i < _rows; i++)
        VARIABLES[i] = string.Format("x_{0}", i + 1);
}

public void set_slack_variables(int _cols)
{
    SLACK_VARIABLES = new string[_cols];
    for (int i = 0; i < _cols; i++)
        SLACK_VARIABLES[i] = string.Format("sv_{0}", i + 1);
}

#endregion

#region Get Functions

public int get_basis_item(int basis_item)
```

```

{
  for (int i = 0; i < xAXIS_HEADER.Length; i++)
    if (BASIS[basis_item] == xAXIS_HEADER[i])
      return i;
    return -1;
}

#endregion

#region Display Functions

public void display_iteration(double[] _basis_constr, string[] _basis, Matrix _matrix,
  double[] _right_hand_side, double[] _objective_function, double[] _marginal_net_incomes,
  int _iterations, string _header)
{
  StringBuilder sb = new StringBuilder();
  String line = String.Empty.PadLeft(7 * (cols - rows + 3), '-') + "\r\n";

  sb.Append(_header); sb.Append("\r\n"); sb.Append(line);

  sb.Append("CONST".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
  sb.Append("BASIS".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");

  for (int i = 0; i < _variables; i++)
  {
    if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]))
      { sb.Append(VARIABLES[i].ToString().PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); }
  }

  for (int i = 0; i < _bounds; i++)
  {
    if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i + _variables]))
      { sb.Append(SLACK_VARIABLES[i].ToString().PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); }
  }
  sb.Append("RHS".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); sb.Append("\r\n"); sb.Append(line);

  for (int i = 0; i < rows; i++)
  {
    sb.Append(BASIS_CONSTRAINTS[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
    sb.Append(BASIS[i].ToString().PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
    for (int ii = 0; ii < cols; ii++)
    {
      if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[ii]))
        { sb.Append(MATRIX[i, ii].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); }
    }
    sb.Append(RIGHT_HARD_SIDE[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
  }
  sb.Append("\r\n");
  } sb.Append(line);

  sb.Append("OBJECTIVE FUN".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
  for (int i = 0; i < cols; i++)
  {
    if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]))
      { sb.Append(OBJECTIVE_FUNCTION[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); }
  }
  sb.Append("\r\n");

  sb.Append("MARG NET INCO".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
  for (int i = 0; i < cols; i++)
  {

```



```

        if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]))
            { sb.Append(MARGINAL_NET_INCOMES[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
        }
    }

    sb.Append(OBJECTIVE_VALUE.ToString().PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); sb.Append("\r\n");
sb.Append(line);

    Console.Write(sb);
}

public void display_reverse_simplex(double[] _basis_constr, string[] _basis, Matrix _matrix,
double[] _right_hand_side, double[] _objective_function, double[] _marginal_net_incomes,
int _iterations, string _header)
{
    StringBuilder sb = new StringBuilder();
    String line = String.Empty.PadLeft(7 * (cols - rows + 3), '-') + "\r\n";

    sb.Append(_header); sb.Append("\r\n"); sb.Append(line);

    sb.Append("CONST".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
    sb.Append("BASIS".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");

    for (int i = 0; i < _variables; i++)
    {
        if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]))
            { sb.Append(VARIABLES[i].ToString().PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); }
    }

    for (int i = 0; i < _bounds; i++)
    {
        if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i + _variables]))
            { sb.Append(SLACK_VARIABLES[i].ToString().PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); }
    }
    sb.Append("RHS".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); sb.Append("\r\n"); sb.Append(line);

    for (int i = 0; i < rows; i++)
    {
        sb.Append(BASIS_CONSTRAINTS[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
        sb.Append(BASIS[i].ToString().PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
        for (int ii = 0; ii < cols; ii++)
        {
            if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[ii]))
                { sb.Append(MATRIX[i, ii].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); }
        }
        sb.Append(RIGHT_HARD_SIDE[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
sb.Append("\r\n");
        } sb.Append(line);

    sb.Append("Y".PadRight(1).PadLeft(13)); sb.Append("|");
    for (int i = 0; i < cols; i++)
    {
        if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]))
            { sb.Append(REV_MARGINAL_NET_INCOMES[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6));
sb.Append("|"); }
    }
        sb.Append(REV_MARGINAL_NET_INCOMES_VAL.ToString().PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
sb.Append("\r\n"); sb.Append(line);

```

```

        sb.Append("KAPPA VALUES".PadRight(1).PadLeft(13)); sb.Append(" | ");
        for (int i = 0; i < cols; i++)
        {
            if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]))
            { sb.Append(KAPPA_VALUES[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append(" | "); }
            } sb.Append("\r\n"); sb.Append(line);

        Console.Write(sb);
    }

#endregion

#region Execution Functions

private double exec_calculation(int col)
{
    double ret = double.MaxValue;
    for (int i = 0; i < BASIS_CONSTRAINTS.Length; i++)
    {
        if (MATRIX[i, col] > 0)
            if (ret > RIGHT_HARD_SIDE[i] / MATRIX[i, col])
                ret = RIGHT_HARD_SIDE[i] / MATRIX[i, col];
    }
    return ret;
}

private double exec_matrix_col_multiplation(int rows, double[] col1, double[] col2)
{
    double ret = 0;
    for (int i = 0; i < rows; i++)
        ret += col1[i] * col2[i];
    return ret;
}

private double[] exec_marginal_net_incomes(double[] _values)
{
    double[] matrix_col;
    for (int i = 0; i < cols; i++)
    {
        matrix_col = MATRIX.GetColumnVector(i).CopyToArray();
        _values[i] = OBJECTIVE_FUNCTION[i] - exec_matrix_col_multiplation(rows, BASIS_CONSTRAINTS,
matrix_col);
    }
    return _values;
}

private double[] exec_marginal_net_incomes_rev(double[] _values)
{
    double[] matrix_col;
    for (int i = 0; i < cols; i++)
    {
        matrix_col = MATRIX.GetColumnVector(i).CopyToArray();
        _values[i] = - (OBJECTIVE_FUNCTION[i] - exec_matrix_col_multiplation(rows, BASIS_CONSTRAINTS,
matrix_col));
    }
    return _values;
}

private int exec_matrix_var_up(double[] _marginal_net_incomes)

```

```

{
    int ret = 0;
    double curr_mni = _marginal_net_incomes[0];
    for (int i = 0; i < _marginal_net_incomes.Length; i++)
        if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]) && _marginal_net_incomes[i] > curr_mni)
            {
                ret = i;
                curr_mni = _marginal_net_incomes[i];
            }
    return ret;
}

private int exec_rev_matrix_var_up(int_step)
{
    int tempCol = 0;

    double curr_max = double.MinValue;
    for (int i = 0; i < KAPPA_VALUES_ARRAY.Count; i++)
        for (int ii = 0; ii < ((double[])KAPPA_VALUES_ARRAY[i]).Length; ii++)
            {
                if (((double[])KAPPA_VALUES_ARRAY[i])[ii] != double.NaN)
                    if (curr_max < ((double[])KAPPA_VALUES_ARRAY[i])[ii])
                        {
                            STEP = i;
                            tempCol = ii;
                            curr_max = ((double[])KAPPA_VALUES_ARRAY[i])[ii];
                        }
            }
    BASIS = (string[])((string[])BASIS_ARRAY[STEP].Clone());
    BASIS_CONSTRAINTS = (double[])((double[])BASIS_CONSTRAINTS_ARRAY[STEP].Clone());
    MATRIX = (Matrix)((Matrix)MATRIX_ARRAY[STEP].Clone());

    KAPPA_VALUES = (double[])((double[])KAPPA_VALUES_ARRAY[STEP].Clone());
    RIGHT_HARD_SIDE = (double[])((double[])RIGHT_HAND_SIDE_ARRAY[STEP].Clone());

    return tempCol;
}

private int exec_basis_var_down(int_matrix_up, Matrix_matrix, double[]_rhs)
{
    int theta = 0;
    double[] tmp = new double[rows];
    double less_vall = 0;
    for (int i = 0; i < rows; i++)
        if (_matrix[i, _matrix_up] > 0)
            tmp[i] = _rhs[i] / _matrix[i, _matrix_up];
        else
            tmp[i] = double.MaxValue;
    less_vall = double.MaxValue;
    for (int i = 0; i < rows; i++)
        if (tmp[i] < less_vall)
            {
                theta = i;
                less_vall = tmp[i];
            }
    return theta;
}

private Matrix exec_change_basis(int_basis_var_down, ref string[]_basis, ref double[]_basis_constr,

```

```

    int _matrix_var_up, Matrix _matrix)
{
    int tmp_driver_row = _basis_var_down;
    int tmp_driver_col = _matrix_var_up;

    string tmp_basis_item = _basis[_basis_var_down];
    double tmp_basis_constr_item = _basis_constr[_basis_var_down];

    Matrix tmp_matrix = (Matrix)_matrix.Clone();

    _basis[_basis_var_down] = xAXIS_HEADER[_matrix_var_up];
    _basis_constr[_basis_var_down] = OBJECTIVE_FUNCTION[_matrix_var_up];

    for (int i = 0; i < cols; i++)
        tmp_matrix[tmp_driver_row, i] /= _matrix[tmp_driver_row, tmp_driver_col];

    for (int i = 0; i < rows; i++)
        if (i != tmp_driver_row)
            for (int ii = 0; ii < cols; ii++)
                tmp_matrix[i, ii] = tmp_matrix[tmp_driver_row, ii] * -_matrix[i, tmp_driver_col] + _matrix[i, ii];

    return tmp_matrix;
}

private double[] exec_change_rhs(int _basis_var_down, double[] _rhs, int _matrix_var_up, Matrix _matrix)
{
    int tmp_driver_row = _basis_var_down;
    int tmp_driver_col = _matrix_var_up;

    double _rhs_val = _rhs[tmp_driver_row] / _matrix[tmp_driver_row, tmp_driver_col];
    _rhs[tmp_driver_row] = _rhs_val;

    for (int i = 0; i < rows; i++)
        if (i != tmp_driver_row)
            _rhs[i] = _rhs[i] - (_matrix[i, tmp_driver_col] * _rhs_val);

    for (int i = 0; i < _rhs.Length; i++)
        if (_rhs[i] < 0.000001)
            _rhs[i] = 0.000001;

    return _rhs;
}

#endregion

#region Calculation Functions

private double calculate_objective(int _rows, double[] _basis_constraints, double[] _rhs)
{
    double ret = 0;
    for (int i = 0; i < _rows; i++)
        ret += _basis_constraints[i] * _rhs[i];
    return ret;
}

private double[] calculate_kappa_values()
{
    double[] temp_KAPPA_VALUES = new double[KAPPA_VALUES.Length];
    for (int i = 0; i < temp_KAPPA_VALUES.Length; i++)

```

```

        if (REV_MARGINAL_NET_INCOMES[i] >= 0 && !check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]))
            temp_KAPPA_VALUES[i] = REV_MARGINAL_NET_INCOMES_VAL - REV_MARGINAL_NET_INCOMES[i] *
exec_calculation(i);
        else
            temp_KAPPA_VALUES[i] = double.NaN;
        KAPPA_VALUES = temp_KAPPA_VALUES;
        return temp_KAPPA_VALUES;
    }

private double calculate_rev_marginal_net_income_val(int _value)
{
    return KAPPA_VALUES[_value];
}

#endregion

#region Check Functions

public bool check_marginal_net_incomes(double[] _values)
{
    for (int i = 0; i < _values.Length; i++)
        if (_values[i] > 0)
            return true;
    return false;
}

public bool check_if_in_base(string _value)
{
    for (int i = 0; i < BASIS.Length; i++)
        if (BASIS[i] == _value)
            return true;
    return false;
}

public bool check_k_array()
{
    for (int i = 0; i < KAPPA_VALUES_ARRAY.Count; i++)
        for (int ii = 0; ii < ((double[])KAPPA_VALUES_ARRAY[i]).Length; ii++)
            if (((double[])KAPPA_VALUES_ARRAY[i])[ii] >= 0)
                return true;
    return false;
}

public bool check_if_loop(ArrayList matrix_var_up, ArrayList basis_var_down)
{
    for (int i = 0; i < matrix_var_up.Count; i++)
        for (int ii = 0; ii < basis_var_down.Count; ii++)
            if ((int)matrix_var_up[i] == (int)basis_var_down[ii])
                if ((int)matrix_var_up[ii] == (int)basis_var_down[i])
                    return true;
    return false;
}

#endregion

#region Solve Functions

public int lp_solve()
{

```

```

int _iters = 0;
int matrix_var_up = 0;
int basis_var_down = 0;

display_iteration(BASIS_CONSTRAINTS, BASIS, MATRIX, RIGHT_HARD_SIDE,
    OBJECTIVE_FUNCTION, MARGINAL_NET_INCOMES, ITERATIONS, "SIMPLEX METHOD\r\nINITIAL
SIMPLEX TABLE");
Console.WriteLine("\r\n");
MARGINAL_NET_INCOMES = exec_marginal_net_incomes(MARGINAL_NET_INCOMES);

// Solve Simplex
do
{
    _iters++;
    set_iterations(_iters);

    matrix_var_up = exec_matrix_var_up(MARGINAL_NET_INCOMES);
    basis_var_down = exec_basis_var_down(matrix_var_up, MATRIX, RIGHT_HARD_SIDE);

    RIGHT_HARD_SIDE = exec_change_rhs(basis_var_down, RIGHT_HARD_SIDE, matrix_var_up, MATRIX);
    MATRIX = exec_change_basis(basis_var_down, ref BASIS, ref BASIS_CONSTRAINTS, matrix_var_up,
MATRIX);
    OBJECTIVE_VALUE = calculate_objective(rows, BASIS_CONSTRAINTS, RIGHT_HARD_SIDE);
    MARGINAL_NET_INCOMES = exec_marginal_net_incomes(MARGINAL_NET_INCOMES);
} while (check_marginal_net_incomes(MARGINAL_NET_INCOMES));

// For post optimization
REV_MARGINAL_NET_INCOMES = MARGINAL_NET_INCOMES;
for (int i = 0; i < REV_MARGINAL_NET_INCOMES.Length; i++)
    REV_MARGINAL_NET_INCOMES[i] = - REV_MARGINAL_NET_INCOMES[i];
KAPPA_VALUES = new double[cols];
calculate_kappa_values();

set_iterations(0);
display_reverse_simplex(BASIS_CONSTRAINTS, BASIS, MATRIX, RIGHT_HARD_SIDE,
    OBJECTIVE_FUNCTION, MARGINAL_NET_INCOMES, ITERATIONS,
    string.Format("REVERSE SIMPLEX METHOD\r\nINITIAL SIMPLEX TABLE\r\nSTEP:{0} ITERATION:{1}",
STEP + 1, ITERATIONS));

return (0);
}

public int lp_post_optimization()
{
    ArrayList matrix_var_up_array = new ArrayList();
    ArrayList basis_var_down_array = new ArrayList();
    int basis_var_down = 0;

    BASIS_ARRAY.Add((string[])BASIS.Clone());
    BASIS_CONSTRAINTS_ARRAY.Add((double[])BASIS_CONSTRAINTS.Clone());
    MATRIX_ARRAY.Add((Matrix)MATRIX.Clone());
    RIGHT_HAND_SIDE_ARRAY.Add((double[])RIGHT_HARD_SIDE.Clone());
    KAPPA_VALUES_ARRAY.Add(calculate_kappa_values());

do
{
    Console.Read();

    _iters++;

```

```

set_iterations(_iters);

while (true)
{
    matrix_var_up_array.Add(exec_rev_matrix_var_up(_iters));
    basis_var_down = exec_basis_var_down((int)matrix_var_up_array[_iters - 1], MATRIX,
RIGHT_HARD_SIDE);
    basis_var_down_array.Add(get_basis_item(basis_var_down));

    if (check_if_loop(matrix_var_up_array, basis_var_down_array))
    {
        int matrix_var_up_del = (int)matrix_var_up_array[_iters - 1];
        ((Double[])KAPPA_VALUES_ARRAY[STEP])[matrix_var_up_del] = Double.NaN;
        basis_var_down_array.RemoveAt(basis_var_down_array.Count - 1);
        matrix_var_up_array.RemoveAt(matrix_var_up_array.Count - 1);
        continue;
    }
    if (!check_k_array())
        return 1;
    break;
}

RIGHT_HARD_SIDE = exec_change_rhs(basis_var_down, RIGHT_HARD_SIDE,
(int)matrix_var_up_array[_iters - 1], MATRIX);
MATRIX = exec_change_basis(basis_var_down, ref BASIS, ref BASIS_CONSTRAINTS,
(int)matrix_var_up_array[_iters - 1], MATRIX);

REV_MARGINAL_NET_INCOMES = exec_marginal_net_incomes_rev(REV_MARGINAL_NET_INCOMES);
REV_MARGINAL_NET_INCOMES_VAL =
calculate_rev_marginal_net_income_val((int)matrix_var_up_array[_iters - 1]);

for (int i = 0; i < KAPPA_VALUES_ARRAY.Count; i++)
    ((double[])KAPPA_VALUES_ARRAY[i])[matrix_var_up_array[_iters - 1]] = double.NaN;

// Add values to arraylists
BASIS_ARRAY.Add((string[])BASIS.Clone());
BASIS_CONSTRAINTS_ARRAY.Add((double[])BASIS_CONSTRAINTS.Clone());
MATRIX_ARRAY.Add((Matrix)MATRIX.Clone());
RIGHT_HAND_SIDE_ARRAY.Add((double[])RIGHT_HARD_SIDE.Clone());
KAPPA_VALUES_ARRAY.Add(calculate_kappa_values());

display_reverse_simplex(BASIS_CONSTRAINTS, BASIS, MATRIX, RIGHT_HARD_SIDE,
OBJECTIVE_FUNCTION, MARGINAL_NET_INCOMES, ITERATIONS, string.Format("STEP:{0}
ITERATION:{1}", STEP + 1, ITERATIONS));
Console.Read();
} while (check_k_array());

return (0);
}

#endregion
}
}

```

### **Αλγόριθμος Simplex**

```

using System;
using System.Text;

```

```

using System.Collections;
using MathNet.Numerics.LinearAlgebra;

namespace MusaAPI
{
    class simSimplex
    {
        #region Variables Definition

        public static string[] VARIABLES;          // LP Variables
        public static string[] SLACK_VARIABLES;   // LP Slack Variables
        public static double[] BASIS_CONSTRAINTS; // Basis Constraints
        public static string[] BASIS;            // Basis
        public static string[] xAXIS_HEADER;     // Axis x header
        public static Matrix MATRIX;            // Matrix
        public static double[] RIGHT_HARD_SIDE;  // Right Hand Side
        public static double[] OBJECTIVE_FUNCTION; // Objective
        public static double[] MARGINAL_NET_INCOMES; // Marginal Net Incomes
        public static double OBJECTIVE_VALUE;    // Objective Value

        // Process variables
        public static int ITERATIONS;           // Iterations

        //////////////////////////////////////
        static int _variables;
        static int _bounds;
        static int rows;
        static int cols;
        static double BigM;

        #endregion

        #region Enumerators Definition

        public enum constraint_type
        {
            LE = 1,
            EQ = 3,
            GE = 2,
        }

        #endregion

        #region Main Function

        static void Main()
        {
            //////////////////////////////////////

            _variables = 4;
            _bounds = 2;

            //////////////////////////////////////

            rows = _bounds;
            cols = _variables + _bounds;

            make_lp(rows, cols);
        }
    }
}

```



```

// Set variables
set_variables(cols - rows);

// Set slack variables
set_slack_variables(rows);

// Set slack basis constraints
//set_basis_constraints(rows);

// Set slack variables basis
set_basis(SLACK_VARIABLES);

// Set x axis header
set_x_axis_header(cols - rows, rows);

// Set matrix
set_matrix_row(0, new double[] { 1, 1, 1, 1, 1, 0 });
set_matrix_row(1, new double[] { 0, 0, 2, 3, 0, 1 });

// Set right hand side
set_right_hand_side(new double[] { 18, 6 });

// Set objective function
set_objective_function(new double[] { 3, 4, 5, 6, 0, 0 });

// Set marginal net incomes
set_marginal_net_incomes(new double[] { 3, 4, 5, 6, 0, 0 });

// Set objective
set_objective(0);

// Set iterations
set_iterations(0);

lp_solve();

Console.Read();
}

#endregion

#region LP Initialization

private static void make_lp(Int32 rows, Int32 cols)
{
    VARIABLES = make_variables(cols - rows);
    BASIS_CONSTRAINTS = make_basis_constraints(rows);
    BASIS = make_basis(rows);
    xAXIS_HEADER = make_x_axis_header(cols);
    MATRIX = make_matrix(rows, cols);
    RIGHT_HARD_SIDE = make_right_hand_side(rows);
    OBJECTIVE_FUNCTION = make_objective_function(cols);
    MARGINAL_NET_INCOMES = make_marginal_net_incomes(cols);
}

#endregion

#region Make Functions

```

```
private static string[] make_variables(Int32 rows)
{
    return new string[rows];
}

private static double[] make_variables_constraints(Int32 rows)
{
    return new double[rows];
}

private static double[] make_basis_constraints(Int32 rows)
{
    return new double[rows];
}

private static string[] make_basis(Int32 rows)
{
    return new string[rows];
}

private static string[] make_x_axis_header(Int32 cols)
{
    return new string[cols];
}

private static Matrix make_matrix(Int32 rows, Int32 cols)
{
    return new Matrix(rows, cols);
}

private static double[] make_right_hand_side(Int32 rows)
{
    return new double[rows];
}

private static double[] make_objective_function(Int32 cols)
{
    return new double[cols];
}

private static double[] make_marginal_net_incomes(Int32 cols)
{
    return new double[cols];
}

#endregion

#region Set Functions

public static void set_iterations(int _iter)
{
    ITERATIONS = _iter;
}

public static void set_objective(double _obj)
{
    OBJECTIVE_VALUE = _obj;
}
```

```
public static void set_marginal_net_incomes_item(int rowIdx, double _value)
{
    MARGINAL_NET_INCOMES[rowIdx] = _value;
}

public static void set_marginal_net_incomes(double[] _values)
{
    for (int i = 0; i < _values.Length; i++)
        MARGINAL_NET_INCOMES[i] = _values[i];
}

public static void set_objective_function_item(int rowIdx, double _value)
{
    OBJECTIVE_FUNCTION[rowIdx] = _value;
}

public static void set_objective_function(double[] _values)
{
    for (int i = 0; i < _values.Length; i++)
        OBJECTIVE_FUNCTION[i] = _values[i];
}

public static void set_right_hand_side_Item(int rowIdx, double _value)
{
    RIGHT_HARD_SIDE[rowIdx] = _value;
}

public static void set_right_hand_side(double[] _values)
{
    for (int i = 0; i < _values.Length; i++)
        RIGHT_HARD_SIDE[i] = _values[i];
}

private static void set_matrix_item(int rowIdx, int colIdx, double _value)
{
    MATRIX[rowIdx, colIdx] = _value;
}

private static void set_matrix_row(int rowIdx, double[] _row)
{
    for (int i = 0; i < _row.Length; i++)
        MATRIX[rowIdx, i] = _row[i];
}

private static void set_x_axis_header(int _vars, int _bounds)
{
    for (int i = 0; i < _vars; i++)
        xAXIS_HEADER[i] = "x_" + (i + 1).ToString();

    for (int i = _vars; i < _bounds + _vars; i++)
        xAXIS_HEADER[i] = "sv_" + (i - _vars + 1).ToString();
}

private static void set_x_axis_header_item(int rowIdx, string _value)
{
    xAXIS_HEADER[rowIdx] = _value;
}

private static void set_basis_item(int rowIdx, string _value)
```

```

{
    BASIS[rowIdx] = _value;
}

private static void set_basis(string[] _values)
{
    for (int i = 0; i < _values.Length; i++)
        BASIS[i] = _values[i];
}

private static void set_basis_constraints_item(int rowIdx, double _value)
{
    BASIS_CONSTRAINTS[rowIdx] = _value;
}

private static void set_basis_constraints(double[] bases)
{
    BASIS_CONSTRAINTS = bases;
}

private static void set_variables(int _rows)
{
    VARIABLES = new string[_rows];
    for (int i = 0; i < _rows; i++)
        VARIABLES[i] = string.Format("x_{0}", i + 1);
}

private static void set_slack_variables(int _cols)
{
    SLACK_VARIABLES = new string[_cols];
    for (int i = 0; i < _cols; i++)
        SLACK_VARIABLES[i] = string.Format("sv_{0}", i + 1);
}

#endregion

#region Display Functions

public static void display_iteration(double[] _basis_constr, string[] _basis, Matrix _matrix,
    double[] _right_hand_side, double[] _objective_function, double[] _marginal_net_incomes,
    int _iterations, string _header)
{
    StringBuilder sb = new StringBuilder();
    String line = String.Empty.PadLeft(7 * (cols - rows + 3), '-') + "\r\n";

    sb.Append(_header); sb.Append("\r\n"); sb.Append(line);

    sb.Append("CONST".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");
    sb.Append("BASIS".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|");

    for (int i = 0; i < _variables; i++)
    {
        if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]))
            { sb.Append(VARIABLES[i].ToString().PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append("|"); }
    }

    for (int i = 0; i < _bounds; i++)
    {
        if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i + _variables]))

```

```

        {sb.Append(SLACK_VARIABLES[i].ToString().PadRight(1).PadLeft(6));sb.Append(" |");
    }
    sb.Append("RHS".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append(" |"); sb.Append("\r\n"); sb.Append(line);

    for (int i = 0; i < rows; i++)
    {
        sb.Append(BASIS_CONSTRAINTS[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append(" |");
        sb.Append(BASIS[i].ToString().PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append(" |");
        for (int ii = 0; ii < cols; ii++)
        {
            if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[ii]))
                { sb.Append(MATRIX[i, ii].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append(" |"); }
        }
        sb.Append(RIGHT_HARD_SIDE[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append(" |");
    sb.Append("\r\n");
    } sb.Append(line);

    sb.Append("OBJECTIVE FUN".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append(" |");
    for (int i = 0; i < cols; i++)
    {
        if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]))
            { sb.Append(OBJECTIVE_FUNCTION[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append(" |"); }
    } sb.Append("\r\n");

    sb.Append("MARG NET INCO".PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append(" |");
    for (int i = 0; i < cols; i++)
    {
        if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]))
            {sb.Append(MARGINAL_NET_INCOMES[i].ToString("###.###").PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append(" |");}
    }

    sb.Append(OBJECTIVE_VALUE.ToString().PadRight(1).PadLeft(6)); sb.Append(" |"); sb.Append("\r\n");
    sb.Append(line);

    Console.Write(sb);
}

#endregion

#region Execution Functions

private static double exec_matrix_col_multiplation(int rows, double[] col1, double[] col2)
{
    double ret = 0;
    for (int i = 0; i < rows; i++)
        ret += col1[i] * col2[i];
    return ret;
}

private static double[] exec_marginal_net_incomes(double[] _values)
{
    double[] matrix_col;
    for (int i = 0; i < cols; i++)
    {
        matrix_col = MATRIX.GetColumnVector(i).CopyToArray();
        _values[i] = OBJECTIVE_FUNCTION[i] - exec_matrix_col_multiplation(rows, BASIS_CONSTRAINTS,
matrix_col);
    }
    return _values;
}

```

```

    }

    private static int exec_matrix_var_up(double[] _marginal_net_incomes)
    {
        int ret = 0;
        double curr_mni = _marginal_net_incomes[0];
        for (int i = 0; i < _marginal_net_incomes.Length; i++)
            if (!check_if_in_base(xAXIS_HEADER[i]) && _marginal_net_incomes[i] > curr_mni)
                {
                    ret = i;
                    curr_mni = _marginal_net_incomes[i];
                }
        return ret;
    }

    private static int exec_basis_var_down(int _matrix_up, Matrix _matrix, double[] _rhs)
    {
        int theta = 0;
        double[] tmp = new double[rows];
        double less_vall = 0;
        for (int i = 0; i < rows; i++)
            if (_matrix[i, _matrix_up] > 0) //
                tmp[i] = _rhs[i] / _matrix[i, _matrix_up];
            else
                tmp[i] = double.MaxValue;
        less_vall = double.MaxValue;
        for (int i = 0; i < rows; i++)
            if (tmp[i] < less_vall)
                {
                    theta = i;
                    less_vall = tmp[i];
                }
        return theta;
    }

    private static Matrix exec_change_basis(int _basis_var_down, string[] _basis, double[] _basis_constr,
        int _matrix_var_up, Matrix _matrix)
    {
        int tmp_driver_row = _basis_var_down;
        int tmp_driver_col = _matrix_var_up;

        string tmp_basis_item = _basis[_basis_var_down];
        double tmp_basis_constr_item = _basis_constr[_basis_var_down];

        Matrix tmp_matrix = (Matrix)_matrix.Clone();

        _basis[_basis_var_down] = xAXIS_HEADER[_matrix_var_up];
        _basis_constr[_basis_var_down] = OBJECTIVE_FUNCTION[_matrix_var_up];

        for (int i = 0; i < cols; i++)
            tmp_matrix[tmp_driver_row, i] /= _matrix[tmp_driver_row, tmp_driver_col];

        for (int i = 0; i < rows; i++)
            {
                if (i != tmp_driver_row)
                    for (int ii = 0; ii < cols; ii++)
                        tmp_matrix[i, ii] = tmp_matrix[tmp_driver_row, ii] * -_matrix[i, tmp_driver_col] + _matrix[i, ii];
            }
    }

```

```

    return tmp_matrix;
}

private static double[] exec_change_rhs(int _basis_var_down, double[] _rhs, int _matrix_var_up, Matrix
_matrix)
{
    int tmp_driver_row = _basis_var_down;
    int tmp_driver_col = _matrix_var_up;

    double _rhs_val = _rhs[tmp_driver_row] / _matrix[tmp_driver_row, tmp_driver_col];
    _rhs[tmp_driver_row] = _rhs_val;

    for (int i = 0; i < rows; i++)
        if (i != tmp_driver_row)
            _rhs[i] = _rhs[i] - (_matrix[i, tmp_driver_col] * _rhs_val);

    for (int i = 0; i < _rhs.Length; i++)
        if (_rhs[i] < 0.000001)
            _rhs[i] = 0.000001;

    return _rhs;
}

#endregion

#region Calculation Functions

private static double calculate_objective(int _rows, double[] _basis_constraints, double[] _rhs)
{
    double ret = 0;
    for (int i = 0; i < _rows; i++)
        ret += _basis_constraints[i] * _rhs[i];
    return ret;
}

#endregion

#region Check Functions

public static bool check_marginal_net_incomes(double[] _values)
{
    for (int i = 0; i < _values.Length; i++)
        if (_values[i] > 0)
            return true;
    return false;
}

public static bool check_if_in_base(string _value)
{
    for (int i = 0; i < BASIS.Length; i++)
        if (BASIS[i] == _value)
            return true;
    return false;
}

#endregion

#region Solve Functions

```

```
private static int lp_solve()
{
    int _iters = 0;
    int matrix_var_up = 0;
    int basis_var_down = 0;

    display_iteration(BASIS_CONSTRAINTS, BASIS, MATRIX, RIGHT_HARD_SIDE,
        OBJECTIVE_FUNCTION, MARGINAL_NET_INCOMES, ITERATIONS, "SIMPLEX METHOD\r\nINITIAL
SIMPLEX TABLE");
    MARGINAL_NET_INCOMES = exec_marginal_net_incomes(MARGINAL_NET_INCOMES);

    Console.Read();
    // Solve Simplex
    do
    {
        Console.Read();

        _iters++;
        set_iterations(_iters);

        matrix_var_up = exec_matrix_var_up(MARGINAL_NET_INCOMES);
        basis_var_down = exec_basis_var_down(matrix_var_up, MATRIX, RIGHT_HARD_SIDE);

        RIGHT_HARD_SIDE = exec_change_rhs(basis_var_down, RIGHT_HARD_SIDE, matrix_var_up, MATRIX);
        MATRIX = exec_change_basis(basis_var_down, BASIS, BASIS_CONSTRAINTS, matrix_var_up, MATRIX);
        OBJECTIVE_VALUE = calculate_objective(rows, BASIS_CONSTRAINTS, RIGHT_HARD_SIDE);
        MARGINAL_NET_INCOMES = exec_marginal_net_incomes(MARGINAL_NET_INCOMES);

        display_iteration(BASIS_CONSTRAINTS, BASIS, MATRIX, RIGHT_HARD_SIDE,
            OBJECTIVE_FUNCTION, MARGINAL_NET_INCOMES, ITERATIONS, "\r\nITERATION: " +
ITERATIONS.ToString());

        Console.Read();
    } while (check_marginal_net_incomes(MARGINAL_NET_INCOMES));

    Console.WriteLine("Done!");
    Console.Read();
    return (0);
}

#endregion
}
```