ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΓΕΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΑΤΕΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΕΝΗΛΙΚΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΔΙΑΡΚΟΥΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΕΝΗΛΙΚΩΝ




βασικές γνώσεις μαθηματικών-στατιστικής

Μαθηματικά: Εφαρμογές στην καθημερινή ζωή


ΚΕΝΤΡΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΕΝΗΛΙΚΩΝ

ΓΓΕΕ

ΙΔΕΚΕ

ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Επιστημονική Ευθύνη	Νικόλαος Ανδρεδάκης, Ομότιμος Καθηγητής Παν. Αθηνών
Συγγραφή	Παναγιώτης Μαμαλής, Θέμις Καψή, Ευάγγελος Τόλης, Στέλιος Μιχαήλογλου, Γιάννης Πρίντεζης

*Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό παράχθηκε στο πλαίσιο του Έργου **«Κέντρα Εκπαίδευσης Ενηλίκων ΙΙ»**, το οποίο εντάσσεται στο **Ε.Π.Ε.Α.Ε.Κ. ΙΙ** του **ΥΠ.Ε.Π.Θ,**, Μέτρο 1.1. Ενέργεια 1.1.2.Β. και συγχρηματοδοτείται από την **Ευρωπαϊκή Ένωση (Ε.Κ.Τ.).***

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΠΟΣΟΣΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΜΕΤΡΗΣΗ ΜΕΓΕΘΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ ΕΜΒΑΔΟΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ

1. ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1. ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Σκοπός της ενότητας είναι ο εκπαιδευόμενος να θεμελιώσει κάποιες από τις γνώσεις που έχει σε εμπειρικό επίπεδο, όπως η έννοια του φυσικού αριθμού, του δεκαδικού αριθμού, της διάταξης αριθμών και η απόκτηση ευχέρειας στις βασικές πράξεις.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα: η εξοικείωση του εκπαιδευόμενου με τους φυσικούς αριθμούς και η δυνατότητά του να εκτελέσει περίπλοκες πράξεις, προκειμένου να ασχοληθεί στη συνέχεια με πιο σύνθετες μαθηματικές έννοιες , όπως κλάσματα και ποσοστά.

Βασικές έννοιες:

- Φυσικοί αριθμοί
- Άρτιοι,
- Περιττοί
- Πράξεις
- Πρόσθεση
- Αφαίρεση
- Πολλαπλασιασμός
- Διαίρεση
- Δεκαδικοί αριθμοί
- Κλάσματα

Η οικογένεια Σωτηρίου έφυγε για μία εκδρομή στην Δυτική Ελλάδα. Ο χιλιομετρητής του αυτοκινήτου τους έδειχνε **ογδόντα δύο χιλιάδες τριακόσια ενενήντα τέσσερα** χιλιόμετρα. Αφού ταξίδεψαν **διακόσια πέντε** χιλιόμετρα έφτασαν στη γέφυρα Ρίου – Αντιρρίου όπου έκαναν μια σύντομη στάση για καφέ και πρωινό. Πλήρωσαν **είκοσι οκτώ** ευρώ (€). Συνέχισαν το ταξίδι τους και μετά από **πέντε** ώρες έφτασαν στα Γιάννενα. Έμειναν σε ξενοδοχείο που τους χρέωσε **εκατόν σαράντα τέσσερα** €.

Στο προηγούμενο κείμενο συναντήσαμε τους αριθμούς:

82394, 205, 28, 5, 144

Τέτοιοι αριθμοί ονομάζονται φυσικοί αριθμοί και για να τους γράψουμε χρησιμοποιούμε τα εξής δέκα ψηφία:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Η αξία των ψηφίων ενός φυσικού αριθμού σε απλές μονάδες εξαρτάται από τη θέση των ψηφίων στο αριθμό.

Έτσι τον αριθμό 82394 τα ψηφία παριστάνουν

8	2	3	9	4
δεκάδες χιλιάδες	χιλιάδες	εκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες

έτσι ο αριθμός σε ανεπτυγμένη μορφή γράφεται:

$$82394 = 8 \cdot 10.000 + 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 4 \cdot 1$$

Για να διευκολυνθούμε στην ανάγνωση ενός φυσικού αριθμού τον χωρίζουμε από δεξιά προς τα αριστερά σε ομάδες των τριών ψηφίων. Για παράδειγμα ο αριθμός 234.375.698 διαβάζεται διακόσια τριάντα τέσσερα εκατομμύρια, τριακόσιες εβδομήντα πέντε χιλιάδες, εξακόσια ενενήντα οκτώ.

εκατομμύρια			χιλιάδες			μονάδες		
2	3	4	3	7	5	6	9	8
εκατοντάδες εκατομμύρια	δεκάδες εκατομμύρια	εκατομμύρια	εκατοντάδες χιλιάδες	δεκάδες χιλιάδες	χιλιάδες	εκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες

Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται σε **άρτιους** (ζυγοί)

$$0, \quad 2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 12, \quad 14, \quad \ldots$$

και σε **περιττούς** (μονοί)

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad \ldots$$

Για να συγκρίνουμε δύο φυσικούς αριθμού α, β κοιτάζουμε το πλήθος των ψηφίων τους:

- Αν ο α έχει περισσότερα ψηφία από τον β τότε ο **α είναι μεγαλύτερος του β** και γράφουμε α > β.
- Αν ο α έχει λιγότερα ψηφία από τον β τότε ο **α είναι μικρότερος του β** και γράφουμε α < β.
- Αν οι αριθμοί έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, τα συγκρίνουμε ένα προς ένα ξεκινώντας από αριστερά μέχρι να βρούμε δύο διαφορετικά στοιχεία που να βρίσκονται στην ίδια τάξη μεγέθους. Ο αριθμός στον οποίο ανήκει το μεγαλύτερο από αυτά τα ψηφία είναι ο μεγαλύτερος.
  Αν δεν βρούμε διαφορετικά ψηφία, τότε οι αριθμοί **είναι ίσοι** και γράφουμε α = β.

Παράδειγμα:

4008 > 965 γιατί ο 4008 έχει τέσσερα ψηφία

$\underline{4}24567 > \underline{1}54567$ γιατί το ψηφίο των εκατοντάδων χιλιάδων είναι 4 > 1.

000465 =465 τα μηδενικά αριστερά κάθε αριθμού είναι άνευ σημασίας, δηλ. 000465=465

➢ 1.1.1. Πρόσθεση φυσικών αριθμών

Μια αλυσίδα Super-Market έχει 4 υποκαταστήματα στην Ανατολική Αττική.

Οι εισπράξεις που είχαν τα καταστήματα παραμονή Χριστουγέννων και παραμονή Πρωτοχρονιάς δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Περιοχή	Εισπράξεις σε € παραμονή Χριστουγέννων	Εισπράξεις σε € παραμονή Πρωτοχρονιάς
Ραφήνα	22357	31122
Νέα Μάκρη	9375	8179
Σπάτα	35328	49753
Μαρκόπουλο	36205	39000

Πόσες ήταν οι συνολικές εισπράξεις του υποκαταστήματος της Ραφήνας και τις δύο μέρες;

Θα βρούμε το άθροισμα 22357 + 31122 ως εξής:

$$\begin{array}{r} 22357 \\ +31122 \\ \hline 53479 \end{array}$$

Οπότε ήταν 53.479€

Πόσες ήταν οι συνολικές εισπράξεις του υποκαταστήματος στα Σπάτα και τις δύο μέρες:

Είναι: $$\boxed{\begin{array}{rrrrrr} & \overset{(1)}{3} & \overset{(1)}{5} & 3 & \overset{(1)}{2} & 8 \\ + & 4 & 9 & 7 & 5 & 3 \\ \hline & 8 & 5 & 0 & 8 & 1 \end{array}}$$

Ήταν 85.081 €

Πόσες ήταν οι συνολικές εισπράξεις της εταιρείας και από τα 4 υποκαταστήματα την παραμονή της Πρωτοχρονιάς;

Θα προσθέσουμε ταυτόχρονα και τους τέσσερις φυσικούς αριθμούς κατατάσσοντας αυτούς τον ένα κάτω από το άλλο:

$$\boxed{\begin{array}{rrrrrr} & \overset{(2)}{4} & \overset{(1)}{9} & \overset{(1)}{7} & \overset{(1)}{5} & 3 \\ & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ + & & 8 & 1 & 7 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 8 & 0 & 5 & 4 \end{array}}$$

Ήταν 128.054 €

Για να κάνουμε δοκιμή σε μια πράξη της πρόσθεσης μπορούμε να επαναλάβουμε την πρόσθεση από πάνω προς τα κάτω, αν προηγουμένως η πρόσθεση έγινε από κάτω προς τα πάνω.

Αν οι προσθετέοι είναι πολλοί τότε μπορούμε:

Να χωρίσουμε αυτούς σε ομάδες να βρούμε το άθροισμα των προσθετέων κάθε ομάδας και να προσθέσουμε στη συνέχει αυτά τα μερικά αθροίσματα.

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{cccccc} & ^{(1)} & & & & \\ & 4 & 9 & 7 & 5 & 3 \\ + & 3 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 8 & 8 & 7 & 5 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & ^{(1)} & ^{(1)} & & & \\ & 8 & 8 & 7 & 5 & 3 \\ + & 3 & 9 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 8 & 0 & 5 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & & ^{(1)} & ^{(1)} & \\ & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ + & & 8 & 1 & 7 & 0 \\ \hline & 3 & 9 & 3 & 0 & 1 \end{array}$$

Εφαρμογή 1η:

Ένα κατάστημα ηλεκτρικών ειδών έχει σε προσφορά τα παρακάτω είδη:

- **Φορητό MP3 Player 162 €**
- **DV-D Player 35 €**
- **Τηλεόραση 21΄΄ 275 €**
- **Σύστημα Hi-Fi 220 €**
- **Πολυμηχάνημα (Fax, Scanner, …) 235 €**

Ο Πέτρος αγόρασε το MP3 Player και το DV-D. Πόσα χρήματα πλήρωσε:

Απάντηση:

$$\begin{aligned} 162+35 &= 100+60+2+30+5 \\ &= 100+60+30+2+5 \\ &= 100+90+7 \\ &= 197\text{ €} \end{aligned}$$

(Αναλύσαμε τους αριθμούς για να υπολογίσουμε το άθροισμα)

Εφαρμογή 2η:

Να εκτιμήσετε, χωρίς να κάνετε την πρόσθεση, πόσα χρήματα περίπου θα χρειαστεί κάποιος για να αγοράσει την τηλεόραση, το σύστημα Hi-Fi και το πολυμηχάνημα.

Απάντηση:

$$275+220+235=\left(\begin{array}{l} 2+2+2=6 \text{ εκατοντάδες} \\ 7+2+3=12 \text{ δεκάδες}=1\text{εκατοντάδα}+2\text{δεκάδες} \\ \quad 5+5=10 \text{ μονάδες}=1\text{δεκάδα} \end{array}\right)$$

$$=730\text{ €}$$

➢ 1.1.2. Αφαίρεση φυσικών αριθμών

Το Λεόντειο Λύκειο Πατησίων έχει συνολικά και στις τρεις βαθμίδες Δημοτικό, Γυμνάσιο, Λύκειο 1522 μαθητές. Το Γυμνάσιο και το Λύκειο έχουν 925 μαθητές και το Δημοτικό έχει 112 μαθητές περισσότερους από το Γυμνάσιο. Πόσους μαθητές έχει η κάθε βαθμίδα;

Για να βρούμε πόσους μαθητές έχει το Δημοτικό θα πρέπει να κάνουμε την αφαίρεση 1522 – 925. Οπότε:

$$\boxed{\begin{array}{ccccl} & 1 & 5 & 2 & 2 \quad (\text{μειωτέος}) \\ - & & \underset{(1)}{9} & \underset{(1)}{2} & 5 \quad (\text{αφαιρετέος}) \\ \hline & & 5 & 9 & 7 \quad (\text{διαφορά}) \end{array}}$$

Άρα 597 μαθητές έχει το δημοτικό.

Το Γυμνάσιο έχει 597 – 112 μαθητές δηλαδή

$$\boxed{\begin{array}{cccl} & 5 & 9 & 7 \\ - & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 4 & 8 & 5 \quad \text{μαθητές} \end{array}}$$

Και το Λύκειο έχει: $\boxed{\begin{array}{cccl} & 9 & 2 & 5 \\ - & \underset{(1)}{4} & 8 & 5 \\ \hline & 4 & 4 & 0 \quad \text{μαθητές} \end{array}}$

Για να κάνουμε δοκιμή σε μια πράξη αφαίρεσης μπορούμε να το κάνουμε με δύο τρόπου:

- **Με πρόσθεση** της διαφοράς που βρήκαμε με τον αφαιρετέο έτσι ώστε να βρούμε τον μειωτέο, ή
- **Με αφαίρεση** της διαφοράς που βρήκαμε από τον μειωτέο για να βρούμε τον αφαιρετέο.

Για παράδειγμα στην αφαίρεση 1522 – 925 = 597 που κάναμε, για δοκιμή έχουμε:

$$\begin{array}{cccc} & \overset{(1)}{9} & \overset{(1)}{2} & 5 \\ + & 5 & 9 & 7 \\ \hline 1 & 5 & 2 & 2 \end{array} \qquad \text{ή} \qquad \begin{array}{ccccc} & 1 & 5 & 2 & 2 \\ - & & 5 & 9 & 7 \\ \hline & & 9 & 2 & 5 \end{array}$$

➢ 1.1.3. Πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

Εφαρμογή 3η:

Ένα κιβώτιο μπίρες έχει 24 μπουκάλια. Πόσες μπίρες έχουν 4 κιβώτια;

Απάντηση:

Τα 4 κιβώτια έχουν 24 + 24 + 24 + 24 = 96 μπουκάλια.

Ή μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το 24 με το 4 δηλαδή $24 \cdot 4 = 96$.

Για να υπολογίζουμε από μνήμης το γινόμενο μονοψήφιων ακεραίων παραθέτουμε τον **«Πυθαγόρειο πίνακα»**, όπου στην πρώτη σειρά γράφουμε τα ψηφία από το 1 έως το 9. (Βλέπε πίνακα)

Στη δεύτερη σειρά γράφουμε κάτω από κάθε αριθμό το άθροισμα αυτοί με τον εαυτό του. Σε κάθε σειρά από τη τρίτη και κάτω γράφουμε το άθροισμα του αριθμού που βρίσκεται στο από πάνω κουτάκι και του αντίστοιχου αριθμού της $1^{ης}$ σειράς.

Το γινόμενο δύο μονοψήφιων προκύπτει από την διασταύρωση μιας γραμμής και μιας στήλης που αρχίσουν αντίστοιχα από τους δύο μονοψήφιους.

Κάθε γραμμή ή κάθε στήλη αποτελεί και την «προπαίδεια» του πολλαπλασιασμού του αντιστοίχου αριθμού που βρίσκεται στο πρώτο κουτάκι.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Για παράδειγμα $6 \cdot 7 = 42$

➢ 1.1.4. Πολλαπλασιασμός πολυψήφιου με μονοψήφιο

Για να πολλαπλασιάσουμε ένα πολυψήφιο με μονοψήφιο τότε:

- Κατατάσσουμε τους αριθμούς τον έναν κάτω από τον άλλον
- Πρώτα τον πολυψήφιο και μετά τον μονοψήφιο
- Πολλαπλασιάζουμε κάθε ψηφίο του πολυψήφιου με το μονοψήφιο, ξεκινώντας από τα δεξιά (πρώτα τις μονάδες μετά τις δεκάδες).

Σε περίπτωση που έχουμε κρατούμενο τότε το προσθέτουμε από το εξαγόμενο του επόμενου γινομένου.

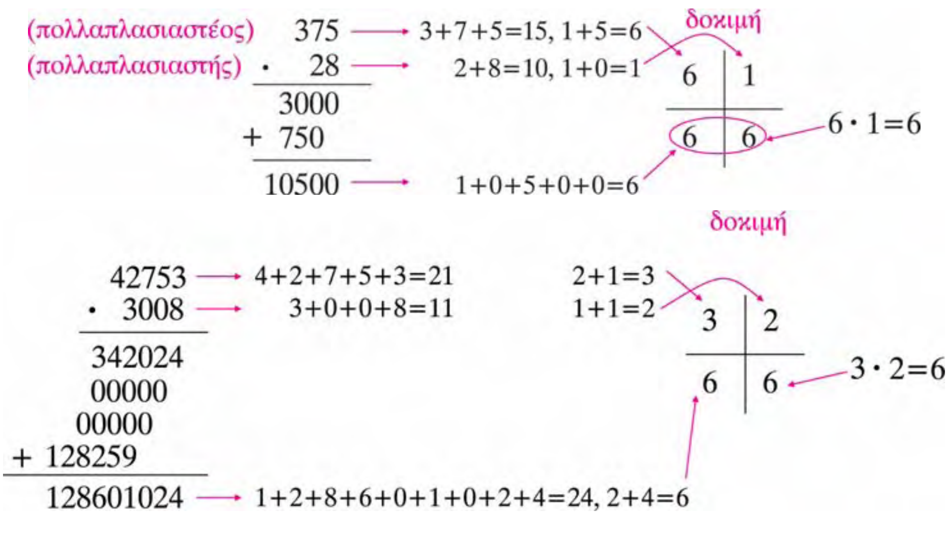
Για παράδειγμα ο πολλαπλασιασμός 375· 7 φαίνεται σταδιακά στα παρακάτω βήματα:

375 · 7	7 ·5=35 γράφω 5	375 · 7	7 ·7=49+3=52 γράφω: 2	375 · 7	7 ·3= 21+5=26 γράφω: 26
5	κρατούμενο: 3	25	κρατούμενο: 5	2625	

➢ 1.1.5 Πολλαπλασιασμός πολυψήφιου με πολυψήφιο

Όταν οι παράγοντες του γινομένου είναι πολυψήφιοι τότε κατατάσσουμε τους αριθμούς τον έναν κάτω από το άλλο και πολλαπλασιάζουμε κάθε ψηφίου του πολλαπλασιαστή με όλα τα ψηφία του πολλαπλασιαστέου διαδοχικά, γράφοντας το τελευταίο ψηφίο του γινομένου μια θέση πιο αριστερή από το προηγούμενο. Η δοκιμή του πολλαπλασιασμού γίνεται με τη μέθοδο του σταυρού.

Για παράδειγμα:



Για να πολλαπλασιάσουμε ένα αριθμό με 10, 100, 1000, … γράφουμε τον αριθμό και δεξιά του συμπληρώνουμε τόσα μηδενικά όσα έχει το 10, 100, 1000, … . Για παράδειγμα:

$28 \cdot 100 = 2800$

$376 \cdot 10000 = 3.760.000$

➢ 1.1.6 Διαίρεση φυσικών αριθμών

Εφαρμογή:

Ο κύριος Χαράλαμπος εργάζεται ως διανομέας ειδών διατροφής σε καταστήματα στην ευρύτερη περιοχή της Αθήνας. Κάλυψε σε τέσσερις εβδομάδες 2460 Km. Κάθε εβδομάδα διένυε ίσο αριθμό χιλιομέτρων.

i) Πόσα χιλιόμετρα διένυε κάθε εβδομάδα.

ii) Αν εργάζονταν 5 μέρες την εβδομάδα και διένυε ίσο αριθμό χιλιομέτρων κάθε μέρα τότε πόσα χιλιόμετρα διένυε την ημέρα;

Απάντηση:

Θα πρέπει να κάνουμε τη διαίρεση 2460 : 4. Έχουμε

$$\begin{array}{r r|l l}
\text{(διαιρετέος)} & 2460 & \underline{\ 4\ \ \ \ } & \text{(διαιρέτης)} \\
 & 24 & 615 & \text{(πηλίκο)} \\ \cline{2-2}
 & 06 & & \\
 & -4 & & \\ \cline{2-2}
 & 20 & & \\
 & -20 & & \\ \cline{2-2}
 & 0 & & \text{(υπόλοιπο)}
\end{array}$$

Κάθε μέρα διένυε:

$$\begin{array}{r|l l}
615 & \underline{\ 5\ \ \ } & \\
-5 & 123 & \text{χιλιόμετρα} \\ \cline{1-1}
11 & & \\
15 & &
\end{array}$$

Τη δοκιμή της διαίρεσης την κάνουμε ως εξής: πολλαπλασιάζουμε $(\text{διαιρέτη})\cdot(\text{πηλίκο})$.

Στο γινόμενο προσθέτουμε το υπόλοιπο, τότε θα πρέπει να βρίσκουμε τον διαιρετέο.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Πρέπει πάντα το **υπόλοιπο να είναι μικρότερο από τον διαιρέτη**.

Για παράδειγμα στη διαίρεση 478253 : 62 έχουμε:

$$\begin{array}{r|l}
47823 & \underline{\ 62\ \ } \\
-434 & 771 \\ \hline
442 & \\
-434 & \\ \cline{1-1}
=83 & \\
-62 & \\ \cline{1-1}
21 &
\end{array}
\qquad \text{δοκιμή:} \quad
\begin{array}{r}
771 \\
\cdot\ \ 62 \\ \hline
1542 \\
4626 \\ \hline
47802
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
47802 \\
+\ \ \ \ 21 \\ \hline
47823
\end{array}$$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες του πίνακα, συμπληρώστε σε κάθε αριθμό το όνομα του νησιού που αντιστοιχεί.

Νησιά	**Επιφάνεια σε Km^2**
Λέσβος	1.635.998
Ρόδος	1.401.459
Κεφαλληνία	734.014
Σάμος	477.942
Λήμνος	476.288
Ζάκυνθος	406.612
Νάξος	389.434
Θάσος	383.672
Σύρος	84.069
Αίγινα	77.014

1. τετρακόσιες εβδομήντα έξι χιλιάδες διακόσια ογδόντα οκτώ: . . . .
2. εβδομήντα επτά χιλιάδες δεκατέσσερα: . . . .
3. ένα εκατομμύριο τετρακόσιες μία χιλιάδες τετρακόσια πενήντα εννέα . . . .
4. επτακόσιες τριάντα τέσσερις χιλιάδες δεκατέσσερα: . . . .
5. τριακόσιες ογδόντα εννέα χιλιάδες τετρακόσια τριάντα τέσσερα: . . . .

2. Να βρείτε την τάξη του υπογραμμισμένου ψηφίου σε καθένα από τους παρακάτω αριθμούς: $3\underline{7}9238$ $\underline{1}534758$ $3247\underline{5}6$ $3\underline{9}273$

3. Γράψτε το όνομα της θέσης του ψηφίου 6 στον καθένα από τους παρακάτω αριθμούς:

3678 . . . .

456 . . . .

69734 . . . .

369735824 . . . .

4. Να γράψετε τον πενταψήφιο αριθμό που:

- έχει μόνο δύο ψηφία που επαναλαμβάνονται εναλλάξ
- έχει το ψηφίο 7 στη θέση των χιλιάδων
- το άθροισμα των ψηφίων του είναι 32

5. Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές (Σ) και ποιες είναι λάθος (Λ).

i)	61 < 49	Σ	Λ
ii)	3075 < 3750	Σ	Λ
iii)	9009 > 9909	Σ	Λ
iv)	75 > 57	Σ	Λ
v)	1000350 < 897350	Σ	Λ

6. Να βάλετε το κατάλληλο σύμβολο ανισότητας (<, >) ανάμεσα σε κάθε ζεύγος αριθμών:

i) 475 … 4091   iv) 313 … 331   ii) 123 … 201

v) 7500 … 7499   iii) 89001 … 80901   vi) 897532 … 895732

7. Να κάνετε από μνήμης της προσθέσεις:

16 + 23   67 + 22   35 + 37

128 + 31   135 + 120   210 + 230

8. Να κάνετε τις προσθέσεις:

i) 375 + 579   ii) 1278 + 148   iii) 88035 + 39009

iv) 123579 + 88975 + 1274   v) 1375528 + 899775 + 338753 + 75979

9. Να συμπληρώσετε τα κενά:

i) $\begin{array}{r} \square\,7\,\square \\ +\;8\,\square\,7 \\ \hline 1\,2\,7\,2 \end{array}$ ii) $\begin{array}{r} 5\,\square\,9\,\square\,3 \\ +\;\square\,1\,7\,5\,\square \\ \hline 9\,8\,6\,7\,3 \end{array}$ iii) $\begin{array}{r} 4\,5\,\square\,2\,5 \\ +\;3\,\square\,9\,\square\,6 \\ \hline \square\,4\,6\,8\,\square \end{array}$

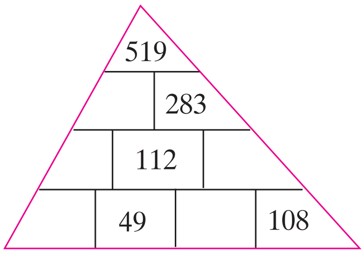
10. Μια αποθήκη έχει 15.873 κιλά καλαμπόκι και για να γεμίσει χρειάζεται 2677 κιλά. Μια δεύτερη αποθήκη έχει 12053 κιλά καλαμπόκι και για να γεμίσει χρειάζεται τόσα κιλά όσα χρειάζεται και η πρώτη αποθήκη. Μια τρίτη αποθήκη χωράει τόσα κιλά καλαμπόκι, όσα λείπουν από τις δύο πρώτες. Πόσα κιλά καλαμπόκι χωρούν και στις τρεις αποθήκες μαζί;

11. Η κυρία Στέλλα έχει 300€. Θα ήθελε να αγοράσει διάφορα πράγματα όπως, ένα φόρεμα που κοστίζει 180€, ένα μπουφάν που κοστίζει 169€, ένα ζευγάρι παπούτσια που κοστίζουν 117€, μια τσάντα που κοστίζει 68€, ένα ζευγάρι γάντια που κοστίζουν 35€ και ένα CD που κοστίζει 19€. Πόσα από αυτά μπορεί να αγοράσει και ποια;

12. Να γίνουν οι αφαιρέσεις:

i) 928 – 735   ii) 1275 – 988   iii) 2006 – 1821

13. Να συμπληρώσεις στα κουτάκια τους αριθμούς που λείπουν έτσι ώστε κάθε αριθμός που είναι γραμμένος πάνω από δύο άλλους να ισούται με το άθροισμά τους.



14. Ο πατέρας της Μαριαλένας και του Κωνσταντίνου είναι 41 ετών. Η Μαριαλένα είναι 7 ετών και ο Κωνσταντίνος 6 ετών. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία του πατέρα θα ισούται με το άθροισμα των ηλικιών των δύο παιδιών και ποια θα είναι η ηλικία του κάθε παιδιού;

15. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:
i) $407 \cdot 36$ ii) $2693 \cdot 75$ iii) $31254 \cdot 502$

16. Να συμπληρώσετε τα κουτάκια με τους αριθμούς που λείπουν.

$$\begin{array}{rrrrr} & & 3 & 6 & 5 \\ \cdot & & & 9 & \square \\ \hline & & 7 & \square & 0 \\ \square & \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & & 6 & 3 & 7 \\ \cdot & & & \square & 9 \\ \hline & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & 4 & \square & \\ \hline \square & \square & \square & 3 & \square \end{array}$$

17. Ο μηνιαίος μισθός του κυρίου Θανάση είναι 1366€. Αποταμιεύει κάθε μήνα 280€. Πόσος είναι ο ετήσιος μισθός του; Πόσα χρήματα αποταμιεύει κάθε χρόνο;

18. Ο Πέτρος άρχισε να καπνίζει σε ηλικία 15 ετών. Σταμάτησε το κάπνισμα 40 ετών. Τα πρώτα 8 χρόνια κάπνιζε 20 τσιγάρα ημερησίως και τα υπόλοιπα χρόνια 30 τσιγάρα ημερησίως. Πόσα τσιγάρα κάπνισε συνολικά;

19. Να εκτελέσετε τις παρακάτω διαιρέσεις:
i) $1043 : 7$ ii) $19533 : 24$ iii) $988 : 26$ iv) $389762 : 341$

20. Σε ποιες από τις παρακάτω ισότητες προκύπτουν διαιρέσεις και ποιες είναι αυτές
i) $71 = 7 \cdot 9 + 8$ ii) $879 = 24 \cdot 35 + 39$
iii) $196 = 11 \cdot 17 + 9$ iv) $42813 = 347 \cdot 123 + 132$

21. Έμπορος αγόρασε ύφασμα. Πλήρωσε 120€ για 15 μέτρα υφάσματος, ενώ εισέπραξε 240€ για 20 μέτρα υφάσματος που πούλησε. Από όλο το ύφασμα που πούλησε κέρδισε συνολικά 540€. Πόσα μέτρα ύφασμα αγόρασε;

22. Κτηνοτρόφος πούλησε 23 πρόβατα και 45 αρνιά αντί του ποσού 7930€. Τα πρόβατα τα πούλησε προς 110€ το ένα. Πόσο πούλησε το κάθε αρνί;

1.2. ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ο κύριος Ορέστης αποφάσισε να μοιράσει σε 5 παιδιά το ποσό των 26€, την παραμονή των Χριστουγέννων. Πόσα χρήματα πρέπει να δώσει σε κάθε παιδί;

Αν ο κύριος Ορέστης δώσει από 5€ σε κάθε παιδί του θα του περισσέψει 1€, αν δώσει από 6€ σε κάθε παιδί τότε θα του λείπουν 4€. Θα πρέπει λοιπόν να τους δώσει ένα ποσό μεταξύ των 5€ και 6€.

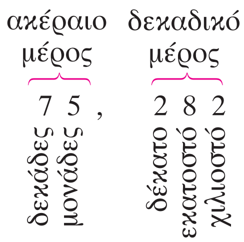
Επειδή οι φυσικοί αριθμοί δεν επαρκούν για τη λύση του παραπάνω προβλήματος, ορίζουμε τους δεκαδικούς αριθμούς .

Οι δεκαδικοί αριθμοί βρίσκονται μεταξύ ακεραίων αριθμών.

Ο κύριος Ορέστης πρέπει να δώσει 26 : 5 = 5,2€ σε κάθε παιδί και αυτό διαβάζεται 5 και 2 δέκατα.

Ο δεκαδικός αριθμός αποτελείται από δύο μέρη το ακέραιο μέρος και το δεκαδικό μέρος. Αυτά τα δύο μέρη χωρίζονται μεταξύ τους με την υποδιαστολή (κόμμα).

Παράδειγμα:



και διαβάζεται εβδομήντα πέντε και διακόσια ογδόντα δύο χιλιοστά.

Οι παρακάτω δεκαδικοί διαβάζεται ως εξής

40,3: σαράντα και τρία δέκατα

2,85: δύο και ογδόντα πέντε εκατοστά

323,017: τριακόσια είκοσι τρία και δεκαεπτά χιλιοστά

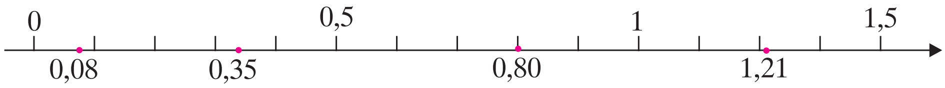
0, 36: μηδέν κόμμα τριάντα έξι εκατοστά (ή τριάντα έξι εκατοστά).

Για να συγκρίνουμε μεταξύ τους δεκαδικούς αριθμούς συγκρίνουμε πρώτα τα ακέραια μέρη τους. Αν τα ακέραια μέρη είναι ίσα, συγκρίνουμε διαδοχικά τα ψηφία των δεκάτων, εκατοστών, χιλιοστών,

Έτσι: 2,3 > 1,576, 28,35 > 28,305, 0,018 < 0,108

Αν θέλουμε να τοποθετήσουμε τους δεκαδικούς αριθμούς

0,35, 0,08, 1,21, 0,80 πάνω στην αριθμογραμμή τότε έχουμε



- Στο τέλος ενός δεκαδικού όσα μηδενικά και αν βάλουμε δεν αλλάζει η αξία του.

Παράδειγμα:

2,3 = 2,30 = 2,300

έναν ακέραιο μπορούμε να τον κάνουμε δεκαδικό αν βάλουμε στο τέλος του αριθμού την υποδιαστολή και μετά όσα μηδενικά θέλουμε:

6 = 6,0 = 6,00 = 6,000

➢ 1.2.1 Πρόσθεση δεκαδικών αριθμών

Για να προσθέσουμε δεκαδικούς αριθμούς τοποθετούμε αυτούς τον έναν κάτω από τον άλλο έτσι ώστε οι υποδιαστολές να μπουν στην ίδια στήλη και κάθε ψηφίο μιας τάξης κάτω από το ψηφίο της ίδιας τάξης του προηγούμενου αριθμού.

Αν κάποιος προσθετέος είναι ακέραιος ή έχει λιγότερα δεκαδικά ψηφία τότε τον συμπληρώνουμε με μηδενικά.

Κάνουμε την πρόσθεση όπως και στους φυσικούς αριθμούς και βάζουμε την υποδιαστολή στην ίδια θέση που βρίσκεται η υποδιαστολή των προσθετέων.

Παράδειγμα:
Να υπολογιστεί το άθροισμα: 17 + 3,75 + 208,3 + 2,035 έχουμε:

$$
\begin{array}{r}
208{,}300\\
17{,}000\\
3{,}750\\
+\ 2{,}035\\
\hline
231{,}085
\end{array}
$$

➢ 1.2.2 Αφαίρεση δεκαδικών αριθμών

Για να αφαιρέσουμε δεκαδικούς αριθμούς γράφουμε τον έναν κάτω από τον άλλο έτσι ώστε οι υποδιαστολές να μπουν στην ίδια στήλη και εκτελούμε την αφαίρεση όπως και στους φυσικούς αριθμούς.

Η δοκιμή της αφαίρεσης γίνεται με τον ίδιο τρόπο που γίνεται και στους φυσικούς αριθμούς.

Παράδειγμα:
49,23 – 23,897 έχουμε:

$$
\begin{array}{r}
49{,}230\\
-\ 23{,}897\\
\hline
25{,}333
\end{array}
\qquad
\text{δοκιμή: }
\begin{array}{r}
25{,}333\\
+\ 23{,}897\\
\hline
49{,}230
\end{array}
$$

➢ 1.2.3 Πολλαπλασιασμός δεκαδικών αριθμών

Για να πολλαπλασιάσουμε μεταξύ τους δεκαδικούς αριθμούς ή για να πολλαπλασιάσουμε δεκαδικό με φυσικό, τους πολλαπλασιάζουμε σαν να είναι φυσικοί και στο γινόμενο τους, χωρίζουμε από τα δεξιά τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα δεκαδικά έχουν οι δύο αριθμοί μαζί.

Όταν το γινόμενο δεν έχει αρκετά ψηφία για να χωρίσουμε με υποδιαστολή τότε συμπληρώνουμε στην αρχή κάθε αριθμού όσα μηδενικά χρειάζονται.

Η δοκιμή του πολλαπλασιασμού είναι ίδια με την δοκιμή που κάνουμε στον πολλαπλασιασμό φυσικών αριθμών.

Παράδειγμα: 1ο

$3,7 \cdot 2,63$ γίνεται:

$$
\begin{array}{rl}
2,63 & \longrightarrow \text{(2 δεκαδικά ψηφία)} \\
\text{x} \quad 3,7 & \longrightarrow \text{(1 δεκαδικό ψηφίο)} \\
\hline
1841 & \\
+\ 789 & \\
\hline
9,731 & \longrightarrow \text{(2+1=3 δεκαδικά ψηφία)}
\end{array}
$$

δοκιμή:

$$
\begin{array}{c|c}
2 & 1 \\
\hline
2 & 2
\end{array}
$$

Επίσης ο πολλαπλασιασμός $\mathbf{3,25 \cdot 0,04}$ γίνεται:

$$
\begin{array}{r}
3,25 \\
0,04 \\
\hline
0,1300
\end{array}
$$

(συμπληρώσαμε ένα μηδενικό για να δημιουργήσουμε 4 δεκαδικά ψηφία

Για να πολλαπλασιάσουμε ένα δεκαδικό αριθμό με 10, 100, 1000, … γράφουμε τον δεκαδικό και μεταφέρουμε την υποδιαστολή αντίστοιχα μία, δύο, τρεις, … θέσεις δεξιά.

Αν οι θέσεις είναι λιγότερες τότε συμπληρώνουμε μηδενικά στα δεξιά του αριθμού.

Παράδειγμα 2ο:

$2,723 \cdot 100 = 272,3$

$3,4 \cdot 1000 = 3400$

$0,004 \cdot 10 = 0,04$

Για να πολλαπλασιάσουμε ένα φυσικό ή ένα δεκαδικό αριθμό με 0,1, 0,01, 0,001, …, μεταφέρουμε την υποδιαστολή προς τα αριστερά μία, δύο, τρεις, … θέσεις αντίστοιχα.

Παράδειγμα 3ο:

$28,75 \cdot 0,1 = 2,875$

$3,14 \cdot 0,01 = 0,0314$

$3873 \cdot 0,001 = 3,873$

➢ 1.2.4. Διαίρεση δεκαδικών αριθμών

Για να διαιρέσουμε **δεκαδικό με φυσικό,** κάνουμε την διαίρεση σαν να ήταν ακέραιοι αριθμοί, αλλά όταν κατεβάσουμε το πρώτο δεκαδικό ψηφίο βάζουμε στο πηλίκο υποδιαστολή.

Παράδειγμα 1ο:

624,87 : 9 γίνεται:

$$
\begin{array}{r|l}
624{,}87 & 9 \\ \cline{2-2}
-54 & 69{,}43 \\ \cline{1-1}
84 & \\
-81 & \\ \cline{1-1}
38 & \\
27 & \\
27 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Όταν ο **διαιρέτης** είναι **δεκαδικός** τότε πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο και το διαιρέτη με 10, 100, 1000, …, ανάλογα με πόσα δεκαδικά ψηφία έχει ο διαιρέτης και εκτελούμε την διαίρεση με τους αριθμούς που προκύπτουν:

Παράδειγμα 2ο:

η διαίρεση 903,5 : 3,25

Πρέπει να πολλαπλασιάζουμε και τους δύο αριθμούς με 100 οπότε εκτελούμε την διαίρεση: 90350 : 325 και έχουμε:

$$
\begin{array}{r|l}
90350 & 325 \\ \cline{2-2}
-650 & 278 \\ \cline{1-1}
2535 & \\
-2275 & \\ \cline{1-1}
2600 & \\
-2600 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Η δοκιμή στη διαίρεση είναι ίδια με την δοκιμή που κάνουμε και στη διαίρεση των φυσικών αριθμών.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να γράψετε τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς με τα ψηφία των αριθμών:
- i) τριάντα δύο και είκοσι οκτώ εκατοστά: . . . .
- ii) τετρακόσια πέντε και σαράντα πέντε χιλιοστά: . . . .
- iii) μηδέν κόμμα τρία δέκατα: . . . .
- iv) εξήντα τρία και εξήντα τρία εκατοστά: . . . .
- v) επτά χιλιοστά: . . . .

2. Στον αριθμό 347,286 να συμπληρώσετε τις παρακάτω φράσεις:
- i) Το ψηφίο των εκατοστών είναι . . . .
- ii) Το ψηφίο των δεκάδων είναι . . . .
- iii) Το 6 είναι ψηφίο των . . . .
- iv) Το 2 είναι ψηφίο των . . . .

3. Να συμπληρώσετε το κατάλληλο σύμβολο (>, =, <) στα κενά:

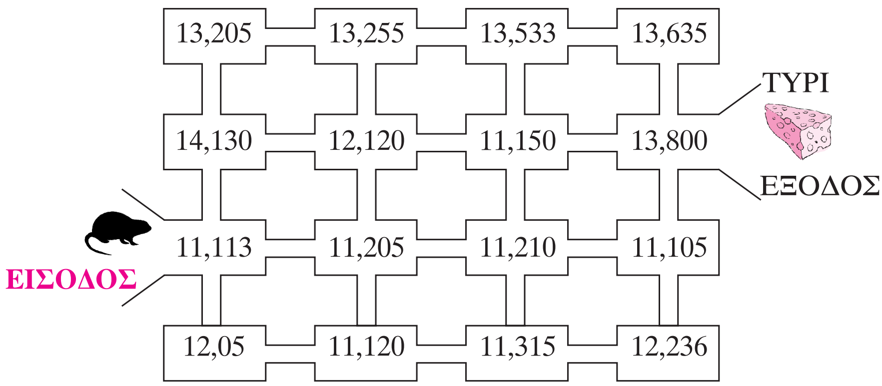
403,2 49,298	49,6 49,59
3,22 3,220	7,305 7,35
805 8,05	0,0001 0,001

4. Να τοποθετήσετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

7,06   7,36   7,246   7,199   7,099

5. Να γράψετε 3 αριθμούς μεταξύ του 1,54 και 1,56.

6. Βοηθήστε τον ποντικό της παρακάτω εικόνας να ξεκινήσει από την είσοδο που βρίσκεται δίπλα του και να κινείται κάθε φορά οριζοντίως ή καθέτως σε γειτονικό κουτάκι που έχει μεγαλύτερο αριθμό από αυτόν στον οποίο βρίσκεται κάθε φορά για να φτάσει στην έξοδο με το τυρί.

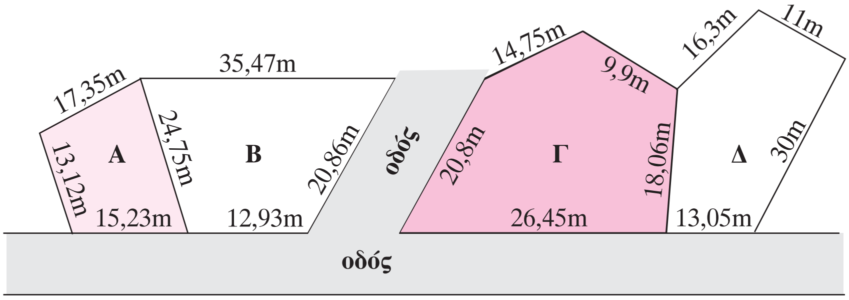


7. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα

i) 0,003 + 2,75 ii) 2,063 + 7,35

iii) 2,15 + 0,03 + 14,68 + 35,71 iv) 3,4 + 17 + 2,893 + 0,05

8. Να υπολογίσετε το μήκος της περιμέτρου σε καθένα από τα οικόπεδα Α, Β, Γ και Δ του παρακάτω σχεδίου.



9. Να υπολογίσετε τις διαφορές:

i) 457,8 – 29,86 ii) 65 – 4,065

iii) 3975,503 – 39,53 iv) 3,75 – 0,002

10. Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις με τη σειρά που σημειώνονται:

i) 2,003 + 7,23 – 3,465 – 2,75 + 42

ii) 0,03 + 0,103 – 0,120 + 3,233 – 1,75

iii) 19,7 + 12,36 – 28,926 + 3 – 3,512

11. Να εκτελέσετε τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς:

i) $4506 \cdot 0,75$ ii) $1,25 \cdot 4,009$

iii) $1008 \cdot 6,405$ iv) $0,62 \cdot 0,4$

12. Να υπολογίσετε από μνήμης τα παρακάτω γινόμενα:

i) $85 \cdot 10$ $8,5 \cdot 100$ $0,85 \cdot 100$

ii) $570 \cdot 0,1$ $5700 \cdot 0,01$ $5700 \cdot 0,001$

iii) $7,35 \cdot 100$ $0,735 \cdot 10$ $0,0735 \cdot 1000$

iv) $37 \cdot 0,1$ $370 \cdot 0,01$ $37 \cdot 0,001$

13. Χωρίς να εκτελέσετε τις πράξεις να βρείτε ποια από τα παρακάτω γινόμενα είναι ίσα μεταξύ τους.

$28,7 \cdot 3,71$ $0,287 \cdot 371$ $2870 \cdot 3,71$

$287 \cdot 0,371$ $2,87 \cdot 37,1$ $28,7 \cdot 37,1$

14. Να εκτελέσετε τις διαιρέσεις:

i) 75,9 : 3 ii) 294,72 : 12

iii) 23,25 : 3,1 iv) 88,314 : 7,18

1.3. ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ

Εφαρμογή:

Ένας έμπορος υφασμάτων αγόρασε 230 μέτρα ύφασμα προς 32,3 € το μέτρο. Θέλει να κερδίσει συνολικά 4000 € από το συγκεκριμένο ύφασμα. Πόσο πρέπει να πουλάει το μέτρο;

Απάντηση:

Ο έμπορος πλήρωσε $230 \cdot 32,3 = 7429$ € Για να κερδίσει συνολικά 4000 € πρέπει να εισπράξει από τη πώληση του συγκεκριμένου υφάσματος.

$$7429 + 4000 = 11429 \text{ €}$$

Για να βρούμε την τιμή που πρέπει να πουλάει το μέτρο πρέπει να κάνουμε την διαίρεση: 11429: 230.

Έχουμε:

$$\begin{array}{r|l}
11429 & 230 \\ \cline{2-2}
-920 & 49{,}6913 \\ \cline{1-1}
2229 & \\
-2070 & \\ \cline{1-1}
1590 & \\
-1380 & \\ \cline{1-1}
2100 & \\
-2070 & \\ \cline{1-1}
300 & \\
700 & \\ \cline{1-1}
\vdots &
\end{array}$$

Επειδή συναλλαγές γίνονται το πολύ σε μονάδες του € η τιμή που θα πουλά ο έμπορος μπορεί να είναι 50€ ή 49,7€ ή 49,69€ το μέτρο.

Δηλαδή στρογγυλοποιήσαμε τον αριθμό στο ψηφίο των μονάδων ή του δεκάτου ή του εκατοστού αντίστοιχα.

Για να στρογγυλοποιήσουμε έναν αριθμό σε μια τάξη του, ακολουθούμε τον παρακάτω κανόνα.

- **Αν το ψηφίο της επόμενης προς τα δεξιά τάξης είναι 0 ή 1 ή 2 ή 3 ή 4, αφήνουμε τα ψηφία του αριθμού όπως είναι μέχρι και την τάξη που γίνεται η στρογγυλοποίηση και αντικαθιστούμε με μηδενικά όλα τα επόμενα ψηφία.**

- **Αν το ψηφίο της επόμενης προς τα δεξιά τάξης είναι 5 ή 6 ή 7 ή 8 ή 9, αυξάνουμε κατά μία μονάδα το ψηφίο της τάξης του γίνεται η στρογγυλοποίηση και αντικαθιστούμε με μηδενικά όλα τα επόμενα ψηφία του αριθμού.**
  παράδειγμα:

Αριθμός	Θέση που θα στρογγυλευθεί	Στρογγυλεμένος αριθμός
392587	εκατοντάδα	392600
452003	χιλιάδα	452000
35,673	μονάδα	36
12,674	δέκατα	12,7
3,5453	χιλιοστό	3,545
23,99673	εκατοστό	24

Τη διαδικασία που ακολουθήσαμε στην διαίρεση του προβλήματος στην αρχή της παραγράφου την εφαρμόζουμε όταν σε μία διαίρεση το υπόλοιπο που προκύπτει δεν είναι 0, οπότε βάζουμε στο πηλίκο υποδιαστολή και προσθέτουμε 0 στο υπόλοιπο και συνεχίζουμε για να βρούμε με μεγαλύτερη προσέγγιση το πηλίκο.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Όταν ο διαιρετέος είναι μικρότερος από τον διαιρέτη βάζουμε στο πηλίκο 0 και υποδιαστολή και συνεχίζουμε προσθέτοντας μηδενικά στο διαιρετέο ή αν είναι δεκαδικός θεωρώντας αυτόν ως φυσικό.

Παράδειγμα:

η διαίρεση 37 : 75 γίνεται:

$$\begin{array}{r|l}
370 & 75 \\ \cline{2-2}
-300 & 0{,}493 \\ \cline{1-1}
700 & \\
-675 & \\ \cline{1-1}
250 & \\
225 & \\ \cline{1-1}
25 &
\end{array}$$

ενώ η διαίρεση 1,764 : 28 γίνεται:

$$\begin{array}{r|l}
1764 & 28 \\ \cline{2-2}
-168 & 0{,}063 \\ \cline{1-1}
=84 & \\
84 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στο υπογραμμισμένο ψηφίο:

i) $11{,}5\underline{8}4$ iv) $4{,}01\underline{9}8$

ii) $8{,}\underline{3}52$ v) $7{,}39\underline{2}6$

iii) $27\underline{5}9$ vi) $29\underline{9}63$

2. Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί 6523, 17892 και 29656 στην πλησιέστερη:

i) εκατοντάδα   ii) χιλιάδα

3. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον αριθμό σελίδων πέντε βιβλίων:

Βιβλίο	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Σελίδες	236	217	228	249	214

i) Να στρογγυλοποιηθούν οι αριθμοί στην πλησιέστερη δεκάδα.

ii) Να κατατάξετε τα βιβλία σύμφωνα με το πάχος τους αρχίζοντας από το πιο λεπτό.

4. Να στρογγυλοποιήσετε τους παρακάτω αριθμούς στο i) δέκατο και ii) το εκατοστό.

9,1260   7,020   428,77   2,196

5. Να εκτελέσετε τις διαιρέσεις:

i) 778 : 16   ii) 38,25 : 5

iii) 266 : 35   iv) 429 : 65

6. Να εκτελέσετε τις διαιρέσεις με προσέγγιση εκατοστού

i) 275 : 43   ii) 38,6 : 2,7

iii) 39,267 : 0,07

7. Θέλουμε να χωρίζουμε ένα σωλήνα 5 μέτρων σε 14 ίσα κομμάτια. Τι μήκος θα έχει κάθε κομμάτι;

8. Ένας ράφτης κατασκεύασε από ένα τόπι ύφασμα μήκους 40 μέτρων 7 ίδια κουστούμια. Πόσα μέτρα ύφασμα χρειάστηκε για κάθε κουστούμι; Να στρογγυλοποιήσετε το αποτέλεσμα στο εκατοστό.

9. Η κυρία Αφροδίτη αγόρασε 4,75 μέτρα ύφασμα για κουρτίνες και πλήρωσε 38,95€. Χρειάζεται ακόμα 4,25 μέτρα ύφασμα. Πόσα θα πληρώσει;

1.4. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για την επίλυση ενός προβλήματος κάνουμε **πρόσθεση** όταν:

- **Δίνονται δύο ή περισσότεροι αριθμοί και ζητείται το άθροισμά τους.**
- **Δίνεται ένας αριθμός και ζητείται ένας άλλος μεγαλύτερός του και ταυτόχρονα γνωρίζουμε την διαφορά των δύο αριθμών.**

Εφαρμογή 1η:

Ένας έμπορος των λαϊκών αγορών πούλησε τη Δευτέρα 300 κιλά πατάτες και εισέπραξε 210 €, Τη Τρίτη πούλησε 120 κιλά περισσότερα από την Δευτέρα και 20 κιλά λιγότερα από την Τετάρτη και εισέπραξε 84€ περισσότερα από τη Δευτέρα και 14 € λιγότερα από την Τετάρτη.

i) Πόσα κιλά πούλησε κάθε μέρα και πόσα χρήματα εισέπραξε;

ii) Πόσα κιλά πούλησε συνολικά και τις τρεις μέρες και πόσα χρήματα εισέπραξε.

Απάντηση:

i) Τη Τρίτη πούλησε 300 + 120 = 420 κιλά και εισέπραξε
210 + 84 = 294 €
Την Τετάρτη πούλησε 420 + 20 = 440 κιλά και εισέπραξε
294 + 14 = 308 €

ii) Συνολικά όλες τις μέρες πούλησε: 300 + 420 + 440 = 1160 κιλά και εισέπραξε:
210 + 294 + 308 = 812€

Για την επίλυση ενός προβλήματος κάνουμε **αφαίρεση** όταν:

- Ζητάμε τη διαφορά δύο ομοειδών ποσοτήτων ή δύο αριθμών.
- Θέλουμε να ελαττώσουμε κάποιο αριθμό κατά μία συγκεκριμένη ποσότητα.
- Θέλουμε να συγκρίνουμε μεταξύ τους δύο αριθμούς.

Εφαρμογή 2η:

Αν δανειστούμε από κάποιον 1500€ θα μπορέσουμε να πληρώσουμε ένα χρέος 3500 € και θα μας περισσέψουν και 170€. Πόσα χρήματα έχουμε αρχικά:

Απάντηση:

3500 + 170 = 3670 €
Εφόσον έχουμε δανειστεί 1500€ άρα αρχικά είχαμε
3670 – 1500 = 2170 €

Για την επίλυση ενός προβλήματος χρησιμοποιούμε **πολλαπλασιασμό** όταν:

- **Γνωρίζουμε την τιμή μιας μονάδας και ζητάμε την τιμή πολλών μονάδων.**
- **Ζητάμε το πολλαπλάσιο ενός αριθμού.**
- **Όταν γνωρίζουμε ένα μέρος μιας ποσότητας και ζητάμε ολόκληρη την ποσότητα.**

Εφαρμογή 3η:

Σε ένα εργοστάσιο εργάζονται 35 εργάτες. Από αυτούς οι 18 έχουν ημερομίσθιο 35€, οι 12 έχουν ημερομίσθιο 45€ και οι υπόλοιποι 60€. Πόσα χρήματα πληρώνει η εταιρία την εβδομάδα (5 μέρες εργασίας);

Απάντηση:

Οι 18 εργάτες παίρνουν την ημέρα $18 \cdot 35 = 630$ €

Οι 12 εργάτες παίρνουν την ημέρα $12 \cdot 45 = 540$ €

Οι υπόλοιποι εργάτες είναι 35 – 18 – 12 = 5 εργάτες

οι οποίοι παίρνουν την ημέρα $5 \cdot 60 = 300$ €

Συνολικά το εργοστάσιο πληρώνει την ημέρα

$$630 + 540 + 300 = 1470 \text{ €}$$

Για τις 5 εργάσιμες μέρες της εβδομάδας πληρώνει

$$1470 \cdot 5 = 7350 .\text{€}$$

Για την επίλυση ενός προβλήματος κάνουμε **διαίρεση** όταν:

- **Γνωρίζουμε την τιμή πολλών μονάδων και ζητάμε την τιμή της μονάδας (διαίρεση μερισμού)**
- **Γνωρίζουμε την τιμή μιας μονάδας και την τιμή πολλών ομοειδών μονάδων προς αυτή την μονάδα και ζητάμε πλήθος των μονάδων (διαίρεση μέτρησης).**

Εφαρμογή 4η:

Ένα βαρέλι γεμάτο με κρασί αξίζει 900€. Αδειάζουμε από το βαρέλι 37 λίτρα κρασί και το υπόλοιπο αξίζει 678€. Πόσα λίτρα κρασί χωράει το βαρέλι;

Απάντηση:

Η αξία των 37 λίτρων που αδειάσαμε είναι:

900 – 678 = 222€. Οπότε κάθε λίτρο αξίζει 222 : 37 = 6€.

Άρα η χωρητικότητα του βαρελιού είναι 900 : 6 = 150 λίτρα.

Εφαρμογή 5η:

Σε ένα φυλάκιο βρίσκονται σήμερα 72 στρατιώτες που έχουν τρόφιμα για 15 μέρες. Αν μετά από 5 μέρες έλθουν άλλοι 8 στρατιώτες, για πόσες μέρες θα επαρκέσουν τα τρόφιμα;

Απάντηση:

Οι μερίδες του φαγητού που υπάρχουν στο φυλάκιο είναι $72 \cdot 5 = 360$ μερίδες. Μένουν ακόμη 1080 – 360 = 720 μερίδες για να περάσουν 72 + 8 = 80 στρατιώτες. Οπότε οι ημέρες που επαρκούν τα τρόφιμα ακόμη είναι 720 : 80 = 9 ημέρες.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Ένα χρηματικό ποσό μοιράστηκε σε τρία άτομα. Ο πρώτος πήρε 1270 €, ο δεύτερος 138€ περισσότερα του πρώτου και ο τρίτος 272€ περισσότερα από το δεύτερο. Πόσο ήταν ολόκληρο το ποσό;

2. Σε ένα λεωφορείο ταξιδεύουν 55 άτομα, άνδρες, γυναίκες και παιδιά. Οι άνδρες και τα παιδιά είναι 33, ενώ οι γυναίκες και τα παιδιά είναι μαζί 30. Πόσοι είναι οι άντρες, οι γυναίκες και τα παιδιά;

3. Τρεις δεξαμενές πετρελαίου περιέχουν διαφορετική ποσότητα. Από την α΄ δεξαμενή βάζουμε 867 λίτρα στην β΄ δεξαμενή και 833 λίτρα στην τρίτη ώστε να έχουν την ίδια ποσότητα. Αν η δεύτερη δεξαμενή περιέχει τώρα 1800 λίτρα, πόσα λίτρα περιέχει αρχικά η κάθε δεξαμενή;

4. 12 εργάτες εργάζονται 5 μέρες την εβδομάδα. Πόσα χρήματα θα πάρουν αν εργαστούν για 8 εβδομάδες με ημερομίσθιο 40 €;

5. Ένα κιβώτιο περιέχει 6 στρώματα με σαπούνια. Κάθε στρώμα έχει 4 σειρές, κάθε σειρά έει 5 πλάκες με σαπούνια και κάθε πλάκα σαπουνιού κοστίζει 42 λεπτά του €. Πόσο είναι η αξία των σαπουνιών που περιέχει όλο το κιβώτιο;

6. Ο Γιώργος έχει 27€. Πόσα τετράδια μπορεί να αγοράσει με τα χρήματα αυτά, αν κάθε τετράδιο αξίζει 4€ και πόσα χρήματα θα του μείνουν;

7. Ένα πλοίο αναχωρεί από το λιμάνι της Πάτρας με μέση ταχύτητα 25 μίλια την ώρα. Αργότερα αναχώρησε ένα άλλο ταχύπλοο με μέση ταχύτητα 45 μίλια την ώρα και έφτασε το α΄ σε 5 ώρες. Πόσες ώρες αργότερα ξεκίνησε το β΄ πλοίο από το α΄;

8. Δύο παιδιά συγκέντρωσαν από τα κάλαντα 36€ σε 27 κέρματα του 1€ και των 2€. Πόσα κέρματα του 1€ και πόσα των 2€ είχαν;

9. Έμπορος αγόρασε 135 μέτρα ύφασμα προς 28€ το μέτρο. Πόσο πρέπει να πουλήσει το μέτρο του υφάσματος για να κερδίσει από όλο το ύφασμα 1755€ και πόσα χρήματα θα εισπράξει από την πώληση;

10. Μια μοδίστρα εισπράττει 224€ την εβδομάδα και ξοδεύει 25€ την ημέρα. μετά από πόσο χρόνο θα εξοικονομήσει 735€ για να αγοράσει μια επαγγελματική ραπτομηχανή;

11. Ένα συνεργείο ελαιοχρωματισμού ανέλαβε να παραδώσει μια πολυκατοικία βαμμένη σε 30 μέρες. Η συνολική επιφάνεια των τοίχων που θα βαφτούν είναι 6768 τ.μ. Αφού το συνεργείο δούλεψε για 12 μέρες, λόγω κακοκαιρίας σταμάτησαν να βάφουν για 6 μέρες.

Πόσα τ.μ. παραπάνω πρέπει να βάφουν για να παραδώσουν την πολυκατοικία βαμμένη στον καθορισμένο χρόνο;

12. Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος 74,2 m και πλάτος 37,8 m. Θέλουμε να το περιφράξουμε με συρματόπλεγμα το οποίο στοιχίζει 1,2€ το τρέχον με μέτρο και ο εργάτης που θα το περιφράξει ζήτησε αμοιβή 2,5€ για κάθε μέτρο που τοποθετεί. Πόσα μέτρα σύρμα θα χρειαστούμε και πόσα χρήματα θα κοστίσει η περίφραξη;

13. Μια λάμπα φωτισμού απέχει από το έδαφος 5,4 μέτρα. Ένας εργάτης διαθέτει μια πτυσσόμενη σκάλα η οποία έχει 12 σκαλοπάτια που απέχουν μεταξύ τους απόσταση 0,3 μέτρα. Το πρώτο σκαλοπάτι απέχει από τη βάση της σκάλας 0,5 μέτρα και το τελευταίο σκαλοπάτι 0,4 μέτρα από την κορυφή της σκάλας. Αν ο εργάτης έχει ύψος 1,80 μέτρα να εξετάσετε αν μπορεί να αλλάξει την λάμπα ή όχι;

14. Σε μια ημερήσια εκδρομή έλαβαν μέρος 14 άτομα, άνδρες και γυναίκες και ξόδεψαν συνολικά 620,2 €. Καθένας από τους άνδρες ξόδεψε 53 € και καθεμία από τις γυναίκες 32,7 €. Πόσοι ήταν οι άνδρες και πόσες οι γυναίκες;

2. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

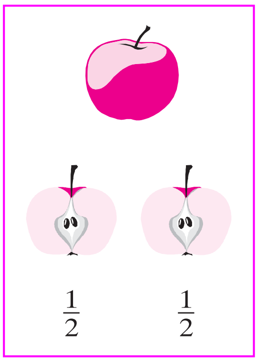
Σκοπός του μαθήματος είναι ο εκπαιδευόμενος να κατανοήσει την έννοια του όλου και του επιμέρους, καθώς και να συσχετίσει την έννοια του κλάσματος.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα: Ο εκπαιδευόμενος να μπορεί να συγκρίνει και να εκτελεί πράξεις με κλάσματα, καθώς και να εφαρμόζει τις γνώσεις αυτές σε καθημερινά προβλήματα.

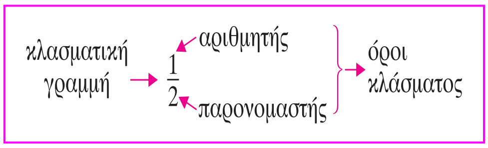
Βασικές έννοιες:

- Κλάσμα
- Αριθμητής
- Παρονομαστής
- Ισοδύναμα κλάσματα
- Ομώνυμα – Ετερώνυμα κλάσματα
- Σύνθετα κλάσματα

2.1 ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ

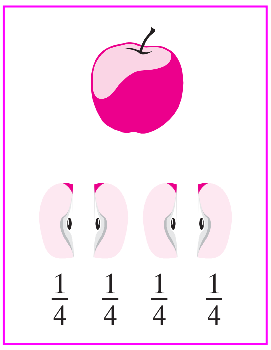


Αν υποθέσουμε ότι χωρίζουμε ένα μήλο, δηλαδή μία ακέραια μονάδα σε δυο ίσα μέρη. Το καθένα από αυτά τα δυο μέρη είναι και πάλι μια μονάδα, αλλά όχι ακέραια. Είναι μια κλασματική μονάδα (κλάσμα ονομάζεται ένα κομμάτι του συνόλου). Το ονομάζουμε ένα δεύτερο και γράφουμε $\frac{1}{2}$.



Ο αριθμός 1 φανερώνει ότι έχουμε το ένα από τα ίσα μέρη της ακέραιης μονάδας και ονομάζεται **αριθμητής**.

Ο αριθμός 2 φανερώνει σε πόσα ίσα μέρη χωρίσαμε την ακέραιη μονάδα και ονομάζεται **παρονομαστής**.



Αν τώρα κόψουμε το μήλο σε τέσσερα ίσα μέρη, τότε το καθένα από τα μέρη αυτά είναι το ένα τέταρτο του μήλου ή το κλάσμα $\frac{1}{4}$.

Παρατηρούμε τώρα ότι τα κομμάτια που είναι το $\frac{1}{4}$ του μήλου είναι μικρότερα από τα κομμάτια που είναι το $\frac{1}{2}$ του μήλου.

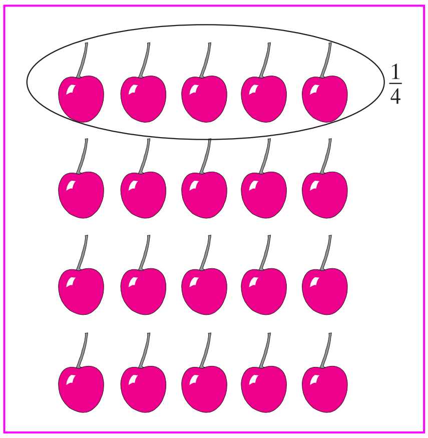
Δηλαδή σε όσα περισσότερα ίσα μέρη χωρίζουμε την ακέραιη μονάδα τόσο μικρότερη είναι η κλασματική μονάδα.

Συμπεράσματα:

1. Κάθε κλασματική μονάδα παριστάνει το πηλίκο μιας διαίρεσης της μονάδας δια του παρονομαστή.
2. Από δύο κλασματικές μονάδες μεγαλύτερη είναι αυτή που έχει τον μικρότερο παρονομαστή.

Έκφραση υποσυνόλων με κλάσματα

Ένα σύνολο από όμοια πράγματα αποτελεί μία **ακέραιη μονάδα**. Τα υποσύνολα που δημιουργούνται από μερικά από τα στοιχεία του συνόλου μπορούν να περιγράφουν ποσοτικά με ένα κλάσμα.



Παράδειγμα:

Αν έχουμε 20 κεράσια και δώσουμε σε έναν φίλο μας το $\frac{1}{4}$ τότε, όπως βλέπουμε στο διπλανό σχήμα, ο φίλος μας θα πάρει 5 κεράσια.

Δηλαδή χωρίζουμε τα 20 κεράσια σε 4 ομάδες των 5 κομματιών και του δίνουμε τη μία ομάδα.

Προκύπτει έτσι η πράξη $\frac{1}{4} \cdot 20 = 5$.

Συμπέρασμα:

Για να βρούμε τι μέρος ενός αριθμού είναι η κλασματική μονάδα, διαιρούμε τον αριθμό με τον παρονομαστή του κλάσματος.

Αν τώρα δώσουμε στο φίλο μας άλλα 5 κεράσια, τότε θα του έχουμε δώσει συνολικά 10 κεράσια ή τα: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$ των κερασιών.

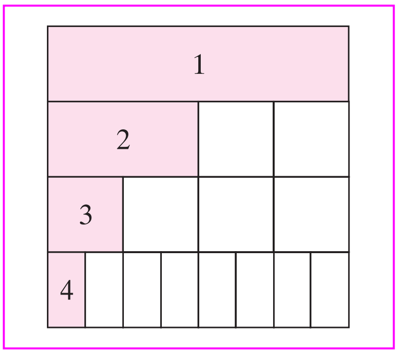
Προκύπτει έτσι η πράξη $\frac{2}{4} \cdot 20 = 10$ ή 20 : 4 = 5 και $2 \cdot 5 = 10$.

Συμπεράσματα:

1. Για να βρούμε τι μέρος ενός αριθμού είναι ένα κλάσμα, διαιρούμε τον αριθμό με τον παρονομαστή και πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα με τον αριθμητή.
2. Κάθε κλάσμα παριστάνει το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή δια του παρονομαστή.

Εφαρμογή 1η:

Παρατηρώντας το διπλανό σχήμα να γράψετε ποια κλασματική μονάδα αντιπροσωπεύει το καθένα από τα αριθμημένα μέρη και στη συνέχεια να τα βάλετε σε μια σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο χρησιμοποιώντας το σύμβολο της ανισότητας.



Απάντηση:

Το κομμάτι 1 αντιπροσωπεύει την ακέραια μονάδα, δηλαδή το κλάσμα $\frac{1}{1}$ ή το 1.

Το κομμάτι 2 αντιπροσωπεύει την κλασματική μονάδα $\frac{1}{2}$.

Το κομμάτι 3 είναι η κλασματική μονάδα $\frac{1}{4}$ και το κομμάτι 4 είναι η κλασματική μονάδα $\frac{1}{8}$.

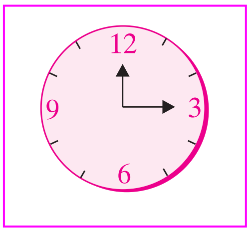
$$\text{Είναι } \frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1}.$$

Εφαρμογή 2η:

Το $\frac{1}{4}$ της ώρας πόσα λεπτά είναι;

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι η μία ώρα έχει 60 λεπτά, οπότε θέλουμε να βρούμε το $\frac{1}{4} \cdot 60$.



Για το λόγο αυτό διαιρούμε το 60 με το 4. Είναι 60 : 4 =15.

Άρα το $\frac{1}{4}$ της ώρας είναι 15 λεπτά.

Εφαρμογή 3η:

Σε ένα καλάθι υπάρχουν 4 μήλα, 3 πορτοκάλια και 5 αχλάδια. Τι μέρος του συνόλου είναι: α) τα μήλα, β) τα αχλάδια, γ) τα πορτοκάλια;

Απάντηση:

α) Συνολικά στο καλάθι υπάρχουν 4 + 3 + 5 = 12 φρούτα. Τα μήλα είναι τα 4 από τα 12 φρούτα ή τα $\frac{4}{12}$ του συνόλου.

β) Τα αχλάδια είναι τα 5 από τα 12 φρούτα ή τα $\frac{5}{12}$ του συνόλου.

γ) Τα πορτοκάλια είναι τα 3 από τα 12 φρούτα ή τα $\frac{3}{12}$ του συνόλου.

Εφαρμογή 4η:

Η συνολική επιφάνεια της Γης είναι περίπου 513.000,000 τετραγωνικά χιλιόμετρα (τ.χλμ.). Η θάλασσα καλύπτει περίπου τα $\frac{2}{3}$ της επιφάνειας της. Πόσα τ. χλμ. είναι η ξηρά;

Απάντηση:

Η συνολική επιφάνεια της γης αντιπροσωπεύεται από το κλάσμα $\frac{3}{3}$, (οποιοδήποτε κλάσμα με παρονομαστή ίσο με τον αριθμητή αποτελεί μια ακέραια μονάδα).

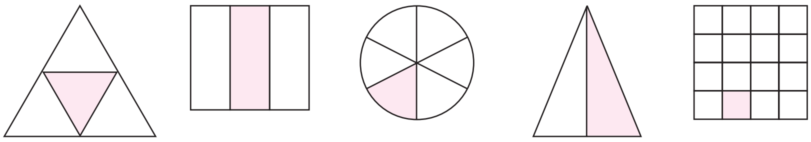
Επειδή η θάλασσα είναι τα $\frac{2}{3}$ της επιφάνειάς της, η ξηρά θα είναι το υπόλοιπο $\frac{1}{3}$.

Είναι: $513.000.000 : 3 = 171.000.000$.

Δηλαδή $\frac{1}{3} \cdot 513.000.000 = 171.000.000$.

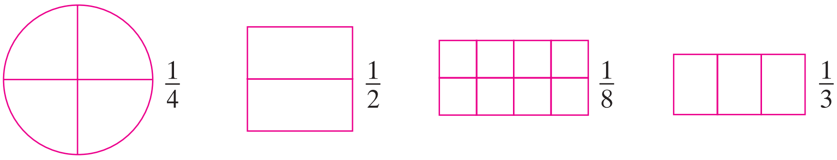
ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να γράψετε κάτω από κάθε σχήμα τη κλασματική μονάδα που αντιπροσωπεύει το χρωματιστό μέρος.

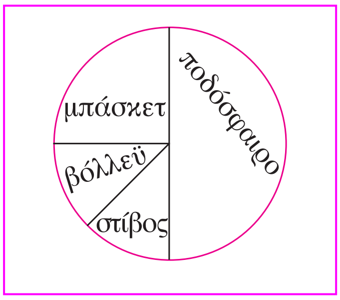


....

2. Να γραμμοσκιάσετε σε κάθε σχήμα το μέρος που αντιστοιχεί στην κλασματική μονάδα που αναγράφεται.



3. Σε μια δημοσκόπηση που έγινε στους μαθητές ενός σχολείου για το ποιο άθλημα προτιμούν, οι απαντήσεις δίνονται στο διπλανό διάγραμμα. Να γράψετε τις κλασματικές μονάδες που αντιπροσωπεύουν το μέρος του συνόλου των μαθητών που προτιμά το κάθε άθλημα.



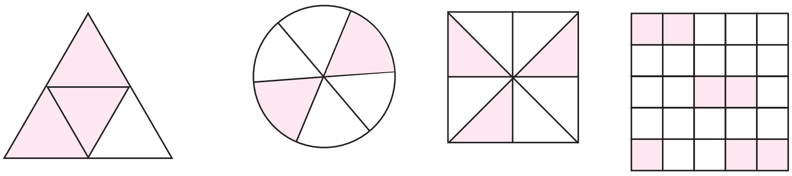
4. Να βάλετε το σύμβολο της ανισότητας στα παρακάτω ζευγάρια κλασματικών μονάδων.

$$\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{5} \qquad \frac{1}{6}\ldots\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{10}\ldots\frac{1}{100} \qquad \frac{1}{11}\ldots\frac{1}{12}$$

5. Να διατάξετε τις παρακάτω κλασματικές μονάδες από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη, χρησιμοποιώντας το σύμβολο της ανισότητας.

$$\frac{1}{14} \qquad \frac{1}{15} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{9} \qquad \frac{1}{12} \qquad \frac{1}{6}$$

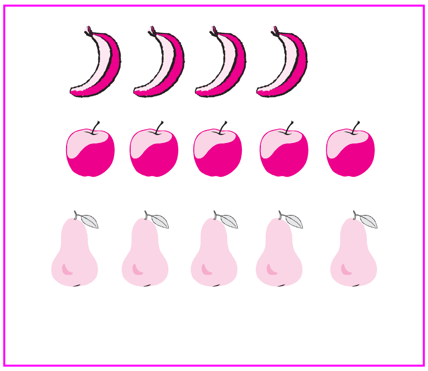
6. Να γράψετε κάτω από κάθε σχήμα τον κλασματικό αριθμό που δηλώνει τι μέρος του κάθε σχήματος είναι οι χρωματισμένες περιοχές.



....

7. Ο Νίκος ισχυρίζεται ότι από το διπλανό σύνολο φρούτων, οι μπανάνες είναι το $\frac{1}{3}$.

Έχει δίκιο και γιατί;



8. α) Να γράψετε με τη μορφή κλάσματος τις παρακάτω διαιρέσεις:

$3:7=$ $\quad 4:9=$ $\quad 12:23=$

β) Να γράψετε τις διαιρέσεις τα κλάσματα:

$\frac{5}{8}=$ $\quad \frac{7}{9}=$ $\quad \frac{3}{16}=$

9. Έχουμε δύο κουτιά με σοκολατάκια. Το ένα περιέχει 12 σοκολατάκια και το άλλο 20. Αν από το πρώτο πάρουμε τα $\frac{3}{4}$ και από το δεύτερο τα $\frac{2}{5}$, τότε πόσα σοκολατάκια συνολικά θα έχουμε πάρει;

10. Βρίσκω πόσα λεπτά της ώρας είναι:

α) το $\frac{1}{6}$ β) τα $\frac{3}{10}$ γ) τα $\frac{3}{4}$ δ) τα $\frac{2}{5}$

11. Τι μέρος του μήνα είναι:

α) οι 10 ημέρες β) οι 2 εβδομάδες γ) οι 20 ημέρες

12. Ποιο μέρος του ενός κιλού, είναι:

α) τα 250 γραμμάρια, β) τα 100 γραμμάρια γ) τα 750 γραμμάρια

13. Ο Παναγιώτης για να αγοράσει μία μπλούζα που κόστιζε 20 ευρώ, διέθεσε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που διέθετε. Πόσα χρήματα είχε μαζί του ο Παναγιώτης;

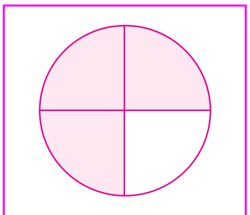
14. Η Ελλάδα έχει έκταση περίπου 132.000 τ.χλμ.. Αν τα $\frac{5}{6}$ του εδάφους της χαρακτηρίζονται ορεινά τότε πόσα τ.χλμ. είναι οι πεδιάδες;

➢ 2.1.1. Σύγκριση κλασμάτων –Σύγκριση κλασμάτων με τη μονάδα

Ο Κώστας έφαγε τη μια μέρα τα $\frac{3}{4}$ του φαγητού που περιείχε το πιάτο του, την άλλη μέρα τα $\frac{4}{4}$ και την τρίτη ημέρα τα $\frac{7}{4}$ του πιάτου του. Του έφτανε του Κώστα ένα πιάτο φαγητό την ημέρα;

Αν χωρίσουμε το ένα πιάτο φαγητό σε 4 ίσα μέρη, τότε ο Κώστας την πρώτη ημέρα έφαγε τα 3 μέρη. Δηλαδή έφαγε λιγότερο από ένα πιάτο φαγητό.

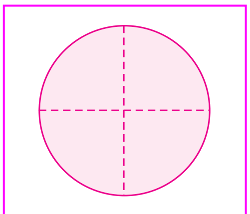
Είναι $\frac{3}{4} < 1$ γιατί $3 < 4$.



1η ημέρα

Τη δεύτερη ημέρα έφαγε και τα 4 μέρη του φαγητού του.

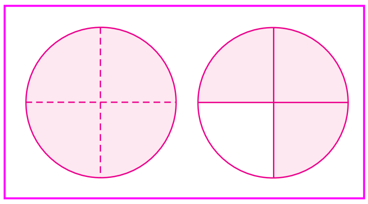
Είναι $\frac{4}{4} = 1$ γιατί $4 = 4$.



2η ημέρα

Την τρίτη ημέρα ο Κώστας έφαγε 1 πιάτο φαγητό $\left(\frac{4}{4}\right)$ και τα 3 από τα 4 μέρη ενός δεύτερου πιάτου. Δηλαδή την Τρίτη ημέρα δεν έφτασε στον Κώστα ένα πιάτο φαγητό.

Είναι $\frac{7}{4} > 1$ γιατί $7 > 4$. Ακόμη $\frac{7}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$ ή $1\frac{3}{4}$.



3η μέρα

– Ο αριθμός $1\frac{3}{4}$ έχει και ακέραιο μέρος και κλασματικό γι' αυτό ονομάζεται **μεικτός** αριθμός.

Ακόμη παρατηρούμε ότι τα δύο πιάτα φαγητό ισοδυναμούν με το κλάσμα $\frac{8}{4}$, δηλαδή $2 = \frac{8}{4}$, όμοια $2 = \frac{4}{2}$ ή $2 = \frac{2}{1}$.

Συμπεράσματα:

1. Ένα κλάσμα που έχει αριθμητή μικρότερο από τον παρονομαστή, είναι μικρότερο της μονάδας.

2. Ένα κλάσμα που έχει αριθμητή ίσο με τον παρονομαστή, είναι ίσο με τη μονάδα.

3. Ένα κλάσμα που έχει αριθμητή μεγαλύτερο από τον παρονομαστή, είναι μεγαλύτερο της μονάδας.

4. Ένας ακέραιος μπορεί να γραφεί ως κλάσμα με παρονομαστή το 1.

Σύγκριση κλασμάτων

Εφαρμογή 1η:

Τρία αυτοκίνητα ξεκινούν ταυτόχρονα από την Αθήνα με προορισμό τη Θεσσαλονίκη. Μετά από 3 ώρες το αυτοκίνητο Α έχει διανύσει τα $\frac{3}{6}$ της απόστασης, το αυτοκίνητο Β τα $\frac{4}{6}$ και το αυτοκίνητο Γ τα $\frac{3}{9}$ της απόστασης. Ποιο αυτοκίνητο έχει καλύψει τη μικρότερη και ποιο τη μεγαλύτερη απόσταση;

Απάντηση:

Για να βρούμε ποιο αυτοκίνητο έχει καλύψει τη μικρότερη και ποιο τη μεγαλύτερη απόσταση, πρέπει να διατάξουμε τα κλάσματα $\frac{3}{6}, \frac{4}{6}$ και $\frac{3}{9}$.

– Για να συγκρίνουμε τα κλάσματα $\frac{3}{6}$ και $\frac{4}{6}$, χωρίζουμε την απόσταση Αθήνα - Θεσσαλονίκη σε 6 ίσα μέρη και παίρνουμε αντίστοιχα 3 και 4 από αυτά.

Δηλαδή $\frac{3}{6} < \frac{4}{6}$.

Τα κλάσματα $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$ επειδή αντιπροσωπεύουν ίσα μέρη της ίδιας μονάδας (έχουν τον ίδιο παρονομαστή) και λέγονται **ομώνυμα** κλάσματα.

– Για να συγκρίνουμε τα κλάσματα $\frac{3}{6}$ και $\frac{3}{9}$, χωρίζουμε, την ίδια απόσταση, μια φορά σε 6 ίσα μέρη και μία φορά σε 9 ίσα μέρη και παίρνουμε 3 από αυτά.

Επειδή τα 6 τμήματα της απόστασης είναι μεγαλύτερα από τα 9 τμήματα της ίδιας απόστασης, ισχύει $\frac{3}{6} > \frac{3}{9}$.

Τα κλάσματα $\frac{3}{6}$ και $\frac{3}{9}$ επειδή αντιπροσωπεύουν διαφορετικά μέρη της ίδιας μονάδας (έχουν διαφορετικούς παρονομαστές) και λέγονται **ετερώνυμα** κλάσματα.

Επομένως $\frac{3}{9} < \frac{3}{6} < \frac{4}{6}$.

Άρα μεγαλύτερη απόσταση έχει καλύψει το αυτοκίνητο Β ενώ μικρότερη το Γ.

Συμπεράσματα:

1. Από δύο ομώνυμα κλάσματα μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο αριθμητή.
2. Από δύο ετερώνυμα κλάσματα που έχουν τους ίδιους αριθμητές, μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει το μικρότερο παρονομαστή.

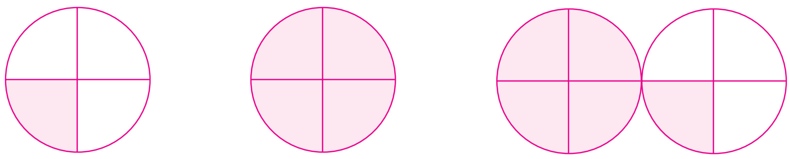
ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να συμπληρώσετε στα παρακάτω ζεύγη το σύμβολο της ισότητας ή της ανισότητας.

$\frac{3}{8}...1 \qquad \frac{6}{6}...1 \qquad 1...\frac{9}{1}$

$\frac{0}{5}...1 \qquad 1...\frac{7}{5} \qquad 4...\frac{4}{1}$

2. Να περιγράψετε με ένα κλάσμα, το χρωματισμένο μέρος σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:



....

3. Να συμπληρώσετε τους όρους που λείπουν για να σχηματιστούν κλάσματα:

α) μεγαλύτερα της μονάδας: $\frac{...}{6}, \quad \frac{9}{...}, \quad \frac{...}{...}$

β) μικρότερα της μονάδας: $\frac{...}{5}, \quad \frac{8}{...}, \quad \frac{...}{...}$

γ) ίσα με τη μονάδα: $\frac{...}{7}, \quad \frac{14}{...}, \quad \frac{...}{...}$

4. Να αντιστοιχίσετε τους μεικτούς αριθμούς της στήλης Α με τα ισοδύναμα τους κλάσματα στης στήλης Β.

Α	**Β**
$3\frac{4}{7}$	$\frac{28}{5}$
$2\frac{1}{5}$	$\frac{25}{7}$
$12\frac{2}{7}$	$\frac{86}{7}$
$5\frac{3}{5}$	$\frac{11}{5}$

5. Να μετατραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε μεικτούς αριθμούς: $\frac{10}{9}, \frac{35}{8}, \frac{23}{10}, \frac{101}{50}$.

6. Μια ομάδα 5 ανθρώπων μοίρασε 8 μήλα. Πόσα μήλα πήρε ο καθένας;

7. Να συμπληρώσετε το κενό, στα παρακάτω ζεύγη κλασμάτων, με το σύμβολο της ανισότητας.

$$\frac{3}{4}\ldots\ldots\frac{1}{4} \qquad \frac{5}{8}\ldots\ldots\frac{7}{8} \qquad 5\frac{1}{3}\ldots\ldots5\frac{2}{3}$$

$$\frac{6}{16}\ldots\ldots\frac{6}{12} \qquad \frac{3}{7}\ldots\ldots\frac{3}{5} \qquad \frac{8}{15}\ldots\ldots\frac{11}{15} \qquad 3\frac{4}{4}\ldots\ldots3\frac{4}{9}$$

8. Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τα παρακάτω κλάσματα, χρησιμοποιώντας το σύμβολο της ανισότητας.

$$\frac{8}{12}, \quad \frac{8}{20}, \quad \frac{9}{12}, \quad \frac{8}{25}, \quad \frac{11}{12}$$

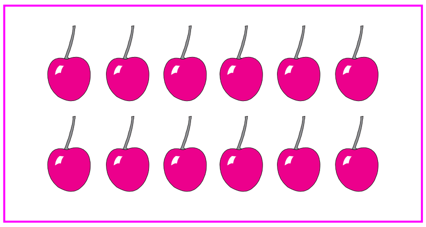
9. Στο αγώνισμα των 1500 μέτρων, σε μία διοργάνωση συμμετέχουν 4 αθλητές. Σε κάποιο χρονική στιγμή του αγώνα ο αθλητής Α είχε καλύψει τα $\frac{4}{7}$ της απόστασης, ο Β τα $\frac{6}{7}$, ο Γ τα $\frac{4}{8}$ και ο Δ τα $\frac{4}{9}$ της απόστασης.

Να κατατάξετε τους αθλητές με βάση την απόσταση που είχαν διανύσει εκείνη τη στιγμή.

➢ 2.1.2 Ισοδύναμα Κλάσματα

Εφαρμογή:

Έχουμε 12 κεράσια και τα μοιράζουμε σε 3 ανθρώπους με τον εξής τρόπο: Ο πρώτος θα πάρει το $\frac{1}{3}$, ο δεύτερος τα $\frac{2}{6}$ και ο τρίτος τα $\frac{4}{12}$ των κερασιών. Πόσα κεράσια πήρε ο καθένας;



Απάντηση:

Για να βρούμε πόσα κεράσια πήρε ο πρώτος θα χωρίσουμε τα 12 κεράσια σε 3 ομάδες. Είναι 12 : 3 = 4. Άρα $\frac{1}{3}\cdot 12 = 4$, οπότε ο πρώτος πήρε 4 κεράσια.

Για τον δεύτερο έχουμε: $12 : 6 = 2$ και $2 \cdot 2 = 4$.

Δηλαδή $\frac{2}{6}\cdot 12 = 4$, οπότε και ο δεύτερος πήρε 4 κεράσια.

Για τον τρίτο έχουμε: 12 : 12 = 1 και $4 \cdot 1 = 4$.

Είναι $\frac{4}{12}\cdot 12 = 4$, οπότε και ο τρίτος πήρε 4 κεράσια. Παρατηρούμε ότι και οι τρεις άνθρωποι πήραν τον ίδιο αριθμό κερασιών. Δηλαδή τα κλάσματα $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{4}{12}$ έχουν διαφορετικούς όρους αλλά την ίδια αξία. Τα κλάσματα αυτά λέγονται ισοδύναμα.

Συμπεράσματα:

1. Αν πολλαπλασιάσουμε και τους δύο όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο αριθμό, προκύπτει ισοδύναμο κλάσμα.

2. Αν διαιρέσουμε και τους δύο όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο αριθμό, προκύπτει ισοδύναμο κλάσμα. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται απλοποίηση του κλάσματος, γιατί προκύπτει απλούστερη μορφή του αρχικού κλάσματος.

Δημιουργία ομώνυμων κλασμάτων

Εφαρμογή:

Από μία σοκολάτα κόβουμε το $\frac{1}{4}$ και τα $\frac{2}{3}$ της και τα δίνουμε σε δύο ανθρώπους Α και Β. Ποιος πήρε το μεγαλύτερο κομμάτι;

Απάντηση:

Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό πρακτικά, πρέπει να χωρίσουμε τη σοκολάτα, μια φορά σε 4 μέρη και πάρουμε το 1 και μια φορά σε 3 μέρη και να πάρουμε τα 2.

Το πρόβλημα αυτό επιλύεται πιο εύκολα αν καταφέρουμε και μετατρέψουμε τα κλάσματα $\frac{1}{4}$ και $\frac{2}{3}$ σε ισοδύναμά τους με τον ίδιο παρονομαστή, έτσι ώστε να χωρίσουμε τη σοκολάτα μόνο μία φορά σε ίσα μέρη.

Ο κοινός παρονομαστής των ισοδυνάμων, προς τα αρχικά, κλασμάτων είναι πολλαπλάσιο των αρχικών παρονομαστών.

Συνήθως βρίσκουμε το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιό τους (Ε.Κ.Π.) με την εξής διαδικασία:

- Τοποθετούμε τους παρονομαστές του ένα δίπλα στον άλλο και μετά τον τελευταίο φέρνουμε μία κάθετη γραμμή.

$$\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & \\ & & \end{array}$$

- Βρίσκουμε τον μικρότερο ακέραιο, διαφορετικό της μονάδας που διαιρεί κάποιον από αυτούς και τον βάζουμε δεξιά της γραμμής.

Στην περίπτωσή μας το 2 διαιρεί το 4 οπότε το 2 τοποθετείται δεξιά της γραμμής.

$$\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 2 \\ & & \end{array}$$

- Κάτω από τους παρονομαστές γράφουμε το πηλίκο της διαίρεσής τους με το 2.

$$\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & \end{array}$$

- Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία όσες φορές χρειαστεί, ώστε στη τελευταία γραμμή να υπάρχουν μόνο μονάδες.

$$\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & \end{array}$$

- Τέλος πολλαπλασιάζοντας τους αριθμούς δεξιά της γραμμής βρίσκουμε το Ε.Κ.Π..

Είναι $\text{Ε.Κ.Π.}(4,3) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Οπότε:

$$\frac{1}{4} \overset{\cdot 3}{\underset{\cdot 3}{=}} \frac{3}{12} \quad \text{και} \quad \frac{2}{3} \overset{\cdot 4}{\underset{\cdot 4}{=}} \frac{8}{12}$$

Επομένως πρέπει να χωρίσουμε τη σοκολάτα σε 12 ίσα μέρη και να δώσουμε στον άνθρωπο Α 3 κομμάτια ενώ στον άνθρωπο Β 8 κομμάτια.

Δηλαδή ο άνθρωπος Β πήρε το μεγαλύτερο μέρος της σοκολάτας.

Έχουμε $\frac{3}{12} < \frac{8}{12}$ οπότε και $\frac{1}{4} < \frac{2}{3}$.

Τα κλάσματα $\frac{3}{12}$ και $\frac{8}{12}$ που έχουν τον ίδιο παρονομαστή ας θυμηθούμε λέγονται **ομώνυμα**, ενώ τα κλάσματα $\frac{1}{4}$ και $\frac{2}{3}$ δεν έχουν τον ίδιο παρονομαστή και λέγονται **ετερώνυμα**.

Εφαρμογή:

Να βάλετε τα κλάσματα $\frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{2}{3}, \frac{11}{18}$ σε μία σειρά από το μικρότερο χρησιμοποιώντας σύμβολο της ανισότητας.

Απάντηση:

Για να συγκρίνουμε τα κλάσματα αυτά πρέπει να τα κάνουμε ομώνυμα.

Γνωρίζουμε ότι ο αριθμητής του κάθε κλάσματος φανερώνει τα μέρη της ακέραιης μονάδας που αντιπροσωπεύει το κάθε κλάσμα, οπότε μικρότερο θα είναι το κλάσμα με τον μικρότερο αριθμητή.

Για το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών 6, 9, 3, 18 έχουμε:

$$\begin{array}{cccc|c} 6 & 9 & 3 & 18 & 2 \\ 3 & 9 & 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

Δηλαδή $\text{Ε.Κ.Π.}(6,9,3,18) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

Οπότε: $$\frac{1}{6} \overset{\cdot 3}{\underset{\cdot 3}{=}} \frac{3}{18}, \quad \frac{4}{9} \overset{\cdot 2}{\underset{\cdot 2}{=}} \frac{8}{18}, \quad \frac{2}{3} \overset{\cdot 6}{\underset{\cdot 6}{=}} \frac{12}{18}, \quad \frac{11}{18} \overset{\cdot 1}{\underset{\cdot 1}{=}} \frac{11}{18}$$

Επειδή είναι: $\frac{3}{18} < \frac{8}{18} < \frac{11}{18} < \frac{12}{18}$, έχουμε: $\frac{1}{6} < \frac{4}{9} < \frac{11}{8} < \frac{2}{3}$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Συμπληρώνουμε τα κενά, ώστε να έχουμε ισοδύναμα κλάσματα:

$$\frac{3}{5}=\frac{.....}{20},\qquad \frac{2}{7}=\frac{10}{.....},\qquad \frac{4}{6}=\frac{.....}{12},\qquad \frac{3}{8}=\frac{30}{.....}$$

2. Γράφουμε ισοδύναμα κλάσματα με το καθένα από τα παρακάτω:

$\frac{1}{4}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}$

$\frac{3}{5}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}$

$\frac{3}{10}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}$

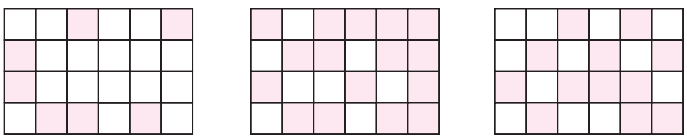
3. Γράφουμε ισοδύναμα κλάσματα με το καθένα από τα παρακάτω, που προκύπτουν με διαίρεση των όρων τους:

$\frac{18}{24}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}$

$\frac{20}{30}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}$

$\frac{36}{72}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}$

4. Ποια από τις παρακάτω χρωματισμένες περιοχές αντιπροσωπεύει τα $\frac{2}{3}$ του κάθε ορθογωνίου;



5. Να γραφούν ως κλάσματα με παρονομαστή το 6 οι αριθμοί:

α) 1, β) 8, γ) 13, δ) 12.

6. Το κλάσμα $\frac{3}{4}$ να τραπεί σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή τον αριθμό:

α) 8, β) 16. γ) 24, δ) 40.

7. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

$\frac{18}{24},\quad \frac{10}{35},\quad \frac{27}{63},\quad \frac{22}{55}$

8. Να υπολογίσετε την τιμή του ακεραίου x ώστε τα κλάσματα $\frac{1}{9}$ και $\frac{15}{x}$ να είναι ισοδύναμα.

9. Να βλέπετε το σύμβολο της ανισότητας στα παρακάτω ζευγάρια κλασμάτων:

$$\frac{3}{4} \;....\; \frac{1}{2} \qquad \frac{2}{5} \;....\; \frac{2}{4} \qquad \frac{3}{8} \;....\; \frac{5}{12} \qquad \frac{6}{10} \;....\; \frac{59}{100}$$

10. Να βάλετε τα κλάσματα $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{17}{20}$ σε μία σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο χρησιμοποιώντας το σύμβολο της ανισότητας.

11. Δύο αδέρφια, ο Κώστας και η Αποστολία είχαν από κοινού κάποια χρήματα. Αποφάσισαν να πάρει ο Κώστας τα $\frac{4}{9}$ και η Αποστολία τα $\frac{2}{6}$ των χρημάτων. Ποιος πήρε τα περισσότερα χρήματα;

12. Σε μία κινηματογραφική αίθουσα τα $\frac{3}{8}$ είναι άντρες και τα $\frac{5}{12}$ γυναίκες. Οι άντρες ή οι γυναίκες είναι περισσότεροι;

13. Ένα όχημα για να πάει από την πόλη Α στην πόλη Β χρειάστηκε τα $\frac{4}{7}$ της ώρας, ενώ για να επιστρέψει χρειάστηκε τα $\frac{9}{14}$ της ώρας. Πότε χρειάστηκε το όχημα περισσότερο χρόνο;

➢ 2.1.3. Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

Ομώνυμα κλάσματα

Εφαρμογή:

Ανατέθηκε σε μία εταιρεία να κατασκευάσει ένα δρόμο μήκους 7 χιλιομέτρων (km). Τον πρώτο μήνα των εργασιών η εταιρεία είχε κατασκευάσει τα 2 km του δρόμου και τον δεύτερο μήνα 1 Km.

α. Ποιο μέρος του δρόμου είχε κατασκευάσει η εταιρεία τους δύο πρώτους μήνες εργασιών;

β. Ποιο μέρος του έργου υπολείπεται να κατασκευάσει;

Απάντηση:

α. Τον πρώτο μήνα η εταιρεία είχε κατασκευάσει τα $\frac{2}{7}$ του δρόμου και τον δεύτερο μήνα το $\frac{1}{7}$.

Συνολικά είχε κατασκευάσει 3 από τα 7 km του δρόμου ή τα $\frac{3}{7}$. Δηλαδή $\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$.

β. Η εταιρεία έπρεπε να κατασκευάσει άλλα 4 km ή τα $\frac{4}{7}$ του δρόμου.

Δηλαδή από ολόκληρο το δρόμο που είναι $1=\frac{7}{7}$.

Είχε κατασκευάσει τα $\frac{3}{7}$ και υπολείπονταν τα $\frac{4}{7}$.

Είναι $1-\frac{3}{7}=\frac{7}{7}-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$.

Συμπεράσματα:

1. Για να προσθέσουμε δύο ομώνυμα κλάσματα, προσθέτουμε τους αριθμητές τους και στο αποτέλεσμα αφήνουμε τον ίδιο παρονομαστή.
2. Για να αφαιρέσουμε δύο ομώνυμα κλάσματα, αφαιρούμε τους αριθμητές τους και αφήνουμε τον ίδιο παρονομαστή.

Ετερώνυμα Κλάσματα

Εφαρμογή:

Ένας γεωργός μάζεψε από το χωράφι του τη μία μέρα $\frac{2}{9}$ του τόνου πατάτες και την άλλη μέρα $\frac{1}{6}$ του τόνου.

α. Πόσα μέρη του τόνου είχε μαζέψει και τις δύο ημέρες;

β. Πόσο παραπάνω είχε μαζέψει τη μια μέρα από την άλλη;

Απάντηση:

α. Πρέπει να υπολογίσουμε το άθροισμα $\frac{2}{9}+\frac{1}{6}$.

Επειδή όμως τα δύο κλάσματα είναι ετερώνυμα, θα τα μετατρέψουμε πρώτα σε ομώνυμα. Για το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών 6 και 9.

$$\begin{array}{cc|c} 6 & 9 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

Δηλαδή $\text{Ε.Κ.Π.}(6,9)=2\cdot 3\cdot 3=18$.

Οπότε: $\frac{2}{9}=\frac{2\cdot 2}{9\cdot 2}=\frac{4}{18}$ και $\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 3}{6\cdot 3}=\frac{3}{18}$.

Είναι $\frac{2}{9}+\frac{1}{6}=\frac{4}{18}+\frac{3}{18}=\frac{7}{18}$.

Άρα και τις δύο ημέρες είχε μαζέψει τα $\frac{7}{18}$ του τόνου.

β. Παρατηρούμε ότι την πρώτη ημέρα είχε μαζέψει περισσότερες πατάτες. Οπότε πρέπει να υπολογίσουμε τη διαφορά $\frac{2}{9}-\frac{1}{6}$.

Είναι $\frac{2}{9}-\frac{1}{6}=\frac{4}{18}-\frac{3}{18}=\frac{1}{18}$ του τόνου.

Συμπέρασμα:

Για να προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα, τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα. Δηλαδή: $\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις.

$\frac{2}{10}+\frac{3}{10}=...$ $\frac{7}{8}+\frac{5}{8}=...$ $\frac{3}{20}+\frac{1}{20}=...$

$\frac{3}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=...$ $\frac{5}{10}+\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=...$ $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=...$

$\frac{9}{10}-\frac{5}{10}=...$ $\frac{15}{30}-\frac{7}{30}-\frac{2}{30}=...$ $\frac{8}{12}-\frac{7}{12}-\frac{1}{12}=...$

2. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

$\frac{3}{5}+\frac{1}{2}=...$ $\frac{7}{15}+\frac{1}{5}=...$

$\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{18}=...$

$\frac{4}{6}-\frac{1}{4}=...$ $\frac{2}{3}-\frac{1}{10}-\frac{7}{15}=...$

3. Να συμπληρώσετε τους όρους των ομωνύμων κλασμάτων στις παρακάτω πράξεις:

$\frac{2}{...}+\frac{6}{...}+\frac{3}{...}=\frac{...}{15}$ $\frac{3}{...}+\frac{...}{10}+\frac{1}{...}=\frac{8}{...}$

$\frac{18}{...}-\frac{...}{50}=\frac{...}{...}$ $\frac{17}{20}-\frac{...}{...}-\frac{4}{...}=\frac{8}{...}$

4. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

$2+\frac{3}{5}=...$ $5+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=...$ $7-\frac{3}{8}=...$

$6-\frac{1}{4}=...$ $26-\frac{3}{8}=...$ $14-\frac{3}{20}=...$

5. Δύο σακούλες με πορτοκάλια ζυγίζουν μαζί 2 κιλά. Αν η μία ζυγίζει $\frac{3}{4}$ του κιλού, τότε πόσο ζυγίζει η άλλη;

6. Μία οικογένεια ξοδεύει το $\frac{1}{3}$ του εισοδήματός της για διατροφή, τα $\frac{3}{9}$ για αγορά ρουχισμού, τα $\frac{2}{12}$ για πληρωμή λογαριασμών και το $\frac{3}{18}$ για διάφορα μικροέξοδα. Ποιο μέρος του εισοδήματός της αποταμιεύει αυτή η οικογένεια;

7. Τρεις εργάτες χρησιμοποιήθηκαν για την υλοποίηση ενός έργου. Την πρώτη εβδομάδα ο πρώτος κάνει το $\frac{1}{6}$ του έργου, ο δεύτερος τα $\frac{4}{18}$ και ο τρίτος το $\frac{1}{9}$.

I. Ποιο μέρος του έργου έχει ολοκληρωθεί;

II. Ποιο μέρος του έργου απομένει να γίνει;

8. Αν προσθέσουμε στον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος $\frac{2}{5}$ τη μονάδα, θα προκύψει ένα νέο κλάσμα. Αφού βρείτε αυτό το κλάσμα, να το συγκρίνετε με το 2.

9. Να βρείτε σε ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε τον αριθμό $\frac{5}{9}$ για να προκύψει ο αριθμός $\frac{17}{18}$.

10. Να βρείτε ποιον αριθμό πρέπει να αφαιρέσουμε από το $\frac{5}{6}$ για να προκύψει ο αριθμός $\frac{1}{3}$.

11. Ο Κώστας και η Αποστολία πήραν και οι δύο μαζί τα $\frac{3}{4}$ μιας σοκολάτας. Αν ο Κώστας πήρε το $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας τότε ποιο μέρος της σοκολάτας πήρε η Αποστολία;

➢ 2.1.4. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

Πολλαπλασιασμός ακεραίου με κλάσμα

Εφαρμογή 1η:

Ένας γεωργός οργώνει με το τρακτέρ του, τα $\frac{2}{9}$ ενός αγρού την ημέρα. Ποιο μέρος του αγρού θα έχει οργώσει αν εργαστεί 3 ημέρες;

Απάντηση:

Επειδή σε μία ημέρα οργώνει τα $\frac{2}{9}$ του αγρού, σε 3 ημέρες θα έχει οργώσει τα $3\cdot\frac{2}{9}$ του αγρού.

Δηλαδή έχει οργώσει τα: $\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{2+2+2}{9}=\frac{3\cdot 2}{9}=\frac{6}{9}$ του έργου.

Δηλαδή $3\cdot\frac{2}{9}=\frac{3\cdot 2}{9}=\frac{6}{9}$.

Εφαρμογή 2η:

Ο πατέρας του Στέλιου είχε στο πορτοφόλι του 50 ευρώ. Αν δώσει στο γιο του τα $\frac{3}{10}$ των χρημάτων του, τότε πόσα χρήματα πήρε ο Στέλιος;

Απάντηση:

Ο Στέλιος θα πάρει τα 3 από τα 10 μέρη στα οποία μπορούμε να χωρίσουμε τα 50 ευρώ.

Το καθένα από τα 10 μέρη έχει αξία $\frac{50}{10}=5$ ευρώ.

Οπότε ο Στέλιος θα πάρει $3\cdot\frac{50}{10}=3\cdot 5=15$ ευρώ. Παρατηρούμε ότι

$$3\cdot\frac{50}{10}=\frac{3\cdot 50}{10}=\frac{3}{10}\cdot 50=15.$$

Δηλαδή αντί να κάνουμε την προηγούμενη διαδικασία, ήταν αρκετό να κάνουμε την πράξη: $\frac{3}{10}\cdot 50$.

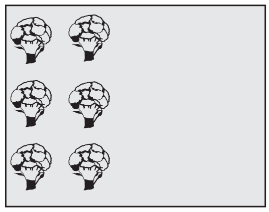
Συμπεράσματα:

1. Για να πολλαπλασιάσουμε έναν ακέραιο με ένα κλάσμα πολλαπλασιάζουμε τον ακέραιο με τον αριθμητή του κλάσματος και στο αποτέλεσμα αφήνουμε τον ίδιο παρονομαστή.
2. Για να υπολογίσουμε το μέρος (κλάσμα) μιας ποσότητας, πολλαπλασιάζουμε το κλάσμα με την ποσότητα.

Πολλαπλασιασμός κλάσματος με κλάσμα

Εφαρμογή:

Ένας αγρός έχει επιφάνεια ίση με τα $\frac{3}{5}$ του στρέμματος. Αν στα $\frac{2}{7}$ του αγρού έχουν φυτέψει μαρούλια, τότε πόση επιφάνεια καλύπτουν τα μαρούλια;



αγρός

Απάντηση:

Αρχικά θα χωρίσουμε τον αγρό σε 7 ίσα μέρη. Το καθένα από αυτά έχει επιφάνεια ίση με το $\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{5}$ του στρέμματος.

Επειδή για την επιφάνεια του αγρού χωρίζουμε το 1 στρέμμα σε 5 ίσα μέρη και στη συνέχεια τα 3 από αυτά τα χωρίζουμε σε 7 κομμάτια, είναι το ίδιο με το να χωρίσουμε το 1 στρέμμα σε $7\cdot 5 = 35$ μέρη και να πάρουμε 3 από αυτά. Δηλαδή $\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{7\cdot 5} = \frac{2}{35}$.

Τότε $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5} = 2\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{5} = 2\cdot\frac{3}{7\cdot 5} = \frac{2\cdot 3}{7\cdot 5} = \frac{6}{35}$ του στρέμματος.

Συμπέρασμα:

Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού δύο κλασμάτων είναι ένα κλάσμα, που έχει ως αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και ως παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών. Δηλαδή: $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$.

Αντίστροφοι αριθμοί

Εφαρμογή:

Αν υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα τι παρατηρήτε;

α) $\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{2}$ β) $\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{3}$ γ) $5\cdot\frac{1}{5}$ δ) $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}$

Απάντηση:

α) $\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{2} = \frac{2\cdot 7}{7\cdot 2} = \frac{14}{14} = 1$.

β) $\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{3} = \frac{3\cdot 8}{8\cdot 3} = \frac{24}{24} = 1$

γ) $5\cdot\frac{1}{5} = \frac{5\cdot 1}{5} = \frac{5}{5} = 1$

δ) $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha\cdot\beta}{\beta\cdot\alpha} = 1$

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Σε καθεμιά από τις προηγούμενες πράξεις το γινόμενο είναι 1. Οι δύο αριθμοί που το γινόμενό τους είναι ίσο με 1, λέγονται: **αντίστροφοι αριθμοί**.

Ο καθένας από τους αριθμούς αυτούς λέγεται αντίστροφος του άλλου. Δηλαδή στην περίπτωση α) οι αριθμοί $\frac{2}{7}$ και $\frac{7}{2}$ είναι αντίστροφοι.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να βρείτε τα γινόμενα:

α) $5\cdot\frac{4}{7}=...$ β) $9\cdot\frac{3}{8}=...$ γ) $\frac{7}{12}\cdot 3=...$ δ) $\frac{15}{100}\cdot 1000=...$

2. Να βρείτε τα γινόμενα:

α) $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=...$ β) $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=...$ γ) $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{10}=...$

δ) $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}=...$ ε) $\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{2}=...$ στ) $\frac{10}{13}\cdot\frac{13}{10}=...$

3. Το ένα κιλό κεφαλοτύρι κοστίζει 6 ευρώ. Αν αγοράσουμε $\frac{2}{3}$ του κιλού κεφαλοτύρι πόσα χρήματα θα πληρώσουμε;

4. Η απόσταση Αθήνα – Λαμία είναι 210 km. Αν μετά από 2 ώρες οδήγησης έχουμε καλύψει τα $\frac{2}{3}$ της απόστασης τότε πόσα χιλιόμετρα έχουμε διανύσει;

5. Ένα σχολείο έχει 420 μαθητές. Αν τα $\frac{4}{7}$ των μαθητών είναι κορίτσια τότε πόσα κορίτσια έχει το σχολείο αυτό;

6. Να υπολογίσετε με το νου:

α) τα $\frac{3}{10}$ του κιλού πόσα γραμμάρια είναι

β) τα $\frac{5}{6}$ της ημέρας πόσες ώρες είναι

γ) τα $\frac{3}{4}$ του έτους πόσοι μήνες είναι

δ) τα $\frac{7}{20}$ του χιλιομέτρου πόσα μέτρα είναι

7. Τα $\frac{3}{4}$ του ανθρωπίνου σώματος είναι νερό. Να βρείτε πόσα κιλά νερό περιέχει ένας άνθρωπος που έχει βάρος: α) 80 kg, β) 68 kg, γ) 96 kg.

8. Ο Γιώργος πήρε από τη μητέρα του τα $\frac{2}{3}$ μιας σοκολάτας. Αν έδωσε τα $\frac{3}{5}$ του κομματιού του στον αδερφό του, τότε ποιο μέρος της σοκολάτας πήρε ο αδερφός του Γιώργου;

9. Ένα μπουκάλι περιέχει $\frac{1}{2}$ λίτρα λεμονάδα.. Ήπιε το $\frac{1}{3}$ της λεμονάδας. Πόση λεμονάδα ήπιε η Διονυσία;

10. Τα $\frac{2}{9}$ των μαθητών ενός σχολείου φορούν γυαλιά οράσεως. Αν τα $\frac{12}{100}$ των παιδιών αυτών έχουν μυωπία μεγαλύτερη από 4 βαθμούς, τότε ποιο μέρος των μαθητών του σχολείου έχουν μυωπία πάνω από 4 βαθμούς;

11. Ένας ορειβάτης για να ανέβει στη κορυφή ενός βουνού χρειάζεται 6 ώρες. Αν στην πρώτη ώρα διένυσε τα $\frac{3}{10}$ της απόστασης και τη δεύτερη ώρα τα $\frac{2}{5}$ της απόστασης που είχε καλύψει την προηγούμενη ώρα, να βρείτε:

α) Ποιο μέρος της απόστασης είχε καλύψει τη δεύτερη φορά.]

β) Ποιο μέρος της συνολικής απόστασης είχε καλύψει τις δύο πρώτες ώρες της διαδρομής του.

γ) Ποιο μέρος της συνολικής απόστασης έχει ακόμα να διανύσει.

12. Δύο συνεργεία εργατών εργάζονται από κοινού για την ασφαλτόστρωση ενός δρόμου. Μετά από 3 ημέρες έχουν ολοκληρώσει τα $\frac{5}{8}$ του δρόμου. Αν το πρώτο συνεργείο από μόνο του είχε υλοποιήσει τα $\frac{2}{5}$ του τμήματος του δρόμου που έχει ολοκληρωθεί, να βρείτε ποιο μέρος του συνολικού έργου έχει κατασκευάσει το κάθε συνεργείο.

➢ 2.1.5. Διαίρεση κλασμάτων

Διαίρεση ακεραίου με κλάσμα

Εφαρμογή 1η:

Η ημερήσια παραγωγή μιας κτηνοτροφικής μονάδας είναι $\frac{3}{5}$ τόνοι γάλακτος. Πόσες ημέρες πρέπει να συλλέγεται το γάλα ώστε να συγκεντρωθούν 6 τόνοι;

Απάντηση:

Αρκεί να βρούμε πόσες φορές χωράει το $\frac{3}{5}$ στο 6. Δηλαδή ζητούμενο είναι το πηλίκο της διαίρεσης $6:\frac{3}{5}$. Θα εργαστούμε κάνοντας αναγωγή στη μονάδα.

Επειδή σε 1 ημέρα συλλέγονται $\frac{3}{5}$ τόνοι γάλα, το $\frac{1}{5}$ τόνων συλλέγεται σε $\frac{1}{3}$ ημέρες. Οπότε 1 τόνος = $\frac{5}{5}$ τόνοι συλλέγεται σε $5\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$ ημέρες. Άρα για οι 6 τόνοι χρειάζονται $6\cdot\frac{5}{3}=\frac{30}{3}=10$ ημέρες.

Παρατηρούμε ότι $6:\frac{3}{5}=6\cdot\frac{5}{3}=10$.

Εφαρμογή 2η:

Τα $\frac{2}{7}$ της ετήσιας παραγωγής ενός αγρότη σε καλαμπόκι είναι 1000 kg. Πόσο καλαμπόκι παράγει ο αγρότης το χρόνο;

Απάντηση:

Επειδή τα $\frac{2}{7}$ της παραγωγής είναι 1000 kg, το $\frac{1}{7}$ είναι $\frac{1000}{2}=50$ kg. Η συνολική παραγωγή αντιπροσωπεύεται από το κλάσμα $\frac{7}{7}$ ή $7\frac{1}{7}$. Οπότε 7500 kgr = 3500 kg καλαμπόκι.

Συμπέρασμα:

Για να διαιρέσουμε έναν ακέραιο με έναν κλάσμα πολλαπλασιάζουμε τον ακέραιο με τον αντίστροφο του κλάσματος.

Δηλαδή $\alpha:\frac{\beta}{\gamma}=\alpha\cdot\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta}$.

Διαίρεση δύο κλασμάτων

Εφαρμογή:

Τα $\frac{2}{3}$ της παραγωγής ενός χωραφιού με ελαιόδεντρα είναι $\frac{5}{8}$ τόνοι ελιές. Πόση είναι η παραγωγή όλου του χωραφιού;

Απάντηση:

Για να βρούμε τη συνολική παραγωγή του χωραφιού πρέπει να κάνουμε τη διαίρεση $\frac{5}{8}:\frac{2}{3}$.

Επειδή τα $\frac{2}{3}$ της παραγωγής είναι $\frac{5}{8}$ τόνοι ελιές, το $\frac{1}{3}$ της παραγωγής είναι:

$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{8\cdot 2}=\frac{5}{16}$ τόνοι ελιές.

Οπότε τα $\frac{3}{3}$ της παραγωγής είναι: $3\cdot\frac{5}{8\cdot 2}=\frac{3\cdot 5}{8\cdot 2}=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{16}$ τόνοι ελιές.

Δηλαδή: $\frac{5}{8}:\frac{2}{3}=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{16}$.

Συμπέρασμα:

Το πηλίκο της διαίρεσης δύο κλασμάτων βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

Δηλαδή: $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$.

Σύνθετα κλάσματα

Στο προηγούμενο παράδειγμα έπρεπε να βρούμε το πηλίκο της διαίρεσης $\frac{5}{8}:\frac{2}{3}$. Γνωρίζουμε ότι η κλασματική γραμμή είναι σύμβολο διαίρεσης όπως και το σύμβολο (:). Οπότε το προηγούμενο πηλίκο μπορεί να γραφεί: $\frac{5}{8}:\frac{2}{3}=\frac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{3}}=\frac{5\cdot 3}{8\cdot 2}=\frac{15}{16}$.

Τα κλάσματα $\frac{5}{8},\frac{2}{3}$ έχουν και τους δύο όρους τους ακέραιους και λέγονται απλά κλάσματα.

Τα κλάσματα $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{2}}$, $\frac{5}{\frac{2}{7}}$, $\frac{\frac{8}{11}}{3}$ έχουν τουλάχιστον έναν όρο τους κλάσμα και λέγονται **σύνθετα κλάσματα**.

Είδαμε ότι $\frac{5}{8}:\frac{2}{3}=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{16}$, ή: $\frac{\frac{5}{8}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{16}$

Συμπεράσματα:

1. Όταν σ' ένα κλάσμα, ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα, τότε το κλάσμα αυτό ονομάζεται σύνθετο.

2. Ένα σύνθετο κλάσμα μετατρέπεται σε απλό αν διαιρέσουμε τον αριθμητή με τον παρονομαστή του.

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}$$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να βρείτε τα πηλίκα:

α) $2:\frac{3}{5}=...$ β) $\frac{7}{8}:14=...$ γ) $1:\frac{2}{7}=...$ δ) $\frac{12}{15}:4=...$

2. Να βρείτε τα πηλίκα:

α) $\frac{1}{2}:\frac{3}{4}=...$ β) $\frac{2}{5}:\frac{8}{10}=...$ γ) $\frac{2}{9}:\frac{1}{6}=...$ δ) $\frac{25}{30}:\frac{5}{6}=...$

3. Να μετατρέψετε τα σύνθετα κλάσματα σε απλά:

α) $\frac{\frac{8}{9}}{\frac{2}{3}}=...$ β) $\frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}}=...$ γ) $\frac{4}{\frac{8}{15}}=...$ δ) $\frac{\frac{32}{15}}{8}=...$

4. Ένας άνθρωπος αγόρασε 2 λίτρα γάλα. Αν καταναλώνει $\frac{2}{5}$ λίτρα την ημέρα για πόσες ημέρες θα έχει γάλα;

5. Ένας μαθητής διάβασε τα $\frac{2}{7}$ των μαθημάτων του σε $\frac{3}{4}$ ώρες. Πόσο χρόνο χρειάζεται για το σύνολο των μαθημάτων του;

6. Ο Στέλιος έδωσε τα $\frac{4}{9}$ των χρημάτων του στον Γιώργο και από τα υπόλοιπα χρήματα έδωσε στον Κώστα τα $\frac{3}{10}$. Αν ο Κώστας πήρε 5 € τότε ο Στέλιος πόσα χρήματα είχε;

7. Το γινόμενο δύο κλασμάτων είναι ίσο με $\frac{2}{3}$. Αν το ένα κλάσμα είναι το $\frac{2}{7}$ τότε ποιο είναι το άλλο;

8. Μια οικογένεια αγόρασε 15 λίτρα λάδι και πλήρωσε 72 €. Αν καταναλώνει ημερησίως $\frac{5}{16}$ λίτρα λάδι, να βρείτε:

α) Για πόσες ημέρες φτάνει στην οικογένεια το λάδι που αγόρασε.

β) Πόσο κοστίζει στην οικογένεια το λάδι που καταναλώνει κάθε ημέρα.

9. Ο Κώστας έδωσε τα $\frac{3}{4}$ των χρημάτων του στον Γιώργο. Ο Γιώργος, με τη σειρά του, έδωσε τα $\frac{2}{5}$ των χρημάτων που πήρε από τον Κώστα, στον Γιάννη. Ο Γιάννης μέτρησε τα χρήματα που πήρε από τον Γιώργο και διαπίστωσε ότι ήταν 90 €. Να βρείτε:

α) Πόσα χρήματα πήρε ο Γιώργος από τον Κώστα.

β) Πόσα χρήματα είχε ο Κώστας.

2.1.6. Δεκαδικά κλάσματα

Τα κλάσματα $\frac{7}{10}, \frac{28}{100}, \frac{9}{1000}$, έχουν παρονομαστή το 10, 100, 1000, … και ονομάζονται δεκαδικά κλάσματα.

Γνωρίζουμε ότι $235 = 200 + 30 + 5 = 2\cdot 100 + 3\cdot 10 + 5\cdot 1$. Οπότε για το κλάσμα $\frac{235}{10}$ ισχύει:

$$\frac{235}{10} = \frac{2\cdot 100 + 3\cdot 10 + 5\cdot 1}{10} = \frac{2\cdot 100}{10} + \frac{3\cdot 10}{10} + \frac{5\cdot 1}{10} = 2\cdot 10 + 3 + \frac{5}{10} =$$

$$= 23 + \frac{1}{2} = 23 + 0,5 = 23,5$$

Για το κλάσμα $\frac{235}{100}$, ισχύει:

$$\frac{235}{100} = \frac{2\cdot 100 + 3\cdot 10 + 5\cdot 1}{100} = \frac{2\cdot 100}{100} + \frac{3\cdot 10}{100} + \frac{5\cdot 1}{100} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} =$$

$$= 2 + 0,3 + 0,05 = 2,35$$

Συμπεράσματα:

1. Τα δεκαδικά κλάσματα γράφονται ως δεκαδικοί αριθμοί.

2. Ένα δεκαδικό κλάσμα ως δεκαδικός αριθμός έχει τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα μηδενικά έχει ο παρονομαστής.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα ως δεκαδικούς αριθμούς:

$\frac{3}{10} = \ldots\ldots\ldots,$ $\frac{4}{100} = \ldots\ldots\ldots,$ $\frac{29}{100} = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{789}{100} = \ldots\ldots\ldots,$

$\frac{13.462}{100} = \ldots\ldots\ldots,$ $\frac{71}{1000} = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{6825}{10.000} = \ldots\ldots\ldots,$ $\frac{356.829}{100.000} = \ldots\ldots\ldots$

2. Να γράψετε καθέναν από τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς ως δεκαδικό κλάσμα:

$0,3 = \ldots\ldots\ldots,$ $1,9 = \ldots\ldots\ldots,$ $0,008 = \ldots\ldots\ldots$

$35,42 = \ldots\ldots\ldots,$ $679,134 = \ldots\ldots\ldots,$ $3,0005 = \ldots\ldots\ldots$

➢ 2.1.7. Τροπή κλάσματος σε δεκαδικό

Όπως είδαμε στη προηγούμενη παράγραφο τα δεκαδικά κλάσματα μπορούν να γραφούν ως δεκαδικοί αριθμοί.

Το ίδιο όμως μπορεί να συμβεί και με ένα οποιοδήποτε κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, αρκεί να κάνουμε τη διαίρεση α : β.

Εφαρμογή 1η:

Να τραπούν σε δεκαδικούς τα κλάσματα:

α) $\frac{3}{4}$ **β)** $\frac{27}{6}$ **γ)** $\frac{63}{24}$

Απάντηση:

α) Είναι $\frac{3}{4} = 3:4$. Όμως 3 : 4 = 0,75. Οπότε $\frac{3}{4} = 0,75$

β) Είναι $\frac{27}{6} = 27:6$. Κάνοντας τη διαίρεση 27 : 6 προκύπτει το πηλίκο 4,5, άρα $\frac{27}{6} = 4,5$.

γ) Είναι $\frac{63}{24} = 63:24$. Κάνοντας τη διαίρεση 63 : 24 προκύπτει το πηλίκο 2,625, άρα $\frac{63}{24} = 2,625$.

Εφαρμογή 2η:

Να γραφούν ως δεκαδικοί αριθμοί, με προσέγγιση εκατοστού, τα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{95}{6}$ **β)** $\frac{397856}{25000}$ **γ)** $\frac{96}{17}$

Απάντηση:

α) Είναι $\frac{95}{6} = 95:6$

Αν κάνουμε τη διαίρεση 95 : 6 προκύπτει πηλίκο 15,8333... . Με προσέγγιση εκατοστού το πηλίκο είναι 15,83, οπότε: $\frac{95}{6} = 15,83$.

β) Είναι $\frac{397856}{25000} = 397856:25000$

Αν κάνουμε τη διαίρεση 397856 : 25000 προκύπτει πηλίκο 3,97856. Με προσέγγιση εκατοστού το πηλίκο είναι το 3,98, οπότε $\frac{397856}{25000} = 3,98$

γ) Είναι $\frac{96}{17} = 96:17$. Αν κάνουμε τη διαίρεση 96 : 17 προκύπτει το πηλίκο 5,64705882. Με προσέγγιση εκατοστού το πηλίκο είναι το 5,65, οπότε: $\frac{96}{17} = 5,65$.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να τραπούν σε δεκαδικούς αριθμούς, τα κλάσματα:

α) $\frac{3}{5}$ β) $\frac{18}{8}$

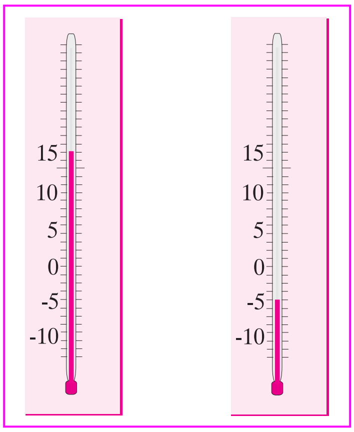
γ) $\frac{126}{16}$ δ) $\frac{2562}{15}$

2. Να γραφεί καθένα από τα παρακάτω κλάσματα ως δεκαδικός α) με προσέγγιση εκατοστού β) με προσέγγιση χιλιοστού.

α) $\frac{15}{7}$ β) $\frac{125}{14}$

γ) $\frac{56}{16}$ δ) $\frac{68}{3}$

2.2. ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ



Η μέση θερμοκρασία τον μήνα Μάιο, στη Φλώρινα είναι 15°C πάνω από το μηδέν, ενώ το Φεβρουάριο είναι 5°C κάτω από το μηδέν. Το θερμόμετρο στη πρώτη περίπτωση έχει την ένδειξη 15°C ενώ στη δεύτερη περίπτωση – 5°C. Οι αριθμοί που έχουν μπροστά το πρόσημο πλην «–» λέγονται **αρνητικοί** αριθμοί.

Οι μέχρι σήμερα γνωστοί αριθμοί, εκτός από το μηδέν λέγονται **θετικοί** αριθμοί και συχνά τους βλέπουμε να έχουν μπροστά το πρόσημο «+».

Με τους θετικούς αριθμούς εκφράζουμε μεγέθη όπως: τα κέρδη μιας επιχείρησης, την αύξηση της θερμοκρασίας ή των εσόδων και γενικά οποιαδήποτε αύξηση, το υψόμετρο μιας περιοχής κ.ά.

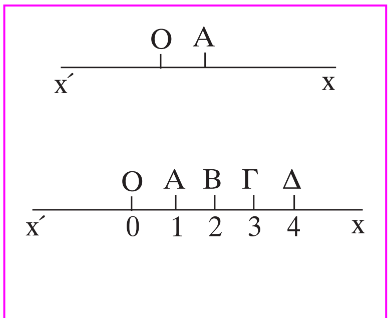
Με τους αρνητικούς αριθμούς εκφράζουμε μεγέθη όπως: τις ζημιές μιας επιχείρησης, την ελάττωση της θερμοκρασίας και γενικά οποιαδήποτε μείωση, το βάθος της θάλασσας κ.ά.

Πρέπει να συμπληρώσουμε ακόμη ότι ο αριθμός μηδέν (0) δεν είναι ούτε θετικός, ούτε αρνητικός οπότε τα συμβατά + 0 ή – 0 εκφράζουν το απόλυτο μηδέν (0).

Τα σύνολα $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

- Το σύνολο που περιέχει τους θετικούς και αρνητικούς ακέραιους μαζί με το μηδέν, λέγεται σύνολο των ακεραίων και συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$. Δηλαδή:
$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$$
- Το σύνολο που περιέχει όλους τους γνωστούς αριθμούς, δηλαδή τους ακέραιους, τα κλάσματα και τους δεκαδικούς (θετικούς και αρνητικούς), λέγεται σύνολο των ρητών αριθμών και συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$.
- Δύο ή περισσότεροι ρητοί αριθμοί, διαφορετικοί του μηδέν, που έχουν το ίδιο πρόσημο λέγονται **ομόσημοι**. Δύο ρητοί αριθμοί, διαφορετικοί του μηδέν, που έχουν διαφορετικό πρόσημο λέγονται **ετερόσημοι**.

➢ 2.2.1. Παράσταση ρητών με σημεία μιας ευθείας



Θεωρούμε μια ευθεία x΄x και ένα σημείο της Ο. Δεξιά του Ο επιλέγουμε σημείο Α και θεωρούμε ότι το Ο παριστάνει το μηδέν, ενώ το Α παριστάνει τον αριθμό 1.

Δηλαδή ΟΑ = 1. Στη συνέχεια, δεξιά του Α, θεωρούμε τα σημεία Β, Γ, Δ, … έτσι ώστε

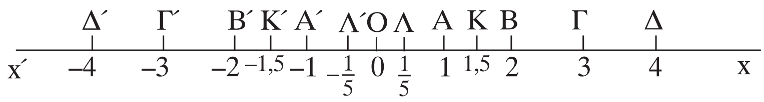
ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = … = ΟΑ = 1.

Οπότε τα σημεία Β, Γ, Δ, … παριστάνουν τους αριθμούς 2, 3, 4, …

Αν τώρα αριστερά του Ο πάρουμε τα σημεία Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, … έτσι ώστε

ΟΑ΄ = Α΄Β΄ = Β΄Γ΄ = Γ΄Δ΄ = … = ΟΑ = 1, τότε τα σημεία αυτά θα παριστάνουν τους αριθμούς – 1, – 2, – 3, – 4, …

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να τοποθετήσουμε στην ευθεία αυτή τους δεκαδικούς και τα κλάσματα. Μια τέτοια αριθμημένη ευθεία την ονομάζουμε **άξονα**.



Σύγκριση των ρητών αριθμών – απόλυτη τιμή

Παρατηρώντας την προηγούμενη ευθεία βλέπουμε ότι ο αριθμός 3 είναι δεξιότερα από το 1,5 και ταυτόχρονα γνωρίζουμε ότι το 3 είναι μεγαλύτερο από το 1,5.

Οπότε:

Από δύο ρητούς αριθμούς μεγαλύτερος είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα πάνω στον άξονα.

– Παρατηρώντας πάλι την προηγούμενη ευθεία βλέπουμε ότι οι αριθμοί 2 και – 2 βρίσκονται εκατέρωθεν του μηδέν. και σε ίσες αποστάσεις από αυτό. Η απόσταση αυτή είναι ίση με 2 και λέγεται **απόλυτη τιμή** των αριθμών αυτών.

Οι αριθμοί 2 και – 2 που έχουν την **ίδια απόλυτη τιμή** και **διαφορετικό πρόσημο** λέγονται **αντίθετοι**.

Συμπεράσματα:

1. Από δύο θετικούς αριθμούς μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

2. Από δύο αρνητικούς αριθμούς μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει μικρότερη απόλυτη τιμή.

3. Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.

4. Οι θετικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από το μηδέν ενώ οι αρνητικοί είναι μικρότεροι του μηδενός.

5. Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ίδια με τον αριθμό.

6. Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετος του αριθμού.

7. Η απόλυτη τιμή του μηδέν είναι το μηδέν.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα με τους παρακάτω αριθμούς:

$+17,\ \ -18,\ \ 72,\ \ \frac{1}{4},\ \ 9,\ \ -2{,}5,\ \ -\frac{1}{6},\ \ -3\frac{1}{4}$

Θετικοί	Αρνητικοί

2. Να βρείτε την απόλυτη τιμή των παρακάτω αριθμών:

$-61,\ +34,\ -14{,}45,\ 28,\ \frac{3}{19},\ -\frac{7}{15},\ 125,\ -7$

3. Να συμπληρωθούν τα κενά με το σύμβολο της ανισότητας (< ή >):

α) $9\ .\ .\ .\ .\ 24$ β) $-8\ .\ .\ .\ .\ 0$ γ) $32\ .\ .\ .\ .\ 0$

δ) $\frac{61}{4}\ .\ .\ .\ .\ -4$ ε) $-\frac{8}{15}\ .\ .\ .\ .\ 1$ στ) $-9\ .\ .\ .\ -6$

ζ) $-1{,}4\ .\ .\ .\ .\ -1$ η) $-\frac{3}{4}\ .\ .\ .\ .\ -\frac{1}{4}$ θ) $-15{,}9\ .\ .\ .\ .\ -\frac{3}{7}$

4. Να τοποθετήσετε τους αριθμούς: $-2,\ -9,\ 4,\ -\frac{1}{5},\ +\frac{3}{5},\ 6$ σε έναν άξονα και στη συνέχεια να αναφέρετε ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος από αυτούς τους αριθμούς.

➢ 2.2.2. Πρόσθεση και αφαίρεση ρητών

Εφαρμογή 1η:

Σε έναν αγώνα μπάσκετ στο τέλος της πρώτης περιόδου η ομάδα Α ήταν στους + 2 πόντους από την ομάδα Β. Στο τέλος της δεύτερης περιόδου η ομάδα Α αύξησε τη διαφορά της κατά + 3 πόντους. Πόσους πόντους προηγείται η ομάδα Α από τη Β στο τέλος της δεύτερης περιόδου;

Απάντηση:

Πρέπει να κάνουμε τη πρόσθεση (+ 2) + (+ 3).

Επειδή η ομάδα Α προηγούνται της Β κατά 2 πόντους και στο τέλος της δεύτερης περιόδου αύξησε τη διαφορά κατά 3 πόντους, θα προηγείται κατά 2 + 3 = 5 πόντους.

Δηλαδή (+ 2) + (+ 3) = + 5.

Η ομάδα Β, στο ίδιο πρόβλημα, στο τέλος της πρώτης περιόδου ήταν στους – 2 πόντους από την Α και στο τέλος της δεύτερης περιόδου η διαφορά αυξήθηκε κατά – 3 πόντους. Η συνολική διαφορά τώρα είναι: (– 2) + (– 3).

Γνωρίζουμε ότι στο τέλος της δεύτερης περιόδου η ομάδα Α είναι στους + 5 πόντους από την Β. Οπότε η Β υπολείπεται της Α κατά 5 πόντους δηλαδή είναι στους – 5 πόντους.

Επομένως (– 2) + (– 3) = – 5.

Συμπέρασμα:

Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους αριθμούς προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημό τους.

Εφαρμογή 2η:

Σ' έναν αγώνα μπάσκετ, στο τέλος της πρώτης περιόδου, η ομάδα Α ήταν στους + 5 πόντους από την ομάδα Β. Στη δεύτερη περίοδο η ομάδα Α ήταν στους – 3 πόντους από την Β. Ποια ήταν η διαφορά στο σκορ της ομάδας Α από τη Β στο τέλος της δεύτερης περιόδου;

Απάντηση:

Πρέπει να κάνουμε τη πρόσθεση (+ 5) + (– 3).
Επειδή στη δεύτερη περίοδο η ομάδα Α ήταν στους – 3 πόντους από τη Β, αυτό σημαίνει ότι έχασε 3 πόντους από τη διαφορά που είχε κερδίσει. Οπότε από τους 5 πόντους που προηγούνταν στη πρώτη περίοδο, στο τέλος της δεύτερης περιόδου θα προηγείται με 2 πόντους, δηλαδή θα είναι στους + 2 πόντους από την Β.
Οπότε: (+ 5) + (– 3) = + 2

Συμπέρασμα:

Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, αφαιρούμε από την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή την μικρότερη και στο αποτέλεσμα βάζουμε το πρόσημο του αριθμού με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Εφαρμογή 3η:

Σε έναν αγώνα μπάσκετ στο τέλος της πρώτης περιόδου η ομάδα Α ήταν στους – 5 πόντους από την Β. Στο τέλος της δεύτερης περιόδου η ομάδα Α ήταν στους + 2 πόντους από τη Β. Πόσο μεταβλήθηκε το αποτέλεσμα στη δεύτερη περίοδο για την ομάδα Α;

Απάντηση:

Πρέπει να κάνουμε την αφαίρεση (+ 2) – (– 5). Επειδή η ομάδα Α στη πρώτη περίοδο έχανε με διαφορά 5 πόντων από τη Β και στο τέλος της δεύτερης περιόδου κέρδιζε με 2 πόντους, αυτό σημαίνει ότι κάλυψε τους 5 πόντους της αρχικής διαφοράς και πήρε επιπλέον διαφορά 2 πόντων. Επομένως στη δεύτερη περίοδο η ομάδα Α ήταν στους +7 πόντους από τη Β. Δηλαδή: (+ 2) – (– 5) = + 7.

Συμπέρασμα:

Για να βρούμε τη διαφορά δύο αριθμών προσθέτουμε στον πρώτο τον αντίθετο του δεύτερου.
Είναι: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να γίνουν οι πράξεις:

α) (+ 9) + (+ 2) = …   β)(– 15) + (– 5) = …
γ) (– 7) + (+ 7) = …   δ)(+ 3) + (– 3) = …
ε) (+ 9) – (+ 2) = …   στ)(– 15) – (– 5) = …
ζ) (– 7) – (+ 7) = …   η)(+ 7) – (– 7) = …
θ) (+ 3) – (– 3) = …   ι)(– 3) – (+ 3) = …

2. Να υπολογίσετε τις διαφορές α – β και β – α, όταν:

α) α = + 8 και β = + 3   β) α = – 8 και β = – 3
γ) α = + 8 και β = – 3   δ) α = – 8 και β = + 3

3. Τον Απρίλιο στην Αθήνα η μέση θερμοκρασία είναι + 15°C ενώ τον Μάϊο αυξάνεται κατά + 5°C. Ποια είναι η μέση θερμοκρασία στην Αθήνα τον Μάϊο;

4. Τον Φεβρουάριο στη Φλώρινα η μέση θερμοκρασία είναι – 4°C και τον Μάρτιο αυξάνεται κατά + 2 βαθμούς. Ποια είναι η μέση θερμοκρασία στη Φλώρινα τον Μάρτιο.

5. Ένα υποβρύχιο κατά τη διάρκεια ενός ταξιδιού του βρίσκονταν στα – 100 m, από την επιφάνεια της θάλασσας. Αν στη συνέχεια βρίσκονταν στα – 150 m, τότε πόσο μεταβλήθηκε η απόσταση του υποβρυχίου από την επιφάνεια της θάλασσας;

6. Η διαφορά βάρους δύο ανθρώπων Α και Β είναι + 13 κιλά για τον Α. Αν μετά από λίγο καιρό η διαφορά βάρους είναι + 8 κιλά για τον Α τότε ποια είναι η μεταβολή βάρους του Α σε σχέση με τον Β;

3. ΠΟΣΟΣΤΑ

3.1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΠΟΣΟΣΤΟΥ

Στόχος της ενότητας είναι ο εκπαιδευόμενος να είναι σε θέση να λύνει σύνθετα προβλήματα με τη χρήση ποσοστών, όπως επιτόκια, εκπτώσεις, αυξήσεις, μειώσεις κλπ.

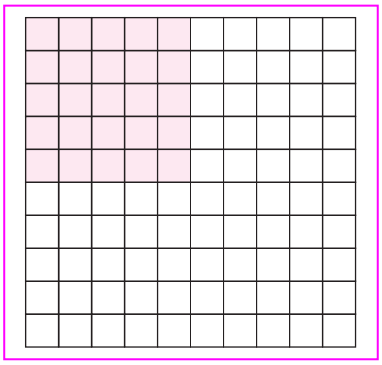
Προσδοκώμενα αποτελέσματα: είναι η αντιμετώπιση πληθώρας προβλημάτων της καθημερινότητας στα οποία εισέρχεται η έννοια του ποσοστού.

Βασικές έννοιες:

- Ποσοστό
- Αύξηση - μείωση
- Έκπτωση
- Τόκος – Φ.Π.Α.
- Ποσά ανάλογα
- Αναλογίες
- Κλίμακες

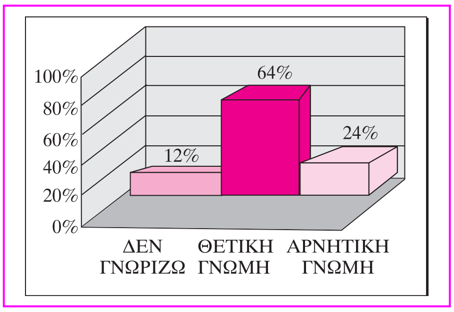
Τα ποσοστά τα συναντάμε πολύ συχνά στην καθημερινή μας ζωή, όπως στις διάφορες αυξήσεις σε τιμές, εκπτώσεις, αποτελέσματα δημοσκοπήσεων κ.ο.κ.

3.1. Η έννοια του ποσοστού



Στο διπλανό σχήμα το κόκκινο τμήμα είναι τα 25/100 του τετραγώνου. Λέμε ότι είναι τα «25 εκατοστά»ή ότι είναι «το 25 επί τοις εκατό» ή όπως συνήθως γράφουμε «το 25%». Δηλαδή το ποσοστό του τετραγώνου που καλύπτει το κόκκινο μέρος είναι 25%

Πρόβλημα



Για κάποιο μέτρο που εξήγγειλε η κυβέρνηση ρωτήθηκε ένας αριθμός 1.250 ατόμων. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στο διπλανό σχήμα:

Τα ποσοστά % περιγράφουν κλάσματα των οποίων ο παρονομαστής είναι το 100.

Το 24% ενός μεγέθους σημαίνει τα 24/100 του. Επομένως για να βρούμε για παράδειγμα το 24% των 1.250 ατόμων που ρωτήθηκαν στην παραπάνω δημοσκόπηση θα πάρουμε το $\frac{24}{100} \cdot 1.250 = 300$ άτομα.

Άρα τα δεκαδικά κλάσματα της μορφής α/100 και α/1000 που τα συμβολίζουμε α% και α‰ και τα διαβάζουμε αντίστοιχα «α τοις εκατό» και «α τοις χιλίοις» ονομάζονται **ποσοστά**.

Π.χ. $\frac{17}{100} = 17\%$, $\frac{43}{1000} = 43‰$

Μέθοδος:
Για να βρούμε το ποσοστό α% ενός αριθμού β
1. πολλαπλασιάζουμε το α με το β
2. διαιρούμε δια 100.

Εφαρμογή 1η:

Να υπολογίσει το 30% του 800

Απάντηση:

Το 30% του 800 είναι $\frac{30}{100} \cdot 800 = 240$

Μέθοδος:
Για να μετατρέψουμε ένα κλάσμα σε ποσοστό %
1. πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή επί 100
2. διαιρούμε το αποτέλεσμα διά του παρονομαστή. Με σύμβολα στο κλάσμα κ/λ αντιστοιχεί το ποσοστό (100κ): λ

Εφαρμογή 2η:

Να μετατραπεί το κλάσμα 4/25 σε ποσοστό %

Απάντηση:

$$\frac{4}{25}\cdot 100=\frac{400}{25}=16 \text{ ή } 16\%$$

Μέθοδος:

Για να υπολογίσουμε την αύξηση ενός αριθμού β κατά ποσοστό α%:

1. Προσθέτουμε το α στο 100
2. Το αποτέλεσμα το πολλαπλασιάζουμε με τον αριθμό β
3. Ό,τι βρούμε το διαιρούμε δια 100.

Επομένως αν ο αριθμός β αυξηθεί κατά α% θα γίνει $\frac{(100+\alpha)\cdot\beta}{100}$.

Εφαρμογή 3η:

Ποιος αριθμός θα προκύψει αν ο αριθμός 350 αυξηθεί κατά 12%;

Απάντηση:

Ο αριθμός Α που θα προκύψει θα είναι $A=350\frac{(100+12)}{100}=427$

Αν ένα ποσό X αυξάνεται κατά α% πόση είναι η αύξηση και ποια η τελική τιμή του ποσού; **Αρχική Τιμή** **X** ↓ **Άυξηση** $\frac{\alpha}{100}\cdot x$ ↓ **Τελική Τιμή** $x+\frac{\alpha}{100}\cdot x$	**Εφαρμογή:** **Ο πληθυσμός μιας πόλης 120.000 αυξήθηκε κατά 4%. Πόση είναι η αύξηση και πόσος έγινε ο πληθυσμός;** **Απάντηση:** Αύξηση $\frac{4}{100}\cdot 120.000=4800$ κάτοικοι Πληθυσμός μετά την αύξηση; 120.000 + 4.800 = 124.800

Για να υπολογίσουμε το ποσοστό αύξηση της τιμής ενός προϊόντος εκτελούμε τα εξής βήματα

Βρίσκουμε την αύξηση της τιμής του προϊόντος

↓

Διαιρούμε την αύξηση με την αρχική τιμή

↓

Εκφράζουμε το αποτέλεσμα της διαίρεσης σε ποσοστό

Εφαρμογή:

Να βρείτε το ποσοστό αύξησης της τιμής ενός προϊόντος το οποίο από 1,25 γίνεται 1,70

Απάντηση:

Η αύξηση της τιμής του προϊόντος είναι

$$1.70 - 1.25 = 0.45$$

Διαιρούμε την αύξηση με την αρχική τιμή

$$\frac{0,45}{1.25} = 0.36$$

Εκφράζουμε το αποτέλεσμα της διαίρεσης αυτής σαν ποσοστό

$$0.36 = \frac{36}{100} = 36\%$$

Μέθοδος:

Για να υπολογίσουμε τη μείωση ενός αριθμού β κατά ποσοστό α%

1. Αφαιρούμε το α από το 100
2. Το αποτέλεσμα το πολλαπλασιάζουμε με τον αριθμό β
3. Και ότι βρούμε το διαιρούμε με 100.

Επομένως αν ο αριθμός β ελαττωθεί κατά α% θα γίνει $\frac{(100-\alpha)\cdot\beta}{100}$

Εφαρμογή 4η:

Ποιος αριθμός θα προκύψει αν ο αριθμός 72 μειωθεί κατά 5%.

Απάντηση:

Ο αριθμός Α που θα προκύψει θα είναι

$$A = \frac{(100-5)\cdot 72}{100} = 68.4 \ (\alpha = 5,\ \beta = 72)$$

Αν ένα ποσό Χ μειώνεται κατά α% πόση είναι η μείωση και ποια η τελική τιμή του ποσού **Αρχική Τιμή** ↓ **Μείωση=** $\frac{α}{100} \cdot x$ ↓ **Τελική Τιμή** $x - \frac{α}{100} \cdot x$	**Εφαρμογή:** **Στην περίοδο των εκπτώσεων ένα προϊόν που είχε αναγραφόμενη τιμή 80€ πουλήθηκε με έκπτωση 35%. Ποια είναι η μείωση της τιμής του προϊόντος και πόσο πουλήθηκε αυτό** **Απάντηση:** Μείωση: $\frac{35}{100} 80 = 28\,€$ Τελική τιμή μετά την έκπτωση: 80 – 28 = 52€
Για να υπολογίσουμε το ποσοστό μείωσης της τιμής ενός προϊόντος εκτελούμε τα εξής βήματα **Βρίσκουμε τη μείωση της τιμής του προϊόντος** ↓ **Διαιρούμε τη μείωση με την αρχική τιμή** ↓ **Εκφράζουμε το αποτέλεσμα της διαίρεσης σε ποσοστό**	**Εφαρμογή:** **Ένα προϊόν έχει τιμή 120€. Στις εκπτώσεις πωλείται 80€. Ποιο είναι το ποσοστό έκπτωσης** **Απάντηση:** Η μείωση της τιμής του προϊόντος είναι 120 – 80€ = 40 €. Διαιρούμε τη μείωση με την αρχική τιμή $\frac{40}{120} = 0,333$ εκφράζουμε το αποτέλεσμα της διαίρεσης αυτής σαν ποσοστό $0,333 = \frac{333}{100} = 33,3\%$
Αν από ένα ποσό Χ πάρουμε αρχικά α% και κατόπιν από αυτό πάρουμε β%. Ποια είναι η συνολική ποσότητα που αφαιρέσουμε;	**Εφαρμογή:** **Σε μια τάξη με 80 μαθητές το 30% είναι αγόρια και από αυτή το 50% είναι παναθηναϊκοί. Πόσους οπαδούς του Παναθηναϊκού είχε η τάξη;**

Αρχικό Ποσό ↓ **Ποσό που πήραμε την πρώτη φορά** $x_1=\frac{\alpha}{100}\cdot x$ ↓ **Ποσό που πήραμε τη δεύτερη φορά** $x_2=\frac{\beta}{100}x_1=\frac{\beta}{100}\frac{\alpha}{100}x$	**Απάντηση:** Τα αγόρια της τάξης είναι $80\frac{30}{100}=24$ Από αυτά υποστηρίζουν τον Παναθηναϊκό τα $24\frac{50}{100}=12$ αγόρια.
Αν έχουμε ποσοστά που αναφέρονται στο ίδιο αρχικό μέγεθος τότε για να βρούμε το συνολικό ποσοστό κάνουμε προσθέσεις	**Εφαρμογή:** **Η καθαρή τιμή αγοράς ενός προϊόντος επιβαρύνεται με 3% μεταφορικά 1% ασφάλιση και 9% προμήθεια ποιο είναι το συνολικό ποσοστό επιβάρυνσης.** **Απάντηση:** Το ολικό ποσοστό επιβάρυνσης είναι το άθροισμα των επιμέρους ποσοστών. Δηλ. 3 + 1 + 9 = 13 δηλαδή 13%

➢ 3.1.1. Βασικά Προβλήματα

Τόκοι καταθέσεων:

Αν καταθέσουμε σε μία τράπεζα ένα κεφάλαιο Κ με επιτόκια ε% σ' ένα χρόνο θα πάρουμε τόκους: $T=\frac{K\cdot\varepsilon}{100}$.

Επειδή όμως οι τράπεζες κεφαλαιοποιούν τους τόκους (δηλαδή τους ενσωματώνουν στο κεφάλαιο) κάθε 6 μήνες για να υπολογίσουμε τους τόκους που θα πάρουμε μετά από x μήνες χρησιμοποιούμε τύπο: $T=\frac{K\cdot\varepsilon\cdot x}{1200}$, $x\le 6$.

Παράδειγμα 1ο:

Ένα κεφάλαιο 20.000€ αν το τοκίσουμε με επιτόκιο 4%, μετά από 3 μήνες θα αποφέρει τόκους $T=\frac{20000\cdot 4\cdot 3}{1200}=200$ €

(Κ = 20.000, ε = 4, x = 3)

Φόρος προστιθέμενης αξίας (Φ.Π.Α.)

Επιβάλλεται σε όλες σχεδόν τις υπηρεσίες και τα προϊόντα και αντιστοιχεί στα 18% ή στο 6% της αξίας του, ανάλογα με το προϊόν ή την υπηρεσία.

Παράδειγμα 2ο:

Αν για ένα προϊόν αξίας 900€ πληρώσουμε ΦΠΑ 18% η τελική αξία του προϊόντος θα είναι $900+\frac{18}{100}=1062\,€$

Εφαρμογή 1η:

Δανείστηκε κάποιος ένα ποσό με ετήσιο επιτόκιο 4%. Μετά από 6 μήνες έδωσε στο δανειστή του 15.300 €. Ποιο ήταν το ποσό που δανείστηκε;

Απάντηση:

Τα 100€ σ' ένα χρόνο δίνουν τόκο 4€ επομένως στους 6 μήνες θα δίνουν τόκο 2€. Άρα τα 15.300€ θα είναι τα $\frac{102}{100}$ του ποσού που δανείστηκε οπότε το ποσό αυτό θα είναι

$$15300:\frac{102}{100}=15300\cdot\frac{100}{102}=15000\,€$$

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και ως εξής:

Αν το ποσό που δανείστηκε ήταν x € προκύπτει η εξίσωση $x+\frac{x\cdot 4\cdot 6}{1200}=153000$ ή $x+\frac{x}{50}=15300$ ή $51x=76500$ ή $x=1500$

Σχόλιο:

Κάθε παράσταση της μορφής $\alpha\cdot x=\beta$ όπου α, β πραγματικοί αριθμοί και x μια ποσότητα άγνωστη ονομάζεται εξίσωση.

Εφαρμογή 2η:

Αγόρασε κάποιος ένα σαλόνι αξίας 1.200€ επί της οποίας υπολογίζεται ΦΠΑ 18%. Έδωσε 500€ προκαταβολή και τα υπόλοιπα θα τα πληρώσει σε 2 ισόποσες δόσεις, την πρώτη 3 μήνες μετά την αγορά και τη δεύτερη 6 μήνες μετά την αγορά. Υπέγραψε δύο συναλλαγματικές με μηνιαίο επιτόκιο 2%. Πόσο του στοίχισε συνολικά το σαλόνι;

Απάντηση:

Ο Φ.Π.Α. είναι $1200\frac{18}{100}=216\,€$

Επομένως με προκαταβολή 500€ μένει υπόλοιπο

(1.200 + 216) – 500 = 916€.

Κάθε δόση θα είναι 916 : 2 = 458 €

Η πρώτη δόση επιβαρύνεται με τόκους $458\frac{3\cdot 2}{100}=27{,}5\,€$

Και η δεύτερη με $458\frac{6\cdot 2}{100}=55$

Άρα το σαλόνι συνολικά κόστισε 500 + 916 + 55 + 27,5 = 1498,5 €

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις.

1) Τα σύμβολα 3% ή 30‰ παριστάνουν το ίδιο κλάσμα Σ Λ

2) Το 1/5 μιας ποσότητας είναι ίσο με το 50% της ποσότητας Σ Λ

3) Το 50% ενός αριθμού είναι ίσο με το μισό του αριθμού Σ Λ

4) Το 150% του 500 είναι 750 Σ Λ

5) Το 20% σε δεκαδική μορφή είναι 0,02 Σ Λ

6) Στη Θεσσαλονίκη το 65% του ενήλικου πληθυσμού δουλεύει στην πόλη, το 30% δουλεύει έξω από αυτή και το 10% είναι άνεργοι Σ Λ

7) Αν αυξήσουμε έναν αριθμό κατά 200% τον διπλασιάζουμε Σ Λ

8) Ένα προϊόν έχει τιμή 2,25€ στις εκπτώσεις πωλείται 2€. Το ποσοστό της έκπτωσης είναι 25% Σ Λ

9) Το ποσοστό αύξησης της τιμή ενός προϊόντος το οποίο γίνεται από 1,25 σε 1,50€ είναι 20% Σ Λ

2. Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα:

Κλάσμα	2/5		3/24		
Δεκαδικός		1,3			
Ποσοστό		30%		90%	

3. Αντιστοιχίστε κάθε πρόταση της στήλης Α σ' ένα μόνο ποσοστό της στήλης Β:

Α)

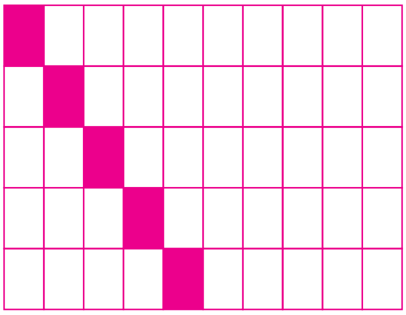
Στήλη Α	**Στήλη Β**
i) Ποιο ποσοστό του 2 είναι το 1	α) 15%
ii) Ποιο ποσοστό του 100 είναι το 25	β) 50%
iii) Ποιο ποσοστό του 1 είναι το 2	γ) 233,33%
iv) Ποιο ποσοστό του 300 είναι το 700	δ) 200%
	ε) 254

Β)

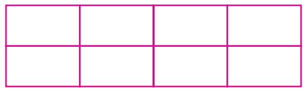
Στήλη Α	**Στήλη Β**
i) Το ποσοστό αύξησης μιας τιμής από 5€ σε 10€	α) 25%
ii) Το ποσοστό μείωσης μιας τιμής από 10 σε 5€	β) 35%
iii) Το ποσοστό αύξησης μιας τιμής από 444 σε 555 €	γ) 50%
iv) Το ποσοστό μείωσης μιας τιμής από 555 σε 444	δ) 20%
	ε) 100

4. Να γράψετε με τη μορφή ποσοστών επί τοις εκατό τα κλάσματα $\frac{2}{50}, \frac{7}{45}, \frac{2}{15}$ και με τη μορφή κλασμάτων τα ποσοστά 15%, 2,15%, 162%.

5. Να βρείτε το ποσοστό του σχήματος (α) που είναι χρωματισμένο και να χρωματίσετε το 25% του σχήματος (β).



Σχήμα (α)



Σχήμα (β)

6. Στους αγώνες που έδωσε μια ποδοσφαιρική ομάδα πέτυχε 11 νίκες, 10 ισοπαλίες και 9 ήττες. Να βρείτε τι ποσοστό του συνόλου των αγώνων που έδωσε αντιπροσωπεύει κάθε αποτέλεσμα.

7. Η διπλανή διαφήμιση λέει την αλήθεια; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

8. Η κατώτερη σύνταξη του ΙΚΑ είναι 300€. Στην επόμενη διετία η σύνταξη θα αυξηθεί 3% το πρώτο έτος και 5% το δεύτερο:

I. Ποια θα είναι η κατώτερη σύνταξη του ΙΚΑ στο τέλος της διετίας;

II. Πόσο τοις % αυξήθηκε η σύνταξη συνολικά τη διετία αυτή;

9. Η καθαρή αξία ενός εμπορεύματος επιβαρύνεται με μεταφορικά 5% και με προμήθεια στο σύνολο (καθαρή αξία και μεταφορικά) 10%. Αν η καθαρή αξία του εμπορεύματος είναι 85€, ποιο θα είναι το κόστος μετά τις δύο επιβαρύνσεις;

10. Μια οικογένεια έχει εισόδημα 2.500 € το μήνα. Ξοδεύει το 25% του εισοδήματος για τρόφιμα, το 30% του εισοδήματος για ενοίκιο, το 10% για ρουχισμό και το 10% για καταναλωτικά δάνεια. Το ποσό του εισοδήματος που περισσεύει το αποταμιεύει.

I. Πόσα ευρώ πληρώνει η οικογένεια για ενοίκιο;

II. Πόσα ευρώ πληρώνει η οικογένεια για τρόφιμα και ρούχα μαζί;

III. Ποιο είναι το ποσοστό του ποσού που αποταμιεύει και ποιο είναι το ποσό αυτό;

11. Ο πληθυσμός μιας πόλης 115.000 κατοίκων αυξήθηκε κατά 3% πόση είναι η αύξηση και πόσος έγινε ο πληθυσμός;

12. Σε μια πολυκατοικία με 60 ενοίκους το 40% είναι γυναίκες και από αυτές το 75% εργάζονται στον ιδιωτικό τομέα. Ποιο είναι το πλήθος των γυναικών που ασχολούνται στον ιδιωτικό τομέα.

13. Τα έξοδα μιας οικογένειας σε σχέση με το ετήσιο εισόδημα κατανέμονται ως εξής:

κατοικία 22%	επικοινωνίες 8%
ένδυση 9%	ασφάλειες 11%
σίτιση 30%	διάφορα 8%
αναψυχή 5%	φόροι 5%

α) Να βρείτε το ποσό που δαπανά μια οικογένεια Α με ετήσιο εισόδημα 18000€ για το σύνολο «κατοικία – σίτιση»

β) Αν μια οικογένεια Β δαπανά για ασφάλειες και ένδυση 4000€ να βρείτε το συνολικό της εισόδημα. Είναι μεγαλύτερο από αυτό της οικογένειας Α; Και να υπολογίσετε τα συνολικά της έξοδα.

3.2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΟΣΟΣΤΩΝ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗΣ ΖΩΗΣ

Εφαρμογή 1η:

Μία βιομηχανία, αγόρασε υλικά αξίας 60.000€, με ΦΠΑ 6% και άλλα υλικά αξίας 15.500€ με ΦΠΑ 18%. Τα προϊόντα που κατασκεύασε με τα υλικά αυτά, τα πούλησε με κέρδος 20% και ΦΠΑ 18%. Να βρείτε πόσα χρήματα κέρδισε η εταιρία και πόσο ΦΠΑ θα αποδώσει στο Δημόσιο.

Απάντηση:

Η εταιρία πλήρωσε για τις δύο κατηγορίες υλικών ΦΠΑ αντίστοιχα $60.000 \cdot \frac{6}{100} = 3.600€$ και $15.500 \cdot \frac{18}{100} = 2.790€$, δηλαδή συνολικά 6.390€.

Άρα, τα υλικά κόστισαν στην εταιρία συνολικά

$$60.000 + 15.500 + 3.600 + 2.790 = 81.890 €.$$

Η εταιρία πούλησε τα προϊόντα της με κέρδος 20%. Επομένως, πουλώντας τα προϊόντα της η εταιρία εισέπραξε $81.890 \cdot \frac{120}{100} = 98.268€$, κερδίζοντας 98.268 – 81.890 = 16.378€.

Ο ΦΠΑ που εισέπραξε η εταιρία από την πώληση των προϊόντων είναι:

$$98.268 \cdot \frac{18}{100} = 17.688,27€,$$

από τα οποία θα αποδώσει στο Δημόσιο 17.688 – 6.390 = 11.298,24€.

Εφαρμογή 2η:

Δύο τράπεζες, οι A-Bank και η G-Bank εισπράττουν για τις πιστωτικές κάρτες τους ετήσιες συνδρομές 10€ και 40€ αντίστοιχα. Ενώ υπολογίζουν στις αγορές τόκο με ετήσιο επιτόκιο 15% και 12% αντίστοιχα, ένας καταναλωτής θέλει να αγοράσει με την πιστωτική κάρτα αγαθά, αξίας 1500€ και να τα εξοφλήσει μετά από έναν χρόνο. Ποια από τις δύο κάρτες πρέπει να επιλέξει;

Απάντηση:

Αν ο καταναλωτής επιλέξει την A-Bank θα πληρώσει τόκους $\frac{1500 \cdot 15}{100} = 225€$.

Επομένως, θα επιβαρυνθεί συνολικά

10 + 225 = 235€. Αν επιλέξει τη G-Bank θα πληρώσει τόκους $\frac{1500 \cdot 12}{100} = 180€$ και θα επιβαρυνθεί συνολικά με 40 + 180 = 220€.

Άρα, τον συμφέρει να επιλέξει την κάρτα της G-Bank.

Εφαρμογή 3η:

Ένα χωριό Α έχει 1550 κατοίκους. Από αυτούς, οι 950 είναι γυναίκες. Από τις γυναίκες του χωριού, οι 190 είναι εργάτριες, από τις οποίες, οι 60 είναι κάτω των 35 χρόνων.

i. Τι ποσοστό του γενικού πληθυσμού αποτελούν οι γυναίκες;

ii. Τι ποσοστό του γενικού πληθυσμού αποτελούν οι αγρότισσες;

iii. Τι ποσοστό του γυναικείου πληθυσμού αποτελούν οι αγρότισσες;

iv. Οι αγρότισσες κάτω των 35 ετών, τι ποσοστό του γενικού πληθυσμού αποτελούν;

Απάντηση:

i. Οι γυναίκες αποτελούν ποσοστό $\frac{950}{1550}\cdot 100 = 61,29\,\%$ του γενικού πληθυσμού.

ii. Οι αγρότισσες αποτελούν ποσοστό $\frac{190}{1550}\cdot 100 = 12,26\%$ του γενικού πληθυσμού.

iii. Οι αγρότισσες αποτελούν ποσοστό $\frac{190}{950}\cdot 100 = 20\%$ του γυναικείου πληθυσμού.

iv. Οι αγρότισσες κάτω των 35 ετών αποτελούν ποσοστό $\frac{60}{1550}\cdot 100 = 3,87\%$ του γενικού πληθυσμού.

Εφαρμογή 4η:

Για ένα είδος που έχει συντελεστή ΦΠΑ 18% πληρώσαμε συνολικά (Αξία+ΦΠΑ) 1660€. Να βρείτε την αξία του προϊόντος χωρίς ΦΠΑ.

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι η επιβάρυνση της αξίας του προϊόντος είναι το $\frac{18}{100}$ της αρχικής τιμής. Επομένως, τα 1888 € που πληρώσαμε, αντιστοιχούν στο $\frac{100}{100}+\frac{18}{100}=\frac{118}{100}$ της αρχικής τιμής. Δηλαδή, το $\frac{118}{100}$ της αξίας είναι 1888€.

Το $\frac{1}{100}$ της αξίας είναι 1888:118 = 16.

Οπότε, $\frac{100}{100}$ της αξίας είναι $16\cdot 100 = 1600€$.

Άρα, η αξία του προϊόντος είναι 1600€.

Εφαρμογή 5η:

Καταθέτει κάποιος στην τράπεζα 10.000€ με επιτόκιο 3%. Στο τέλος της πρώτης χρονιάς οι τόκοι προστίθενται στο κεφάλαιο. Να υπολογίσετε το ποσό που θα εισπράξει αν κάνει ανάληψη όλων των χρημάτων στο τέλος της τρίτης χρονιάς.

Απάντηση:

Στο τέλος της πρώτης χρονιάς ο τόκος του κεφαλαίου είναι

$$T = \frac{K \cdot \varepsilon \cdot x}{100} = \frac{10.000 \cdot 3 \cdot 1}{100} = 300€ .$$

Επομένως, στην αρχή της δεύτερης χρονιάς το κεφάλαιο γίνεται 10.000 + 300 = 10.300€.

Στο τέλος της δεύτερης χρονιάς ο τόκος του κεφαλαίου θα είναι

$$T = \frac{K \cdot \varepsilon \cdot x}{100} = \frac{10.300 \cdot 3 \cdot 1}{100} = 309€ .$$

Άρα, το κεφάλαιο γίνεται 10.300 + 309 = 10.609€.

Επομένως, στην αρχή της τρίτης χρονιάς το κεφάλαιο θα είναι 10.609€ και το τελικό ποσό που θα λάβει αν κάνει ανάληψη στο τέλος της τρίτης χρονιάς είναι :

$$10.609 + \frac{10.609 \cdot 3 \cdot 1}{100} = 10.609 + 318,27 = 10.927,27€$$

Εφαρμογή 6η:

Κάποιος αγοράζει με δόσεις ηλεκτρικά είδη αξίας 1600€. Πληρώνει το 40% μετρητά και το υπόλοιπο συμφωνεί να το εξοφλήσει σε 4 μήνες, υπογράφοντας συναλλαγματικές με τόκο 1,5% το μήνα.

- **i. Να υπολογίσετε το ποσό κάθε συναλλαγματικής.**
- **ii. Πόσο του στοίχησαν τελικά τα ηλεκτρικά είδη που αγόρασε, αν μαζί με την προκαταβολή πλήρωσε και το ΦΠΑ που ήταν το 18% επί της τιμής αγοράς;**
- **iii. Πόσα χρήματα θα πλήρωνε για τα ίδια είδη εάν πλήρωνε με μετρητά;**

Απάντηση:

i. Τα ηλεκτρικά είδη κοστίζουν 1600€. Πληρώνει το 40% μετρητά, δηλαδή $\frac{40}{100} \cdot 1600 = 640€$.

Το υπόλοιπο ποσό είναι : 1600 – 640 = 960€, για το οποίο υπογράφει 4 συναλλαγματικές με τόκο 1,5% το μήνα.

Το ποσόν κάθε δόσης χωρίς τους τόκους είναι: 960:4 = 240€.

Κάθε δόση όταν πληρώνεται θα έχει τόκο 1,5% το μήνα.

Επομένως θα πληρώσει:

(Α δόση στο τέλος του $1^{ου}$ μήνα) $240 + \frac{1,5}{100} 240 = 240 + 3,6 = 243,6€$.

(Β δόση στο τέλος του $2^{ου}$ μήνα) $240 + \frac{3}{100} 240 = 240 + 7,2 = 247,2€$.

(Γ δόση στο τέλος του 3^{ου} μήνα) $240+\frac{4,5}{100}240=250,8€$.

(Δ δόση στο τέλος του 4^{ου} μήνα) $240+\frac{6}{100}240=254,4€$.

ii. Όταν αγόρασε τα ηλεκτρικά είδη, πλήρωσε το 40% της αξίας τους, δηλαδή 640€ και 18% ΦΠΑ επί της τιμής αγοράς, δηλαδή $\frac{18}{100}\cdot 1600=288€$.

Για τις δόσεις πλήρωσε συνολικά

243,6+247,2+250,8+254,4 = 996€.

Τελικά, τα είδη με τον τρόπο που τα αγόρασε στοίχισαν συνολικά:

προκαταβολή + ΦΠΑ + δόσεις = 640+288+996 = 1924€.

iii. Αν πλήρωνε με μετρητά για τα ίδια είδη, τότε θα πλήρωνε την αξία τους (1600€) και το ΦΠΑ (288€), δηλαδή 1888€.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Για ένα βιβλίο που έχει αξία 80€ και ΦΠΑ 5% πληρώνουμε ταμείο:
Α. 85€ Β. 84€ Γ. 83€ Δ. 90€

2. Για ένα είδος που έχει συντελεστή ΦΠΑ 18% πληρώνουμε στο ταμείο 23,6€. Ποια είναι η αξία του χωρίς ΦΠΑ;
Α. 22,6€ Β. 20€ Γ. 21€ Δ. 22€

3. Για ένα είδος που έχει αξία 60€ πληρώσαμε μαζί με το ΦΠΑ 70,8€. Τότε ο συντελεστής ΦΠΑ είναι:
Α. 18% Β. 10,8% Γ. 10% Δ. 16%

4. Δανείστηκε κάποιος ένα ποσό με ετήσιο επιτόκιο 4%. Μετά από 6 μήνες έδωσε στο δανειστή του 15.300€. Ποιο ήταν το ποσό που δανείστηκε;
Α. 15.000 Β. 14.800 Γ. 14.900 Δ. 15.100

5. Σε έναν αγώνα μπάσκετ, ο παίκτης Α ευστόχησε στις 9 από τις 11 ελεύθερες βολές και ο παίκτης Β ευστόχησε στις 16 από τις 18 ελεύθερες βολές. Ποιος ήταν πιο εύστοχος;
Ο Α παίκτης Ο Β παίκτης

6. Καταθέτει κάποιος στην τράπεζα 20.000€ με επιτόκιο 4%. Στο τέλος της πρώτης χρονιάς οι τόκοι προστίθενται στο κεφάλαιο. Να υπολογίσετε το ποσό που θα εισπράξει αν κάνει ανάληψη όλων των χρημάτων στο τέλος της δεύτερης χρονιάς.

7. Κάποιος αγοράζει με δόσεις ένα αυτοκίνητο αξίας 16000€. Πληρώνει το 50% της αξίας του μετρητά και το υπόλοιπο συμφωνεί να το εξοφλήσει σε 8 μήνες, υπογράφοντας συναλλαγματικές με τόκο 1% το μήνα.
Α) Να υπολογίσετε το ποσό κάθε συναλλαγματικής.
Β) Πόσο του στοίχισε τελικά το αυτοκίνητο αν μαζί με την προκαταβολή πλήρωσε 400€ για ασφάλεια και 90€ για τέλη κυκλοφορίας.

8. Κατέθεσε κάποιος κεφάλαιο 30000€ με ετήσιο επιτόκιο 3%. Πόσα χρήματα θα πάρει αν αποσύρει τα χρήματά του μετά από ένα χρόνο (με δεδομένο ότι οι τόκοι μπαίνουν κάθε εξάμηνο και το 15% παρακρατείται ως φόρος).

9. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Τιμή στις εκπτώσεις	**Ποσοστό έκπτωσης**	**Τιμή πριν τις εκπτώσεις**
	30%	50€
	20%	70€
500€	5%	
120€		138€

10. Η καθαρή αξία ενός εμπορεύματος είναι 3000€, αλλά επιβαρύνεται με 2% μεταφορικά, 1% για ασφάλιση και 10% για προμήθεια (όλα τα ποσοστά είναι επί της καθαρής αξίας).
i) Ποιο είναι το συνολικό ποσοστό των επιβαρύνσεων;
ii) Ποιο είναι το συνολικό ποσό των επιβαρύνσεων;
iii) Ποιο είναι το συνολικό κόστος του εμπορεύματος;

3.3. ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

Όταν μελετάμε τα στοιχεία ενός συνόλου ως προς ένα χαρακτηριστικό του, τα χωρίζουμε σε ομάδες και υπολογίζουμε το ποσοστό των στοιχείων που ανήκει σε κάθε ομάδα.

Τα ποσοστά αυτά τα παρουσιάζουμε όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα με:

- **Πίνακα**
- **Ραβδόγραμμα**
- **Κυκλικό διάγραμμα**
- **Ορθογώνιο διάγραμμα**

Ας υποθέσουμε ότι έγινε μία δημοσκόπηση σε 160 πολίτες για το ποιο τηλεοπτικό κανάλι παρακολουθούν στις ειδήσεις.

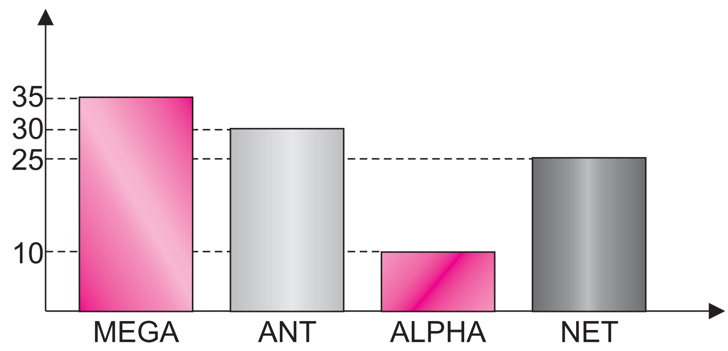
Τα αποτελέσματα της δημοσκόπησης παρουσιάζονται:

- **Με πίνακα:**

ΚΑΝΑΛΙ	MEGA	ANT1	ALPHA	NET	ΣΥΝΟΛΟ
ΠΟΣΟΣΤΟ ΘΕΑΤΩΝ	35%	30%	10%	25%	100%
ΑΡΙΘΜΟΣ ΘΕΑΤΩΝ	56	48	16	40	160

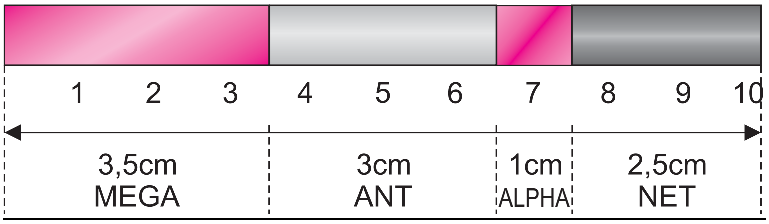
- **Με ραβδογράμματα:**

Κάθε ράβδος έχει αντίστοιχα ύψος 35 μονάδες, 30 μονάδες, 10 μονάδες, 25 μονάδες, δηλαδή όσο και τα ποσοστά που αντιπροσωπεύει καθεμία από αυτέ



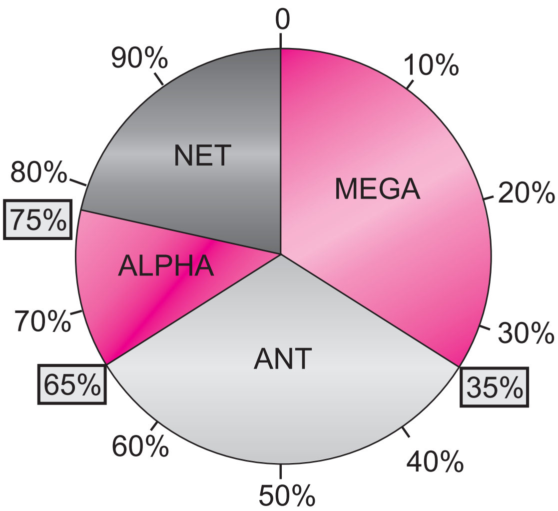
- **Με ορθογώνια διαγράμματα**

Επιλέγουμε ορθογώνιο μήκους 10cm και το χωρίζουμε σε ορθογώνια με μήκη 3,5cm, 3cm, 1cm, 2,5cm.



- **Με κυκλικό διάγραμμα**

Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούμε ένα βαθμολογημένο κύκλο, στον οποίο σημειώνουμε τα σημεία στα οποία αντιστοιχούν οι αριθμοί 0, 35, 65 (30+35), 75 (65+10), 100. Φέρνουμε τις ακτίνες στα σημεία αυτά που χωρίζουν τον κύκλο σε 4 μέρη, καθένα από τα οποία αντιπροσωπεύουν τα ποσοστά 35%, 30%, 10%, 25%.



Εφαρμογή 1η:

Στον παρακάτω πίνακα, καταγράφονται οι χαρακτηρισμοί των πτυχίων 300 αποφοίτων του σχολείου μας.

Χαρακτηρισμός	**Καλώς**	**Λίαν καλώς**	**Άριστα**
Αριθμός μαθητών	90	150	60
Ποσοστό			

i) Να συμπληρωθεί ο πίνακας.

ii) Να παρουσιάσετε τα αποτελέσματα με ένα κυκλικό διάγραμμα.

Απάντηση:

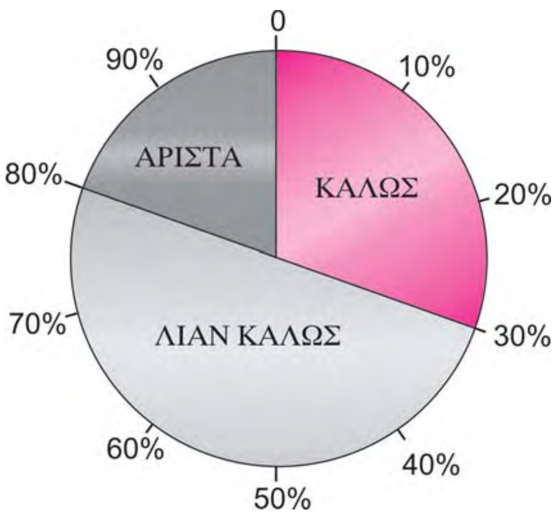
Γνωρίζουμε ότι οι απόφοιτοι είναι 300.

- Οι 90 στους 300 φέρουν τον χαρακτηρισμό «καλώς».
  Δηλαδή, ποσοστό $\frac{90}{300} = \frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$.
- Οι 150 στους 300 φέρουν τον χαρακτηρισμό «Λίαν καλώς».
  Δηλαδή, ποσοστό $\frac{150}{300} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$.
- Οι 60 στους 300 φέρουν τον χαρακτηρισμό «Άριστα».
  Δηλαδή ποσοστό $\frac{60}{300} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$.

Επομένως, ο πίνακας συμπληρωμένος γίνεται:

Χαρακτηρισμός	**Καλώς**	**Λίαν καλώς**	**Άριστα**
Αριθμός μαθητών	90	150	60
Ποσοστό	30%	50%	20%

Κατασκευή κυκλικού διαγράμματος:



Χρησιμοποιούμε έναν βαθμολογημένο κύκλο και σημειώνουμε σε αυτόν τα σημεία που αντιστοιχούν οι αριθμοί 0, 30, 80 (30+50).

Εφαρμογή 2η:

Στον παρακάτω πίνακα καταγράφονται οι απαντήσεις μίας δημοσκόπησης (γκάλοπ) για τα μέσα μαζικής μεταφοράς.

i) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

ii) Να παρουσιάσετε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια ραβδογραμμάτων.

Απαντήσεις	**Ποσοστό**	**Αριθμός απαντήσεων**
Ικανοποιημένες		900
Δυσαρεστημένες	30%	
Δεν γνωρίζω		500
ΣΥΝΟΛΟ	**100%**	**2.000**

Απάντηση:

Ρωτήθηκαν συνολικά 2000 άτομα.

- Οι ικανοποιημένοι είναι 900 στους 2000.

  Δηλαδή, ποσοστό $\dfrac{900}{2000} = \dfrac{9}{20} = 0,45 = 45\%$.

- Οι δυσαρεστημένοι αποτελούν το 30% των ερωτηθέντων.

  Δηλαδή, $2000 \cdot \dfrac{30}{100} = 600$ άτομα.

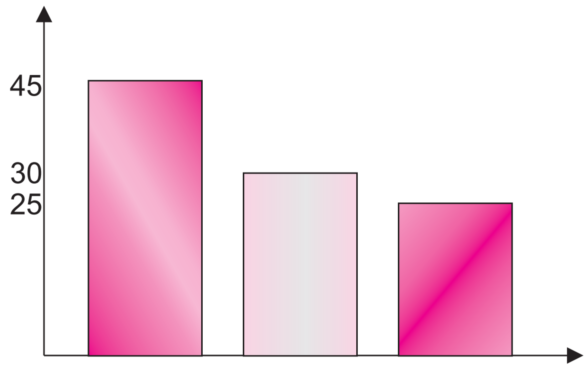
- Αυτοί που δεν γνωρίζουν είναι 500 στους 2000.

Δηλαδή, $\dfrac{500}{2000} = \dfrac{1}{4} = 0,25 = 25\%$.

Επομένως, ο πίνακας συμπληρωμένος γράφεται :

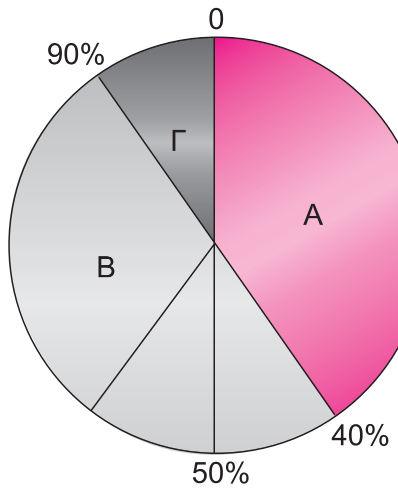
Απαντήσεις	**Ποσοστό**	**Αριθμός απαντήσεων**
Ικανοποιημένες	45%	900
Δυσαρεστημένες	30%	600
Δεν γνωρίζω	25%	500
ΣΥΝΟΛΟ	**100%**	**2.000**

Και το ραβδόγραμμα αποτελεσμάτων είναι :



Εφαρμογή 3η:

Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα δίνονται τα ποσοστά σε στρέμματα, Α: 10 στρέμματα, Β: 20 στρέμματα, Γ: 40 στρέμματα, που καλλιεργούν 50 αγρότες.



1) **Να συμπληρώσετε τον πίνακα αποτελεσμάτων.**
2) **Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε αντίστοιχο ραβδόγραμμα και ορθογώνιο διάγραμμα.**

Απάντηση:

Στο κυκλικό διάγραμμα βλέπουμε ότι, το 40% των 50 αγροτών καλλιεργούν 10 στρέμματα. Επομένως, $\frac{40}{100}\cdot 50 = 20$ αγρότες.

Το 50% (Δηλαδή, 90% - 40%) καλλιεργούν 20 στρέμματα.

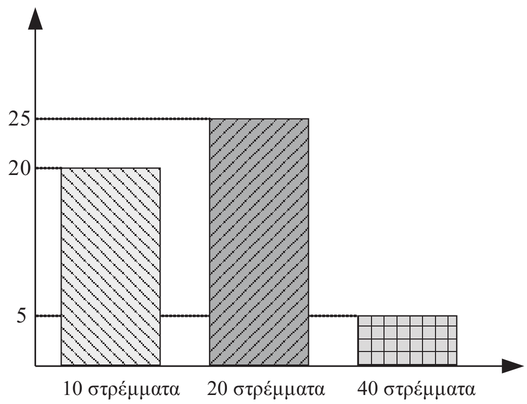
Δηλαδή, $\frac{50}{100}\cdot 50 = 25$ αγρότες.

Το 10% καλλιεργούν 40 στρέμματα. Δηλαδή, $\frac{10}{100}\cdot 50 = 5$ αγρότες.

Οπότε, θα έχουμε τον ακόλουθο πίνακα αποτελεσμάτων:

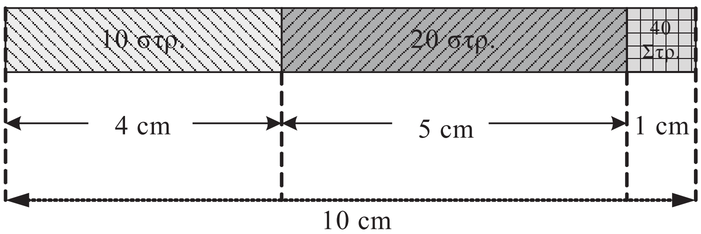
Έκταση	**10 στρέμματα**	**20 στρέμματα**	**40 στρέμματα**
Αριθμός αγροτών	20	25	5
Ποσοστό	40%	50%	10%

Και το αντίστοιχο ραβδόγραμμα θα είναι:



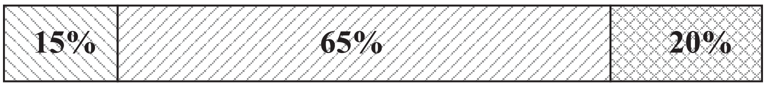
Ορθογώνιο διάγραμμα:

Κατασκευάζουμε ορθογώνιο μήκους 10cm, το οποίο χωρίζουμε σε τρία μέρη με μήκη 4cm, 5cm, 1cm, που αντιστοιχούν στις απαντήσεις με ποσοστά 40%, 50%, 10%.



Εφαρμογή 4η:

Με τη βοήθεια του παρακάτω ορθογωνίου διαγράμματος



να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Αριθμός αυτοκινήτων	**0**	**1**	**2 ή περισσότερα**	**Σύνολα**
Ποσοστό νοικοκυριών				
Αριθμός νοικοκυριών				**5.000**

Απάντηση:

Παρατηρούμε ότι 15% των 5000 νοικοκυριών δεν έχουν αυτοκίνητο, δηλαδή

$$\frac{15}{100}\cdot 5.000 = 750 \text{ νοικοκυριά.}$$

Το 65% των 5000 νοικοκυριών έχουν 1 αυτοκίνητο, δηλαδή $\frac{65}{100}\cdot 5.000 = 3.250$ νοικοκυριά και 20% των 5000 νοικοκυριών έχουν 2 ή περισσότερα, οπότε $\frac{20}{100}\cdot 5.000 = 1.000$ νοικοκυριά.

Επομένως, προκύπτει ο πίνακας:

Αριθμός αυτοκινήτων	**0**	**1**	**2 ή περισσότερα**	**Σύνολα**
Ποσοστό νοικοκυριών	**15%**	**65%**	**20%**	**100%**
Αριθμός νοικοκυριών	**750**	**3.250**	**1.000**	**5.000**

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Το παρακάτω κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τα ποσοστά των μηνιαίων εξόδων μίας οικογένειας. Αν η οικογένεια ξόδεψε για διατροφή 420€, να βρείτε πόσο ξόδεψε σε κάθε τομέα και πόσα ήταν τα συνολικά έξοδα.

2. Σε μία δημοσκόπηση καταγράφηκαν τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα:

Απαντήσεις	**Ποσοστό**	**Αριθμός απαντήσεων**
Ναι Όχι Δεν γνωρίζω	40%	456
ΣΥΝΟΛΟ	**100%**	**1.200**

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

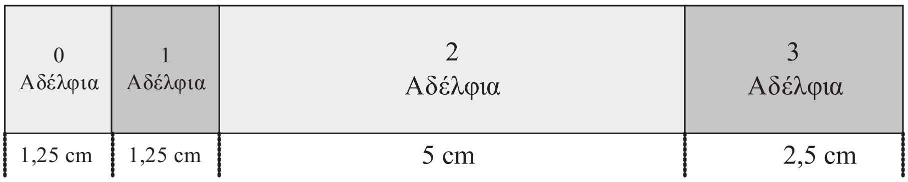
β) Να παραστήσετε τα αποτελέσματα αυτά με ραβδογράμματα και με ορθογώνιο διάγραμμα.

3. Στον παρακάτω πίνακα έχουμε τους πόντους που σημείωσαν οι παίκτες Α, Β, Γ, Δ, Ε μίας ομάδας μπάσκετ σε έναν αγώνα μπάσκετ.

ΠΑΙΚΤΗΣ	**Α**	**Β**	**Γ**	**Δ**	**Ε**
ΠΟΝΤΟΙ	20	16	4	32	8
ΠΟΣΟΣΤΟ					

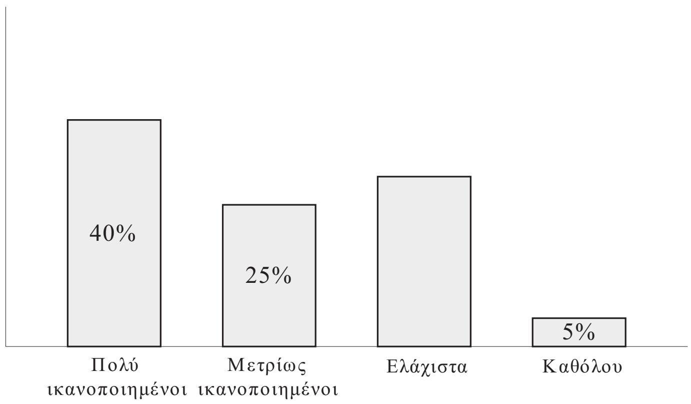
i. Να συμπληρώσετε τη γραμμή των ποσοστών.
ii. Να παραστήσετε τα ποσοστά με ορθογώνιο και κυκλικό διάγραμμα.

4. Το παρακάτω ορθογώνιο διάγραμμα παριστάνει τις απαντήσεις που έδωσαν 40 μαθητές στην ερώτηση πόσα αδέρφια έχουν.



1) Να κατασκευάσετε πίνακα αποτελεσμάτων.
2) Να παραστήσετε με ορθογώνια διαγράμματα τα αποτελέσματα.

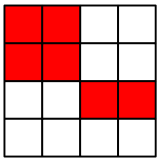
5. Τα αποτελέσματα μίας δημοσκόπησης σχετικά με το αν οι πολίτες είναι ευχαριστημένοι από τα μέσα μαζικής μεταφοράς, εμφανίζονται στο ραβδόγραμμα.



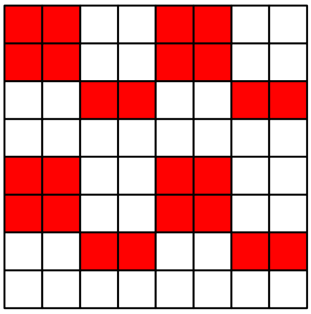
Αν ρωτήθηκαν 2000 άτομα, να συμπληρώσετε τον πίνακα αποτελεσμάτων.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ	**ΠΟΣΟΣΤΑ**	**ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ**
Πολύ ικανοποιημένοι Μετρίως ικανοποιημένοι Ελάχιστα Καθόλου		
ΣΥΝΟΛΟ	**100%**	**2.000**

3.4. ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ – ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ



Σχήμα (1)



Σχήμα (2)

Στο σχήμα (1) το κόκκινο τμήμα είναι τα $\frac{6}{16}$ του τετραγώνου.

Αν το τετράγωνο τετραπλασιασθεί, σχήμα (2), τότε το κόκκινο τμήμα θα γίνει τα $\frac{24}{64}$ του νέου τετραγώνου. Παρατηρούμε ότι τα κλάσματα $\frac{6}{16}$ και $\frac{24}{64}$ είναι ίσα. Αφού $6 \cdot 64 = 24 \cdot 16$.

Αυτό συμβαίνει επειδή και στις δύο περιπτώσεις, το κόκκινο τμήμα καταλαμβάνει το ίδιο «μέρος» του τετραγώνου.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ	ΠΛΕΥΡΑ	2	3	5
	ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ	8	12	20

ΠΛΕΥΡΑ – ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ
ΠΟΣΑ ΑΝΑΛΟΓΑ

ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ	ΠΛΕΥΡΑ	2	3	5
	ΕΜΒΑΔΟ	4	9	25

ΠΛΕΥΡΑ – ΕΜΒΑΔΟ
ΠΟΣΑ ΟΧΙ ΑΝΑΛΟΓΑ

- Δύο αριθμοί που μεταβάλλονται, δηλαδή δύο μεταβλητές λέγονται **ανάλογες,** αν το πηλίκο τους παραμένει πάντοτε το ίδιο. Π.χ. στο τετράγωνο του παραδείγματος η πλευρά και η περίμετρος είναι ποσά ανάλογα, αφού $\frac{2}{8}=\frac{3}{12}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.
- Οι αντίστοιχες τιμές x, y δύο ανάλογων ποσών συνδέονται με μία ισότητα της μορφής **y = αx**, όπου α ένας σταθερός αριθμός.
  Π.χ στα ανάλογα ποσά του προηγούμενου παραδείγματος, ισχύει ότι y = 4x.

Εφαρμογή 1η:

Τα έξι εισιτήρια για τον κινηματογράφο στοιχίζουν 48€. Πόσο στοιχίζουν τα 4 εισιτήρια;

Απάντηση:

Τα ποσά αριθμός εισιτηρίων – αξία είναι ποσά ανάλογα.

Αν υποθέσουμε ότι x είναι η αξία των 4 εισιτηρίων, τότε:

Εισιτήρια	6	4
Αξία	48	x

Σχόλιο:
Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε
$\alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$

Επομένως, θα ισχύει $\frac{6}{48}=\frac{4}{x}$, οπότε θα έχουμε $6x=4\cdot 48$.

Άρα, x = 32€.

Εφαρμογή 2η:

Η βενζίνη κόστιζε 11€ το lt. Ανακοινώθηκε αύξηση κατά 3%. Ποια είναι η αξία μετά την αύξηση;

Απάντηση:

Αν η αξία της βενζίνης ήταν 100€, μετά την αύξηση θα ήταν 103€.

Επομένως:

Αξία πριν την αύξηση	100	11
Αξία μετά την αύξηση	103	x

Άρα θα ισχύει $\frac{100}{103}=\frac{11}{x}$ ή $100x=103\cdot 11$. Δηλαδή, x = 11,33€.

Επομένως, η τιμή της βενζίνης μετά την αύξηση θα ανέρχεται στα 11,33€.

Εφαρμογή 3η:

Να συμπληρώσετε τον πίνακα, αν θεωρήσουμε ότι οι εργάτες έχουν την ίδια απόδοση.

Αριθμός εργατών	7	5	
Στρέμματα προς καλλιέργεια	28		36

Απάντηση:

Αφού τα μεγέθη είναι ανάλογα, θα ισχύει $\frac{7}{28}=\frac{5}{x}=\frac{\psi}{36}$.

Επομένως, $\frac{7}{28}=\frac{5}{x}$ ή $7x=28\cdot 5$ ή $x=20$ και $\frac{7}{28}=\frac{\psi}{36}$ ή $7\cdot 36=\psi\cdot 28$ ή $\psi=9$.

Άρα, ο πίνακας εργάτες – στρέμματα προς καλλιέργεια, γίνεται:

Αριθμός εργατών	7	5	9
Στρέμματα προς καλλιέργεια	28	20	36

Εφαρμογή 4η:

Ένας εργάτης πληρώθηκε 480€ για 16 ημέρες εργασίας. Πόσα παραπάνω χρήματα θα είχε πάρει αν είχε δουλέψει 14 ημέρες παραπάνω;

Απάντηση:

Τα μεγέθη ημέρες εργασίας – ποσό πληρωμής είναι ανάλογα. Επομένως:

Ημέρες εργασίας	16	30
Ποσό πληρωμής	480	x

Επομένως $\frac{16}{480}=\frac{30}{x}$ ή $16\cdot x=30\cdot 480$ ή x=900€.

Άρα θα είχε πάρει 900 – 480 = 420€ επιπλέον.

Εφαρμογή 5η:

Η πίεση του νερού σε ένα σημείο κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας, είναι ανάλογη του βάθους στο οποίο βρίσκεται το σημείο. Αν υποθέσουμε ότι η πίεση του νερού σε βάθος 10m είναι 4,5kg/cm^2 :

α) Να βρείτε πόση είναι η πίεση σε βάθος 28m.

β) Αν η στολή κατάδυσης αντέχει πίεση μέχρι 38kg/cm^2, ποιο είναι το μεγαλύτερο βάθος που μπορεί να φθάσει ο δύτης;

Απάντηση:

α) Γνωρίζουμε ότι:

Βάθος	10	18
Πίεση	4,5	x

Επομένως, $\frac{10}{4,5}=\frac{18}{x}$ ή x = 8,1kg/cm^2.

β) Αν υποθέσουμε ότι Bm είναι το μεγαλύτερο βάθος που μπορεί να φθάσει ο δύτης, τότε :

Βάθος	Β	10
Πίεση	38,5	4,5

Επομένως, $\frac{B}{38,5} = \frac{10}{4,5} \Leftrightarrow 4,5B = 385$ ή Β = 85,55m είναι το βάθος που μπορεί να κατέβει ο δύτης.

3.5. ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΕ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

Εφαρμογή 1η:

Τρεις συνέταιροι συγκέντρωσαν για να δημιουργήσουν μία επιχείρηση, κεφάλαιο 100.000€. Ο πρώτος έδωσε 20.000€, ο δεύτερος 30.000€ και ο τρίτος 50.000€. Μετά από μερικούς μήνες αποφάσισαν να μοιράσουν τα πρώτα τους κέρδη, που ήταν 30.000€. Πόσα θα πάρει ο καθένας;

Απάντηση:

	Α	**Β**	**Γ**
Ποσό συμμετοχής	20.000	30.000	50.000
ΣΥΝΟΛΟ	**100.000**	**100.000**	**100.000**

	Α	**Β**	**Γ**
Συμμετοχή στα κέρδη	α	β	γ
ΚΕΡΔΟΣ	**30.000**	**30.000**	**30.000**

Η συμμετοχή του Α συνέταιρου στα κέρδη με δεδομένη τη συμμετοχή του στο αρχικό κεφάλαιο, είναι $\frac{20.000}{100.000}=\frac{\alpha}{30.000}$

ή

Α = 6.000€. Όμοια για τον Β συνέταιρο $\frac{30.000}{100.000}=\frac{\beta}{30.000}$

ή

Β = 9.000€, για τον Γ συνέταιρο $\frac{50.000}{100.000}=\frac{\gamma}{30.000}$ ή γ = 15.000€.

Αν $x_1, x_2, x_3\ldots$ και $\psi_1, \psi_2, \psi_3\ldots$ είναι αντίστοιχες τιμές δύο ανάλογων ποσών, τότε ισχύει η ισότητα

$$\frac{x_1}{\psi_1}=\frac{x_2}{\psi_2}=\frac{x_3}{\psi_3}=\ldots=\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots}{\psi_1+\psi_2+\psi_3+\ldots}.$$

Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής, μπορούμε να «μερίσουμε» (να χωρίσουμε) ένα ποσό ή ένα αριθμό σε μέρη ανάλογα δύο ή περισσότερων αριθμών.

Εφαρμογή 2η:

Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι συμμετείχαν τρεις παίκτες Α, Β, Γ, οι οποίοι στο τέλος μοιράστηκαν ένα ποσό 10.000€, ανάλογα με τις σωστές απαντήσεις που έδωσαν.

Τι ποσό πήρε ο κάθε παίκτης, αν ο Α απάντησε σωστά σε 7 ερωτήσεις, ο Β σε 5 και ο Γ σε 8;

Απάντηση:

Αν α,β,γ είναι αντίστοιχα τα ποσά των τριών παικτών, έχουμε:

$$\frac{\alpha}{7}=\frac{\beta}{5}=\frac{\gamma}{8}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{20}=\frac{10.000}{20}=500.$$

Άρα,

$$\frac{\alpha}{7}=500 \text{ ή } \alpha=3.500€ \quad \frac{\beta}{5}=500 \text{ ή } \beta=2.500€ \quad \frac{\gamma}{8}=500 \text{ ή } \gamma=4.000€$$

Ή Β τρόπος:

	Παίκτης Α	**Παίκτης Β**	**Παίκτης Γ**
Αριθμός σωστών απαντήσεων	7	5	8
Πλήθος ερωτήσεων	**20**	**20**	**20**

	Α	**Β**	**Γ**
Κέρδος	α	β	γ
Σύνολο ποσού	**10.000**	**10.000**	**10.000**

Α παίκτης: $\frac{7}{20}=\frac{\alpha}{10.000}$ ή $\alpha=3.500€$

Β παίκτης: $\frac{5}{20}=\frac{\beta}{10.000}$ ή $\beta=2.500€$

Γ παίκτης: $\frac{8}{20}=\frac{\gamma}{10.000}$ ή $\gamma=4.000€$

3.6. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΠΟΣΩΝ

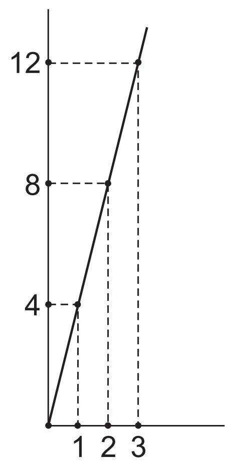
Γνωρίζουμε ότι **δύο ανάλογα** ποσά **μεταβάλλονται** κατά τέτοιο τρόπο, **ώστε να διατηρούν σταθερό το λόγο της αναλογίας**, όπως στο παράδειγμα.

$$\frac{\text{περίμετρος τετραγώνου}}{\text{πλευρά τετραγώνου}} = 4 \quad \text{ή} \quad \frac{\text{πλευρά τετραγώνου}}{\text{περίμετρος τετραγώνου}} = \frac{1}{4}$$

Αν δώσουμε μερικές τιμές στην πλευρά του τετραγώνου, τότε άμεσα βρίσκουμε την περίμετρο.

Πλευρά σε m	Περίμετρος σε m
1	4
3	12
2	8

Μπορούμε τα δεδομένα αυτά να τα παραστήσουμε σε ένα σύστημα ημιαξόνων όπως στο διπλανό σχήμα.

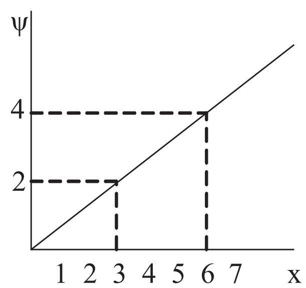


Τα σημεία της γραφικής παράστασης ανάλογων ποσών x, ψ που συνδέονται με τη σχέση $\psi = \alpha \cdot x$ σε οποιοδήποτε σύστημα ημιαξόνων, είναι **σημεία συνευθειακά** που ανήκουν σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των ημιαξόνων.

Εφαρμογή 1η:

Στο διπλανό σχήμα, έχουμε τη γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει τις αντίστοιχες τιμές x, ψ, δύο μεταβλητών ποσών:
i) Να εξηγήσετε γιατί τα δύο αυτά ποσά είναι ανάλογα.
ii) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	6	1		
ψ			4	2



Απάντηση:

i) Η γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει τις αντίστοιχες τιμές των δύο ποσών, είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Επομένως, τα δύο ποσά είναι ανάλογα.

Η σχέση που συνδέει επομένως τις αντίστοιχες τιμές x και ψ, είναι της μορφής $\psi = \alpha \cdot x$ (1).

Επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(3,2), οι συντεταγμένες του Α θα επαληθεύουν την ισότητα (1), δηλαδή $2 = \alpha \cdot 3$ ή $\alpha = \frac{2}{3}$. Οπότε $\psi = \frac{2}{3}x$ (2).

ii) Από τη σχέση (2) για x = 6 βρίσκουμε ψ = 4, για x = 1 βρίσκουμε ψ = 2/3 και για ψ = 4 βρίσκουμε x = 6.

Οπότε, προκύπτει ο πίνακας:

x	6	1	6	3
ψ	4	2/3	4	2

Εφαρμογή 2:

Οι αντίστοιχες τιμές δύο ανάλογων ποσών συνδέονται με τη σχέση ψ = 1,5x (1).

i) Να εξηγήσετε γιατί τα δύο ποσά είναι ανάλογα.

ii) Χωρίς να κάνετε τη γραφική παράσταση της σχέσης να εξετάσετε ποια από τα σημεία Α(2,4), Β(2,3), Γ(4,6), Δ(3,5) ανήκουν σε αυτή.

Απάντηση:

i) Παρατηρούμε ότι η σχέση που συνδέει τις αντίστοιχες τιμές x και ψ, είναι της μορφής $\psi = \alpha \cdot x$.

Γνωρίζουμε ότι αν οι αντίστοιχες τιμές δύο συμμεταβλητών ποσών συνδέονται με μία ιδιότητα της μορφής $\psi = \alpha \cdot x$, τα ποσά είναι ανάλογα.

ii) Παρατηρούμε ότι με δεδομένη τη σχέση (1):

Α. Για x = 2 προκύπτει ψ = 3. Άρα, το Α(2,4) δεν ανήκει στη γραφική παράσταση (ευθεία) της ψ = 1,5x.

Β. Για x = 2 προκύπτει ψ = 3. Άρα, το Β(2,3) ανήκει στη γραφική παράσταση.

Γ. Για x = 4 προκύπτει ψ = 6. Άρα, το Γ(4,6) ανήκει στη γραφική παράσταση.

Ομοίως, το Δ δεν ανήκει σε αυτή.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Ποια από τα παρακάτω ζεύγη είναι αντίστοιχες τιμές ανάλογων ποσών;
Α) (5,20) και (2,8) Β) (3,6) και (6,9)
Γ) (α,β) και (3α, 3β) Δ) (1,3) και (2,9) Ε) ($\frac{1}{2}$,5) και (1,10)

2. Ποια από τα παρακάτω ποσά είναι ανάλογα.

- **i.** Η ακτίνα του κύκλου και η διάμετρός του.
- **ii.** Η ηλικία ενός ατόμου και το ύψος του.
- **iii.** Η πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου και η περίμετρός του.
- **iv.** Η ταχύτητα ενός αυτοκινήτου και ο χρόνος που διανύει μία απόσταση.
- **v.** Ο τόκος (Τ) που δίνει ένα κεφάλαιο Κ σε ορισμένο χρόνο και το επιτόκιο.
- **vi.** Η πλευρά τετραγώνου και το εμβαδόν του τετραγώνου.

3. Τα 18m ενός υφάσματος στοιχίζουν 27€, τα 30m στοιχίζουν : Α. 35 Β. 45 Γ. 50 Δ. 39

4. Το ανθρώπινο σώμα περιέχει 1,5% ασβέστιο. Ποια είναι η ποσότητα ασβεστίου σε έναν άνθρωπο που ζυγίζει 80kg:
Α. 3 Β. 4 Γ. 5 Δ. 6

5. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Βάρος kg	2			7,5
Αξία €	8	32	2	

6. Η αποξηραμένη σταφίδα χάνει το 1/6 του βάρους της :
α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Βάρος σταφίδας	18		5	
Βάρος αποξηραμένης		8		12

β) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τις αντίστοιχες τιμές των ποσών «βάρος σταφίδας» και «βάρος αποξηραμένης».

7. Παρακάτω έχουμε έναν πίνακα αντίστοιχων τιμών δύο ανάλογων ποσών:

x	3			1
ψ		20	1	

Αν η γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει τις αντίστοιχες τιμές διέρχεται

από το Α(2,8), να συμπληρώσετε τον πίνακα.

8. Ένα τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα και διατρέχει 130km σε 1 ώρα και 30 λεπτά. Ποια απόσταση θα διανύσει:

α) σε 3 ώρες, β) σε 2 ώρες και 40 λεπτά

9. Το καλοριφέρ του σχολείου καταναλώνει 80 lt πετρελαίου ανά τρίωρο. Πόσα lt θα καταναλώσει σε μία εβδομάδα (Δευτέρα – Παρασκευή), αν λειτουργεί 6 ώρες την ημέρα;

10. Τρεις φίλοι δημιούργησαν μία εταιρία, στην οποία ο πρώτος διέθεσε κεφάλαιο 50.000€, ο δεύτερος 35.000€ και ο τρίτος 20.00€. Η επιχείρηση είχε κέρδη 10.000€. Ποιο θα είναι το μερίδιο του καθενός από τα κέρδη της επιχείρησης;

11. Τρεις εργάτες πήραν από μία εργασία 1850€. Ο α, ως επικεφαλής πήρε το 10% του ποσού για τη χρήση μηχανημάτων που είχε στη διάθεσή του. Το υπόλοιπο ποσό, μοιράσθηκε ανάλογα με τις μέρες εργασίας του κάθε εργάτη. Αν ο α εργάστηκε 8 ημέρες, ο β 12 ημέρες και ο γ 10 ημέρες, τι ποσό πήρε ο καθένας;

12. Οι αντίστοιχες τιμές δύο ποσών συνδέονται με τη σχέση ψ = 0,5x (1).

i) Να εξηγήσετε γιατί τα δύο ποσά είναι ανάλογα.

ii) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	4			0,1
ψ		12	2	

iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της σχέσης (1).

iv) Από τα σημεία Α(2,1), Β(3,6), Γ(6,3), ποια ανήκουν σε αυτή.

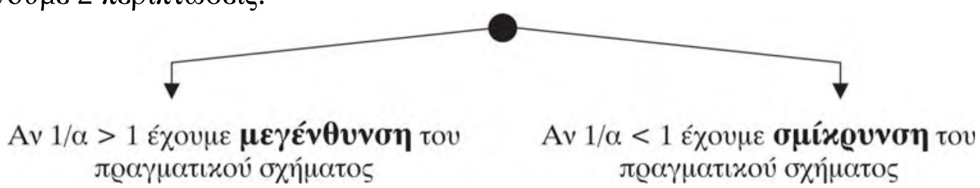
3.7. ΚΛΙΜΑΚΕΣ

Όταν βλέπουμε σε ένα χάρτη ή σε ένα σχέδιο να γράφεται π.χ. «Κλίμακα 1: 100.000» ή «Κλίμακα 1: 200», αυτό σημαίνει ότι τα μήκη στο χάρτη ή στο σχέδιο και τα μήκη των αντίστοιχων πραγματικών μεγεθών είναι ποσά ανάλογα και οι λόγοι των αντίστοιχων τιμών είναι ίσοι με $\frac{1}{100.000}$ (χάρτης) ή $\frac{1}{200}$ (σχέδιο).

Δηλαδή, αν η κλίμακα είναι 1:α θα ισχύει:

$$\frac{\text{απόσταση στο σχέδιο}}{\text{πραγματική απόσταση}} = \frac{1}{\alpha}$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

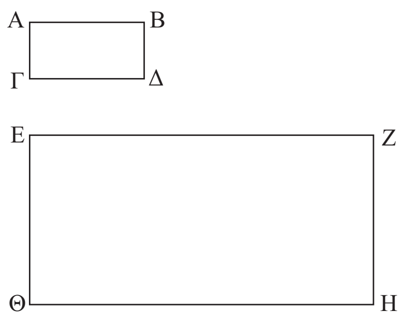


Κλίμακα επομένως ονομάζουμε το λόγο της απόστασης δύο σημείων στο χάρτη προς την πραγματική απόσταση των δύο αντίστοιχων σημείων.

ΠΡΟΣΟΧΗ!

οι αποστάσεις πρέπει να μετρούνται με την ίδια μονάδα.

Δίνονται 2 ορθογώνια:



	Πλάτος	Μήκος
Διαστάσεις ΑΒΓΔ/cm	2	4
Διαστάσεις ΕΖΓΔ	6	12

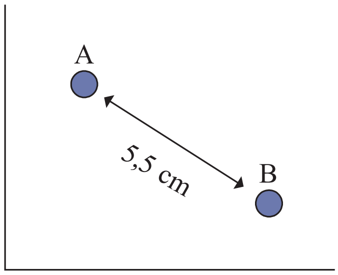
Παρατηρούμε ότι $\frac{2}{6}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$. Επομένως, οι διαστάσεις του ΑΒΓΔ είναι ανάλογες εκείνων του ΕΖΓΔ. Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι το ΕΖΗΘ είναι μία **μεγέθυνση** του ΑΒΓΔΔ κατά 3 φορές ή ότι το ΑΒΓΔ είναι μία **σμίκρυνση** του ΕΖΗΘ κατά 3 φορές.

Εφαρμογή 1η:

Δίνεται ένας χάρτης κλίμακας 1: 100.000. Τότε η απόσταση 1cm στο χάρτη, αντιστοιχεί:
1cm χάρτη $\rightarrow$ 100.000 cm
πραγματική απόσταση $\rightarrow$ 1.000 m $\rightarrow$ 1 Km

Εφαρμογή 2η:

Σε ένα χάρτη κλίμακας 1: 1.000.000 η πόλη Α απέχει από τη Β 5,5cm. Να βρεθεί η πραγματική απόσταση των 2 πόλεων.



ΚΛΙΜΑΚΑ 1:1.000.000

Απάντηση:

Αν υποθέσουμε ότι η πραγματική απόσταση είναι x, τότε
$\frac{5,5}{x}=\frac{1}{1.000.000}$ ή x = 5.500.000cm ή 55.000m ή 55km.

Εφαρμογή 3η:

Η πλευρά ενός τετραγώνου σε σχέδιο με κλίμακα $\frac{1}{250}$ είναι 16cm. Να βρείτε το εμβαδόν του πραγματικού τετραγώνου σε m^2.

Απάντηση:

Αν υποθέσουμε ότι η πλευρά σε cm του κανονικού τετραγώνου είναι x,
τότε $\frac{16}{x}=\frac{1}{250}$, x = 4.000cm ή 40m.
Άρα, Ε = 40^2 =1.600m^2.

Εφαρμογή 4η:

Να συμπληρωθούν οι πίνακες:

α)

Κλίμακα	Μήκος στο σχέδιο	Πραγματικό μήκος
1 : 3	12 cm	
1 : 50	4 cm	
3 : 10		150 cm

β)

Πραγματική απόσταση	Απόσταση στο χάρτη	Κλίμακα
20 km	2 cm	
100 km		$\frac{1}{2.000.000}$
50 m	10 cm	

Απάντηση:

α) Γνωρίζουμε ότι $\frac{\text{μήκος στο σχέδιο}}{\text{πραγματικό μήκος}} = \frac{1}{3}$ ή $\frac{12}{x} = \frac{1}{3}$ ή x = 36cm.

Ομοίως, $\frac{4}{x} = \frac{1}{50}$ ή x = 200cm.

Ομοίως, $\frac{\psi}{150} = \frac{3}{10}$ ή ψ = 45cm.

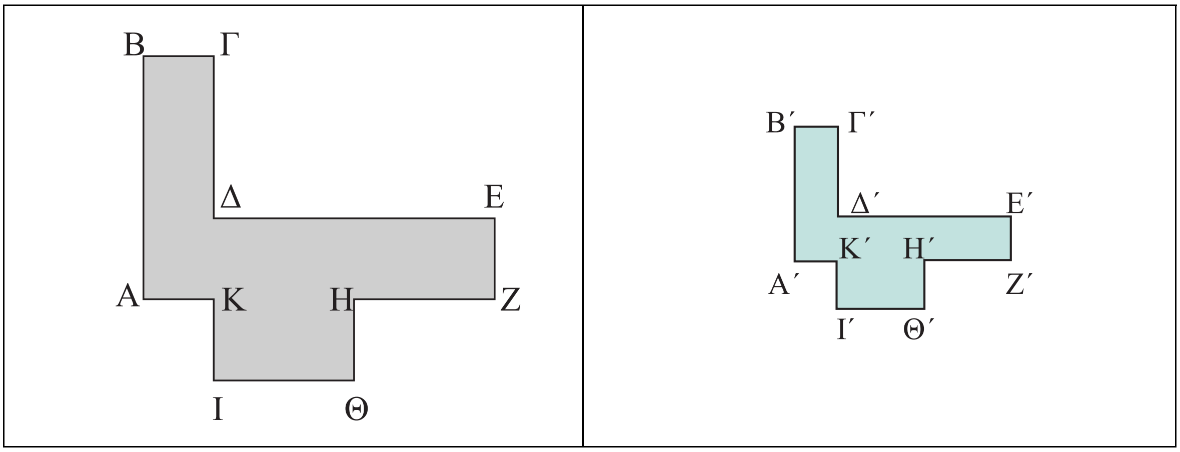
β)

$$\frac{\text{απόσταση στο χάρτη}}{\text{πραγματική απόσταση}} = \frac{2}{20.000.000} = \frac{1}{1.000.000} \text{ κλίμακα}$$

$$= \frac{5\text{cm}}{100.000.000} = \frac{1}{20.000.000} \quad = \frac{10}{5.000} = \frac{1}{500}$$

Εφαρμογή 5η:

Στο σχήμα (β) να σχεδιάσετε μία σμίκρυνση του σχήματος (α) με κλίμακα $1/2$. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων.



(α) (β)

$$\frac{\text{μήκος } Α΄Β΄}{\text{πραγματικό μήκος } ΑΒ}=\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{Α΄Β΄}{6}=\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad Α΄Β΄=3$$

$$\frac{Β΄Γ΄}{ΒΓ}=\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{Β΄Γ΄}{2}=\frac{1}{2} \quad \text{ή } Β΄Γ΄=1.$$

Ομοίως $\frac{Γ΄Δ΄}{ΓΔ}=\frac{1}{2}$ ή $Γ΄Δ΄=\frac{1}{2}ΓΔ=2$.

Ομοίως $\frac{Δ΄Ε΄}{ΔΕ}=\frac{1}{2}$ ή $Δ΄Ε΄=\frac{1}{2}ΔΕ=4$.

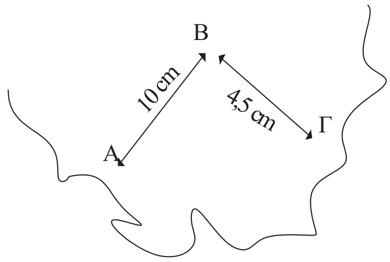
Ομοίως $Ε΄Ζ΄ = 1$, $Ζ΄Η΄ = 2$, $Η΄Θ΄ = 1$, $Θ΄Ι΄ = 2$,

και Λόγος των περιμέτρων

$$\frac{Π_α}{Π_β}=\frac{6+4+8+2+4+2+4+2+2}{3+2+4+1+2+1+2+1+1}=\frac{34}{17}=2$$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Από το διπλανό χάρτη κλίμακας 1:100.000, να υπολογίσετε τις πραγματικές αποστάσεις των πόλεων Α – Β, Β – Γ.



2. Από ένα χάρτη που κατασκευάστηκε με κλίμακα 1: 150.000:

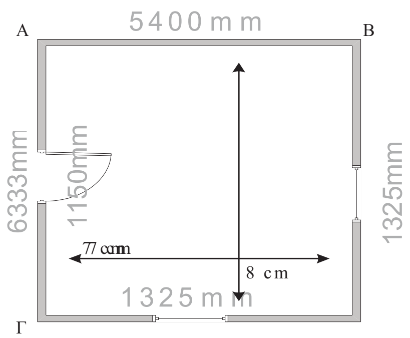
α) Να βρείτε την πραγματική απόσταση δύο πόλεων Α και Β που στο χάρτη απέχουν 3,6cm.

β) Την απόσταση στο χάρτη δύο πόλεων Γ και Δ που η πραγματική τους απόσταση είναι 8,4km.

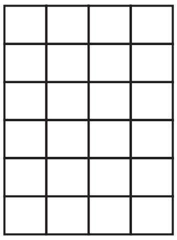
3. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, αν η κλίμακα του σχεδίου είναι 1/500.

Μήκος στο σχέδιο (cm)	10		100
Πραγματικό μήκος (m)		24	

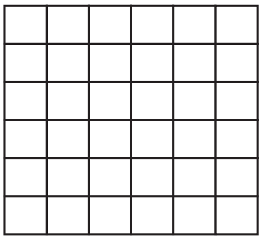
4. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε την κάτοψη ενός δωματίου, με κλίμακα 1:50. Να βρεθούν οι πραγματικές διαστάσεις ΑΒ, ΑΓ.



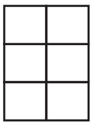
5. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τέσσερα ορθογώνια $Α_1$, $Α_2$, $Α_3$, $Α_4$. Ποια από τα $Α_2$, $Α_3$, $Α_4$ είναι σμίκρυνση του $Α_1$.



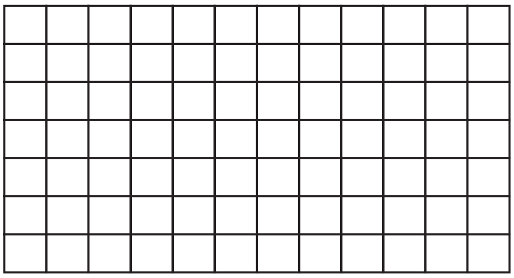
A_1



A_2



A_3



A_4

6. Δύο πόλεις Α και Β απέχουν σε ένα χάρτη 4cm, ενώ η πραγματική τους απόσταση είναι 12km. Να βρείτε την κλίμακα που σχεδιάστηκε ο χάρτης.

7. Η πλευρά ενός τετραγώνου σε σχέδιο με κλίμακα $\frac{1}{500}$ είναι 4cm. Να βρείτε την πλευρά και το εμβαδόν του πραγματικού τετραγώνου.

8. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Πραγματική απόσταση	**Απόσταση στο χάρτη**	**Κλίμακα**
10 Km	4 cm	
10		1 : 100
	2 cm	1 : 250.000

9. Σε ένα χάρτη κλίμακας 1: 1000, δύο πόλεις απέχουν 12cm. Πόσο θα απέχουν αν ο χάρτης αλλάξει κλίμακα και γίνει 1:500;

10. Έχουμε δύο χάρτες μίας περιοχής. Ο πρώτος σχεδιάστηκε με κλίμακα 1:100.000. Αν οι δύο πόλεις Α, Β απέχουν 84km, ποια είναι η απόστασή τους στον $1^{ο}$ χάρτη. Με ποια κλίμακα σχεδιάστηκε ο δεύτερος χάρτης, αν σε αυτόν η απόσταση των δύο πόλεων Α και Β είναι 3,8m.

4 ΜΕΤΡΗΣΗ ΜΕΓΕΘΩΝ

4.1. ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΜΕΤΡΗΣΗ ΜΕΓΕΘΩΝ

Σκοπός της ενότητας είναι ο εκπαιδευόμενος να θεμελιώσει τις έννοιες μεγεθών που ήδη χρησιμοποιεί στην καθημερινότητα του όπως η έννοια του m, cm, να μάθει να τις μετατρέπει, να ξεχωρίζει αυτές που αφορούν το μήκος από αυτές της επιφάνειάς ή του όγκου ή του χρόνου.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα η εξοικείωση του εκπαιδευόμενου με τις μονάδες μεγεθών μήκους – επιφάνειας – όγκου – χρόνου ώστε να μπορεί να τις χρησιμοποιήσει απρόσκοπτα σε οποιοδήποτε πρόβλημα, παράλληλα με τη γνώση και τη χρησιμοποίηση διαφόρων οργάνων μέτρησης.

Βασικές έννοιες:

- Μονάδα μέτρησης
- Μήκος
- Εμβαδόν
- Όγκος
- Μάζα
- Χρόνος

Πόσα ποτήρια κρασί μπορούμε να γεμίσουμε με ένα μπουκάλι κρασί; Η απάντηση είναι «εξαρτάται από τα ποτήρια». Αν πρόκειται για τα συνηθισμένα ποτηράκια του κρασιού, τότε μπορούμε να γεμίσουμε 8 ποτηράκια. Αυτό σημαίνει ότι το περιεχόμενο του μπουκαλιού είναι ίσο με το περιεχόμενο των 8 ποτηριών.

Με τον τρόπο αυτό μετρήσαμε την ποσότητα του κρασιού στο μπουκάλι με μονάδα μέτρησης το ένα ποτηράκι και βρήκαμε ότι το μπουκάλι περιέχει 8 ποτηράκια κρασί. Το 8 είναι το αποτέλεσμα της μέτρησης.

Αν αλλάξουμε τη μονάδα μέτρησης και χρησιμοποιήσουμε ποτήρια του νερού που είναι μεγαλύτερα, τότε θα δούμε ότι το μπουκάλι περιέχει 4 ποτήρια. Το αποτέλεσμα της μέτρησης αλλάζει λοιπόν, αν αλλάξει η μονάδα μέτρησης.

4.2. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΜΗΚΟΥΣ

Η βασική μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιούμε στη χώρα μας είναι το μέτρο και το συμβολίζουμε με το λατινικό γράμμα **m**. Για μικρότερα μήκη χρησιμοποιούμε μικρότερες μονάδες που είναι υποδιαιρέσεις του μέτρου όπως το δεκατόμετρο (**dm**), το εκατοστόμετρο (**cm**) και το χιλιοστόμετρο (**mm**). Η αντιστοιχία τους με το μέτρο φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Μονάδα	**Σύμβολο**	**Σχέση με το μέτρο**
ΜΕΤΡΟ	Μ	
Δεκάμετρο ή παλάμη	dm	$1\text{dm} = \frac{1}{10}\text{m} = 0{,}1\text{m}$
Εκατοστόμετρο ή εκατοστό ή πόντος	cm	$1\text{cm} = \frac{1}{100}\text{m} = 0{,}01\text{m}$
Χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό	mm	$1\text{mm} = \frac{1}{1000}\text{m} = 0{,}001\text{m}$

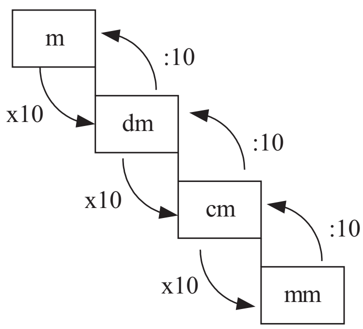
Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε επίσης ποια είναι η σχέση του μέτρου και των υποδιαιρέσεων μεταξύ τους.

$$
\begin{aligned}
1\text{m} = 10\text{dm} = {}& 100\text{cm} = 1000\text{mm}\\
1\text{dm} = {}& 10\text{cm} = 100\text{mm}\\
& 1\text{cm} = 10\text{mm}
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα:

Αν μετρήσουμε το μήκος ενός τραπεζιού και το βρούμε 23dm τότε με πόσα μέτρα ή με πόσα εκατοστά είναι ίσο;

Για να κάνουμε μετατροπές ανάμεσα στο μέτρο και στις υποδιαιρέσεις του, μπορούμε να χρησιμοποιούμε το επόμενο διάγραμμα.



δηλαδή, για να κατέβουμε ένα σκαλοπάτι στο διάγραμμα πολλαπλασιάζουμε με 10, ενώ για να ανέβουμε διαιρούμε με 10. Για να βρούμε λοιπόν το μήκος του τραπεζιού σε m διαιρούμε τα dm με 10, δηλαδή έχουμε 23:10 = 2,3. Για να βρούμε το μήκος σε εκατοστά, πολλαπλασιάζουμε τα dm με 10, δηλαδή έχουμε $23 \cdot 10 = 230\text{cm}$.

Εφαρμογή 1η:

Μετρήσαμε το πλάτος ενός βιβλίου και το βρήκαμε 1,7dm. Πόσο είναι το πλάτος του βιβλίου σε mm;

Απάντηση:

$$1{,}7\text{dm} = 17\text{cm} = 170\text{mm}$$

Εφαρμογή 2η:

Μετρήσαμε το μήκος ενός δωματίου και το βρήκαμε 432cm. Πόσο είναι το μήκος του δωματίου σε m;

Απάντηση:

$$432\text{cm} = 43{,}2\text{dm} = 4{,}32\text{m}$$

Εφαρμογή 3η:

Ο πωλητής ενός χαλιού μας είπε ότι το μήκος του είναι 2m 3dm 8cm

α) Πόσο είναι το μήκος του σε m;

β) Πόσο είναι το μήκος του σε cm;

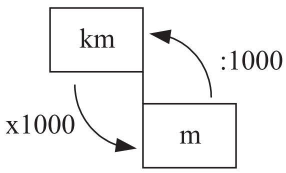
Απάντηση:

α) 2m + 3dm + 8cm = 2m + 3dm + 0,8dm =
=2m + 0,3m + 0,08m = 2,38m

β) 2m + 3dm + 8cm = 20dm + 3dm + 8cm =
=200cm + 30cm + 8cm = 238cm

Παρατήρηση:

Για να μετρήσουμε μεγάλες αποστάσεις, όπως για παράδειγμα την απόσταση Αθήνα – Θεσσαλονίκη, χρησιμοποιούμε ένα πολλαπλάσιο του μέτρου, το χιλιόμετρο (km) που είναι ίσο με 1000m.



Για να μετατρέψουμε km σε m πολλαπλασιάζουμε με 1000, ενώ για να μετατρέψουμε m σε km διαιρούμε με 1000.

Εφαρμογή 4η:

Η απόσταση δύο γειτονικών χωριών, μετρήθηκε 4,3km. Πόσο είναι σε m;

Απάντηση:

4,3km = 4,3x1000m = 4.300m

Εφαρμογή 5η:

Ένα εργοστάσιο παράγει 43.580m καλωδίου την ημέρα. Πόσα km είναι αυτό;

Απάντηση:

43.580m = 43.580:1000km = 43,580km

Παρατήρηση:

Σε άλλες χώρες, ιδιαίτερα στην Αγγλία και στην Αμερική, χρησιμοποιούν διαφορετικές μονάδες μήκους από τις δικές μας. Η βασική μονάδα μήκους είναι η γιάρδα (yrd) που υποδιαιρείται σε 3 πόδια (ft) και κάθε πόδι υποδιαιρείται σε 12 ίντσες (in).

Η αντιστοιχία με τις δικές μας μονάδες μέτρησης, είναι :

1 yrd = 0,9144 m = 91,44 cm
1 ft = 0,3048 m = 30,48 cm
1 in = 0,0254 m = 2,54 cm

Για να μετατρέψουμε yrd, ft ή in σε m ή cm πολλαπλασιάζουμε με το αντίστοιχο νούμερο. Για την αντίστροφη μετατροπή διαιρούμε με το αντίστοιχο νούμερο.

Εφαρμογή 6η:

Κατά την πτήση Αθήνα – Λονδίνο ο πιλότος ανακοίνωσε από τα μεγάφωνα ότι το αεροπλάνο θα πετάξει στα 20.000 πόδια. Πόσο είναι το ύψος αυτό σε m;

$$20.000 \text{ πόδια} = 20.000 \cdot 0{,}3048\text{m} = 6.096\text{m}$$

Εφαρμογή 7η:

Μία τηλεόραση έχει διαγώνιο 32 ίντσες ενώ μία άλλη έχει διαγώνιο 80cm. Ποια είναι μεγαλύτερη;

Απάντηση:

$80\text{cm} = 80 : 2{,}54\text{in} = 31{,}49\text{in}$, άρα η πρώτη είναι μεγαλύτερη.

Παρατήρηση:

Οι ναυτικοί χρησιμοποιούν σαν βασική μονάδα μήκους το ναυτικό μίλι (νμ) που είναι ίσο με 1.852m. Για να μετατρέψουμε λοιπόν ναυτικά μίλια σε m πολλαπλασιάζουμε με 1852, ενώ για την αντίστροφη μετατροπή διαιρούμε με 1852.

Εφαρμογή 8η:

Σε ένα ναυτικό χάρτη διαβάσαμε ότι η απόσταση Πειραιάς – Σύρος είναι 82νμ. Πόσα km είναι αυτή η απόσταση;

Απάντηση:

$$82\text{νμ} = 82 \cdot 1852\text{m} = 151.864\text{m} = 151.864 : 1000\text{km} = 151{,}864\text{km}$$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Χαρακτηρίστε ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις:

α) 3dm = 30mm	Σ	Λ
β) 72cm = 0,72m	Σ	Λ
γ) 32km = 3.200m	Σ	Λ
δ) 4,1m = 0,41km	Σ	Λ
ε) 26in = 66,04cm	Σ	Λ
στ) 1000ft = 304,8m	Σ	Λ
ζ) 5νμ = 92,6km	Σ	Λ

2. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

α) Με πόσα mm είναι ίσα τα 3,7m.
Α. 0,37mm Β. 37mm Γ. 370mm Δ. 3.700mm Ε. 37.000mm

β) Με πόσα m είναι ίσα τα 21,5dm.
Α. 0,215m Β. 2,15m Γ. 215m Δ. 2.150m Ε. 21.500m

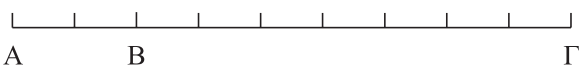
γ) Με πόσα cm είναι ίσες οι 10yrd.
Α. 0,9144cm Β. 9,144cm Γ. 91.44m Δ. 914,4cm Ε. 9144cm

3. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

m	2,3		
cm		35,2	
mm			71,4

4. Ταξινομείστε κατά σειρά μεγέθους τα μήκη:
0,37m, 15in, 2,4dm, 31cm, 1,1ft

5. Αν το μήκος ΑΒ είναι 1m, τότε πόσο είναι το ΑΓ.



6. Μετατρέψτε σε συμμιγείς τους αριθμούς :
α) 4.729cm β) 8.126mm γ) 520cm

7. Ένα αεροπλάνο πετάει στα 10.000m και ένα άλλο στα 30.000ft. Ποιο πετάει ψηλότερα;

8. Κάποιος ένωσε δύο κομμάτια σχοινί, το ένα 3,7m και το άλλο 250cm. Ποιο είναι το συνολικό μήκος του σχοινιού;

9. Πόσα cm είναι τα ¾ του μέτρου;

10. Μία ευρωπαϊκή εταιρία πουλάει ύφασμα προς 2,25€ το μέτρο, ενώ μία αμερικανική, πουλάει το ίδιο ύφασμα 2,1€ τη γιάρδα. Ποιο από τα δύο συμφέρει περισσότερο;

4.3. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΕΜΒΑΔΟΥ

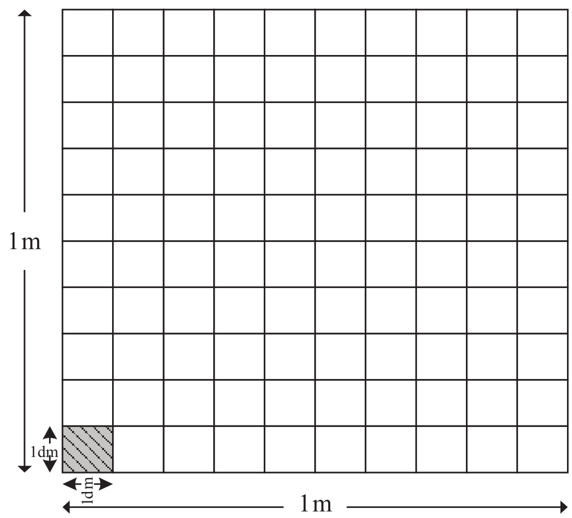
Η βασική μονάδα μέτρησης εμβαδού, είναι το τετραγωνικό μέτρο (m^2), που είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 1m. Όταν λέμε ότι ένα δωμάτιο έχει εμβαδόν $12m^2$ εννοούμε ότι αν είχαμε 12 τετράγωνα χαρτόνια με πλευρά 1m και μπορούσαμε να τα απλώσουμε με κάποιο τρόπο στο πάτωμα του δωματίου θα το κάλυπταν ακριβώς. Για μικρότερα εμβαδά χρησιμοποιούμε υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου, όπως:

α) **το τετραγωνικό δεκατόμετρο (dm^2)** που είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 1dm,

β) **το τετραγωνικό εκατοστόμετρο (cm^2)** που είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 1cm,

γ) **το τετραγωνικό χιλιοστόμετρο (mm^2)** που είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 1mm.

Για να καταλάβουμε τη σχέση ανάμεσα στο τετραγωνικό μέτρο και το τετραγωνικό δεκατόμετρο, σκεφτόμαστε πόσα μικρά τετράγωνα με πλευρά 1dm χωράνε σε ένα μεγάλο τετράγωνο με πλευρά 1m.



Από το παραπάνω σχήμα είναι φανερό ότι $1m^2$ είναι ίσο με

10x10 = 100dm. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να βρούμε την αντιστοιχία των άλλων μονάδων με το τετραγωνικό μέτρο.

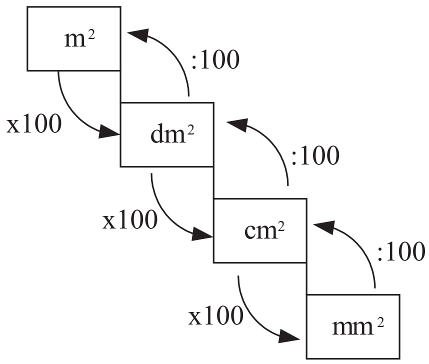
Αυτή φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

Μονάδα	**Σύμβολο**	**Σχέση με το μέτρο**
ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟ ΜΕΤΡΟ	m^2	
Τετραγωνικό δεκάμετρο	dm^2	$1dm^2 = \frac{1}{100}m^2 = 0,01m^2$
Τετραγωνικό εκατοστόμετρο	cm^2	$1cm^2 = \frac{1}{10.000}m^2 = 0,0001m^2$
Τετραγωνικό χιλιοστόμετρο	mm^2	$1mm^2 = \frac{1}{1.000.000}m^2 = 0,000001m^2$

Από τον παρακάτω πίνακα βλέπουμε και ποιες είναι οι σχέσεις των διαφόρων μονάδων μεταξύ τους.

$$1m^2 = 100dm^2 = 10.000cm^2 = 1.000.000mm^2$$
$$1dm^2 = 100cm^2 = 10.000mm^2$$
$$1cm^2 = 100mm^2$$

Για να κάνουμε μετατροπές ανάμεσα στο τετραγωνικό μέτρο και τις υποδιαιρέσεις του, μπορούμε να χρησιμοποιούμε το παρακάτω διάγραμμα.



δηλαδή, για να κατέβουμε ένα σκαλοπάτι πολλαπλασιάζουμε με 100, ενώ για να ανέβουμε διαιρούμε με 100.

Εφαρμογή 1η:

Πόσα cm^2 είναι τα $12m^2$.

Απάντηση:

$$12m^2 = 12x100dm^2 = 1200x100cm^2 = 120.000cm^2$$

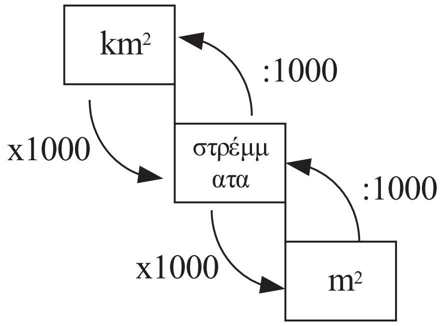
Εφαρμογή 2η:

Πόσα m^2 είναι τα $2dm^2$ $75cm^2$;

Απάντηση:

$2dm^2 + 75cm^2 = 2dm^2 + 75:100dm^2 =$
$= 2dm^2 + 0,75dm^2 = 2,75dm^2 = 2,75:100m^2 = 0,0275m^2$

Για να μετρήσουμε μεγάλα εμβαδά όπως για παράδειγμα ένα οικόπεδο ή το εμβαδό ενός νησιού, χρησιμοποιούμε το τετραγωνικό χιλιόμετρο (km^2) που είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 1km και το στρέμμα, που είναι ίσο με $1000m^2$. Για τις μετατροπές χρησιμοποιούμε το παρακάτω διάγραμμα.



Εφαρμογή 3η:

Πόσα m^2 είναι ένα οικόπεδο με εμβαδό 3,7 στρέμματα;

Απάντηση:

$$3{,}7\text{στρέμματα} = 3{,}7\text{x}1000m^2 = 3.700m^2$$

Εφαρμογή 4η:

Μία λίμνη έχει έκταση $750.000m^2$. Πόσα τετραγωνικά χιλιόμετρα είναι;

Απάντηση:

$$750.000m^2 = 750.000:1000\text{στρέμματα} = 750\text{στρέμματα} = 750:1000km^2 = 0{,}75km^2$$

Σε άλλες χώρες, μπορεί να συναντήσουμε διαφορετικές μονάδες μέτρησης, όπως την τετραγωνική γιάρδα ή το εκτάριο. Είναι όμως πολύ σπάνιο να τις συναντήσουμε στην καθημερινή ζωή στη χώρα μας.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Χαρακτηρίστε ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) $3mm^2 = 0{,}3cm^2$	Σ	Λ
β) $2m^2 = 200dm^2$	Σ	Λ
γ) $35cm^2 = 0{,}35m^2$	Σ	Λ
δ) 2,3στρέμματα = $230m^2$	Σ	Λ
ε) $21.500m^2$ = 21,5στρέμματα	Σ	Λ
στ) $2{,}07km^2 = 207.000m^2$	Σ	Λ
ζ) $20.000m^2 = 20km^2$	Σ	Λ

2. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

α) Με πόσα mm^2 είναι ίσα τα $13cm^2$;
Α. $0{,}13mm^2$ Β. $1{,}3mm^2$ Γ. $130mm^2$ Δ. $1.300mm^2$ Ε. $130.000mm^2$

β) Με πόσα m^2 είναι ίσα τα $72dm^2$;
Α. $0{,}72m^2$ Β. $7{,}2m^2$ Γ. $720m^2$ Δ. $7.200m^2$ Ε. $72.000m^2$

γ) Με πόσα dm^2 είναι ίσα τα $3cm_2$;
Α. $0{,}003dm^2$ Β. $0{,}03dm^2$ Γ. $0{,}3dm^2$ Δ. $30dm^2$ Ε. $3.000dm^2$

δ) Πόσα στρέμματα είναι τα $2.450m^2$;
Α. 0,245στρέμματα Β. 2,45στρέμματα Γ. 24,5στρέμματα Δ. 245στρέμματα
Ε. 2.450.000στρέμματα

ε) Πόσα m^2 είναι τα $2{,}35km^2$;
Α. $23{,}5m^2$ Β. $235m^2$ Γ. $23.500m^2$ Δ. $235.000m^2$ Ε. $2.350.000m^2$

3. Συμπληρώστε τους παρακάτω πίνακες:

m^2	3,9			
dm^2			73	
cm^2		531		
mm^2				4.060

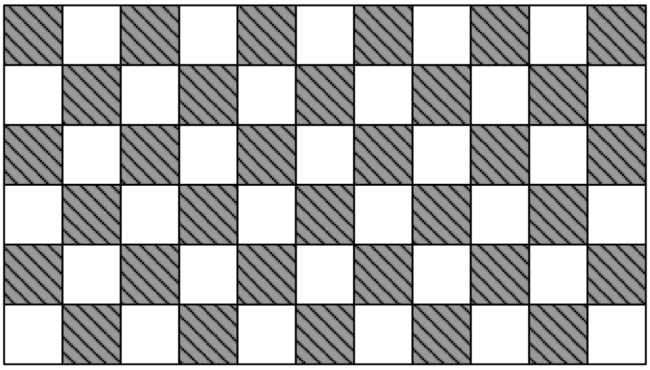
m^2	75.030		
στρέμματα		852	
km^2			4,7

4. Ταξινομείστε κατά σειρά μεγέθους τα εμβαδά:
$0{,}29m^2$, $2.750cm^2$, $31{,}2dm^2$, $37.260mm^2$

5. Μετατρέψτε σε συμμιγείς του αριθμούς:
α) $45032cm^2$ β) $127670mm^2$ γ) $20407mm^2$ δ) $1790054cm^2$

6. Το πάτωμα του μπάνιου είναι καλυμμένο με πλακάκια, όπως φαίνεται στο σχήμα και το καθένα έχει εμβαδόν $1.600cm^2$. Πόσα m^2 είναι το εμβαδόν του μπάνιου;

7.



8. Ένα χωράφι με εμβαδόν 4,32 στρέμματα, πουλήθηκε προς 8€ το τετραγωνικό μέτρο. Ποια ήταν η τιμή του;

9. Πόσα πλακάκια εμβαδού $400cm^2$ χρειαζόμαστε για να καλύψουμε ένα τοίχο εμβαδού $6m^2$;

10. Έξω από το δοχείο του πλαστικού χρώματος γράφει ότι, το 1kg καλύπτει επιφάνεια $8m^2$. Πόσα πεντόκιλα δοχεία θα χρειαστούμε για να βάψουμε μία ταράτσα εμβαδού $12.000dm^2$;

11. Ο οικοδομικός κανονισμός λέει ότι ο ημιυπαίθριος χώρος μπορεί να είναι το πολύ ίσος με το 15% του εμβαδού του διαμερίσματος. Ποιο είναι το εμβαδόν του ημιυπαίθριου χώρου που δικαιούται ένα διαμέρισμα $80m^2$;

12. Ένα κτηματίας έχει μία έκταση $43.000m^2$. Σε πόσα άρτια και οικοδομήσιμα οικόπεδα μπορεί να τη χωρίσει, δεδομένου ότι ένα οικόπεδο είναι άρτιο και οικοδομήσιμο αν είναι τουλάχιστον 4 στρέμματα;

4.4. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΟΓΚΟΥ

Η βασική μονάδα μέτρησης όγκου είναι το κυβικό μέτρο (m^3), που είναι ένας κύβος με πλευρά 1m.

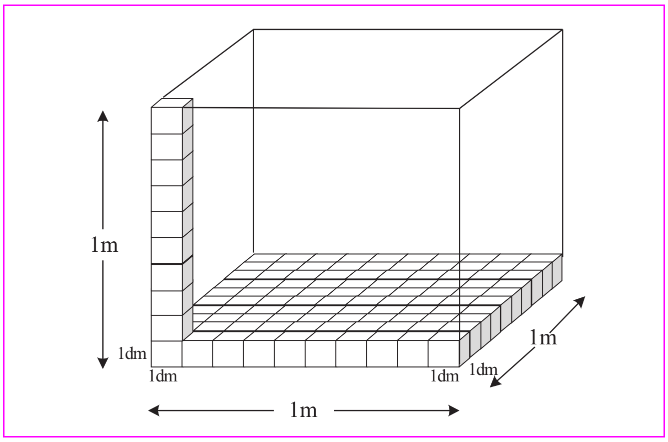
Όταν λέμε ότι μία αποθήκη έχει όγκο $150m^3$, εννοούμε ότι για να τη γεμίσουμε τελείως, πρέπει με κάποιο τρόπο να στοιβάξουμε μέσα 150 τέτοιους κύβους με πλευρά 1m. Υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου είναι:

α) **το κυβικό δεκατόμετρο (dm^3)**, που είναι ένας κύβος με πλευρά 1dm. Πολύ συχνά το ονομάζουμε και λίτρο (ℓ),

β) **το κυβικό εκατοστόμετρο (cm^3)**, που είναι ένας κύβος με πλευρά 1cm. Συχνά το ονομάζουμε και χιλιοστόλιτρο ($m\ell$),

γ) **το κυβικό χιλιοστόμετρο (mm^3)**, που είναι ένας κύβος με πλευρά 1mm.

Αν θέλουμε να γεμίσουμε $1m^3$ με μικρότερους κύβους, που ο καθένας είναι $1dm^3$, είναι φανερό ότι χρειαζόμαστε 1000 τέτοιους κύβους.

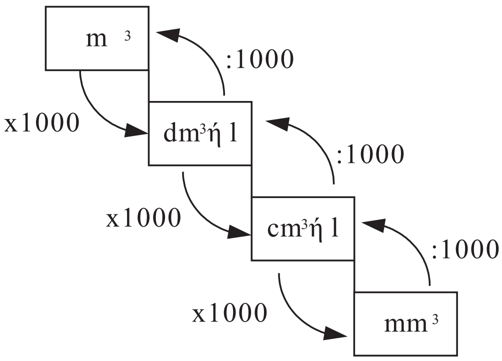


Άρα, το $1m^2$ είναι ισοδύναμο με $1000dm^3$ και με παρόμοιο τρόπο προκύπτουν οι σχέσεις για τις άλλες μονάδες που φαίνονται στους παρακάτω πίνακες:

Μονάδα	**Σύμβολο**	**Σχέση με το μέτρο**
ΚΥΒΙΚΟ ΜΕΤΡΟ	m^3	
Κυβικό δεκάμετρο ή λίτρο	dm^3	$1dm^3 = \frac{1}{1000}m^3 = 0,001m^3$
Κυβικό εκατοστόμετρο ή χιλιοστόλιτρο	cm^3	$1cm^3 = \frac{1}{1.000.000}m^3 = 0,000001m^3$
Κυβικό χιλιοστόμετρο	mm^3	$1mm^3 = \frac{1}{1.000.000.000}m^3 = 0,00000$

$$1m^3 = 1000dm^3 = 1.000.000cm^3 = 1.000.000.000mm^3$$
$$1dm^3 = 1.000cm^3 = 1.000.000mm^3$$
$$1cm^3 = 1.000mm^3$$

Για να κάνουμε μετατροπές ανάμεσα στο κυβικό μέτρο και τις υποδιαιρέσεις του, χρησιμοποιούμε το παρακάτω διάγραμμα:



δηλαδή, για να κατέβουμε ένα σκαλοπάτι στο διάγραμμα, πολλαπλασιάζουμε επί 1000, ενώ για να ανέβουμε, διαιρούμε με 1000.

Εφαρμογή 1η:
Πόσα λίτρα είναι τα 3,2m³;

Απάντηση:

$$3,2\ m^3 = 3,2x1000\ \ell = 3.200\ \ell$$

Εφαρμογή 2η:
Πόσα $m\ell$ είναι τα 75mm³;

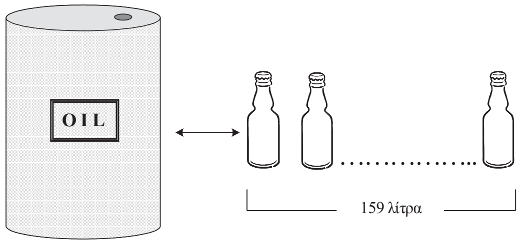
Απάντηση:

$$75mm^3 = 75:1000\,m\ell = 0,075\,m\ell$$

Για να μετρήσουμε πολύ μεγάλους όγκους, όπως για παράδειγμα τον όγκο του νερού σε μία λίμνη, χρησιμοποιούμε το κυβικό χιλιόμετρο (km^3), που είναι ένας κύβος με πλευρά 1km και είναι ίσο με $1.000.000.000m^3$. Αν λοιπόν η λίμνη περιέχει $3,5km^3$ νερού, αυτό ισοδυναμεί με $3,5x1.000.000.000 = 3.500.000.000m^3$.

Στην Αμερική χρησιμοποιούν σαν μονάδα όγκου των υγρών το **γαλόνι** (gal), που είναι ίσο με 4,405 ℓ.

Οι μεγάλες πετρελαϊκές εταιρίες χρησιμοποιούν ως μονάδα όγκου το βαρέλι, που είναι περίπου ίσο με 159 λίτρα.



Εφαρμογή 3η:

Όταν στην τηλεόραση ανακοινώνεται ότι η τιμή του αργού πετρελαίου έφτασε τα 55 δολάρια το βαρέλι, πόσο κοστίζει το λίτρο;

Απάντηση:

Αφού το βαρέλι είναι 159 λίτρα, τότε το ένα λίτρο κοστίζει $55:159 \approx 0,35$ δολάρια ή 35 σεντς.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Χαρακτηρίστε ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) $2dm^3 = 2$ l	Σ	Λ
β) $3{,}7cm^3 = 370mm^3$	Σ	Λ
γ) 2,4 l = 2400ml	Σ	Λ
δ) $52m^3 = 520dm^3$	Σ	Λ
ε) $3mm^3 = 0{,}0003cm^3$	Σ	Λ
στ) $572dm^3 = 0{,}572m^3$	Σ	Λ
ζ) $7ml = 7000mm^3$	Σ	Λ

2. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

α) Με πόσα dm^3 είναι ίσα τα $2{,}8m^3$;

Α. $0{,}28dm^3$ Β. $28dm^3$ Γ. $280dm^3$ Δ. $2800dm^3$ Ε. $2.800.000dm^3$

β) Με πόσα cm^3 είναι ίσα τα $3{,}72dm^3$;

Α. $0{,}00372cm^3$ Β. $0{,}0372cm^3$ Γ. $0{,}372cm^3$ Δ. $37{,}2cm^3$ Ε. $3.720cm^3$

γ) Με πόσα km^3 είναι ίσα τα $75.000m^3$;

Α. $0{,}000075km^3$ Β. $0{,}075km^3$ Γ. $7{,}5km^3$ Δ. $750km^3$ Ε. $7.500.000km^3$

δ) Με πόσο λίτρα περίπου είναι ίσα τα 4,2 γαλόνια;

Α. 12,5 ℓ Β. 15,8 ℓ Γ. 18,5 ℓ Δ. 89 ℓ Ε. 185 ℓ

3. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

m^3	3,75			
dm^3		752,4		
cm^3			35.200	
mm^3				7.500.000

4. Ταξινομείστε κατά σειρά μεγέθους τους όγκους:
$6{,}2m^3$, 5.900 l, 6.000.000 ml, $5.800.000.000mm^3$

5. Μετατρέψτε σε συμμιγείς τους αριθμούς:
α) $3.211dm^3$ β) $7.252.546cm^3$ γ) $340.021mm^3$

6. Ένα μεγάλο μπουκάλι πορτοκαλάδα έχει όγκο 1,5 λίτρο. Ένα συνηθισμένο ποτήρι έχει όγκο $150cm^3$. Πόσα τέτοια ποτήρια γεμίζουμε με ένα μπουκάλι;

7. Οι δεξαμενές ενός οινοποιητικού συνεταιρισμού περιέχουν $150m^3$ κρασί. Πόσα μπουκάλια των 0,75 λίτρων χρειάζονται για να το εμφιαλώσουν;

8. Ένα μπουκαλάκι αντιβιοτικό περιέχει $0{,}25dm^3$. Ο γιατρός έγραψε να παίρνουμε ένα κουταλάκι (περίπου $5\,m\ell$), 4 φορές την ημέρα. Για πόσες μέρες φτάνει το μπουκαλάκι;

9. Η δεξαμενή πετρελαίου της πολυκατοικίας έχει όγκο $2{,}5m^3$ και είναι τελείως άδεια. Αν παραγγείλουμε δύο βυτία των 1500 λίτρων, χωράνε στη δεξαμενή ή όχι;

10. Μία δεξαμενή νερού έχει όγκο $12m^3$ και είναι τελείως άδεια. Αν ανοίξουμε μία βρύση που βγάζει 300 λίτρα την ώρα, πόση ώρα θέλει να γεμίσει;

4.5. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΜΑΖΑΣ

Η βασική μονάδα μέτρησης της μάζας είναι το χιλιόγραμμο ή κιλό (kg) που είναι ίσο με τη μάζα 1 λίτρου απόλυτα καθαρού νερού σε θερμοκρασία 4^{o} Κελσίου.

Πολλές φορές λέμε ότι ένα σώμα έχει βάρος **1kg** αντί για μάζα. Αυτό δεν είναι τυπικά σωστό, αλλά δεν δημιουργεί προβλήματα στην καθημερινή χρήση.

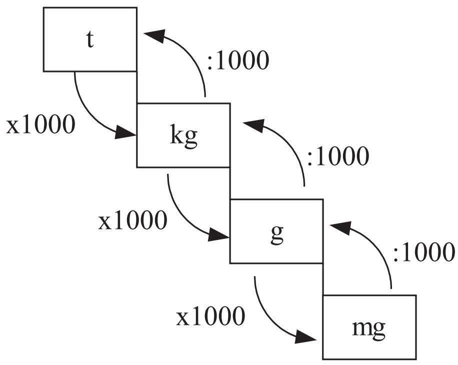
Υποδιαιρέσεις του κιλού είναι το **γραμμάριο** (**g**) και το χιλιοστογραμμάριο (**mg**).

Πολλαπλάσιο του κιλού είναι ο **τόνος** (**t**). Η σχέση τους με το κιλό φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Μονάδα	**Σύμβολο**	**Σχέση με το μέτρο**
ΤΟΝΟΣ	t	1t = 1000kg
ΧΙΛΙΟΓΡΑΜΜΟ ή ΚΙΛΟ	kg	1kg = 1000gr
Γραμμάριο	g	$1\text{g} = \frac{1}{1.000}\text{kg} = 0,001\text{kg}$
Χιλιοστογραμμάριο	mg	$1\text{mg} = \frac{1}{1.000.000}\text{kg} = 0,000001$

1t = 1000kg = 1.000.000g = 1.000.000.000mg
1kg = 1.000g = 1.000.000mg
1g = 1.000mg

Για να κάνουμε μετατροπές ανάμεσα στις μονάδες αυτές, χρησιμοποιούμε το επόμενο διάγραμμα:



Για να κατέβουμε ένα σκαλοπάτι πολλαπλασιάζουμε επί 1000, ενώ για να ανέβουμε, διαιρούμε δια 1000.

Εφαρμογή 1η:

Ένα κουτί φαρμάκου περιέχει 30 χαπάκια που το καθένα έχει 20mg μίας θεραπευτικής ουσίας. Ποια είναι η συνολική ποσότητα θεραπευτικής ουσίας σε γραμμάρια;

Απάντηση:

Η συνολική ποσότητα είναι $30 \cdot 20 = 600\text{mg} = 600 : 1000\text{g} = 0,6\text{g}$.

Εφαρμογή 2η:

Αγοράσαμε στη λαϊκή 2kg ντομάτας, περίπου ίδιες στο μέγεθος. Οι ντομάτες ήταν 16 κομμάτια. Πόσα γραμμάρια ζυγίζει κατά μέσο όρο η κάθε ντομάτα;

Απάντηση:

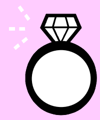
$2\text{kg} = 2 \cdot 1000\text{g} = 2000\text{g}$

$2000 : 16 = 125\text{g}$ η κάθε ντομάτα.

Παρατήρηση:

Σε ειδικές περιπτώσεις, χρησιμοποιούμε και άλλες μονάδες μάζας. Όταν ζυγίζουμε πολύτιμους λίθους, χρησιμοποιούμε το καράτι, που είναι ίσο με 0,2g. Όταν λέμε δηλαδή ότι ένα διαμάντι είναι 20 καράτια, εννοούμε ότι είναι $20 \cdot 0,2 = 4\text{g}$.

Δαχτυλίδι με



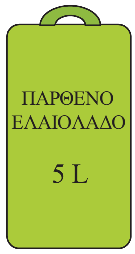
διαμάντι

Είπαμε στην αρχή ότι ένα λίτρο καθαρό νερό ζυγίζει 1kg, αλλά αυτό δεν ισχύει για όλα τα υγρά. Στον επόμενο πίνακα φαίνονται τα αντίστοιχα μεγέθη για μερικά από τα πιο συνηθισμένα.

Είδος υγρού	**Μάζα ανά λίτρο**
Θαλασσινό νερό	1,03
Καθαρό νερό	1
Λάδι	0,92
Οινόπνευμα	0,8
Βενζίνη	0,69

Εφαρμογή:

Πόσα κιλά λάδι περιέχει ένα δοχείο με όγκο 5 λίτρα;



Δοχείο Ελαιόλαδου

Απάντηση:

Αφού το ένα λίτρο ζυγίζει 0,92 κιλά, τότε τα 5 λίτρα ζυγίζουν $5 \cdot 0,92 = 4,6\text{kg}$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Χαρακτηρίστε ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α) 5,2kg = 5.200g Σ Λ
β) 750mg = 0,75g Σ Λ
γ) 1200kg = 12t Σ Λ
δ) 50καράτια = 20g Σ Λ
ε) 1 l οινόπνευμα ζυγίζει 1kg Σ Λ

2. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

α) Πόσα κιλά είναι οι 2,5 τόνοι;
Α. 0,25kg Β. 25kg Γ. 250kg Δ. 2500kg Ε. 25.000kg

β) Πόσα γραμμάρια είναι τα 500mg;
Α. 0,5g Β. 5g Γ. 50g Δ. 5000g Ε. 500.000g

γ) Πόσα κιλά είναι τα 2560 γραμμάρια;
Α. 0,256kg Β. 2,56kg Γ. 256kg Δ. 256.000kg Ε. 2.560.000kg

δ) Πόσο ζυγίζουν 2 λίτρα βενζίνη;
Α. 1,38kg Β. 1,6kg Γ. 2kg Δ. 2,06kg Ε. 6,9kg

3. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

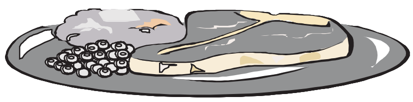
kg		2,7	
g	1.500		
mg			350.000

4. Ένα συνηθισμένο μήλο ζυγίζει περίπου 200g. Πόσα μήλα περιμένουμε να έχει μία σακούλα που ζυγίζει 3kg;

5. Ένα δοχείο των 15 λίτρων ζυγίζει άδειο 800g. Αν το γεμίσουμε με οινόπνευμα πόσο θα ζυγίζει;

6. Ένα αυτοκίνητο ζυγίζει άδειο 1,3 τόνους. Επιτρέπεται να μεταφέρει 5 άτομα με μέσο βάρος 75kg και 100kg αποσκευές. Ποιο είναι το επιτρεπόμενο μεικτό βάρος του αυτοκινήτου;

7. Η συνταγή ενός φαγητού προβλέπει 180g κρέας για κάθε άτομο. Πόσα kg κρέας πρέπει να αγοράσουμε για να κάνουμε το τραπέζι σε 12 άτομα;



Πιατέλα με φαγητό

8. Στις οδηγίες ενός παιδικού φαρμάκου αναφέρεται ότι η ημερήσια δόση πρέπει να είναι το πολύ 200mg. Αναφέρεται επίσης ότι η περιεκτικότητα σε δραστική ουσία είναι 10mg/$m\ell$. Πόσα κουταλάκια των 20 $m\ell$ πρέπει να δώσουμε στο παιδί κάθε μέρα;

9. Στις οδηγίες ενός παιδικού φαρμάκου αναφέρεται ότι η ημερήσια δόση πρέπει να είναι το πολύ 2mg ανά κιλό βάρους του παιδιού. Πόσα χαπάκια των 20mg μπορούμε να του δώσουμε την ημέρα αν το παιδί ζυγίζει 25 κιλά;

10. Οι προδιαγραφές ενός ραφιού λένε ότι αντέχει μέχρι 30kg. Πόσα γυάλινα μπουκάλια του ενός λίτρου γεμάτα με λάδι μπορούμε να βάλουμε πάνω στο ράφι, αν γνωρίζουμε ότι το άδειο μπουκάλι ζυγίζει 200g;

4.6. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΧΡΟΝΟΥ

Η βασική μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι το δευτερόλεπτο (s).

Χρησιμοποιούμε επίσης το λεπτό (min) που είναι ίσο με 60s, την ώρα (h), που είναι ίση με 60min και την ημέρα που είναι ίση με 24h.

ΣΧΟΛΙΟ:
Οι μονάδες μέτρησης του χρόνου δεν βασίζονται στο δεκαδικό σύστημα, αλλά στο εξηκονταδικό που εμφανίστηκε πριν από 4.000 χρόνια στη αρχαία Μεσοποταμία.

Η αντιστοιχία των μονάδων αυτών είναι :

$$\boxed{\begin{aligned} 1\text{μέρα} = 24\text{h} &= 1.440\text{min} = 86.400\text{s} \\ 1\text{h} &= 60\text{min} = 3.600\text{s} \\ 1\text{min} &= 60\text{s} \end{aligned}}$$

Για μεγαλύτερες χρονικές περιόδους χρησιμοποιούμε το μήνα, το έτος και τον αιώνα.

- Στα μαθηματικά προβλήματα θεωρούμε ότι ο μήνας έχει 30 ημέρες (παρόλο που όλοι ξέρουμε ότι δεν έχουν όλοι οι μήνες τον ίδιο αριθμό ημερών) και το έτος έχει 12 μήνες, δηλαδή 360 ημέρες (στην πραγματικότητα το έτος έχει 365 ημέρες ή 366 αν είναι δίσεκτο).
- Ο **αιώνας** είναι ίσος με 100 χρόνια.

Εφαρμογή 1η:

Το πρόγραμμα του απογευματινού σχολείου αρχίζει στις 17.45 και αποτελείται από 4 διδακτικές ώρες των 40 λεπτών και τρία ενδιάμεσα διαλείμματα των 15 λεπτών. Τι ώρα σχολάνε οι μαθητές;

Απάντηση:

Η διάρκεια των μαθημάτων είναι 40x4 = 160min και των διαλειμμάτων $15 \cdot 3 = 45\,\text{min}$. Έτσι, η συνολική διάρκεια του απογευματινού σχολείου είναι 160 + 45 = 205min. Οι μαθητές σχολάνε στις 21.10 γιατί:

$$\begin{array}{rrr} & 17\text{h} & 45\text{min} \\ + & 3\text{h} & 25\text{min} \\ \hline & \cancel{2}0\text{h} & \cancel{7}0\text{min} \\ & 21\text{h} & 10\text{min} \end{array}$$

(Όταν στο αποτέλεσμα τα λεπτά είναι περισσότερα από 60 τότε αφαιρούμε το επιπλέον του 60 και το μετατρέπουμε σε ώρες)

Εφαρμογή 2η:

Ο Γιάννης γεννήθηκε στις 21 Σεπτεμβρίου 1960. Ποια ήταν η ακριβής ηλικία του στις 25 Μαρτίου 2005;

Απάντηση:

Για να βρούμε την ηλικία πρέπει να κάνουμε αφαίρεση:

$$\begin{array}{rrr} 2004 & 15 & \\ \cancel{2005} & \cancel{3} & 25 \\ -\ 1960 & 9 & 21 \\ \hline 44\text{έτη} & 6\text{μήνες} & 4\text{μέρες} \end{array}$$

Παρατήρηση:

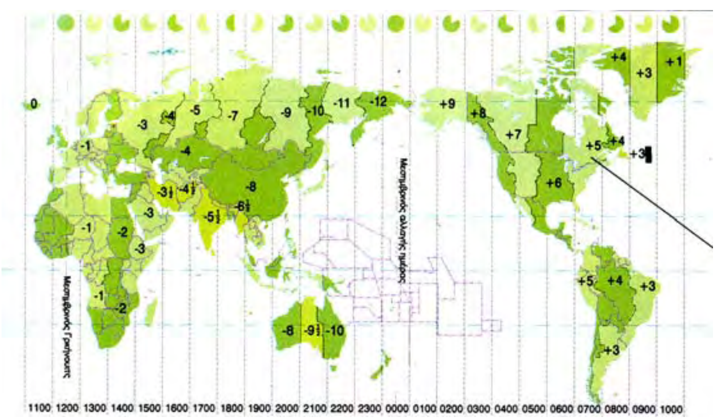
(Όταν ο αφαιρετέος είναι μεγαλύτερος από τον μειωτέο, δανειζόμαστε μία μονάδα από την ανώτερη τάξη και την μετατρέπουμε στη μικρότερη. Εδώ, δανειστήκαμε 1 έτος από το 2005, το μετατρέψαμε σε 12 μήνες και το προσθέσαμε σ' αυτούς που υπήρχαν από πριν).

ΣΧΟΛΙΟ:

Κάτι άλλο που πρέπει να έχουμε υπ' όψιν είναι ότι δεν έχουν όλες οι χώρες του κόσμου την ίδια ώρα κατά την ίδια χρονική στιγμή.

Όταν στην Ελλάδα είναι μεσημέρι, αλλού είναι απόγευμα, αλλού πρωί και αλλού νύχτα. Οι επιστήμονες έχουν χωρίσει την υδρόγειο σφαίρα σε 24 ζώνες που λέγονται ωριαίες άτρακτοι.

Κάθε ζώνη έχει διαφορά μίας ώρας από την προηγούμενη και από την επόμενη. Τα όρια των ζωνών δεν είναι ευθείες αλλά για πρακτικούς λόγους ακολουθούν τα σύνορα των χωρών. Η κυβέρνηση κάθε χώρας επιλέγει την ζώνη στην οποία θέλει να ανήκει. Σαν αρχική ζώνη έχει καθοριστεί αυτή που περιέχει το αστεροσκοπείο του Greenwich στην Αγγλία. Η ώρα αυξάνεται κατά το αντίστοιχο νούμερο για τις ζώνες που βρίσκονται δεξιά από αυτήν στο χάρτη και μειώνονται για τις ζώνες που βρίσκονται αριστερά.



Εφαρμογή 3η:

Όταν στην Αθήνα η ώρα είναι 9.00, τότε τι ώρα είναι :

α) Στο Λονδίνο β) Στη Νέα Υόρκη

γ) Στο Γιοχάνεσμπουργκ δ) Στη Μελβούρνη

Απάντηση:

α) Το Λονδίνο βρίσκεται δύο ζώνες αριστερά από την Αθήνα, άρα η ώρα εκεί είναι:
9.00΄ – 2.00΄ = 7.00΄.

β) Η Νέα Υόρκη βρίσκεται επτά ζώνες αριστερά, άρα η ώρα εκεί είναι:
9.00΄ – 7.00΄ = 2.00΄ (Δεν είναι καθόλου καλή ώρα για να κάνετε ένα τηλεφώνημα εκεί!)

γ) Το Γιοχάνεσμπουργκ είναι στην ίδια ζώνη με την Αθήνα, άρα η ώρα εκεί είναι 9.00΄.

δ) Η Μελβούρνη βρίσκεται οκτώ ζώνες δεξιά από την Αθήνα, άρα η ώρα εκεί είναι:
9.00΄ + 8.00΄ = 17.00΄.

Εφαρμογή 4η:

Το πρόγραμμα μίας αεροπορικής εταιρίας δίνει ώρα αναχώρησης από Αθήνα 17.15΄ τοπική ώρα και ώρα άφιξης στο Βερολίνο 19.25΄ τοπική ώρα. Πόση ώρα διαρκεί η πτήση;

Απάντηση:

Το Βερολίνο βρίσκεται μία ώρα πίσω από την Αθήνα, άρα όταν εκεί είναι 19.25΄, στην Αθήνα είναι 20.25΄. Η πτήση διαρκεί λοιπόν 20.25΄– 17.15΄ = 3h 10min.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Χαρακτηρίστε ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Οι 2,5 ώρες είναι 250 λεπτά	Σ	Λ
β) Τα 200 λεπτά είναι 3 ώρες και 20 λεπτά	Σ	Λ
γ) Τα 90 δευτερόλεπτα είναι 1,5 λεπτά	Σ	Λ
δ) Όταν στην Αθήνα είναι 12.00΄, στη Λισσαβώνα είναι 14.00	Σ	Λ
ε) Όταν στη Μόσχα είναι 20.00΄, στην Αθήνα είναι 19.00΄	Σ	Λ

2. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση: α) Οι 3 ¼ ώρες είναι ίσες με:

Α. 3,25min Β. 135min Γ. 195min Δ. 255min Ε. 325min

β) Τα 2min και 30s είναι ίσα με:

Α. 23s Β. 150s Γ. 230s Δ. 270s Ε. 30s

γ) Τα 250 min είναι ίσα με:

Α. 2h 50min Β. 3h 10min Γ. 3h 50min Δ. 4h 10min Ε. 5h

δ) Όταν στο Παρίσι είναι 18.00΄, τότε στο Σικάγο είναι:

Α. 11.00΄ Β. 12.00΄ Γ. 15.00΄ Δ. 18.00΄ Ε. 23.00΄

3. Συμπληρώστε τον πίνακα:

Ώρες	3,2		
Λεπτά		510	
Δευτερόλεπτα			7.200

4. Ένα τρένο ξεκινάει από τη Θεσσαλονίκη στις 6.35΄ και φθάνει στη Φλώρινα στις 10.15΄. Πόση ώρα κρατάει το ταξίδι;

5. Ένας ποδοσφαιρικός αγώνας έχει δύο ημίχρονα των 45min με διάλειμμα 15min και αρχίζει στις 9.45΄. α) Τι ώρα θα τελειώσει ο αγώνας αν δεν υπάρχουν καθυστερήσεις;
β) Αν χρειαστεί να παιχτεί μία ημίωρη παράταση με 5min διακοπή πριν την παράταση και 5min διακοπή ανάμεσα στα ημίχρονα της παράτασης, τι ώρα θα τελειώσει ο αγώνας;

6. Υπολογίστε τη σημερινή ηλικία σας με ακρίβεια ημέρας.

7. Για να πάτε στη δουλειά σας πρέπει να περπατήσετε 7min μέχρι το μετρό και να περιμένετε το πολύ 6min μέχρι να έρθει ο συρμός. Η διαδρομή διαρκεί 23min και μετά πρέπει να περπατήσετε άλλα 12min. Πρέπει να είστε στη δουλειά στις 8.30΄. Τι ώρα το αργότερο πρέπει να φύγετε από το σπίτι για να μην φτάσετε καθυστερημένοι;

8. Ένα συνέδριο αρχίζει στις 9.00΄ και τελειώνει στις 14.30΄. Πρέπει να γίνουν πέντε ομιλίες με 20min διάλειμμα ανάμεσά τους. Πόσο πρέπει να διαρκεί η κάθε ομιλία;

9. Ένας αγώνας μπάσκετ αρχίζει στη Ρώμη στις 19.00΄ και μεταδίδεται απευθείας στην Ελλάδα. Τι ώρα θα αρχίσει η μετάδοση;

10. Η πτήση Αθήνα – Παρίσι διαρκεί 2h 50min. Το αεροπλάνο απογειώνεται στις 16.20΄. Τι ώρα θα φτάσει στο Παρίσι;

4.7. ΝΟΜΙΣΜΑΤΙΚΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ

Από τις αρχές του 2001, στην Ελλάδα χρησιμοποιούμε το Ευρώ, που είναι το κοινό νόμισμα των χωρών της Ευρωπαϊκής Ένωσης. Ένα Ευρώ υποδιαιρείται σε 100 λεπτά. Κυκλοφορούν κέρματα του 1 λεπτού, των 2 λεπτών, των 5 λεπτών, των 10 λεπτών, των 20 λεπτών, των 50 λεπτών, του 1 ευρώ και των 2 ευρώ.

Κυκλοφορούν επίσης χαρτονομίσματα των 5 ευρώ, των 10 ευρώ, των 20 ευρώ, των 50 ευρώ, των 100 ευρώ, των 200 ευρώ και των 500 ευρώ.

Εφαρμογή 1η:

Στο σούπερ μάρκετ αγοράζουμε πράγματα αξίας 16,57€ και πληρώνουμε με ένα χαρτονόμισμα των 20€. Πως ακριβώς πρέπει να μας δώσει τα ρέστα η ταμίας;

Απάντηση:

Τα ρέστα είναι 20 – 16,57 = 3,43€ και λογικά θα μας δώσει ένα κέρμα των 2€, ένα κέρμα του 1€, δύο κέρματα των 20 λεπτών, ένα κέρμα των 2 λεπτών και ένα κέρμα του 1 λεπτού. Φυσικά θα μπορούσε να κάνει και άλλου συνδυασμούς.

Εφαρμογή 2η:

Βλέπουμε στο ράφι του καταστήματος δύο είδη υγρού απορρυπαντικού. Το Α έχει 2,63€ σε συσκευασία των 750 $m\ell$, ενώ το Β έχει 2,45€ σε συσκευασία των 600 $m\ell$. Ποιο από τα δύο συμφέρει να αγοράσουμε;

Απάντηση:

Επειδή το μέγεθος της κάθε συσκευασίας είναι διαφορετικό, πρέπει να υπολογίσουμε πόσο κοστίζει το λίτρο.

Το Α κοστίζει 2,63 : 0,75 = 3,5€ ανά λίτρο.

Το Β κοστίζει 2,63 : 0,6 = 4,08€ ανά λίτρο.

Άρα συμφέρει να αγοράσουμε το Α απορρυπαντικό.

Σε άλλες χώρες του κόσμου χρησιμοποιούν διαφορετικά νομίσματα όπως το δολάριο Η-ΠΑ, τη λίρα Αγγλίας κ.λ.π. Κάθε μέρα η Ευρωπαϊκή Τράπεζα εκδίδει ένα δελτίο που καθορίζει την ισοτιμία του ευρώ με τα κυριότερα νομίσματα του κόσμου. Το δελτίο αυτό δημοσιεύεται και στον Τύπο.

ΔΕΛΤΙΟ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΛΛΑΓΜΑΤΟΣ (Ισχύει για συναλλαγές μέχρι ποσού ισότιμου 30,000 EURO) ΝΟΜΙΣΜΑΤΑ ΕΚΤΟΣ ΖΩΝΗΣ ΕΥΡΩ				
09/12/2005	**Νόμισμα**	**Τιμή Βάσης**	**Τιμή Αγοράς**	**Τιμή Πώλησης**
Δολάριο ΗΠΑ	USD	1,1764	1,1999	1,1529
Κορώνα ΔΑΝΙΑΣ	DKK	7,4491	7,5981	7,3001
Λίρα ΑΓΓΛΙΑΣ	GBP	0,67495	0,68845	0,66145
Κορώνα ΣΟΥΗΔΙΑΣ	SEK	9,4217	9,6101	9,2333
Γιεν ΙΑΠΩΝΙΑΣ	JPY	141,82	144,66	138,98
Φράγκο ΕΛΒΕΤΙΑΣ	GHF	1,5387	1,5695	1,5079
Κορώνα ΝΟΡΒΗΓΙΑΣ	NOK	7,9250	8,0835	7,7665
Λίρα ΚΥΠΡΟΥ	CYP	0,57330	0,58477	0,56183
Δολάριο ΚΑΝΑΔΑ	CAD	1,3677	1,3951	1,3403
Δολάριο ΑΥΣΤΡΑΛΙΑΣ	AUD	1,5762	1,6077	1,5447

- Η **τιμή αγοράς** είναι η τιμή στην οποία η τράπεζα αγοράζει από τους πελάτες το ξένο συνάλλαγμα, ενώ η τιμή πώλησης είναι η τιμή στην οποία η τράπεζα πουλάει το συνάλλαγμα.
- Η **τιμή βάσ**ης είναι μία ενδιάμεση τιμή, η οποία συνήθως χρησιμοποιείται για διατραπεζικές συναλλαγές.

Ο παραπάνω πίνακας δείχνει ποια είναι η αντιστοιχία 1€ με το νόμισμα κάθε χώρας.

Εφαρμογή 3η:

Πρόκειται να κάνουμε ένα ταξίδι στην Αγγλία και χρειαζόμαστε 500 λίρες. Πόσο θα τις πληρώσουμε στην τράπεζα;

Απάντηση:

Σύμφωνα με το δελτίο συναλλάγματος, η τράπεζα πουλάει στην τιμή 0,6872 λίρες για ένα ευρώ.

Έτσι, θα πληρώσουμε 500 : 0,66145 = 755,92€.

Εφαρμογή 4η:

Έχουμε ένα χαρτονόμισμα των 100 δολαρίων ΗΠΑ και θέλουμε να το μετατρέψουμε σε ευρώ. Ένα ανταλλακτήριο συναλλάγματος Α αγοράζει δολάρια στην τιμή που αναφέρει το δελτίο. Ένα άλλο ανταλλακτήριο Β αγοράζει στην τιμή βάσης, αλλά με προμήθεια 3%. Ποιο από τα δύο μας συμφέρει;

Απάντηση:

Το ανταλλακτήριο Α θα μας δώσει 100 : 1,1999 = 83,34€. Το ανταλλακτήριο Β θα μας δώσει (100 : 1,1764) x 0,97 = 82,45€. Άρα συμφέρει το Α.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Χαρακτηρίστε ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ) τις παρακάτω προτάσεις (χρησιμοποιείστε την τιμή βάσης).

α) 1€ = 141,82 JPY	Σ	Λ
β) 1 CAD = 1,3677€	Σ	Λ
γ) 10€ = 5,733 CYP	Σ	Λ
δ) 10 AUD = 15,762€	Σ	Λ

2. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

α) Για να αγοράσουμε 200USD θα πληρώσουμε στην τράπεζα:
Α. 166,68€ Β. 170,01€ Γ. 173,47€ Δ. 239,98€ Ε. 230,58€

β) Όταν εξαργυρώσουμε στην τράπεζα 100 φράγκα Ελβετίας, θα πάρουμε:
Α. 63,71€ Β. 150,79€ Γ. 153,87€ Δ. 156,95€

3. Ταξινομείστε κατά σειρά μεγέθους τα παρακάτω ποσά. (Χρησιμοποιείστε τις τιμές βάσης):

100€, 120USD, 65GBP, 15.000JPY, 150CHF

4. Ένα κατάστημα πουλάει μία κονσέρβα μεμονωμένα στην τιμή των 2,46€. Έχει επίσης προσφορά στις 3 κονσέρβες, 1 επιπλέον δώρο στην τιμή 7,85€. Είναι σωστή η προσφορά;

5. Το λάδι Α πωλείται σε συσκευασίες των 750 $m\ell$ προς 4,27€. Το λάδι Β πωλείται σε συσκευασίες των 2 ℓ προς 11,45€. Ποιο από τα δύο μας συμφέρει να αγοράσουμε;

6. Θέλουμε να δώσουμε στην τράπεζα 350 δολάρια Αυστραλίας και να πάρουμε γιεν Ιαπωνίας. Πόσα γιεν θα μας δώσει η τράπεζα;

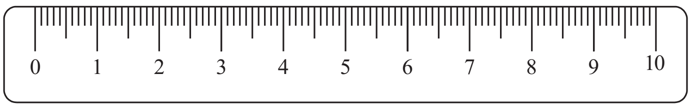
7. Η εταιρία ζυμαρικών Α μας δίνει έκπτωση 25 λεπτά για κάθε πακέτο, ενώ η εταιρία Β μας δίνει 15% για κάθε πακέτο. Ποια από τις δύο μας κάνει καλύτερη προσφορά;

8. Ένα ανταλλακτήριο συναλλάγματος Α αγοράζει δολάρια στην τιμή αγοράς που φαίνεται στον πίνακα. Ένα άλλο ανταλλακτήριο Β αγοράζει στην τιμή βάσης, αλλά κρατάει 5€ προμήθεια σε κάθε συναλλαγή. Ποιο από τα δύο θα πρέπει να προτιμήσουμε;

4.8. ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ –ΌΡΓΑΝΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Για να μετρήσουμε σωστά ένα μέγεθος, πρέπει να έχουμε το κατάλληλο όργανο μέτρησης. Δεν μπορούμε να μετρήσουμε το διάκενο της ακίδας ενός μπουζί αυτοκινήτου με ένα συνηθισμένο υποδεκάμετρο. Χρειαζόμαστε το ειδικό όργανο που οι μηχανικοί αυτοκινήτου ονομάζουν «φίλερ». Με τον ίδιο τρόπο, υπάρχουν κατάλληλα όργανα για τη μέτρηση όλων των μεγεθών. Πρέπει ακόμα να ξέρουμε να χρησιμοποιήσουμε σωστά το κάθε όργανο και να ξέρουμε να διαβάσουμε τις ενδείξεις που μας δίνει.

Για να μετρήσουμε συνηθισμένα μήκη από ένα mm μέχρι μερικά dm, χρησιμοποιούμε το υποδεκάμετρο. Υποδεκάμετρα υπάρχουν σε διάφορα μήκη και ορισμένα από αυτά έχουν υποδιαιρέσεις μέχρι μισό mm.



Υποδεκάμετρο

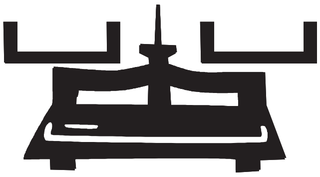
Για να μετρήσουμε πολύ μικρά μήκη ή για να μετρήσουμε μήκη με ακρίβεια μεγαλύτερη από ένα χιλιοστό (για παράδειγμα το σπείρωμα μίας βίδας), χρησιμοποιούμε ειδικά όργανα όπως το μικρόμετρο και το παχύμετρο.

Για να μετρήσουμε μήκη από ένα, μέχρι μερικές δεκάδες μέτρα, χρησιμοποιούμε το σπαστό δίμετρο ή τη μετροταινία. Οι μηχανικοί για ακόμα μεγαλύτερες αποστάσεις χρησιμοποιούν ειδικά «αποστασιόμετρα», με τη βοήθεια των οποίων μπορούν να μετρήσουν με ακρίβεια ακόμη και την απόσταση σημείων που δεν είναι προσιτά. Έχουν αρχίσει να κυκλοφορούν και απλά όργανα μέτρησης με ακτίνες λέιζερ, που μετρούν αυτόματα την απόσταση από οποιοδήποτε εμπόδιο βρίσκεται μπροστά τους. Σε τέτοιες περιπτώσεις, πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί στη σωστή τοποθέτηση του οργάνου.

Για να μετρήσουμε εμβαδά και όγκους, μετράμε τις διαστάσεις τους και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τους τύπους που θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Για να μετρήσουμε μάζες χρειαζόμαστε μία ζυγαριά. Παλιά, υπήρχαν οι παραδοσιακές ζυγαριές που έβρισκαν τη μάζα συγκρίνοντάς την με διάφορα πρότυπα βαρίδια που έμπαιναν στην άλλη άκρη.

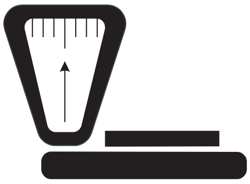
Σήμερα τέτοιου είδους ζυγαριές χρησιμοποιούνται μόνο για ζυγίσεις ακριβείας, όπως στην κοσμηματοποιία.



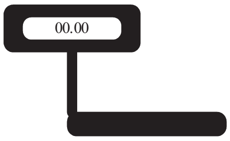
Παραδοσιακή ζυγαριά

Ζυγός ακριβείας

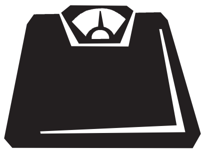
Σήμερα, σχεδόν παντού χρησιμοποιούμε αυτόματες ζυγαριές που υπολογίζουν τη μάζα (ή καλύτερα το βάρος) από την πίεση που ασκείται σε κάποιο μηχανισμό με ελατήριο. Οι περισσότερες είναι ηλεκτρονικές και μάλιστα αν δώσουμε στη μηχανή την τιμή του κιλού, μας υπολογίζει και πόσο κοστίζει το προϊόν.



Αναλογική ζυγαριά



Ηλεκτρονική ζυγαριά



Ζυγαριά μπάνιου

Όταν χρησιμοποιούμε μία ζυγαριά, πρέπει να προσέχουμε η αρχική της ένδειξη να είναι στο 0. Αν δεν είναι, συνήθως υπάρχει κάποιος τρόπος να ρυθμιστεί αυτό σωστά. Π.χ. με τη βοήθεια ενός περιστρεφόμενου κουμπιού. Όταν θέλουμε επίσης να ζυγίσουμε το περιεχόμενο ενός δοχείου, θα πρέπει να λαβαίνουμε υπόψη το απόβαρο, δηλαδή το βάρος του ίδιου του δοχείου.

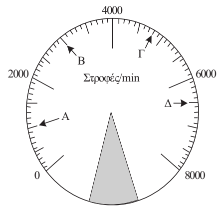
Για να μετρήσουμε το χρόνο, χρειαζόμαστε ένα ρολόι ή ένα χρονόμετρο. Υπάρχουν τα παραδοσιακά μηχανικά ρολόγια, που θέλουν κούρδισμα μία φορά την ημέρα, τα αυτόματα μηχανικά ρολόγια που κουρδίζονται μόνα τους με την κίνηση του χεριού και τα σύγχρονα ηλεκτρικά ρολόγια που δουλεύουν με μπαταρία. Τα χρονόμετρα ή χρονογράφοι, είναι ρολόγια που έχουν τη δυνατότητα να σταματούν και να ξεκινούν με το πάτημα ενός κουμπιού. Σήμερα, υπάρχουν ειδικά ρολόγια που έχουν υπενθύμιση, που δείχνουν την ώρα σε περισσότερα από ένα μέρη ή που εκτός από την ώρα, μπορούν να δείχνουν την πίεση, τη θερμοκρασία, το υψόμετρο, το βάθος στις καταδύσεις και διάφορες άλλες πληροφορίες χρήσιμες σε συγκεκριμένες κατηγορίες ανθρώπων.

ΜΗΧΑΝΙΚΟ ΡΟΛΟΙ ΨΗΦΙΑΚΟ ΡΟΛΟΙ

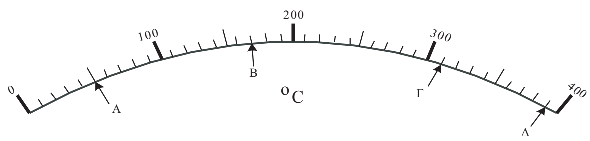
ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Διαβάστε τις ενδείξεις στα παρακάτω όργανα:

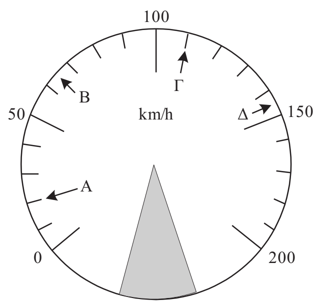
α)



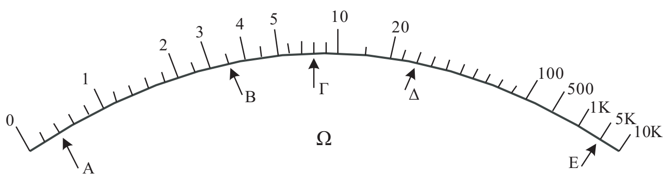
β)



γ)



2. Η παρακάτω κλίμακα είναι μία λογαριθμική κλίμακα, όπως αυτή που έχουν τα Ωμόμετρα που μετρούν την ηλεκτρική αντίσταση. Διαβάστε τις ενδείξεις.



3. Μετρήστε με ακρίβεια τις διαστάσεις του βιβλίου σας.

4. Μετρήστε τις διαστάσεις της αίθουσας που κάνετε μάθημα.

5. Αν έχετε κατάλληλο όργανο μετρήστε το πάχος μίας βίδας και το βήμα της, δηλαδή την απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικά σπειρώματα.

6. Μετρήστε τις διαστάσεις του κτιρίου που κάνετε μάθημα και τις διαστάσεις του οικοπέδου στο οποίο βρίσκεται. Στη συνέχεια σχεδιάστε τα στο χαρτί με κατάλληλη κλίμακα.

7. Σκεφτείτε και εφαρμόστε ένα τρόπο για να μετρήσετε το πάχος ενός φύλλου στο βιβλίο σας.

8. Αν έχετε ζυγαριά, μετρήστε τη μάζα (το βάρος) διαφόρων αντικειμένων και συγκρίνετέ το με αυτό που τυπικά αναγράφουν.

9. Σκεφτείτε και εφαρμόστε ένα τρόπο ώστε με τη βοήθεια μίας ζυγαριάς να υπολογίσετε τον όγκο ενός δοχείου π.χ. ενός μπουκαλιού.

10. Αν έχετε μία ζυγαριά και ένα σταγονόμετρο βρείτε ένα τρόπο για να υπολογίσετε τη μάζα (το βάρος) μίας σταγόνας νερού.

11. Έχετε μία ζυγαριά και 10 σακουλάκια που υποτίθεται ότι περιέχουν λίρες, βάρους 8g η μία. Ένα όμως από τα 10 σακουλάκια έχει ψεύτικες λίρες με βάρος 7g η μία. Μπορείτε με μία μόνο ζύγιση να βρείτε ποιο είναι το σακουλάκι με τις ψεύτικες λίρες;

12. Μετρήστε τους χτύπους της καρδιάς σας και τον αριθμό των αναπνοών σας, μέσα σε ένα λεπτό. Δοκιμάστε ξανά μετά από μία έντονη προσπάθεια, για παράδειγμα αφού ανεβείτε πέντε φορές μία σκάλα. Τι παρατηρείτε;

13. Μετρήστε το χρόνο που χρειάζεται ένας φίλος σας για να τρέξει μία απόσταση 50 ή 100m. Στη συνέχεια, υπολογίστε την ταχύτητά του σε m/s και σε km/h. Συγκρίνετέ την με την ταχύτητα του ταχύτερου δρομέα των 100m στον κόσμο.

5. ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ ΕΜΒΑΔΟΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

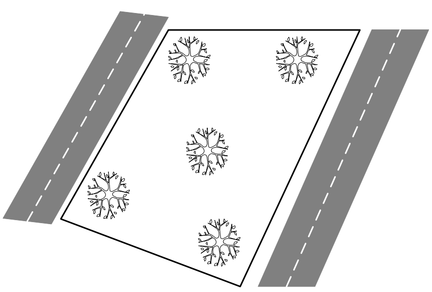
5.1. ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ

Σκοπός της ενότητας είναι ο εκπαιδευόμενος αφού έχει γνωρίσει από την προηγούμενη ενότητα τις διαφόρες μονάδες μέτρησης μήκος και επιφάνειας να τις χρησιμοποιήσει σε διάφορα γεωμετρικά σχήματα για τον υπολογισμό διαστάσεων τους.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα ο εκπαιδευόμενος να μπορεί να εφαρμόσει άμεσα σε διάφορα καθημερινά προβλήματα θέματα, βασικές έννοιες ώστε να μπορεί εύκολα να υπολογίζει, περιμέτρους, και επιφάνειες διαφόρων σχημάτων.

Βασικές έννοιες:
- Σχήματα
- Παραλληλόγραμμο/τετράγωνο/ρόμβος/τραπέζιο
- Κύκλος
- Περίμετρος σχημάτων
- Εμβαδόν σχημάτων
- Ρόμβος
- Κυκλικός δίσκος
- Μήκος τόξου
- Κυκλικός τομέας
- Πυθαγόρας
- Πυθαγόρειο θεώρημα

Ο Δήμος θέλει να τοποθετήσει στη διπλανή πλατεία κάγκελα. Πόσα μέτρα κάγκελα θα χρειαστούν;



Απάντηση

Αρκεί να προσθέσουμε τα μήκη των 4 πλευρών της πλατείας. Είναι:

$$18m+26m+24m+20m=88m$$

Δηλαδή θα χρειαστούν 88 μέτρα κάγκελα. Το μήκος 88m ονομάζεται περίμετρος της πλατείας.

Δηλαδή, **περίμετρος** μίας κλειστής γραμμής ονομάζεται το μήκος της γραμμής αυτής.

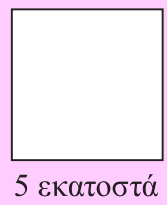
<u>Περίμετρος βασικών σχημάτων</u>

➢ Τετράγωνο

Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ένα τετράγωνο πλευράς 5 εκατοστών.
Πόση είναι η περίμετρός του;

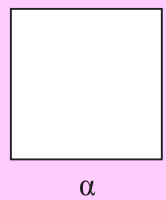
Απάντηση

Η περίμετρος του τετραγώνου ισούται με το άθροισμα των μηκών των τεσσάρων πλευρών του. Επειδή όμως και οι τέσσερις πλευρές έχουν μήκος 5 εκ., η περίμετρός του είναι ίση με $4 \cdot 5\text{εκ.} = 20\text{εκ.}$



Συμπέρασμα:

Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος α, τότε η περίμετρός του είναι ίση με $\boxed{4 \cdot \alpha}$.



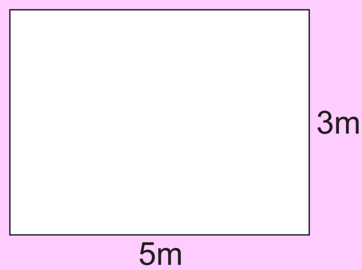
➢ Ορθογώνιο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις 5m και 3m αντίστοιχα. Πόση είναι η περίμετρός του;

Απάντηση

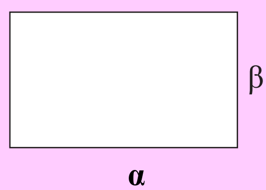
Γνωρίζουμε σε κάθε ορθογώνιο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες. Οπότε, το ορθογώνιο αυτό έχει 2 πλευρές μήκους 5m η καθεμία και 2 πλευρές με μήκος 3m η καθεμία. Η περίμετρός του ισούται με:

$$2 \cdot 5\text{m} + 2 \cdot 3\text{m} = 10\text{m} + 6\text{m} = 16\text{m}$$

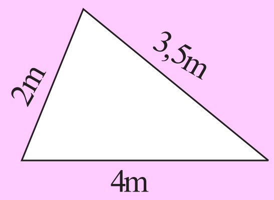


Συμπέρασμα:

Αν ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις α, β, η περίμετρός του είναι ίση με $\boxed{2\alpha + 2\beta}$.

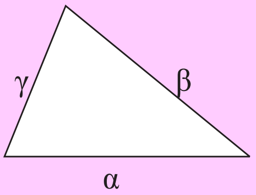


➢ Τρίγωνο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο με πλευρές 2m, 3,5m και 4m. Πόση είναι η περίμετρός του; **Απάντηση** Η περίμετρος του τριγώνου είναι ίση με: $$4\text{m}+2\text{m}+3,5\text{m}=9,5\text{m}$$	

Συμπέρασμα:

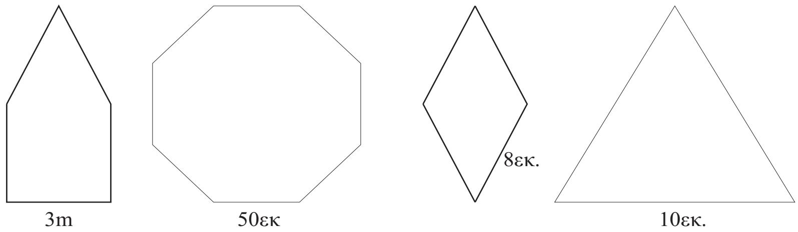
Αν ένα τρίγωνο έχει πλευρές με μήκη α, β, γ, τότε η περίμετρός του είναι ίση με $\boxed{\alpha+\beta+\gamma}$.



ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Αν ένα τετράγωνο έχει πλευρά 2 εκατοστά, τότε η περίμετρός του είναι:
Α. 10εκ. Β. 8εκ. Γ. 20εκ. Δ. 2εκ. Ε. 4εκ.

2. Αν στα παρακάτω σχήματα όλες τους οι πλευρές είναι ίσες, να βρείτε την περίμετρό τους:



3. Ένα γήπεδο ποδοσφαίρου έχει μήκος 110 μέτρα και πλάτος 70 μέτρα. Ένας ποδοσφαιριστής έτρεξε 5 φορές γύρω από το γήπεδο. Να βρείτε την συνολική απόσταση που διένυσε.

4. Ένας εργάτης τοποθετεί πλάκες πεζοδρομίου, τετράγωνου σχήματος, με πλευρά 40εκ., τη μία δίπλα στην άλλη. Αν συνολικά τοποθετήσει 10 πλάκες, τότε πόση είναι η περίμετρος του σχήματος που δημιουργήθηκε;

5. Ένας γεωργός θέλει να περιφράξει το κτήμα του, σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις 100m, 10m. Το συρμάτινο πλέγμα που θέλει να χρησιμοποιήσει, κοστίζει 1,50 ευρώ το μέτρο. Πόσα χρήματα χρειάζεται ο γεωργός για την περίφραξη;

5.2. ΕΜΒΑΔΟΝ

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι η περίμετρος είναι το μήκος της περιφέρειας ενός επίπεδου σχήματος. Τι επιφάνεια όμως καταλαμβάνει αυτό το σχήμα στο επίπεδο;

Το μέρος της επιφάνειας που καταλαμβάνει ένα σχήμα λέγεται **εμβαδόν** του σχήματος.

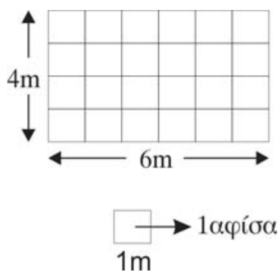
➢ Εμβαδόν ορθογωνίου

Εφαρμογή:

Ζητήθηκε από έναν εργάτη να καλύψει έναν ορθογώνιο τοίχο με μήκος 6m και ύψος 4m, με αφίσες σχήματος τετραγώνου και πλευράς 1m. Αν πρέπει να τοποθετήσει συνολικά 20 αφίσες τη μία δίπλα στην άλλη, θα καλύψει ο εργάτης όλο τον τοίχο;

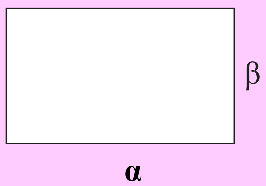
Απάντηση:

Παρατηρούμε ότι κατά μήκος του τοίχου μπορούμε να τοποθετήσουμε 6 αφίσες και στο ύψος 4 αφίσες. Οπότε, συνολικά μπορούμε να τοποθετήσουμε στον τοίχο $6 \cdot 4 = 24$ αφίσες. Η κάθε αφίσα όμως είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 1m, δηλαδή είναι 1 τετραγωνικό μέτρο (m^2), οπότε το εμβαδόν του συγκεκριμένου ορθογώνιου τοίχου είναι: $E_{ορθ.} = 6 \cdot 4 = 24 m^2$. Άρα, ο εργάτης δεν θα καλύψει όλο τον τοίχο.



Συμπέρασμα:

Αν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι α,β, με βάση την ίδια μονάδα μήκους, τότε το εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο $\boxed{E_{ορθ} = \alpha \cdot \beta}$.



➢ Εμβαδόν τετραγώνου

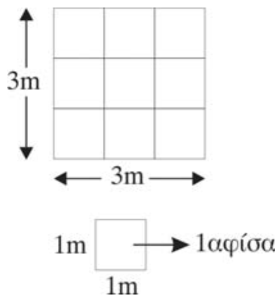
Εφαρμογή:

Ζητήθηκε από έναν εργάτη να κολλήσει σε έναν τετράγωνο τοίχο πλευράς 3m, 10 αφίσες σχήματος τετραγώνου και πλευράς 1m. Αν πρέπει να τις τοποθετήσει στον τοίχο τη μία δίπλα στην άλλη, μπορεί ο εργάτης να κολλήσει και τις 10 αφίσες;

Απάντηση:

Κατά μήκος του τοίχου μπορούμε να τοποθετήσουμε 3 αφίσες και στο ύψος πάλι 3 αφίσες. Οπότε, συνολικά μπορούμε να κολλήσουμε στον τοίχο $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ αφίσες, τη μία δίπλα στην άλλη. Επειδή η κάθε αφίσα έχει εμβαδό ίσο με 1 τετραγωνικό μέτρο ($1m^2$), το εμβαδόν του τοίχου είναι $E_{\tau\varepsilon\tau\rho} = 3^2 = 9m^2$.

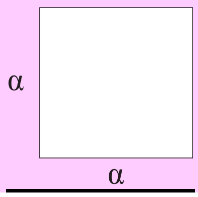
Επομένως, ο εργάτης δεν μπορεί να κολλήσει 10 αφίσες, τη μία δίπλα στην άλλη σε αυτόν τον τοίχο.



Συμπέρασμα

Ένα τετράγωνο με πλευρά ίση με α, έχει εμβαδό που δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{E_{\tau\varepsilon\tau\rho} = \alpha^2}$$

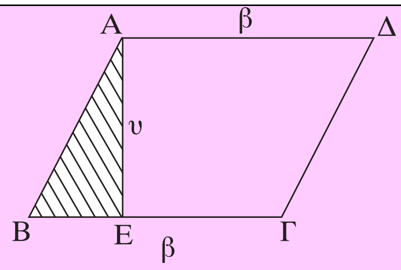


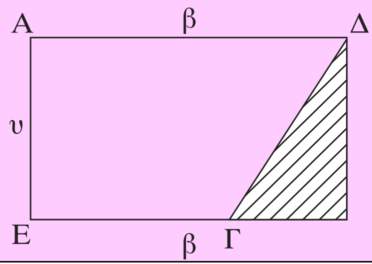
➢ Εμβαδόν παραλληλογράμμου

Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο με βάση α μονάδες μήκους και ύψος υ.

Αν κόψουμε από το παραλληλόγραμμο το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ και το τοποθετήσουμε με τον τρόπο που δείχνει το σχήμα (να συμπίπτουν οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ), τότε το παραλληλόγραμμο μετατρέπεται σε ορθογώνιο με διαστάσεις β, υ.

Άρα, το εμβαδόν του ισούται με το εμβαδόν ορθογωνίου, διαστάσεων β, υ.





Συμπέρασμα

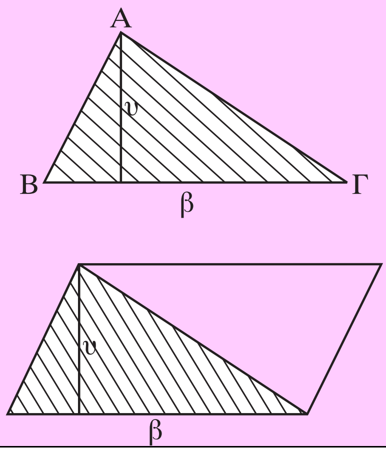
Σε κάθε παραλληλόγραμμο, το εμβαδόν του ισούται με το γινόμενο της βάσης επί το ύψος του.

$$\boxed{E_{\pi\alpha\rho/\mu o \upsilon} = \beta \cdot \upsilon}$$

➢ Εμβαδόν τριγώνου

Θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, με βάση β και ύψος υ. Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του, θα χρησιμοποιήσουμε τις προηγούμενες γνώσεις μας. Δηλαδή:

Σχεδιάζουμε ένα παραλληλόγραμμο με βάση β και ύψος υ. Το εμβαδόν του είναι ίσο με $\beta \cdot \upsilon$. Αν φέρουμε μία διαγώνιό του, παρατηρούμε ότι σχηματίζονται δύο τρίγωνα που έχουν βάση β και ύψος υ, όπως και το ΑΒΓ.



Επειδή καθένα από αυτά τα τρίγωνα έχει εμβαδόν ίσο με $\frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$ (μισό παραλληλόγραμμο), για το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει:

$$E_{AB\Gamma} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$$

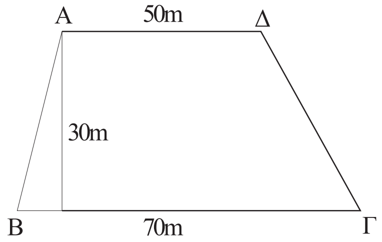
Συμπέρασμα:

Σε κάθε τρίγωνο, το εμβαδόν του ισούται με το ήμισυ του γινομένου μίας πλευράς του, επί το αντίστοιχο προς την πλευρά αυτή ύψος.

$$\boxed{E_{\tau\rho\iota\gamma.} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}}$$

Εφαρμογή 1η:

Ένας αγρότης θέλει να αγοράσει το κτήμα του διπλανού σχήματος. Αν ο ιδιοκτήτης του το πουλάει 50 ευρώ το τετραγωνικό μέτρο, τότε πόσα χρήματα χρειάζεται ο αγρότης για να κάνει αυτή την αγορά;

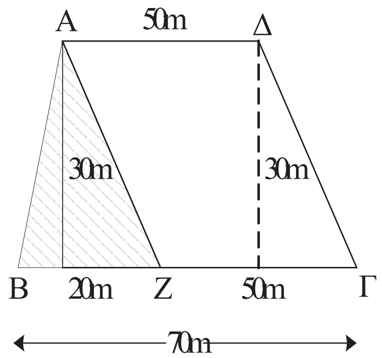


Απάντηση:

Από την κορυφή Α του τραπεζίου, φέρνουμε τμήμα ΑΖ παράλληλο και ίσο με το ΔΓ. Έτσι, το τραπέζιο χωρίζεται σε δύο σχήματα. Στο τρίγωνο ΑΒΖ και στο παραλληλόγραμμο ΑΖΓΔ.

Το τρίγωνο ΑΒΖ έχει βάση 20m και ύψος 30m, οπότε το εμβαδόν του είναι ίσο με :

$$E_{ABZ} = \frac{20 \cdot 30}{2} = 300\text{m}^2$$



Το παραλληλόγραμμο ΑΖΓΔ έχει βάση 50m και ύψος 30m, οπότε το εμβαδόν του είναι: $E_{AZ\Gamma\Delta} = 50 \cdot 30 = 1500\text{m}^2$

Οπότε, το αρχικό κτήμα σχήματος τραπεζίου έχει εμβαδόν ίσο με:

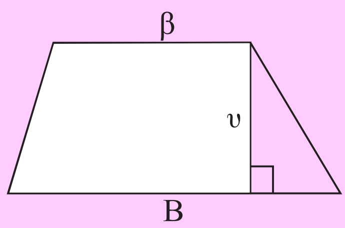
$$E_{AB\Gamma\Delta} = 1500 + 300 = 1800\text{m}^2$$

Επομένως, ο αγρότης χρειάζεται $1800 \cdot 50 = 90.000$ ευρώ για να αγοράσει αυτό το κτήμα.

Συμπέρασμα:

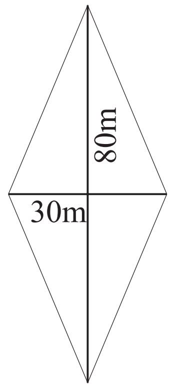
Το εμβαδόν ενός τραπεζίου με βάση μικρή β, βάση μεγάλη Β και ύψος υ, είναι ίσο με:

$$\boxed{E = \frac{(B + \beta) \cdot \upsilon}{2}}$$



Εφαρμογή 2η:

Ένας αγρότης θέλει να σπείρει με καλαμπόκι έναν αγρό, σχήματος ρόμβου, με διαγώνιες 80m και 30m αντίστοιχα. Αν η απόδοση της ποικιλίας καλαμποκιού που του έχουν προτεί-νει είναι 3 κιλά το τετραγωνικό μέτρο, τότε πόση αναμένεται να είναι η παραγωγή του;



Απάντηση

Έστω Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου ΑΒΓΔ. Παρατηρούμε ότι ο ρόμβος χωρί-ζεται με τη διαγώνιο ΒΔ, στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ.

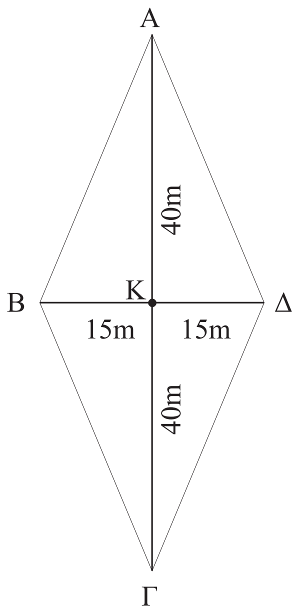
Το τρίγωνο ΑΒΔ έχει βάση τη ΒΔ και ύψος το ΑΚ, οπότε: $E_{ΑΒΔ} = \frac{ΒΔ \cdot ΑΚ}{2} = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600m^2$.

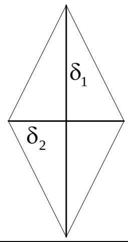
Το τρίγωνο ΒΓΔ έχει βάση τη ΒΔ και ύψος το ΓΚ, οπότε: $E_{ΒΓΔ} = \frac{ΒΔ \cdot ΓΚ}{2} = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600m^2$.

Οπότε, για το εμβαδόν του ρόμβου, ισχύει:

$$E_{ρόμβου} = 600m^2 + 600m^2 = 1200m^2$$

Επομένως, η παραγωγή καλαμποκιού που α-ναμένεται από αυτόν τον αγρό, είναι: $3 \cdot 1200 = 3600$ κιλά καλαμπόκι.





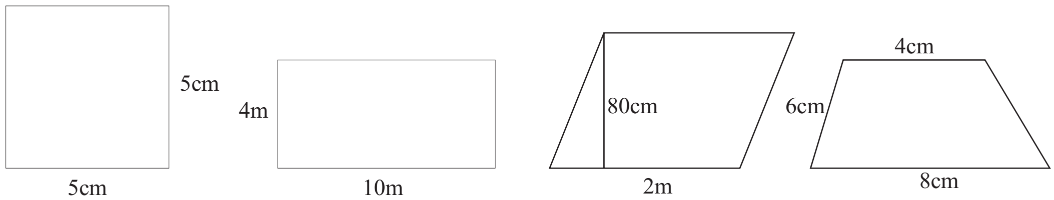
Συμπέρασμα:

Αν ένας ρόμβος έχει διαγώνιες $δ_1$, $δ_2$, το εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{E = \frac{δ_1 \cdot δ_2}{2}}$$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων:



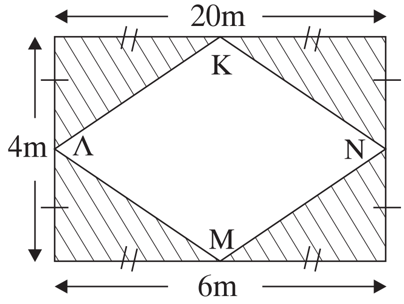
E= ---------------- E= ---------------- E= ---------------- E= ----------------

2. Στην ορθογώνια πλατεία του διπλανού σχήματος, τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν, είναι μέσα των τεσσάρων πλευρών της.

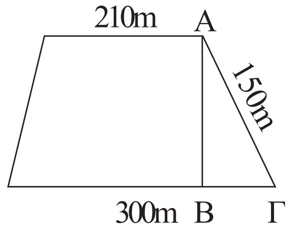
Αν τα τέσσερα τρίγωνα στις γωνίες της πλατείας φυτευτούν με γκαζόν και το τετράπλευρο ΚΛΜΝ πλακοστρωθεί, να βρείτε:

(α) Πόση επιφάνεια καταλαμβάνει το πλακοστρωμένο μέρος της πλατείας.

(β) Ποιο ποσοστό της επιφάνειας της πλατείας έχει γκαζόν;

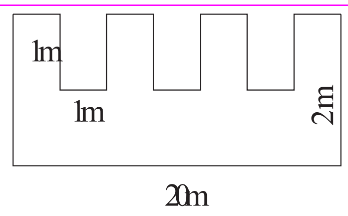


3. Το αγρόκτημα του διπλανού σχήματος έχει περίμετρο 780m. Ο Δήμος αποφάσισε να απαλλοτριώσει το τριγωνικό κομμάτι ΑΒΓ για την κατασκευή πλατείας. Αν η αξία του αγροκτήματος είναι 100€ το τετραγωνικό μέτρο, τότε πόσο θα κοστίσει στο Δήμο η απαλλοτρίωση;

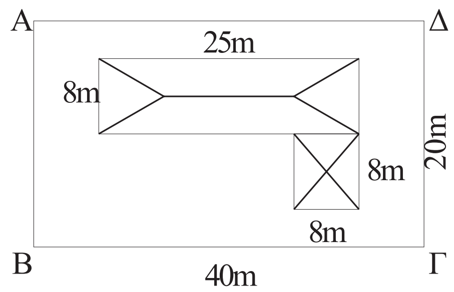


4. Από ένα σύρμα μήκους 10m κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Αν το τρίγωνο έχει πλευρά 2m, να βρείτε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου.

5. Ένας εργάτης συμφώνησε να χτίσει τον μαντρότοιχο του διπλανού σχήματος. Αν θα πληρωθεί 8€ το τετραγωνικό μέτρο, τότε πόσα χρήματα θα πάρει ο εργάτης για την εργασία του;



6. Στο οικόπεδο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος, θα χτιστεί ένα σπίτι σχήματος ορθογωνίου και μία αποθήκη σχήματος τετραγώνου. Να βρείτε πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι η αυλή αυτού του σπιτιού.

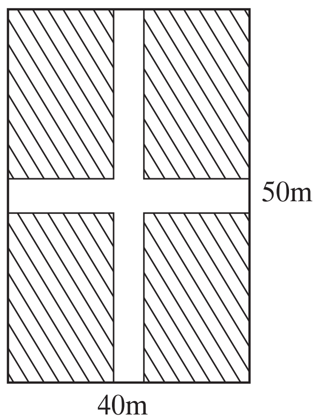


7. Τέσσερα αδέρφια κληρονόμησαν από κοινού μία ορθογώνια περιοχή με μήκος 40m και πλάτος 50m. Θέλουν να τη χωρίσουν σε τέσσερα οικόπεδα, κατασκευάζοντας δύο δρόμους πλάτους 6m που θα διέρχονται από τα μέσα των πλευρών της ορθογώνιας περιοχής, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

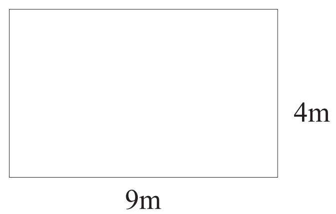
Αν η κατασκευή του δρόμου τους κοστίσει 100€ το τετραγωνικό μέτρο, να βρείτε:

(α) Πόσο θα τους κοστίσει η κατασκευή του δρόμου.

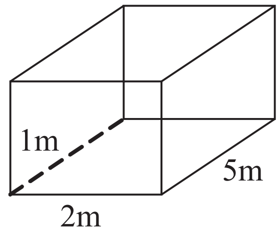
(β) Πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι το οικόπεδο του καθενός.



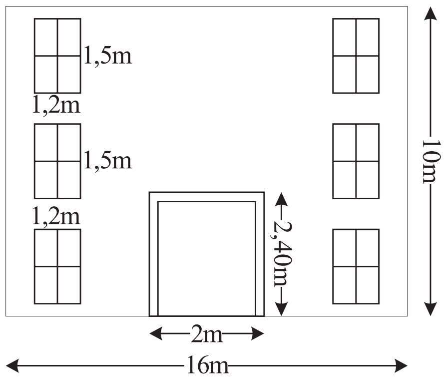
8. Να βρεθεί το εμβαδόν τετραγώνου που έχει το ίδιο εμβαδό με το ορθογώνιο του διπλανού σχήματος.



9. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας της διπλανής δεξαμενής.



10. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η πρόσοψη μίας πολυκατοικίας που αποτελείται από 3 οροφοδιαμερίσματα. Οι ένοικοι ζήτησαν από έναν ελαιοχρωματιστή να βάψει την πρόσοψη της πολυκατοικίας. Αν ο ελαιοχρωματιστής πληρώνεται 3€ για κάθε τετραγωνικό μέτρο που βάφει, να βρείτε πόσα χρήματα θα κοστίσει σε κάθε διαμέρισμα αυτή η εργασία.

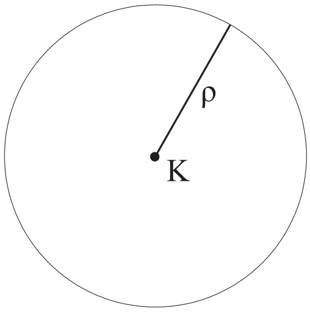


5.3. ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

Κύκλος είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από σταθερό σημείο. Το σταθερό σημείο ονομάζεται κέντρο του κύκλου και η σταθερή απόσταση, ακτίνα του.

- Αν ο κύκλος έχει κέντρο Κ και ακτίνα ρ, τότε τον συμβολίζουμε (Κ,ρ).

Ο κύκλος μαζί με την επιφάνεια που περικλείει, ονομάζεται κυκλικός δίσκος.

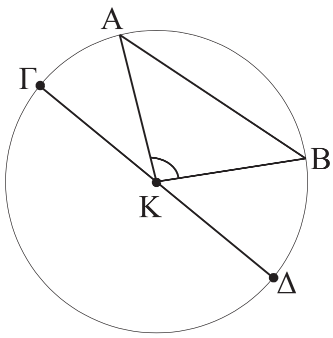


Στοιχεία του κύκλου

Το μέρος του κύκλου που περιέχεται μεταξύ δύο σημείων του Α, Β, λέγεται τόξο $\overset{\frown}{AB}$.

Το τμήμα ΑΒ ονομάζεται χορδή του κύκλου.

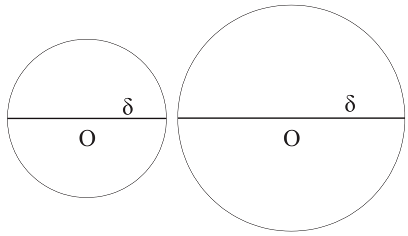
Η γωνία που σχηματίζεται από τις ακτίνες ΚΑ και ΚΒ ονομάζεται επίκεντρη γωνία του κύκλου και το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ που περιέχεται, ονομάζεται αντίστοιχο τόξο της. Μία χορδή ΓΔ του κύκλου που διέρχεται από το κέντρο του, ονομάζεται διάμετρος (δ) και τα σημεία Γ, Δ, λέγονται αντιδιαμετρικά.



Μήκος κύκλου

Παρατηρώντας κύκλους διαφορετικών διαστάσεων, θα διαπιστώσουμε ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο κύκλος, δηλαδή η περίμετρός του ή το μήκος του, τόσο μεγαλύτερη είναι η διάμετρός του.

– Αυτή η παρατήρηση μας οδήγησε στην υπόθεση ότι **το μήκος Μ και η διάμετρος δ του κύκλου είναι ποσά ανάλογα**.



Δηλαδή, το πηλίκο $\frac{M}{\delta}$ είναι σταθερό και ίδιο για όλους του κύκλους.

Ο σταθερός αυτός λόγος είναι ένας αριθμός που συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα **π**.

Ποιος είναι όμως αυτός ο αριθμός;

Επειδή ο υπολογισμός του μήκους και του εμβαδού του κύκλου εξυπηρετούσε από την αρχαιότητα πρακτικές ανάγκες, οι προσπάθειες υπολογισμού του π ξεκίνησαν γύρω στα 1800π.Χ., με βάση τον αρχαίο Αιγυπτιακό πάπυρο του Rhid. Εκεί αναφέρεται ότι $\pi \simeq \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16049$ ($\simeq$ περίπου ίσο). Με την πάροδο των χρόνων, στη μάχη για τον υπολογισμό του π, μπήκαν μεγάλοι μαθηματικοί, όπως ο Αρχιμήδης, ο Πτολεμαίος ή και ακόμη πιο σύγχρονοι όπως ο Lambert και προσέγγισαν με μεγαλύτερη ακρίβεια τον αριθμό αυτό. Σήμερα, είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε εκατομμύρια ψηφία του π.

Τα 20 πρώτα ψηφία του π είναι:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846$$

Στην πράξη θεωρούμε ότι $\pi \simeq 3{,}14$.

Επομένως: $\frac{M}{\delta} = \pi$ ή $M = \pi \cdot \delta$. Επειδή δ=2ρ, ο προηγούμενος τύπος γίνεται: Μ=2πρ.

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

Όπως είδαμε από τον υπολογισμό του αριθμού π, εξαρτάται και ο υπολογισμός της επιφάνειας που καλύπτει ένας κύκλος, δηλαδή το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

Έτσι, αποδείχθηκε ότι ο λόγος του εμβαδού Ε προς το τετράγωνο της ακτίνας ρ^2 του κυκλικού δίσκου είναι σταθερός και ίσος με π. Δηλαδή:

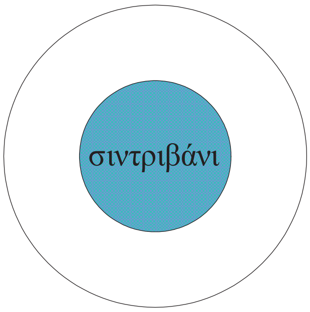
$$\frac{E}{\rho^2} = \pi \quad \text{ή} \quad \boxed{E = \pi \cdot \rho^2}$$

Εφαρμογή 1η:

Στο κέντρο κυκλικής πλατείας διαμέτρου 60m, τοποθετήθηκε κυκλικό σιντριβάνι διαμέτρου 4m. Στον υπόλοιπο χώρο θα τοποθετηθούν πλάκες και περιμετρικά του σιντριβανιού και της πλατείας, θα τοποθετηθούν κάγκελα.

(α) Πόσα μέτρα κάγκελα χρειάζονται;

(β) Πόσο θα κοστίσει η πλακόστρωση της πλατείας, αν η τοποθέτηση 1m² από πλάκες κοστίζει 5€;



Απάντηση:

(α) Επειδή τα κάγκελα θα τοποθετηθούν περιμετρικά της πλατείας και του σιντριβανιού, αρκεί να προσθέσουμε το μήκος των δύο κύκλων.

Για το μήκος $M_{πλ}$ της πλατείας, ισχύει:

$$M_{πλ} = \pi \cdot \delta = 3{,}14 \cdot 60 \text{ ή } M_{πλ} = 188{,}4\text{m}.$$

Για το μήκος $M_σ$ του σιντριβανιού, ισχύει:

$$M_σ = \pi \cdot \delta = 3{,}14 \cdot 4 = 12{,}56\text{m}.$$

Επομένως, θα χρειαστούν: 188,4m+12,56m=200,96m.

(β) Αρκεί να βρούμε το εμβαδόν της επιφάνειας που θα πλακοστρωθεί. Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου της πλατείας είναι:

$$E_{πλ} = \pi \cdot (30)^2 = 3{,}14 \cdot 900 = 2.826\text{m}^2$$

Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου του σιντριβανιού είναι:

$$E_σ = \pi \cdot \rho^2 = 3{,}14 \cdot 2^2 = 12{,}56\text{m}^2$$

Η επιφάνεια που θα πλακοστρωθεί έχει εμβαδό:

$$E = E_{πλ} - E_σ = 2826\text{m}^2 - 12{,}56\text{m}^2 = 2.813{,}44\text{m}^2$$

Το κόστος πλακόστρωσης είναι:

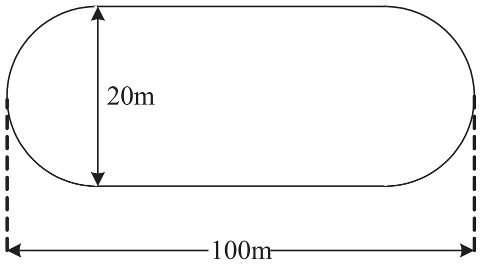
$$2.813{,}44 \cdot 5 = 14.067{,}20€$$

Εφαρμογή 2η:

Ένας γεωργός θέλει να περιφράξει το αγρόκτημα του διπλανού σχήματος και στη συνέχεια να το σπείρει βαμβάκι. Αν το κόστος για την περίφραξη είναι 5€ το μέτρο και αναμένει παραγωγή 4 κιλών βαμβάκι ανά τετραγωνικό μέτρο, να βρείτε:

(α) Ποιο είναι το κόστος περίφραξης.

(β) Πόση αναμένεται να είναι η συνολική παραγωγή βαμβακιού;

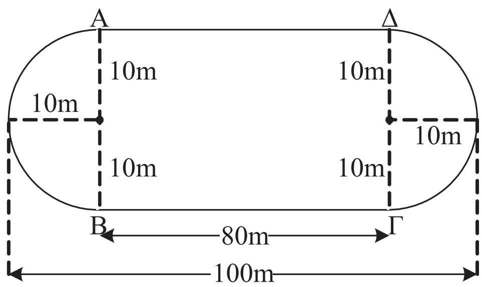


Απάντηση

(α) Το αγρόκτημα αποτελείται από ένα ορθογώνιο με μήκος 80m και πλάτος 20m και από δύο ημικύκλια ακτίνας 10m.

Τα δύο ημικύκλια μαζί δημιουργούν έναν κύκλο ακτίνας 10m που έχει μήκος $M = 3{,}14 \cdot 20 = 62{,}8\text{m}$ και εμβαδό $E_\kappa = \pi \cdot \rho^2 = 3{,}14 \cdot 10^2 = 314\text{m}^2$.

Επομένως, η περίμετρος του κτήματος είναι: $62{,}8\text{m} + 2 \cdot 80\text{m} = 222{,}8\text{m}$.



Το κόστος περίφραξης είναι:

$$222{,}8 \cdot 5 = 1114€$$

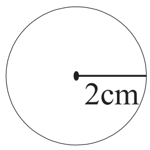
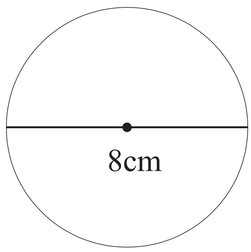
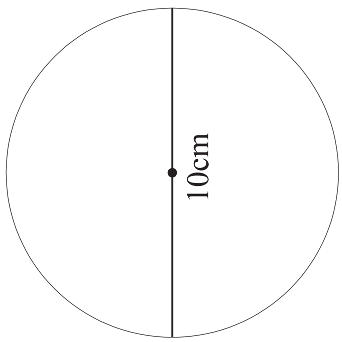
(β)Επειδή το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E_{\text{ορθ.}} = 80 \cdot 20 = 1.600\text{m}^2$ και το εμβαδόν των δύο ημικυκλίων είναι: $E_\kappa = 314\text{m}^2$, το κτήμα έχει εμβαδό: $1600+314=1914\text{m}^2$.

Η συνολική παραγωγή βαμβακιού είναι:

$$1.914 \cdot 4 = 7.656 \text{ κιλά}$$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

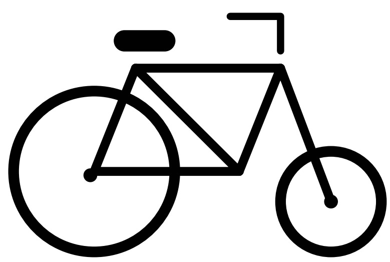
1. Να αντιστοιχήσετε τους κύκλους της στήλης Α με το μήκος τους στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
	31,4
	15,70
	12,56
	20,24
	25,12
	31,4

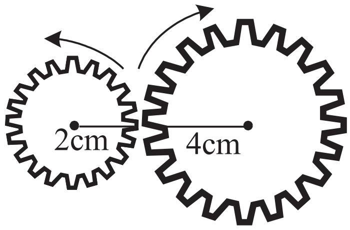
2. Το μήκος ενός κύκλου είναι ίσο με 18,84cm. Η ακτίνα του είναι ίση με:
Α. 2cm Β. 7cm Γ. 5cm Δ. 4cm Ε. 3cm

3. Αν το μήκος ενός κύκλου είναι ίσο με 25,12cm, τότε το εμβαδόν του είναι:
Α. 40,36cm^2 Β. 50,24cm^2 Γ. 62,28cm^2 Δ. 74,16cm^2
Ε. 25,12cm^2

4. Στο ποδήλατο του διπλανού σχήματος, ο μπροστινός τροχός έχει ακτίνα 20cm και ο πίσω 30cm. Αν σε μία διαδρομή ο μπροστινός τροχός κάνει 60 πλήρης περιστροφές, τότε ο πίσω τροχός πόσες περιστροφές θα κάνει;

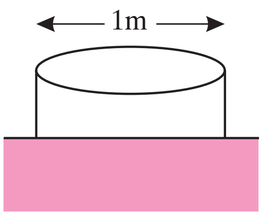


5. Στο διπλανό σχήμα το μικρό γρανάζι έχει ακτίνα 2cm και το μεγάλο 4cm. Αν στη διάρκεια μίας ώρας το μεγάλο γρανάζι κάνει 100 περιστροφές, να βρείτε πόσες περιστροφές θα κάνει το μικρό γρανάζι κατά τη διάρκεια μίας ημέρας.



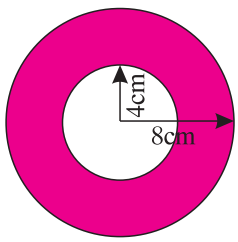
6. Ένας άνθρωπος τρέχει με ταχύτητα 18 χιλιόμετρα την ώρα. Να βρείτε πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να διασχίσει μία κυκλική πλατεία περιμέτρου 376,8 μέτρων αν περάσει από το κέντρο της.

7. Ένας γεωργός έχει στο κτήμα του ένα πηγάδι διαμέτρου 1m. Θέλει να αγοράσει μία λαμαρίνα για να το σκεπάζει. Αν η λαμαρίνα κοστίζει 14€ το τετραγωνικό μέτρο, πόσα χρήματα χρειάζεται για να την αγοράσει;

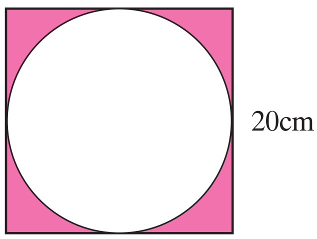


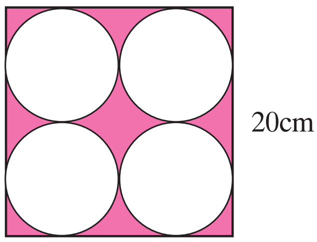
8. Οι ακτίνες δύο κύκλων διαφέρουν κατά 5cm. Πόσο διαφέρουν οι περίμετροί τους;

9. Με 1 κιλό χρώμα μπορούμε να βάψουμε επιφάνεια $15m^2$. Να βρείτε πόσα κιλά χρώμα περίπου θα χρειαστούμε για να βάψουμε τον κυκλικό δακτύλιο του διπλανού σχήματος.

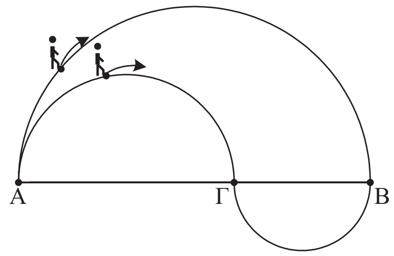


10. Από δύο τετράγωνα φύλλα χαρτί πλευράς 20cm, θα κόψουμε από το ένα έναν κυκλικό δίσκο και από το άλλο 4 κυκλικούς δίσκους, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Σε ποια από τις δύο περιπτώσεις θα μείνει περισσότερο χαρτί;

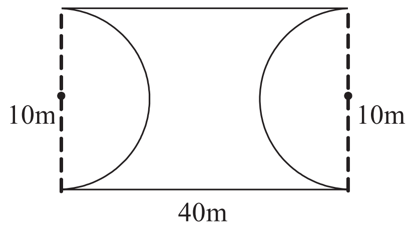




11. Δύο άνθρωποι για να πάνε από το σημείο Α στο σημείο Β, χρησιμοποίησαν τις διαδρομές που φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Αν οι καμπύλες ΑΒ, ΑΓ, ΓΒ, είναι ημικύκλια, να βρείτε ποιος από τους δύο ανθρώπους χρησιμοποίησε τη συντομότερη διαδρομή.



12. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του διπλανού σχήματος.



13. Ένα προϊόν πωλείται σε δύο διαφορετικές συσκευασίες στην ίδια τιμή. Αν η ία συσκευασία έχει σχήμα τετραγώνου, πλευράς 10cm και η άλλη έχει κυκλικό σχήμα, ακτίνας 6cm, ποια από τις δύο συσκευασίες είναι προτιμότερο να αγοράσουμε;

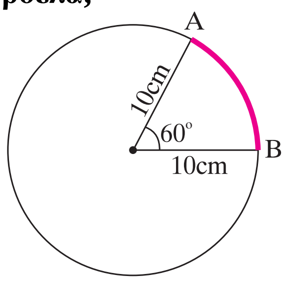
14. Ένας ταξιδιώτης κινήθηκε κατά μήκος του ισημερινού της Γης και έκανε για ένα πλήρη κύκλο 40.003,6Km. Να βρείτε την ακτίνα της Γης.

5.4. ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ –ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ

➢ Μήκος τόξου

Εφαρμογή:

Μία γυναίκα θέσει να τοποθετήσει στο τόξο ΑΒ του διπλανού κύκλου ένα κομμάτι κορδέλας. Τι μήκος πρέπει να έχει η κορδέλα;



Απάντηση:

Αρχικά παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η επίκεντρη γωνία του τόξου, τόσο μεγαλύτερο είναι το τόξο.

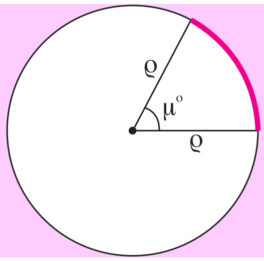
Δηλαδή, το μήκος ενός τόξου και οι μοίρες της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας είναι ποσά ανάλογα. Γνωρίζουμε ότι σε ολόκληρο τον κύκλο, αντιστοιχεί επίκεντρη γωνία 360^o και το μήκος του είναι $M = 2\pi\rho = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10cm = 62{,}8cm$.

Αν στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ αντιστοιχούσε επίκεντρη γωνία 1^o, το μήκος του θα ήταν $\frac{M}{360}$ ή $\frac{62{,}8cm}{360}$.

Τώρα που η επίκεντρη γωνία του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι 60^o, το μήκος του είναι $\frac{M}{360} \cdot 60 = \frac{62{,}8}{360} \cdot 60 \simeq 10{,}47cm$. Η κορδέλα πρέπει να έχει μήκος 10,47cm περίπου.

Συμπέρασμα:

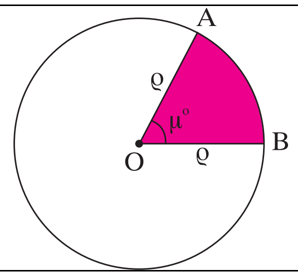
Αν ένα τόξο κύκλου ακτίνας ρ, αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία μ^o, το μήκος του δίνεται από τον τύπο $S = \frac{M}{360} \cdot \mu$ ή $S = \frac{\pi\rho\mu}{180}$



➢ Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Στον κυκλικό δίσκο του διπλανού σχήματος, θεωρούμε ένα τμήμα του που περικλείεται από δύο ακτίνες ΟΑ και ΟΒ. Το τμήμα αυτό ονομάζεται **κυκλικός τομέας** και συμβολίζεται $O\overset{\frown}{AB}$.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε την επιφάνεια που καλύπτει αυτός ο κυκλικός τομέας.



Έστω ότι οι ακτίνες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν επίκεντρη γωνία μ^o. Γνωρίζουμε ότι ο κυκλικός δίσκος έχει εμβαδό $E=\pi\rho^2$ και αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 360^o.

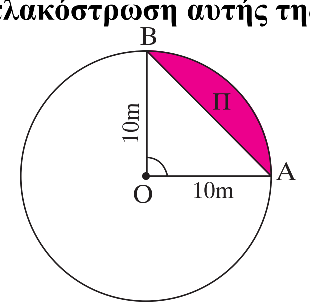
Αν η γωνία $A\hat{O}B$ ήταν 1^o, τότε ο κυκλικός τομέας θα είχε εμβαδό $\frac{\pi\rho^2}{360}$. Επειδή όμως ο κυκλικός τομέας $O\overset{\frown}{AB}$ αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία μ^o, το εμβαδόν του είναι: $\frac{\pi\rho^2}{360}\mu$.

Συμπέρασμα:

Ένας κυκλικός τομέας ακτίνας ρ και επίκεντρης γωνίας μ^o έχει εμβαδό: $\boxed{E_{\kappa.\tau.}=\frac{\pi\rho^2\mu}{360}}$

Εφαρμογή 1η:

Στο χρωματισμένο μέρος της κυκλικής πλατείας του διπλανού σχήματος, θα τοποθετηθούν πλακάκια. Αν η τοποθέτηση κάθε τετραγωνικού μέτρου κοστίζει 6€, να βρείτε πόσα χρήματα χρειάζονται για την πλακόστρωση αυτής της περιοχής.



Απάντηση:

Παρατηρούμε ότι το εμβαδό της ζητούμενης περιοχής Π, προκύπτει αν αφαιρέσουμε από το εμβαδό του κυκλικού τομέα $O\overset{\frown}{AB}$, το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ. Ο κυκλικός τομέας $O\overset{\frown}{AB}$ έχει ακτίνα 10m και αντίστοιχη επίκεντρη γωνία 90^o, οπότε το εμβαδόν του είναι:

$$E_{\kappa.\tau.}=\frac{\pi\rho^2\cdot\mu}{360}=\frac{3{,}14\cdot 10^2\cdot 90}{360}=\frac{3{,}14\cdot 100}{4}=78{,}5m^2$$

Το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ έχει βάση και ύψος ίσο με 10m, οπότε $E_{\tau\rho}=\frac{10\cdot 10}{2}=50m^2$.

Άρα, $E_{\Pi}=78{,}5m^2-50m^2=28{,}5m^2$.

Τα χρήματα που χρειάζονται για την πλακόστρωση της περιοχής Π, είναι: $28{,}5\cdot 6=171€$.

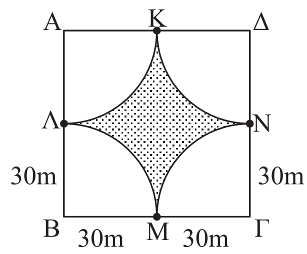
Εφαρμογή 2η:

Ένα τετράγωνο κτήμα έχει πλευρά 60m. Στις κορυφές των τεσσάρων γωνιών του κτήματος, έχουν τοποθετηθεί περιστρεφόμενοι μηχανισμοί ποτίσματος που ποτίζουν κυκλικές περιοχές ακτίνας 30m. Αν βάλουμε ταυτόχρονα σε λειτουργία τους 4 μηχανισμούς, να βρείτε το εμβαδόν του κτήματος που δεν ποτίζεται.

Απάντηση:

Το εμβαδόν του κτήματος ΑΒΓΔ είναι:

$E=60^2=3.600m^2$. Ο καθένας από τους 4 μηχανισμούς ποτίζει μία περιοχή σχήματος κυκλικού τομέα ακτίνας 30m και γωνίας 90^o. Το εμβαδόν του κάθε κυκλικού τομέα είναι:



$$E_{κ.τ.} = \frac{πρ^2μ}{360} = \frac{3{,}14 \cdot 30^2 \cdot 90}{360} = 706{,}5m^2$$

Επομένως, το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται είναι:

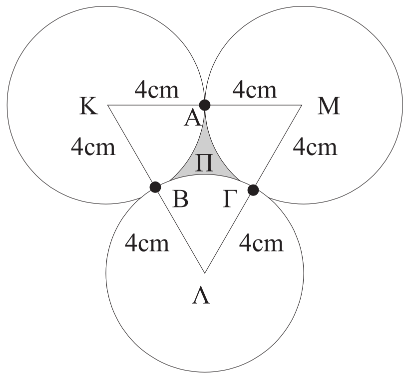
$$3600m^2 - 4 \cdot 706{,}5m^2 = 3600m^2 - 2826m^2 = 774m^2$$

Εφαρμογή 3η:

Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας 4cm, εφάπτονται εξωτερικά όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθεί η περίμετρος της καμπυλόγραμμης περιοχής Π που περιέχεται των τριών κύκλων.

Απάντηση:

Το τρίγωνο ΚΛΜ που σχηματίζουν τα κέντρα των τριών κύκλων είναι ισόπλευρο πλευράς 8cm. Οπότε κάθε μία από τις γωνίες Κ, Λ, Μ είναι 60^o. Η περίμετρος της περιοχής Π αποτελείται από τρία ίσα τόξα ακτίνας 4cm και αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας 60^o.



Το μήκος κάθε τόξου είναι :

$$S = \frac{πρμ}{180} = \frac{3{,}14 \cdot 4 \cdot 60}{180} \simeq 4{,}19cm .$$

Οπότε η περίμετρος είναι :

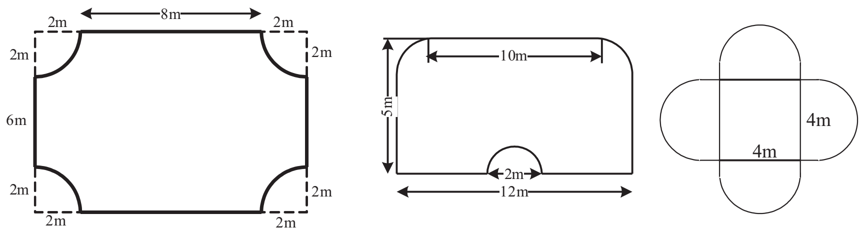
$3 \cdot 4{,}19cm = 12{,}57cm$.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

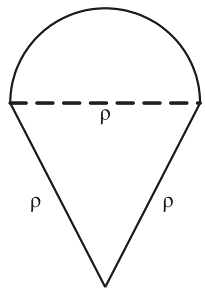
1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Ακτίνα ρ	2cm	6cm	
Μοίρες επίκεντρης γωνίας	45^o		30^o
Μήκος τόξου S		9,42cm	6,28m

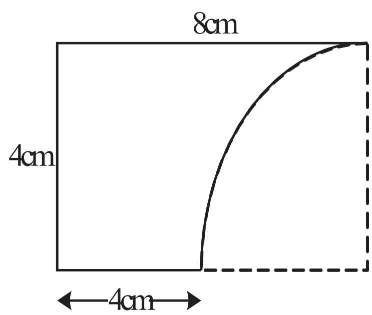
2. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν των παρακάτω σχημάτων:



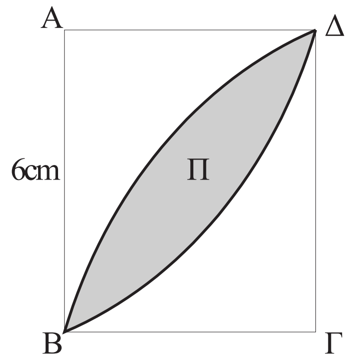
3. Αν η περίμετρος του διπλανού σχήματος είναι 20,56cm, να βρείτε το ρ.



4. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του διπλανού σχήματος.

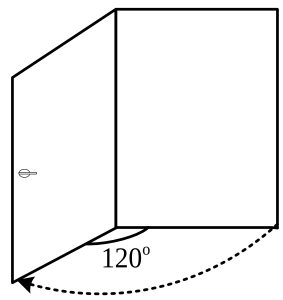


5. Με κέντρα τις κορυφές Α, Γ του διπλανού τετραγώνου, γράφουμε εντός αυτού, τόξα ακτίνας 6cm. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδό της περιοχής Π.



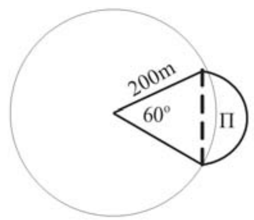
6. Ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού έχει μήκος 8mm. Πόσο διάστημα διανύει η άκρη του σε:
(α) 1h (β) 15min (γ) 20min (δ) 1h και 45min

7. Μία πόρτα πλάτους 90cm, έχει μέγιστο άνοιγμα 120^o.
(α) Ποιο είναι το εμβαδόν της επιφάνειας που δεν μπορεί να τοποθετηθεί έπιπλο;
(β) Αν η επιφάνεια του σπιτιού είναι $85m^2$, τότε σε ποιο ποσοστό της επιφάνειάς του δεν μπορεί να τοποθετηθεί έπιπλο, αν το συγκεκριμένο σπίτι έχει 5 τέτοιες πόρτες;

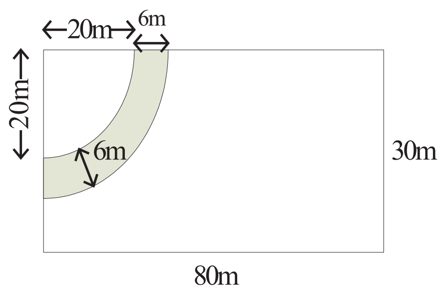


8. Ένας δορυφόρος βρίσκεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη γη, σε απόσταση 800Km από την επιφάνειά της. Να βρείτε πόσα χιλιόμετρα μεγαλύτερο θα ήταν το μήκος της τροχιάς του, αν περιφερόταν σε απόσταση 1000Km από την επιφάνεια της γης. (Ακτίνα γης=6.370Km).

9. Σε μία κυκλική λίμνη ακτίνας 200m, μετά από παρατεταμένη βροχόπτωση, πλημμύρισε ένα τμήμα Π, παρακείμενου κτήματος. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν της περιοχής Π.



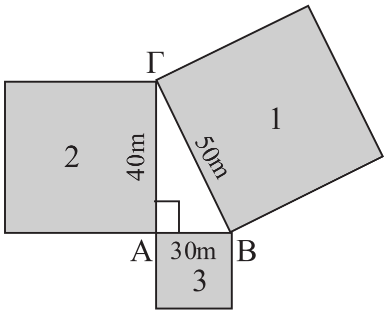
10. Από το διπλανό ορθογώνιο χωράφι, θα διέλθει καμπύλος δρόμος, πλάτους 6m, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ο ιδιοκτήτης του κτήματος πρέπει να πάρει ως αποζημίωση 50€ το τετραγωνικό μέτρο, τότε πόσα συνολικά χρήματα θα είναι η αποζημίωσή του;



5. 5. ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Εφαρμογή:

Τα κτήματα 1,2,3 του διπλανού σχήματος είναι τετράγωνα με πλευρές 50m, 40m, 30m, αντίστοιχα. Δύο αδέρφια αποφάσισαν να αγοράσουν αυτά τα κτήματα. Πως πρέπει να τα μοιράσουν ώστε να πάρουν και οι δύο ίσα μερίδια;



Απάντηση:

Παρατηρούμε ότι:

Το κτήμα 1 έχει εμβαδόν $E_1=50^2=2.500m^2$. Το κτήμα 2 έχει εμβαδόν $E_2=40^2=1.600m^2$ και το κτήμα 3 έχει εμβαδόν $E_3=30^2=900m^2$. Παρατηρούμε ότι τα κτήματα 2, 3 μαζί έχουν εμβαδόν :

$$E_2+E_3=1600m^2+900m^2=2500m^2=E_1.$$

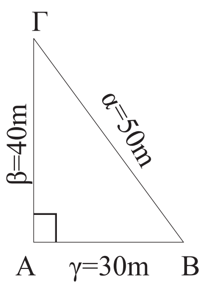
Δηλαδή το άθροισμα των εμβαδών των κτημάτων 2, 3, είναι ίσο με το εμβαδόν του κτήματος 1.

Επομένως, για να πάρουν και τα δύο αδέρφια ίσα μερίδια, πρέπει ο ένας να πάρει τα κτήματα 2, 3 και ο άλλος το κτήμα 1.

Ας περιοριστούμε τώρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ που έχει κάθετες πλευρές β=40m, γ=30m και υποτείνουσα α=50m.

Με βάση το προηγούμενο πρόβλημα ισχύει: $40^2+30^2=2500=50^2$

Δηλαδή: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$



Ο Έλληνας φιλόσοφος και Μαθηματικός Πυθαγόρας, γύρω στο 500π.Χ. απέδειξε ότι η προηγούμενη σχέση ισχύει σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο.

Συμπέρασμα 1ο:

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του.

Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό και ως Πυθαγόρειο θεώρημα.

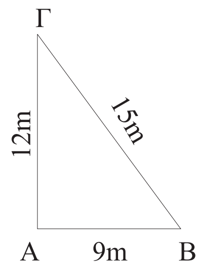
Αν τώρα επιλύσουμε τη σχέση $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ ως προς μία από τις κάθετες πλευρές β, γ, προκύπτει: $\beta^2=\alpha^2-\gamma^2$ ή $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2$.

Συμπέρασμα 2ο:

Το τετράγωνο μίας κάθετης πλευράς ορθογωνίου τριγώνου βρίσκεται αν από το τετράγωνο της υποτείνουσας αφαιρέσουμε το τετράγωνο της άλλης κάθετης πλευράς.

Εφαρμογή 1η:

Ένας άνθρωπος θέλει να αγοράσει το οικόπεδο του διπλανού σχήματος. Αν το ένα τετραγωνικό μέτρο κοστίζει 100€, πόσα χρήματα πρέπει να πληρώσει για την αγορά του οικοπέδου;



Απάντηση:

Για να βρούμε πόσα χρήματα πρέπει να πληρώσει, θα υπολογίσουμε το εμβαδόν του οικοπέδου. Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$, οπότε αρκεί να βρούμε το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ.

Παρατηρούμε ότι: $ΑΓ^2=12^2=144m^2$, $ΑΒ^2=9^2=81m^2$ και

$ΑΓ^2+ΑΒ^2=144m^2+81m^2=225m^2=(15m^2)=ΒΓ^2$

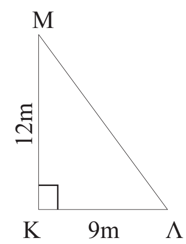
Δηλαδή, για το συγκεκριμένο τρίγωνο ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα. Οπότε, αν αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, η βάση του θα είναι ΑΒ=9m και το ύψος του το ΑΓ=12m.

Για το λόγο αυτό θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ στο οποίο ισχύει:

ΚΛ=ΑΒ=9m και ΚΜ=ΑΓ=12m.

Τότε: $ΜΛ^2=ΚΛ^2+ΚΜ^2=9^2+12^2=225m^2$,

άρα ΜΛ=15m ή ΜΛ=ΒΓ.



Δηλαδή, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι ίσα. Άρα, $\widehat{A} = \widehat{K} = 90^o$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Επομένως, για το εμβαδόν του ισχύει:

$$E = \frac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \frac{9m \cdot 12m}{2} = 54m^2$$

Τα χρήματα που πρέπει να πληρώσει ο άνθρωπος για την αγορά του οικοπέδου είναι:

$$54m^2 \cdot 100€ = 5.400€$$

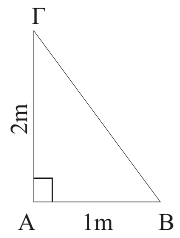
Συμπέρασμα 3ο:

Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία που είναι απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά.

Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως το **αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος**.

Εφαρμογή 2η:

Ποια είναι η περίμετρος του ορθογωνίου τριγώνου του διπλανού σχήματος;



Απάντηση:

Αρκεί να υπολογίσουμε την υποτείνουσά του, ΒΓ. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $ΒΓ^2=ΑΒ^2+ΑΓ^2=1^2+2^2=1+4=5m^2$. Δηλαδή το μήκος της ΒΓ είναι ένας αριθμό που αν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του ισούται με 5. Τον αριθμό αυτό τον ονομάζουμε ρίζα του 5 και τον συμβολίζουμε $\sqrt{5}$. Ποιος όμως είναι αυτός ο αριθμός; Υπάρχουν δύο τρόποι για να τον υπολογίσουμε.

Ο ένας τρόπος είναι με δοκιμές. Είναι $2^2=4$ και $3^2=9$, οπότε: $2<\sqrt{5}<3$.

Είναι: $2{,}1^2=4{,}41$, $2{,}2^2=4{,}84$, $2{,}3^2=5{,}29$, οπότε

$2{,}2<\sqrt{5}<2{,}3$.

Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο βρίσκουμε και άλλα δεκαδικά ψηφία του $\sqrt{5}$. Με τρία δεκαδικά ψηφία, είναι: $\sqrt{5}=2{,}236$. Ο δεύτερος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε υπολογιστή τσέπης (κομπιουτεράκι).

Πατάμε διαδοχικά τα πλήκτρα:

$\boxed{5}$ και $\boxed{\sqrt{\ }}$, οπότε στην οθόνη βλέπουμε τον αριθμό 2,23606798. Με τρία δεκαδικά ψηφία είναι: $\sqrt{5}=2{,}236$.

Επομένως, ΒΓ=$\sqrt{5}$=2,236m και η περίμετρος του τριγώνου είναι:

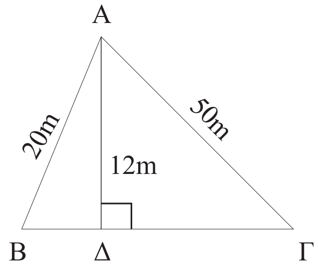
1m+2m+2,236m=5,236m.

Συμπέρασμα 4^o:

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x, ονομάζεται ο αριθμός που όταν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του δίνει αποτέλεσμα τον αριθμό x.

Εφαρμογή 3η:

Ένας γεωργός θέλει να περιφράξει το τριγωνικό κτήμα που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν το συρματόπλεγμα που θα χρησιμοποιήσει κοστίζει 2€ το μέτρο, πόσα χρήματα χρειάζεται για την περίφραξη;



Απάντηση:

Πρέπει να υπολογίσουμε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. Για το λόγο αυτό, θα εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα, ώστε να υπολογίσουμε τα τμήματα ΒΔ και ΔΓ. Είναι: $ΒΔ^2=ΑΒ^2-ΑΔ^2=(20m)^2-(12m)^2=400m^2-144m^2=256m^2$, άρα, $ΒΔ=\sqrt{256}m=16m$.

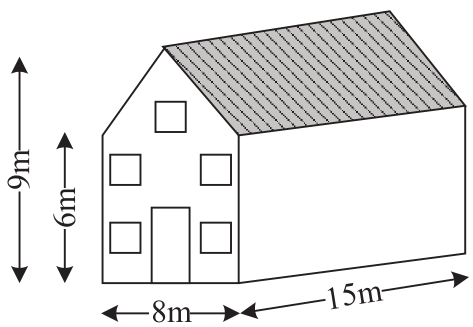
Ακόμη είναι: $ΔΓ^2=ΑΓ^2-ΑΔ^2=(50m)^2-(12m)^2=2500m^2-144m^2$ ή $ΔΓ^2=2356m^2$, άρα $ΔΓ=\sqrt{2356}m=48,54m$. Η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$20m+50m+16m+48,54m=134,54m$$

Το κόστος περίφραξης είναι: $134,54\cdot 2€=269,08€$.

Εφαρμογή 4η:

Να υπολογιστεί το εμβαδόν της σκεπής του σπιτιού που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Απάντηση:

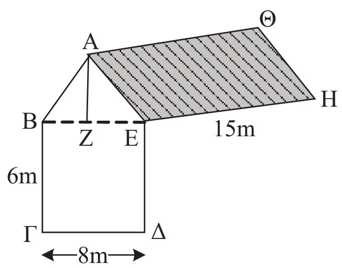
Είναι ΒΓ=6m και ΑΖ+ΒΓ=9m, οπότε ΑΖ=3m. Επειδή ΒΕ=ΓΔ=8m είναι ΒΖ=ΖΕ=4m. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΖΕ έχουμε:

$ΑΕ^2=ΑΖ^2+ΖΕ^2=3^2+4^2=25m^2$, οπότε

$$ΑΕ=\sqrt{25}\ m=5m.$$

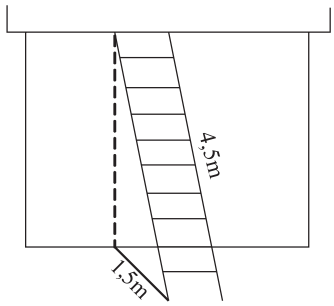
Επειδή η σκεπή έχει σχήμα ορθογωνίου, το εμβαδόν της είναι:

$$Ε=ΕΗ\cdot ΑΕ=15m\cdot 5m=75m^2.$$



Εφαρμογή 5η:

Μία σκάλα μήκους 4,5m έχει τοποθετηθεί σ' έναν κατακόρυφο τοίχο, έτσι ώστε το κάτω μέρος της σκάλας να απέχει από τη βάση του τοίχου 1,5m. Ποιο είναι το ύψος του τοίχου;

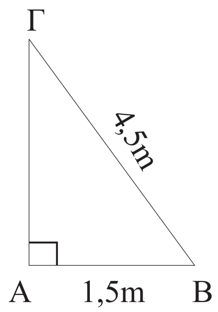


Απάντηση:

Η σκάλα ΒΓ σχηματίζει με τον τοίχο και το έδαφος, το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Το ύψος του τοίχου είναι η κάθετη ΑΓ του τριγώνου. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

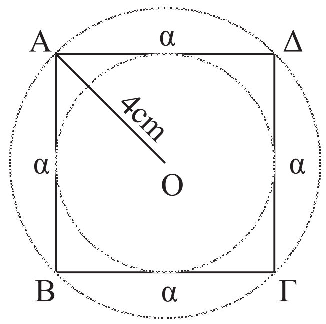
$$ΑΓ^2=ΒΓ^2-ΑΒ^2=(4{,}5m)^2-(1{,}5m)^2$$
$$=20{,}25m^2-2{,}25m^2=18m^2.$$

Οπότε, ΑΓ=$\sqrt{18}$m=4,24m. Το ύψος του τοίχου είναι 4,24m.



Εφαρμογή 6η:

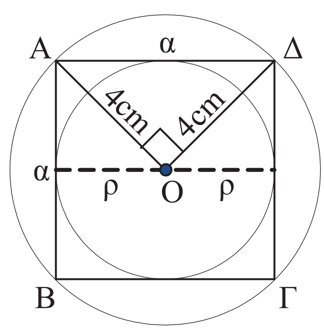
Στο εσωτερικό κύκλου, κέντρου Ο και ακτίνας 4cm, κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στις πλευρές του τετραγώνου.



Απάντηση:

Έστω ρ η ακτίνα του κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στις πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Τότε, 2ρ=ΑΔ=α. Δηλαδή, για να βρούμε την ακτίνα ρ του ζητούμενου κύκλου, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την πλευρά α του τετραγώνου.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΟΔ έχουμε:



$α^2=4^2+4^2=16+16=32cm^2$, άρα $α=\sqrt{32}cm=5{,}66cm$. Οπότε, 2ρ=5,66cm ή ρ=2,83cm.

Η περίμετρος του εσωτερικού κύκλου είναι: $M=2πρ=2\cdot 3{,}14\cdot 2{,}83=17{,}7724cm$

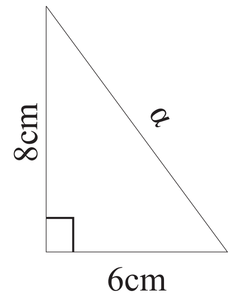
και το εμβαδόν του είναι: $E=πρ^2=3{,}14\cdot(2{,}83cm)^2=25{,}14cm^2$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

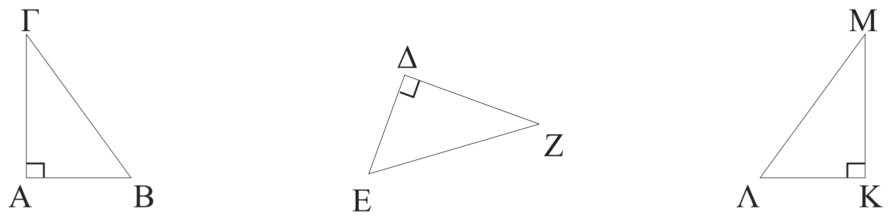
1. Η υποτείνουσα α του διπλανού ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με:

Α. 12cm Β. 10cm

Γ. 9cm Δ. 11cm Ε. 14cm

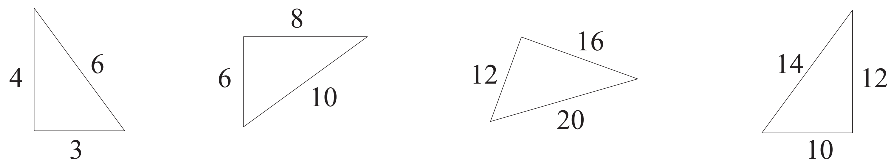


2. Να συμπληρώσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα σε κάθε ένα από τα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα:

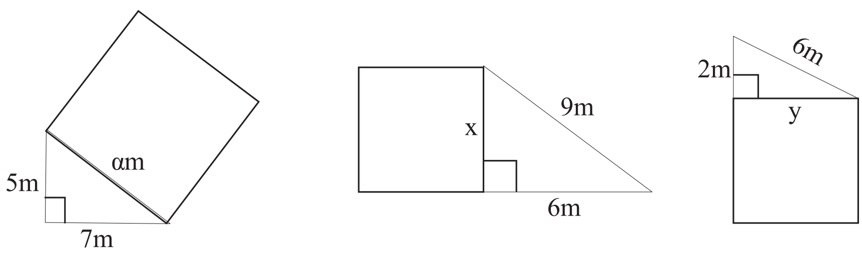


$ΒΓ^2$=…………… $ΔΕ^2$=…………… $ΜΚ^2$=……………

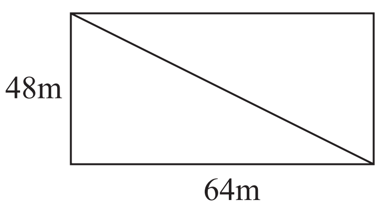
3. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια και ποια όχι:



4. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν των τετραγώνων των παρακάτω σχημάτων:

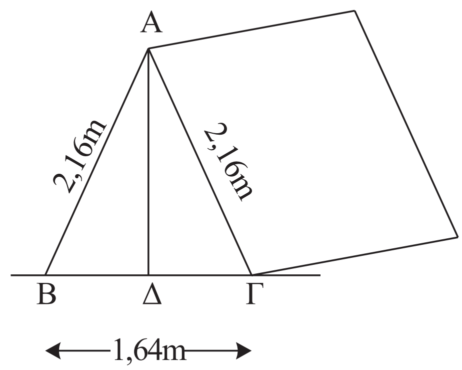


5. Ένας γεωργός θέλει να χωρίσει το ορθογώνιο κτήμα του, μήκους 64m και πλάτους 48m, σε δύο κομμάτια, τοποθετώντας στη μία διαγώνιο του κτήματος συρματόπλεγμα που θα το στηρίξει σε σιδερένια κολονάκια που τοποθετούνται ανά 2.

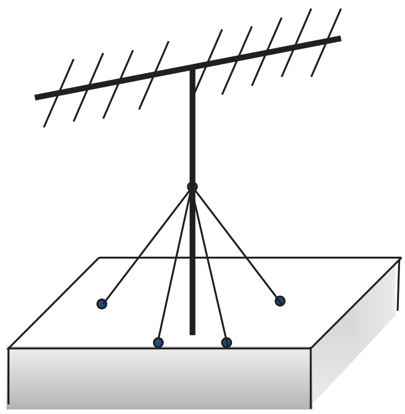


Αν το κάθε κολονάκι κοστίζει 3€ και το συρματόπλεγμα κοστίζει 2€ το μέτρο, πόσα χρήματα χρειάζεται ο γεωργός για αυτή την εργασία;

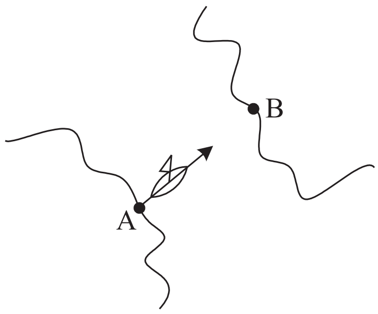
6. Να υπολογίσετε το ύψος του αντίσκηνου του διπλανού σχήματος.



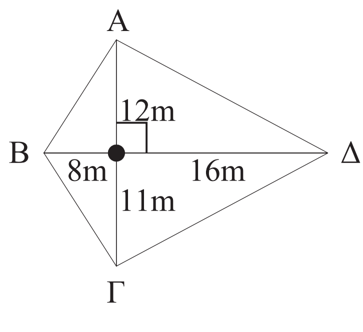
7. Μία κεραία τηλεόρασης, ύψους 3m θα τοποθετηθεί στην ταράτσα μίας πολυκατοικίας. Αν για την στερέωσή της χρησιμοποιήσουμε 4 συρματόσχοινα που θα δεθούν σε ύψος 2m από το έδαφος και σε απόσταση 2m από τη βάση της κεραίας, να βρείτε το συνολικό μήκος των 4 συρματόσχοινων.



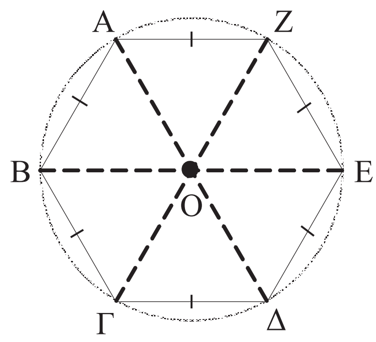
8. Ένα πλοίο κάνει τη διαδρομή από το λιμάνι Α στο λιμάνι Β. Αν το λιμάνι Β βρίσκεται 30Km βόρεια και 40Km ανατολικά του λιμανιού Α, να βρείτε την απόσταση των λιμανιών Α και Β.



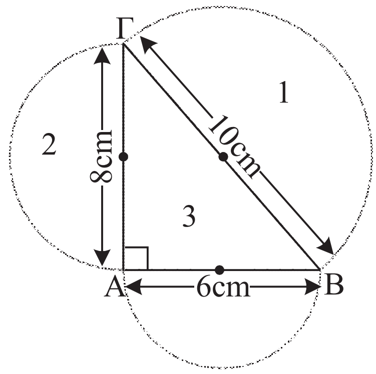
9. Ένας γεωργός θέλει να περιφράξει την τετράπλευρη έκταση του διπλανού σχήματος. Ποια είναι η περίμετρός της;



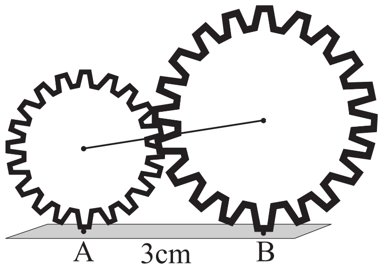
10. Ο κύκλος του διπλανού σχήματος έχει ακτίνα ρ=4cm. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ. (κανονικό λέγεται το πολύγωνο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες).



11. Με διάμετρο τις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, θεωρούμε τα ημικύκλια 1,2,3. Να δείξετε ότι το άθροισμα των ημικυκλίων 2,3, είναι ίσο με το εμβαδόν του ημικυκλίου 1.



12. Δύο γρανάζια από τα οποία το ένα έχει διπλάσια ακτίνα από το άλλο, είναι συνδεδεμένα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν στο κάτω μέρος τους εφάπτεται ένας ιμάντας μήκους 3cm, να βρείτε τη διάμετρο των δύο κύκλων.



6. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ

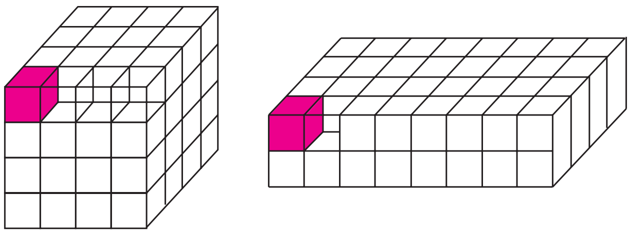
Σκοπός της ενότητας είναι ο εκπαιδευόμενος να καταλάβει τη διαφορά ανάμεσα στη μέτρηση επιφάνειας επίπεδων σχημάτων – και τη μέτρηση στοιχείων σχημάτων στο χώρο. Να καταλάβει την έννοια του όγκου. Να μάθει τα βασικά στερεά σχήματα και τα στοιχεία τους και να μπορεί να υπολογίζει διάφορα στοιχεία τους.

Προσδοκώμενα αποτελέσματα η εξοικείωση του εκπαιδευόμενου με τον υπολογισμό στοιχείων διαφόρων στερεών σχημάτων και η προσαρμογή αυτών των υπολογισμών σε άμεσες εφαρμογές στην καθημερινότητα.

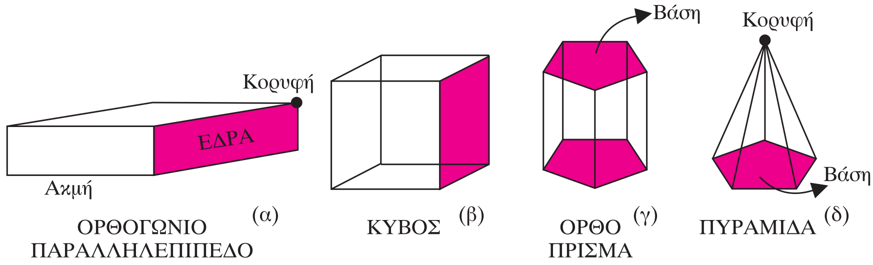
Βασικές έννοιες:
- Όγκος / παράπλευρη επιφάνεια
- Παραλληλεπίπεδο
- Κύβος
- Πρίσμα
- Σφαίρα
- Πυραμίδα
- Κύλινδρος

6.1. Η έννοια του όγκου

- Στη διπλανή εικόνα έχουν σχεδιαστεί διαφορετικά στερεά. Τα στερεά αυτά αν και έχουν διαφορετική μορφή, καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε αν παρατηρήσουμε ότι και τα δύο στερεά αποτελούνται από τον ίδιο αριθμό (64) ίδιων κύβων. Δύο ή περισσότερα στερεά που καταλαμβάνουν τον ίδιο χώρο λέμε ότι έχουν τον ίδιο **όγκο.**



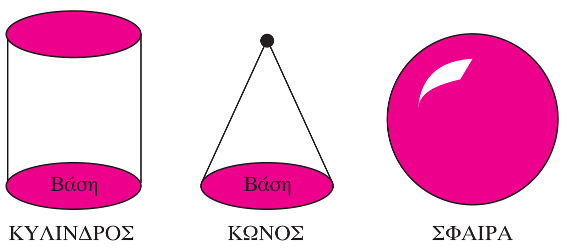
- Τα βασικά γεωμετρικά στερεά που η επιφάνειά του αποτελείται μόνο από επίπεδα μέρη, είναι τα:



Στα σχήματα αυτά διακρίνουμε:

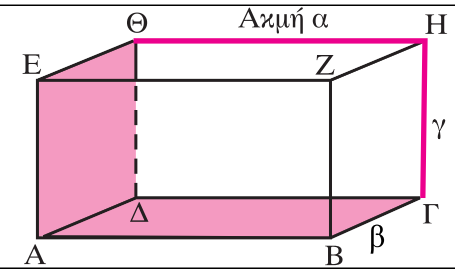
- Έδρες: Τα επίπεδα μέρη (πολύγωνα) που περικλείουν στερεό.
- Ακμές: Ενώνουν τις κοινές πλευρές γειτονικών εδρών.
- Κορυφές: Τα άκρα των ακμών.

Υπάρχουν και ορισμένα γεωμετρικά στερεά που η επιφάνειά τους έχει και καμπύλα μέρη.



6.2. Όγκος Βασικών σχημάτων
Ορθογώνιο Παραλληλεπίπεδο

Ένα στερεό που περιορίζεται από ορθογώνια παραλληλόγραμμα λέγεται **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.**



Ο **όγκος** ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, είναι ίσος με το γινόμενο των τριών διαστάσεών του (που έχουν μετρηθεί στην ίδια μονάδα).

Επομένως:

$$\boxed{V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$$

Εμβαδόν επιφανείας ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

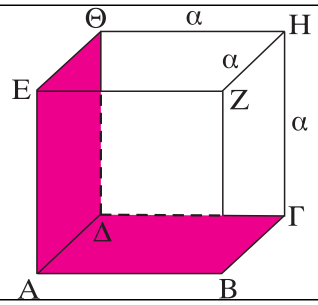
$$\boxed{E = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)}$$

- Τα έξι ορθογώνια που περιορίζουν το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, λέγονται **έδρες** του.
- Οι πλευρές των εδρών του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, λέγονται **ακμές.**
- Κάθε κορυφή του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι το κοινό σημείο των 3 ακμών.

Τα μήκη των 3 αυτών ακμών λέγονται **διαστάσεις** του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

➢ ΚΥΒΟΣ

- Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του οποίου όλες οι έδρες είναι τετράγωνα, λέγεται **κύβος.**



Όγκος κύβου:

$$\boxed{V = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^3}$$

Εμβαδόν επιφάνειας κύβου:

$$\boxed{E = 2(\alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha) = 6\alpha^2}$$

- Ο κύβος έχει όλες τις έδρες ίσες και όλες τις ακμές ίσες.

Εφαρμογή 1η:

Να υπολογίσετε το εμβαδόν επιφάνειας και τον όγκο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, με διαστάσεις α=5cm, β=6cm, γ=10cm.

Απάντηση:

Έχουμε $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 5 \cdot 6 \cdot 10 = 300m^3$ και

$E = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 2(5 \cdot 6 + 6 \cdot 10 + 10 \cdot 5) = 280cm^2$

Εφαρμογή 2η:

Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο $56dm^3$. Οι δύο διαστάσεις του είναι α=7dm, β=4dm. Να υπολογίσετε την Τρίτη διάσταση γ και το εμβαδόν της επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ ή $56 = 7 \cdot 4 \cdot \gamma$ ή $56 = 28 \cdot \gamma$ ή $\gamma = 2dm$. Αξιοποιώντας τον τύπο του εμβαδού, προκύπτει ότι Ε=2(αβ+βγ+γα)=$2(7 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 7)$=$100dm^2$.

Εφαρμογή 3η:

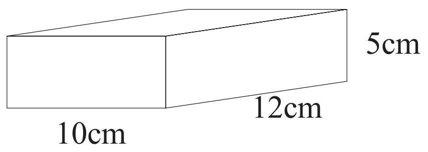
Ένας κύβος έχει εμβαδόν επιφάνειας 96cm^2. Να υπολογίσετε τον όγκο του.

Απάντηση:

Για να υπολογίσουμε τον όγκο του κύβου πρέπει να γνωρίζουμε το μήκος της ακμής του. Ξέρουμε ότι η επιφάνειά του έχει εμβαδόν 96cm^2. Αν υποθέσουμε ότι η ακμή του έχει μήκος α, τότε θα ισχύει $96=6\cdot\alpha^2$ ή $\alpha^2=16$ ή α=4cm. Άρα, $V=\alpha^3=64cm^3$.

Εφαρμογή 4η:

Ένα τούβλο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει τις διαστάσεις που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



(α) Να βρείτε τον όγκο του

(β) Πόσα τούβλα χρειαζόμαστε για να χτίσουμε ένα τοίχο μήκους 3m , ύψους 2m και πλάτους 20cm.

Απάντηση:

(α) Ο όγκος του τούβλου είναι: $10\cdot 12\cdot 5=600cm^3$.

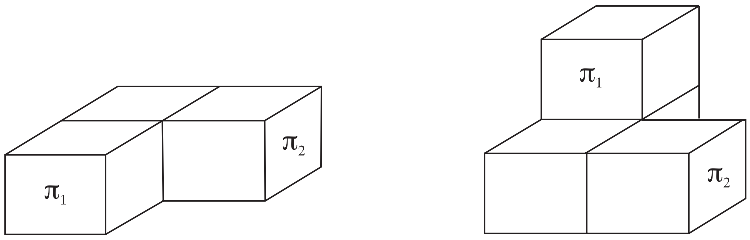
(β) Ο τοίχος έχει μήκος 3m ή 300cm, ύψος 2m ή 200cm και πλάτος 20cm.

Επομένως, ο όγκος του τοίχου είναι $300\cdot 200\cdot 20=1.200.000\ cm^3$.

Άρα, θα χρειασθούν $\dfrac{1.200.000cm^3}{600cm^3}=2.000$ τούβλα.

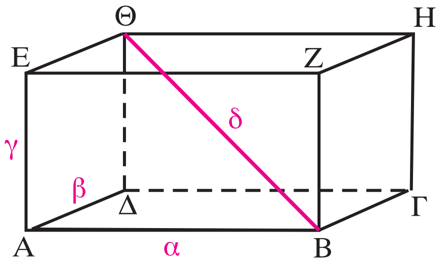
ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να σχεδιάσετε την τομή των επιπέδων (π_1) και (π_2) στα σχήματα:



2. (α) Να υπολογίσετε τη διαγώνιο δ, συναρτήσει της ακμής α, σε κύβο.

(β) Να υπολογίσετε τη διαγώνιο δ, συναρτήσει των διαστάσεων α, β, γ, σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

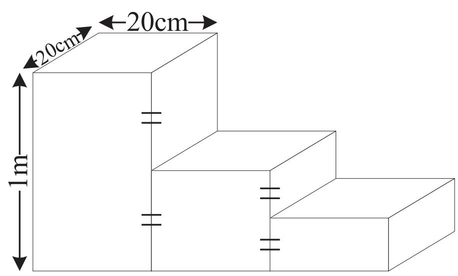


3. Η επιφάνεια ενός κύβου είναι $150m^2$. Να υπολογίσετε τον όγκο του.

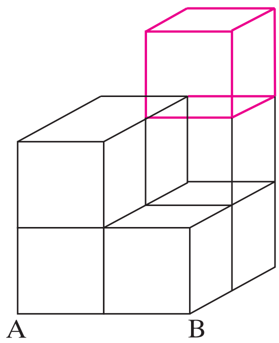
4. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, έχει διαστάσεις α=6cm, β=16cm, γ=10cm. Να υπολογίσετε τον όγκο του και το εμβαδόν της επιφάνειάς του.

5. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, έχει όγκο $84dm^3$. Οι δύο διαστάσεις του είναι α=7dm, β=4dm. Να βρείτε την τρίτη διάσταση γ, καθώς και το εμβαδόν της επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

6. Να υπολογίσετε τον όγκο και την ολική επιφάνεια του σχήματος.



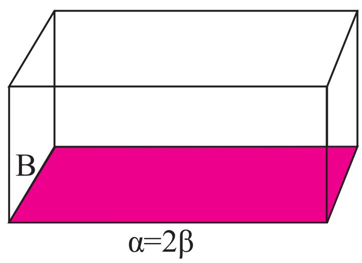
7.



Από τον κύβο του σχήματος με ακμή ΑΒ=16cm, αποκόπτουμε τον κόκκινο κύβο με ακμή E_2=8cm και τον τοποθετούμε στη θέση του κόκκινου κύβου. Αυξήθηκε ή μειώθηκε η ολική επιφάνεια του στερεού και κατά πόσα cm^2;

8. Πόσους κύβους με ακμή ½ cm πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γεμίσουμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 3cm, 4cm, 5cm.

9. Μία δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, έχει μήκος διπλάσιο από το πλάτος της και ύψος ίσο με τα ¾ του πλάτους της. Αν η περίμετρος της βάσης είναι 24m, να υπολογίσετε πόσα lt χωράει η δεξαμενή.



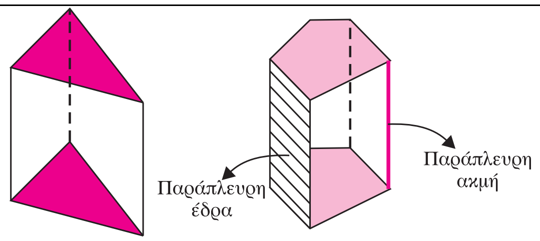
10. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, έχει διαστάσεις α, β, γ. Αν α=60cm, β=24cm και η ολική επιφάνεια είναι $4.056cm^2$, να υπολογίσετε τον όγκο σε dm^3.

11. Το κουτί συσκευασίας γάλακτος της γαλακτοβιομηχανίας «Ήλιος» έχει διαστάσει 8cm, 8cm, 40cm, μπορεί να χωρέσει:
(α) 2,5 lt γάλα (β) 2 lt γάλα (γ) 1 lt γάλα

➢ ΠΡΙΣΜΑ

Το **πρίσμα** είναι ένα στερεό που έχει:

- Δύο παράλληλες έδρες που είναι ίσα πολύγωνα.
- Όλες τις άλλες έδρες του, ορθογώνια παραλληλόγραμμα.



Ο **όγκος** ενός πρίσματος είναι ίσος με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του, επί το ύψος του πρίσματος, δηλαδή $V = E_B \cdot υ$

Το **εμβαδόν** της παράπλευρης επιφάνειας ενός πρίσματος είναι ίσο με το γινόμενο του ύψους του, επί την περίμετρο της βάσης. Δηλαδή, $E_Π = π \cdot υ$, όπου π, η περίμετρος της βάσης και υ το ύψος.

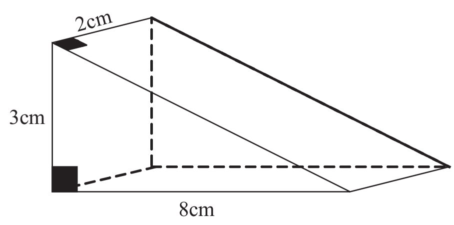
- Οι παράλληλες έδρες του πρίσματος λέγονται **βάσεις.**
- Οι υπόλοιπες έδρες του πρίσματος λέγονται **παράπλευρες έδρες.**
- Οποιαδήποτε από τις παράπλευρες ακμές, λέγεται και **ύψος** του πρίσματος.
- Ανάλογα με τη βάση, έχουμε τριγωνικό πρίσμα, τετραπλευρικό.

Το **εμβαδόν** της ολικής επιφάνειας ενός πρίσματος είναι ίσο με το εμβαδόν $E_Π$ της παράπλευρης επιφάνειάς του και δύο φορές το εμβαδόν της βάσης του.

Δηλαδή, $\mathbf{E_{ολ} = E_Π + 2E_B}$ (όπου E_B το εμβαδόν της βάσης του πρίσματος).

Εφαρμογή 1η:

Να υπολογίσετε τον όγκο του πρίσματος του σχήματος.



Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι

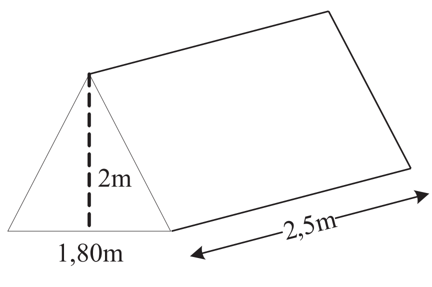
$V_{πρίσματος} = E_{Βάσης} \cdot ύψος$ (1)

$E_{Βάσης} = 3 \cdot 8 = 24 cm^2$.

Άρα $V = 24 \cdot 2 = 48 cm^3$

Εφαρμογή 2η:

Να υπολογίσετε τον όγκο της σκηνής του διπλανού σχήματος.



Απάντηση:

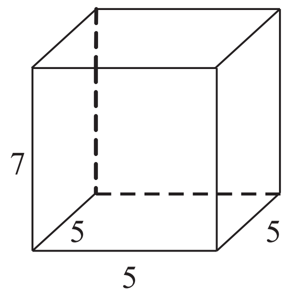
Παρατηρούμε ότι η σκηνή είναι ένα ορθό πρίσμα. Επομένως, $V = E_B \cdot υ$.

$$E_B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1{,}80 \cdot 2 = 1{,}80 m^2$$

Άρα, $V = 1{,}80 \cdot 2{,}5 = 4{,}5 m^3$

Εφαρμογή 3η:

Η βάση ενός ορθού πρίσματος είναι τετράγωνο, με πλευρά 5cm και το ύψος του είναι 7cm. Να υπολογίσετε:
(α) Τον όγκο του.
(β) Την παράπλευρη επιφάνεια.
(γ) Την ολική επιφάνειά του.



Απάντηση:

(α) Αφού η βάση του ορθού πρίσματος είναι τετράγωνο, το εμβαδόν βάσης θα είναι $E_B = 25cm^2$. Οπότε, $V = 7cm \cdot 25cm^2 = 175cm^3$.

(β) Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός πρίσματος είναι ίσο με το γινόμενο του ύψους του, επί την περίμετρο της βάσης.

Επομένως,

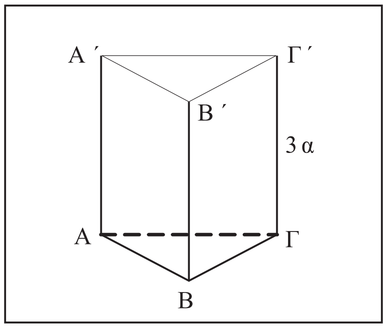
$$E_\Pi = \pi \cdot \upsilon = 20 \cdot 7 = 140cm^2.$$

(γ) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του πρίσματος ισούται με το εμβαδόν E_Π της παράπλευρης επιφάνειάς του και δύο φορές το εμβαδόν της βάσης του.

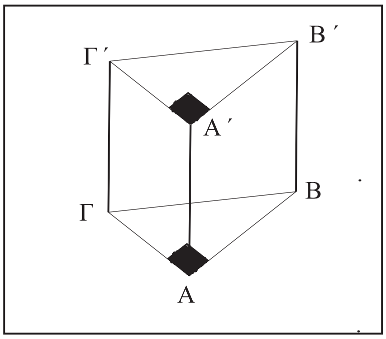
$$E_{o\lambda} = E_\Pi + 2E_B = 140 + 2 \cdot 25 = 190cm^2$$

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

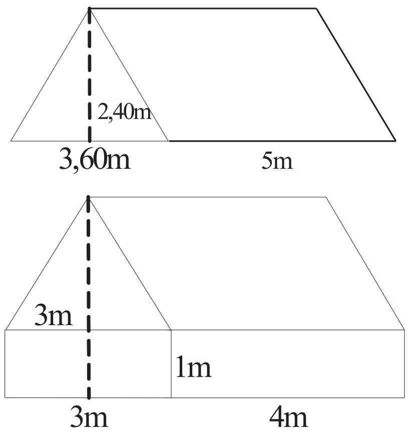
1. Η παράπλευρη επιφάνεια ενός κανονικού τριγωνικού πρίσματος είναι 324cm^2. Αν το ύψος του είναι τριπλάσιο από την πλευρά της βάσης του, να υπολογίσετε τον όγκο του.



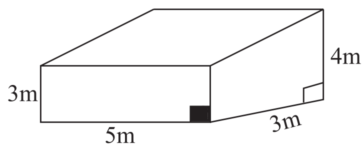
2. Ένα τριγωνικό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 20cm και 15cm. Αν το ύψος του πρίσματος είναι ίσο με την υποτείνουσα της τριγωνικής βάσης, να υπολογίσετε τον όγκο του.



3. Να υπολογίσετε τον όγκο κάθε μίας από τις σκηνές του σχήματος.

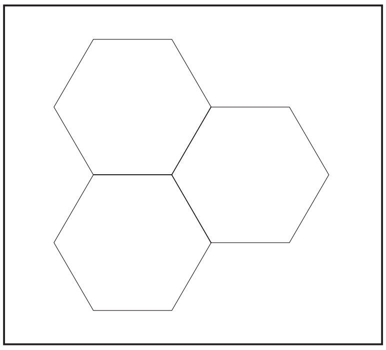


4. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού του σχήματος και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας.



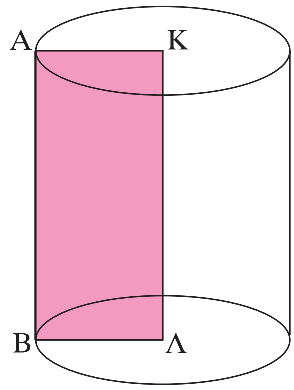
5. Ο όγκος ενός ορθού πρίσματος με βάση τετράγωνο, πλευράς 3cm, είναι $45cm^3$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του πρίσματος.

6. Μία αποθήκη σιτηρών αποτελείται από τρεις δεξαμενές, η καθεμία από τις οποίες έχει σχήμα ορθού εξαγωνικού πρίσματος, με βάση κανονικό εξάγωνο πλευράς 2m. Το ύψος των πρισμάτων είναι 2,75. Οι βάσεις των δεξαμενών είναι τοποθετημένες όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ένα συνεργείο θέλει να βάψει το εξωτερικό της δεξαμενής που στοιχίζει 3,9€ η κάλυψη των $7m^2$. Πόσο θα στοιχίσει στο συνεργείο η βαφή;



ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

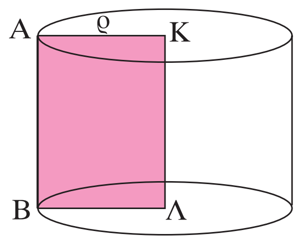
Κύλινδρος είναι το στερεό, του οποίου η επιφάνεια αποτελείται από δύο κυκλικούς δίσκους που λέγονται βάσεις και από ένα μέρος που είναι καμπύλη επιφάνεια.



Ο **όγκος** ενός κυλίνδρου όπως και στο πρίσμα είναι ίσος με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης, επί το ύψος.

$$V = \pi \cdot \rho^2 \cdot \upsilon$$

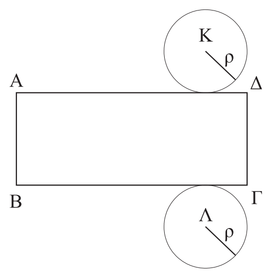
Αν κόψουμε ένα κυλινδρικό κουτί κατά μήκος μίας γενέτειρας και αποσπάσουμε τις βάσεις του,



Μπορούμε να απλώσουμε τον κύλινδρο σε ένα επίπεδο σχήμα.

Το σχήμα που προκύπτει είναι το ανάπτυγμα του κυλίνδρου.

Βλέπουμε ότι το ανάπτυγμα της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι το ορθογώνιο ΑΒΓΔ.



Δηλαδή, το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου αναπτύγματός του.

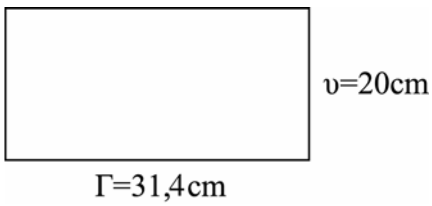
Δηλαδή, $E_K = 2\pi\rho\upsilon$.

- Ένας κύλινδρος προκύπτει με περιστροφή ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΚΛΒΑ γύρω από μία πλευρά του, π.χ. την ΚΛ.
- Οι κυκλικοί δίσκοι που δημιουργούνται από την περιστροφή των ΚΑ και ΛΒ, λέγονται **βάσεις** του κυλίνδρου.
- Η περιστροφή ΑΒ δημιουργεί την **κυρτή** επιφάνεια του κυλίνδρου. Η ΑΒ λέγεται γενέτειρα του κυλίνδρου.
- Το **ύψος** ΚΛ του κυλίνδρου είναι ίσο με τη γενέτειρά του.
- Το εμβαδόν $E_{ολ}$ της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου βρίσκεται αν προσθέσουμε στο E_K το εμβαδόν των δύο βάσεων.

Κάθε βάση έχει εμβαδόν ίσο με $πρ^2$ (κύκλος). Άρα, $E_{ολ}=2πρυ+πρ^2$.

Εφαρμογή 1η:

Το παρακάτω ορθογώνιο είναι το ανάπτυγμα της κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου. Να βρεθεί το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.



Απάντηση:

Γνωρίζουμε ότι το ύψος του κυλίνδρου είναι υ=10cm. Αν ρ η ακτίνα του κυλίνδρου, τότε Γ=2πρ ή $31,4 = 2 \cdot 3,14 \cdot ρ$ ή $ρ = 5\text{cm}$, οπότε $E_K=2πρυ=314\text{cm}^2$, $E_B=πρ^2=3,14 \cdot 5^2=15,7\text{cm}^2$ και

$$E_{ολ} = E_K + 2E_B = 314 + 2 \cdot 15,7 = 345,4\text{cm}^2$$

Εφαρμογή 2η:

Κυλινδρικό δοχείο Α έχει ακτίνα ρ=16cm και ύψος 12cm. Δοχείο Β έχει ακτίνα ρ=4cm και ύψος υ=6cm. Να βρείτε πόσες φορές είναι μεγαλύτερο το δοχείο Α από το δοχείο Β.

Απάντηση:

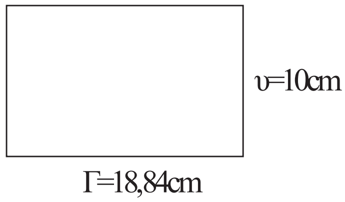
Δοχείο Α: $V_1 = πρ^2υ = π \cdot 256 \cdot 6 = 3.072π\text{cm}^3$

Δοχείο Β: $V_2 = πρ^2υ = π \cdot 16 \cdot 6 = 96π\text{cm}^3$

Επομένως, $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3.072π}{96π} = 32$ ή $V_1 = 32V_2$ ή $A = 32B$.

ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο είναι το ανάπτυγμα της κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου. Να βρεθεί το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου αυτού.

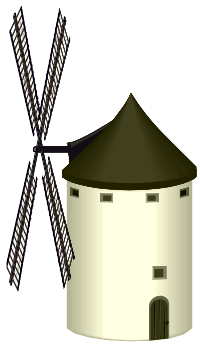


2. Ένα κυλινδρικό δοχείο Α έχει ακτίνα ρ=8cm και ύψος 6cm, ενώ ένα δοχείο Β έχει ακτίνα ρ=2cm και ύψος υ=3cm. Να βρείτε πόσες φορές είναι μεγαλύτερο το δοχείο Α από το δοχείο Β.

3. Η διάμετρος της βάσης κυλίνδρου είναι 10cm και η κυρτή επιφάνειά του είναι 125,6cm^2. Να υπολογίσετε την ολική επιφάνεια και το ύψος του.

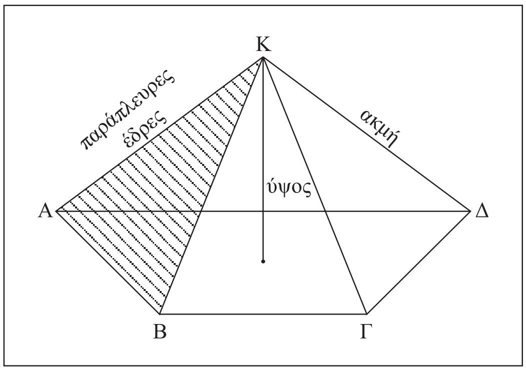
4. Ένα εργοστάσιο παραγωγής μελιού, συσκευάζει το προϊόν σε κυλινδρικά δοχεία. Αποφάσισε να πολλαπλασιάσει τη διάμετρο της βάσης και το ύψος του δοχείου επί 0,4, χωρίς να αλλάξει την τιμή του λίτρου του περιεχομένου. Πόσο τοις % θα μεταβληθεί η τιμή κάθε δοχείου;

5. Ένας ανεμόμυλος έχει διάμετρο 5m και ύψος 12m. Πόσα κιλά ασβέστη θα χρειαστεί για να ασβεστωθεί, αν για κάθε τετραγωνικό μέτρο χρειάζονται 0,25kg ασβέστη και η επιφάνεια της πόρτας και των δύο παραθύρων είναι 4,8m^2



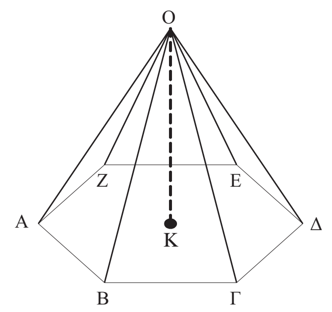
➢ ΠΥΡΑΜΙΔΑ

- Πυραμίδα είναι ένα στερεό, του οποίου η μία έδρα είναι πολύγωνο και οι άλλες έδρες τρίγωνα με κοινή κορυφή.
- Το πολύγωνο ονομάζεται βάση της πυραμίδας. Οι άλλες έδρες ονομάζονται παράπλευρες έδρες της πυραμίδας.
- Η κοινή κορυφή των παράπλευρων εδρών ονομάζεται κορυφή της πυραμίδας. Η απόσταση της κορυφής της πυραμίδας από τη βάση λέγεται ύψος της πυραμίδας.



- Μία πυραμίδα που έχει βάση τρίγωνο λέγεται **τριγωνική**. Αν έχει βάση τετράπλευρο, τετραπλευρική, αν το τετράπλευρο είναι τετράγωνο, λέγεται τετραγωνική.

- Μία πυραμίδα λέγεται κανονική, όταν η βάση της είναι κανονικό πολύγωνο και το ίχνος του ύψους της πάνω στη βάση συμπίπτει με το κέντρο της βάσης.



Κανονική πυραμίδα

- Ο όγκος της πυραμίδας δίνεται από τον τύπο $\boxed{V = \frac{1}{3}B \cdot \upsilon}$, όπου Β το εμβαδόν της βάσης και υ το ύψος της πυραμίδας.
- Το εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας πυραμίδας, είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των παράπλευρων εδρών της.

Το **εμβαδόν ολικής επιφάνειας** μίας πυραμίδας προκύπτει αν στο εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας προσθέσουμε το εμβαδόν Β της βάσης, δηλαδή $E_{ολ}=E_{Π}+B$

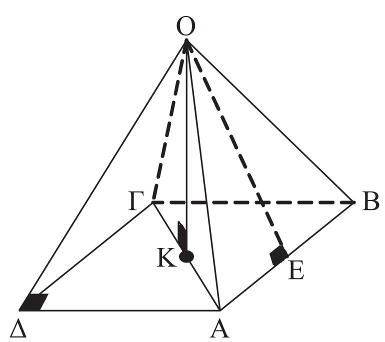
- Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας μίας <u>κανονικής</u> πυραμίδας είναι

$$E_{Π} = \frac{1}{2}(\text{περίμετρος βάσης}) \cdot h\,,$$

όπου h είναι το ύψος της παράπλευρης έδρας που φέρνουμε από την κορυφή σε μία πλευρά της βάσης της πυραμίδας.

Εφαρμογή 1η:

Μία κανονική τετράγωνη πυραμίδα, έχει βάση με πλευρά 8cm και ύψος 10cm.
Να υπολογίσετε :
(α) Το μήκος της παράπλευρης ακμής,
(β) Το παράπλευρο ύψος,
(γ) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας,
(δ) Τον όγκο της πυραμίδας.



Απάντηση:

(α) Γνωρίζουμε ότι η βάση της πυραμίδας είναι τετράγωνο πλευράς 8cm. Το μήκος της διαγωνίου ΑΓ θα το υπολογίσουμε με τη βοήθεια του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο ΑΔΓ.

$ΑΓ^2=ΑΔ^2+ΔΓ^2=64+64=128cm^2$. Άρα, $ΑΓ=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$ cm και $ΑΚ=\frac{ΑΓ}{2}=4\sqrt{2}$cm. Υπολογίζουμε την παράπλευρη ακμή ΟΑ.

$ΟΑ^2=ΟΚ^2+ΚΑ^2=10^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2=132$ ή $ΟΑ=\sqrt{132}=11,49$ cm.

(β) Το παράπλευρο ύψος το υπολογίζουμε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΑ (ορθή η $\hat{Ε}$) και από το Πυθαγόρειο θεώρημα: $ΟΑ^2=ΟΕ^2+ΑΕ^2$ ή $132=ΟΕ^2+16$ ή $ΟΕ^2=116$ ή $ΟΕ=\sqrt{116}=10,77$cm.

(γ) Επειδή η πυραμίδα είναι κανονική τετραγωνική, έχουμε:

$$Ε_Π=\frac{1}{2}(\text{περίμετρος βάσης})\cdot h=$$

$$\frac{1}{2}4\cdot 8\cdot 10,77=172,32cm^2$$

(δ) Το εμβαδόν Βάσης είναι: $Β=8^2=64cm^2$.

$$\text{Άρα, } V=\frac{1}{3}Β\cdot υ=\frac{1}{3}64\cdot 10=213,3cm^3.$$

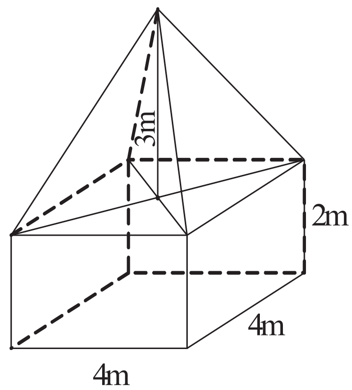
ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Μία κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει βάση με πλευρά 6cm. Οι παράπλευρες έδρες της έχουν ύψος 10cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της.

2. Μίας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας η παράπλευρη ακμή είναι ίση με $\sqrt{194}$ cm και το παράπλευρο ύψος της h, είναι 13cm. Να υπολογίσετε τον όγκο της.

3. Μία κανονική πυραμίδα με βάση τετράγωνο έχει ύψος 1,2m και πλευρά βάσης 1m. Να βρεθεί το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και ο όγκος της.

4. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού του σχήματος.



5. Μία κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει βάση πλευράς 12cm και οι παράπλευρες έδρες της είναι ισόπλευρα τρίγωνα. Να υπολογίσετε τον όγκο της και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς της.

6. Μίας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας η παράπλευρη επιφάνεια είναι $120cm^2$ και το παράπλευρο ύψος της h είναι ίσο με 10cm. Να υπολογίσετε τον όγκο της.