ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΟΔΗΓΟΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

(**Τάξεις**: Α΄, Β΄, Γ΄)

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

2015

ΕΙΔΙΚΟΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΕΣ

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ:

Παπασταυρίδης Σταύρος, Ομότιμος Καθηγητής Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών (Συντονιστής)

Ζαχαριάδης Θεοδόσιος, Καθηγητής Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών
Κολεζά Ευγενία, Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Πατρών

Μπάραλος Γώργιος, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03

Πολύζος Γεώργιος, τ. Μον. Πάρεδρος Παιδαγωγικού Ιντιτούτου

Σβέρκος Ανδρέας, τ. Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03

Σκούρας Αθανάσιος, Σύμβουλος Α΄ ΥΠΑΙΘ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗΣ ΕΠΟΠΤΕΙΑΣ:

Φερεντίνος Σπύρος, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03

ΕΚΠΟΝΗΣΗΣ:

Δημητρόπουλος Βασίλειος, Εκπαιδευτικός Δημόσιου Τομέα ΠΕ03

Κεΐσογλου Στέφανος, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03

Μηλιώνης Χρίστος, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03

Ορφανάκης Σπυρίδων, Εκπαιδευτικός Δημόσιου Τομέα ΠΕ03

Πανταζή Αφροδίτη, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03

Τσικοπούλου Σταματούλα, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03

«ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών»
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ «ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ»

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
Σωτήριος Γκλαβάς
Πρόεδρος του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Υπεύθυνη Πράξης
Γεωργία Φέρμελη
Σύμβουλος Α΄ Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Το παρόν συγχρηματοδοτήθηκε από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και εθνικούς πόρους στο πλαίσιο της πράξης **«ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών»** του Επιχειρησιακού Προγράμματος **«Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση»**

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄, Β΄, Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - Σύνολα

Εισαγωγή

Η έννοια του συνόλου εμφανίζεται από την αρχαιότητα σε όλους τους κλάδους των Μαθηματικών. *Για παράδειγμα, στη Γεωμετρία, ορίζουμε ως κύκλο το σύνολο των σημείων του επιπέδου που* απέχουν ορισμένη απόσταση ρ από ορισμένο σημείο Κ. Όμως και σε καθημερινές εκφράσεις χρησιμοποιούμε την έννοια του συνόλου. Λέμε για παράδειγμα *μια αγέλη λύκων* ή *ένα σμήνος μελισσών*. Η συστηματική μελέτη των συνόλων άρχισε μόνο στα τέλη του 19ου αιώνα με την εργασία «*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*» (μτφ. Συνεισφορές στην θεμελίωση των «Υπερπεπερασμένων» (γερμ. transfiniten, αγγλ. transfinite), Συνόλων), που δημοσιεύθηκε το 1895 στο περιοδικό Mathematische Annalen[1] του Γερμανού μαθηματικού G. Cantor (1845- 1918) που δημοσιεύθηκε το 1895.
Αλλά τι είναι τα σύνολα; Η ερώτηση είναι παρόμοια με την ερώτηση «τι είναι τα σημεία μιας ευθείας», την οποία ο Ευκλείδης απάντησε με *το «σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν».* Αυτός δεν είναι βέβαια ένας αυστηρός μαθηματικός ορισμός, δηλαδή αναγωγή της έννοιας του σημείου σε γνωστές έννοιες, αλλά μια περιγραφή που μας πληροφορεί ότι το σημείο είναι κάτι που δεν έχει «έκταση». Όπως η έννοια του σημείου είναι θεμελιακή, έτσι και η έννοια του συνόλου είναι θεμελιακή και δεν μπορεί να αναχθεί σε απλούστερες έννοιες. Ο Cantor περιέγραψε την έννοια του συνόλου ως εξής : *«Σύνολο (γερμ. Menge, αγγλ. Set) ονομάζουμε κάθε συλλογή σαφώς διακριτών και καλώς καθορισμένων αντικειμένων που προέρχονται από τον χώρο της διαίσθησης ή της σκέψης μας και που λαμβάνονται ως μια ενότητα».* Φυσικά με τα σημερινά δεδομένα της μαθηματικής επιστήμης ο ορισμός πάσχει, κάτι που είναι κοινή μοίρα πρακτικώς όλως των μεγάλων ανακαλύψεων. Όμως είναι απολύτως επαρκής για τις ανάγκες του λυκείου, όπου δεν κάνουμε χρήση της Αξιωματικής Θεωρίας συνόλων αλλά μιας απλουστευμένης μορφής της (Naïve Set Theory).
Όσο ασαφής και αν είναι ο ορισμός αυτός , συνεπάγεται δυο βασικές ιδιότητες των συνόλων.

1. **Κάθε σύνολο έχει στοιχεία** (ή μέλη). Για να δηλώσουμε ότι ένα αντικείμενο x είναι μέλος ή ανήκει στο σύνολο Α, γράφουμε « $x \in A$ » και διαβάζουμε «το x ανήκει στο Α» ή «το x είναι μέλος του Α».
2. **Η ιδιότητα της έκτασης**. Ένα σύνολο καθορίζεται από τα στοιχεία του, δηλαδή δυο σύνολα είναι ίσα αν και μόνο έχουν τα ίδια στοιχεία. Η ισότητα δυο συνόλων συμβολίζεται με Α=Β. Έτσι το σύνολο των μαθητών μιας τάξης θα παραμείνει το ίδιο αν οι μαθητές αλλάξουν θέσεις, ή αν ξαπλώσουν στο πάτωμα ή αν μεταφερθούν σε μια άλλη αίθουσα.

Η Θεωρία Συνόλων είναι σήμερα το θεμέλιο όλης της επιστήμης των Μαθηματικών. Η Θεωρία Συνόλων, που τυποποιείται με χρήση της Λογικής, είναι κατά κάποιο τρόπο η «γλώσσα» για τα Μαθηματικά, μαζί με τη Συμβολική Άλγεβρα που είναι κατά κάποιο τρόπο ο «σκελετός».

Ένας απλός τρόπος για την παρουσίαση των σχέσεων μεταξύ των συνόλων αλλά και των μεταξύ τους πράξεων είναι τα διαγράμματα του Άγγλου μαθηματικού John Venn (1834-1923). Ο Venn που ασχολήθηκε κυρίως με τη Μαθηματική Λογική, προκειμένου να απεικονίσει σχηματικά λογικές σχέσεις, έκανε ευρεία χρήση διαγραμμάτων με τα οποία κάθε σύνολο παριστάνεται εποπτικά με το μέρος του επιπέδου που περικλείεται από μια κλειστή γραμμή. Αυτός ο τύπος των διαγραμμάτων χρησιμοποιείται για την οπτική και λογική ταξινόμηση ομάδων αντικειμένων και των μεταξύ τους σχέσεων. Πριν από τον Venn τα διαγράμματα αυτά τα χρησιμοποιούσε ο Euler, γι αυτό ο Venn τα

[1] Το πρωτότυπο κείμενο υπάρχει στο http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02124929#page-1, και η αγγλική μετάφραση στο https://archive.org/details/contributionstot003626mbp.

ονόμαζε «Κύκλοι του Euler». Σήμερα χρησιμοποιούνται σε πολλά επιστημονικά πεδία, περιλαμβανομένης της Θεωρίας Συνόλων, της Θεωρίας Πιθανοτήτων, της Λογικής, της Στατιστικής και της Επιστήμης των Υπολογιστών.

Τι περιέχει το κεφάλαιο των Συνόλων και πως το περιεχόμενο αυτό συνδέεται με προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών;

Οι μαθητές σε προηγούμενες τάξεις, έχουν έλθει σε επαφή με την έννοια του συνόλου εμπειρικά, όταν μελετούσαν τα διάφορα σύνολα των αριθμών (ακέραιοι, φυσικοί, ρητοί), το σύνολο των σημείων του επιπέδου που σχηματίσουν ένα σχήμα, στη γεωμετρία και συχνά έχουν αναφερθεί σε σύνολα ατόμων ή πραγμάτων, όπως για παράδειγμα, το σύνολο των μαθητών της τάξης τους. Δεν έχουν όμως εισαχθεί στον τυπικό συμβολισμό και τις διάφορες αναπαραστάσεις του συνόλου.
Στην τάξη αυτή, οι μαθητές, θα διαπραγματευθούν την έννοια του συνόλου, θα εξετάζουν εμπειρικά αν ένα στοιχείο ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο και θα εκφράζουν αυτή τη σχέση συμβολικά. Θα ορίζουν και θα εφαρμόζουν τις βασικές σχέσεις (υποσύνολο, ισότητα συνόλων) και πράξεις μεταξύ συνόλων (τομή, ένωση, συμπλήρωμα, διαφορά). Θα αναπαριστούν σύνολα και θα επιλύουν προβλήματα με τη χρήση των διαγραμμάτων του Venn και των συμβόλων. Θα τους δοθεί ακόμα μια ευκαιρία να κατανοήσουν ποια στοιχεία περιέχει καθένα από τα γνωστά σύνολα των αριθμών N, Z, Q και R και από το διάγραμμα εγκλεισμού $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ για τους πραγματικούς αριθμούς, να διατυπώνουν τις σχέσεις μεταξύ αυτών των συνόλων.

Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο των Συνόλων;

Η έννοια του συνόλου διαχέεται σε όλη την έκταση των Μαθηματικών του Λυκείου. Για παράδειγμα θα χρησιμοποιηθεί στον ορισμό διαστημάτων, στην έκφραση των λύσεων μιας ανίσωσης, στην ερμηνεία της απόλυτης τιμής, στο σύνολο των λύσεων μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης και στον ορισμό της συνάρτησης. Κυρίως όμως αποτελεί το υπόβαθρο για την ανάπτυξη της θεωρίας των πιθανοτήτων στο 6^{o} κεφάλαιο, καθώς και της αντίστοιχης ενότητας στη Γ΄ Λυκείου.
Ο κύριος ρόλος της Θεωρίας των συνόλων στο Λύκειο είναι να εκφράσουν τα Μαθηματικά με γλώσσα (που ασφαλώς εδράζεται στην καθομιλουμένη), αλλά είναι ακριβέστερη, σαφέστερη και ποιο εύγλωττη από αυτήν. Πέραν αυτού αποτελεί και προετοιμασία για τα πανεπιστημιακά μαθηματικά, όπου η Θεωρία συνόλων παίζει σαφώς καθοριστικό ρόλο.

Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο των Συνόλων;

- Κάθε σύνολο έχει στοιχεία τα οποία πρέπει να αναγνωρίζονται με σιγουριά.
- Δυο σύνολα είναι ίσα αν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.
- Ένα σύνολο Α του οποίου τα στοιχεία ανήκουν και σε ένα άλλο σύνολο Β, λέγεται υποσύνολο του Β.
- Από δυο σύνολα παράγονται με τις μεταξύ τους πράξεις νέα σύνολα.
- Τα διαγράμματα Venn είναι ένας τρόπος παρουσίασης των σχέσεων και των πράξεων μεταξύ συνόλων.

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Ε1 Τι ονομάζουμε σύνολο;
Ε2 Πότε λέμε ότι ένα στοιχείο ανήκει ή δεν ανήκει, σ’ ένα σύνολο;
Ε3 Με πόσους τρόπους μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα σύνολο;
Ε4 Πότε δύο σύνολα είναι ίσα;
Ε5 Τι ονομάζουμε υποσύνολο ενός συνόλου
Ε6 Τι ονομάζουμε συμπλήρωμα ενός συνόλου ως προς ένα άλλο σύνολο;
Ε7 Τι ονομάζουμε ένωση, τομή, διαφορά δύο συνόλων;

Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά το τέλος της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να :

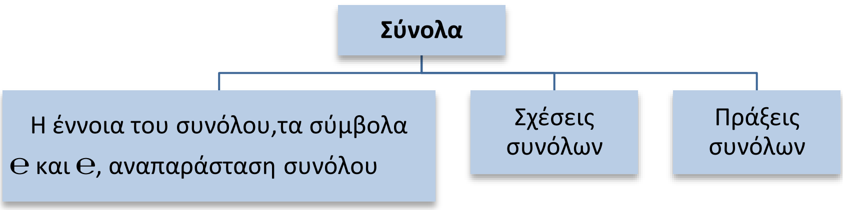
Μ1 Να γνωρίζουν τις προϋποθέσεις που απαιτούνται για να θεωρηθεί μια συλλογή αντικειμένων σύνολο.

Μ2 Να αποφασίζουν αν ένα στοιχείο ανήκει ή όχι σ' ένα σύνολο και να εκφράζουν αυτή τη σχέση συμβολικά. (στόχοι Π.Σ 1.1.1)

Μ3 Να αναπαριστούν ένα σύνολο με διάφορους τρόπους (με περιγραφή ή με αναγραφή των στοιχείων του και με διάγραμμα του Venn). (στόχοι Π.Σ 1.1.2)
Μ4 Να διακρίνουν αν δύο σύνολα είναι ίσα και πότε ένα σύνολο είναι υποσύνολο ενός άλλου. (στόχοι Π.Σ 1.1.3)
Μ5 Να βρίσκουν την ένωση, την τομή, τη διαφορά δύο συνόλων, καθώς και το συμπλήρωμα ενός συνόλου ως προς το βασικό σύνολο και να τα παριστάνουν με διάγραμμα του Venn. (στόχοι Π.Σ 1.1.3)
Μ6 Να διατυπώνουν με συμβολικό τρόπο σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων που διατυπώνονται στην κοινή γλώσσα. (στόχοι Π.Σ 1.1.3)

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Όσα αναφέρονται στη συνέχεια είναι προτεινόμενα ώστε ο διδάσκων να διαθέτει μία οργανωμένη πρόταση διδασκαλίας.
Κατά αρχήν καλό θα είναι ο διδάσκων να διαθέτει μία γενική εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η διδασκαλία του κεφαλαίου όπως η παρακάτω.



Με βάση τα μαθησιακά αποτελέσματα και τα ερωτήματα στα οποία θα πρέπει να μπορεί να απαντά ο μαθητής μετά τη διδασκαλία των συνόλων, θα επισημαίναμε ότι:

- **Η έννοια του συνόλου, τα σύμβολα $\in$, $\notin$, - αναπαράσταση συνόλου**

1) Οι μαθητές αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά με συστηματικό τρόπο την έννοια του συνόλου. Επειδή η έννοια είναι πρωταρχική, χρειάζεται να τονισθούν οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για να θεωρηθεί μια συλλογή αντικειμένων σύνολο (*διακριτά και καλώς καθορισμένα)* μέσα από κατάλληλα παραδείγματα. Για παράδειγμα, το σύνολο των ψηλών μαθητών της τάξης μας δεν είναι καλά ορισμένο αν δεν έχουμε πρώτα ορίσει ποιος μαθητής θεωρείται ψηλός. Γενικά είναι σημαντικό να καταλάβουν οι μαθητές ότι κάθε «καλά» διατυπωμένη ιδιότητα δημιουργεί και ένα σύνολο (ανεξάρτητα από το αν μπορούμε να βρούμε τι ανήκει σε αυτό, ή να αποφανθούμε αν είναι κενό η όχι κλπ. Εξ άλλου αυτή είναι η μεγάλη κεντρική ιδέα της Θεωρίας των συνόλων για τα Μαθηματικά).

2) Με βάση τις γνώσεις και τις εμπειρίες τους οι μαθητές θα εξετάζουν, αν ένα στοιχείο ανήκει ή όχι σε ένα σύνολο και να εκφράζουν αυτή τη σχέση συμβολικά.
Προτεινόμενη δραστηριότητα

Δίνεται το σύνολο A={xN / $\frac{1}{2}$< x 8}.

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) :

i) $0 \in A$, ii) $8 \notin A$, iii) $\sqrt{4} \in A$, iv) $\frac{2}{5} \in \mathrm{A}$

3) Προκειμένου οι μαθητές, να μην ταυτίζουν το σύνολο με μια μόνο αναπαράστασή του, θα πρέπει να ασκηθούν να το αναπαριστούν με διαφορετικούς τρόπους. Η αναπαράσταση συνόλων, καθώς και η μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, μπορούν να υποστηρίξουν την κατανόηση της έννοιας του συνόλου.

- **Σχέσεις συνόλων**

1) Οι μαθητές Θα πρέπει να μπορούν να βρίσκουν τα υποσύνολα ενός συνόλου. Να τονιστεί ότι κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του και το κενό σύνολο είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου.

Προτεινόμενη δραστηριότητα:

Δίνεται το σύνολο A= {0, 1, 2}. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ:

α) $\{0\} \subseteq A$ β) $\{1\} \subseteq A$ γ) $\{0,2\} \in A$

δ) $\{0,1,2\} \subseteq A$ ε) $\{\varnothing,0,1\} \subseteq A$ ζ) $\varnothing \subseteq A$ η) $2 \subseteq A$

2) Σημαντικό είναι επίσης οι μαθητές να διακρίνουν τα ίσα σύνολα και να βρίσκουν το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου, κάτι που θα το χρησιμοποιήσουν αργότερα για τον υπολογισμό πιθανοτήτων.

Προτεινόμενη δραστηριότητα :

α) Να γράψετε το σύνολο των ψηφίων των αριθμών : 1, 10, 11, 101, $2^2 \cdot 5^2$, 10010, 100001, 10^{2014}

β) Πόσα στοιχεία περιέχει το καθένα από τα παραπάνω σύνολα;

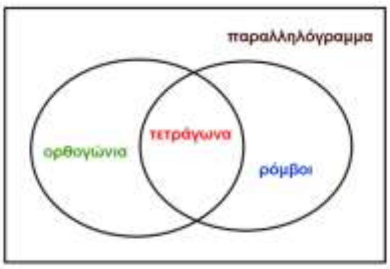
γ) Πόσα διαφορετικά σύνολα καταγράψατε;

- **Πράξεις συνόλων**

1) Οι μαθητές θα πρέπει να ασκηθούν στο να βρίσκουν την ένωση, την τομή, τη διαφορά και το συμπλήρωμα ενός συνόλου ως προς το βασικό σύνολο, όχι μόνο αριθμητικών συνόλων, αλλά και συνόλων που περιέχουν άλλα στοιχεία, για παράδειγμα γεωμετρικά σχήματα, ανθρώπους κτλ.
(Παράδειγμα δραστηριότητας η Δ2 του Π.Σ)

Προτεινόμενη δραστηριότητα

Χρησιμοποιείστε τα διαγράμματα Venn για να αναπαραστήσετε τις σχέσεις μεταξύ παραλληλογράμμων, ορθογωνίων, τετραγώνων και ρόμβων.



Σχόλιο Από το διάγραμμα μπορούν οι μαθητές να διαπιστώσουν ακόμα ότι:

- Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια ενώ όλα τα ορθογώνια δεν είναι τετράγωνα.
- Όλα τα τετράγωνα είναι ρόμβοι αλλά όλοι οι ρόμβοι δεν είναι τετράγωνα.

- Όλοι οι ρόμβοι είναι παραλληλόγραμμα αλλά όλα τα παραλληλόγραμμα *δεν είναι ρόμβοι ...*

2) Να δοθεί βάρος στη μεταφορά από τη φυσική γλώσσα στη γλώσσα των συνόλων και το αντίστροφο. Οι πράξεις μεταξύ συνόλων είναι ένα πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές μπορούν να δώσουν νόημα στους συνδέσμους «ή» και «και». Ειδικά, όσον αφορά στο σύνδεσμο «ή», να επισημανθεί η διαφορετική του σημασία στα Μαθηματικά από εκείνη της αποκλειστικής διάζευξης που του αποδίδεται συνήθως στην καθημερινή χρήση του.

<u>Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>

Θεωρούμε τα σύνολα :

Α = {θεατές που παρακολούθησαν από την τηλεόραση, την τελετή έναρξης του παγκόσμιου πρωταθλήματος ποδοσφαίρου που έγινε το καλοκαίρι του 2014 στη Βραζιλία }.

Β = {θεατές που παρακολούθησαν από την τηλεόραση, την τελετή λήξης του παγκόσμιου πρωταθλήματος ποδοσφαίρου που έγινε το καλοκαίρι του 2014 στη Βραζιλία }.

Σε ποιο σύνολο ανήκει εκείνος/η που:

α) Παρακολούθησε και τις δύο τελετές.

β) Παρακολούθησε μια τουλάχιστον τελετή.

γ) Παρακολούθησε την τελετή έναρξης και όχι την τελετή λήξης.

Πιθανές δυσκολίες - Παρανοήσεις

Οι δυσκολίες των μαθητών σχετικά με τα σύνολα αφορούν κυρίως:

- την αναπαράσταση ενός συνόλου με περιγραφή των στοιχείων του, λόγω του σύνθετου συμβολισμού που χρησιμοποιούμε.
- τη μεταφορά από τη φυσική γλώσσα, στη γλώσσα των συνόλων και το αντίστροφο.

Επιπλέον έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές:

- συγχέουν το στοιχείο ενός συνόλου με το υποσύνολο του συνόλου που περιέχει το στοιχείο αυτό. Π.χ γράφουν $\{6\}$Î □ αντί του σωστού 6Î □ ή $3 \subseteq A$, όταν Α={1,2,3}, αντί του σωστού $3 \in A$.
- ταυτίζουν το κενό σύνολο με το σύνολο που έχει στοιχείο του το κενό σύνολο. Ένα παράδειγμα που θα τους βοηθούσε να το ξεκαθαρίσουν είναι το εξής : Αν το κενό σύνολο το αντιστοιχίσουμε σ' ένα άδειο κουτί, τότε το σύνολο με στοιχείο το κενό σύνολο αντιστοιχεί, σε ένα άδειο κουτί που περιέχει ένα άδειο κουτί.
- ταυτίζουν το κενό σύνολο με το μηδέν, επειδή βλέπουν συχνά σε διάφορα έντυπα, να χρησιμοποιείται το σύμβολο του κενού $\varnothing$, στη θέση του μηδενός ή του όμικρον, προκειμένου να το διαχωρίσουν από αυτά.
- θεωρούν ότι δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν τον αριθμό στοιχείων.

Αξιοποίηση της Τεχνολογίας στη διδασκαλία του κεφαλαίου

Οι παρακάτω ιστότοποι μπορεί να υποδειχθούν στους μαθητές να τους επισκεφθούν εθελοντικά και να πειραματιστούν με τις αναπαραστάσεις και τις πράξεις των συνόλων.

- Παράσταση συνόλων με διάγραμμα Venn.
  Μικροπείραμα μέσα από το οποίο οι μαθητές εξασκούνται στην παράσταση συνόλων με διάγραμμα Venn

  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2096

- Παράσταση συνόλου με αναγραφή των στοιχείων του.
  Μικροπείραμα μέσα από το οποίο οι μαθητές εξασκούνται στην παράσταση συνόλου με αναγραφή των στοιχείων του.

  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2095

- Παράσταση συνόλων - Πράξεις με σύνολα
  Μικροπείραμα μέσα από το οποίο οι μαθητές εξασκούνται στην παράσταση συνόλων και στις πράξεις με αυτά.
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2014

Βιβλιογραφία

- Paul R. Halmos, Naive Set Theory, 1960
- Γιάννης Ν. Μοσχοβάκης, Σημειώσεις στη συνολοθεωρία, Αθήνα 1993.
- E.T. Bell (1993). *Οι μαθηματικοί,* τόμος II, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (Cantor, σελ 437-477).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο} - Πραγματικοί αριθμοί

Τι περιέχει το κεφάλαιο των Πραγματικών Αριθμών και πως το περιεχόμενο αυτό συνδέεται με προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών;

Οι μαθητές στο Γυμνάσιο έχουν διδαχθεί διαδοχικά τους φυσικούς, τους ακεραίους και τους ρητούς αριθμούς. Ήρθαν όμως και σε επαφή με τους πραγματικούς αριθμούς, κυρίως μέσα από την προσπάθεια εύρεσης τετραγωνικής ρίζας όταν αυτή δεν ήταν φυσικός ή ρητός αριθμός. Έχουν επίσης ασχοληθεί με πολλές από τις έννοιες στις οποίες αναφέρονται οι παράγραφοι αυτού του κεφαλαίου όπως είναι, οι πράξεις, οι δυνάμεις, η απόλυτη τιμή, οι ρίζες και έχουν επιλύσει εξισώσεις και ανισώσεις 1^{ου} βαθμού.
Στην τάξη αυτή οι μαθητές θα επαναλάβουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών και θα εμβαθύνουν στις ιδιότητες του με στόχο την κατανόηση της δομής του και την αντιμετώπιση προβλημάτων αλγεβρικού λογισμού, διάταξης, απολύτων τιμών, ριζών πραγματικών αριθμών ν-οστής τάξης και διερεύνησης εξισώσεων πρώτου βαθμού.

Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο των Πραγματικών Αριθμών;

Οι αριθμοί και οι πράξεις τους είναι στο κέντρο της μαθηματικής εκπαίδευσης όλων των βαθμίδων, από το δημοτικό μέχρι το τέλος του λυκείου, τόσο ως απαραίτητο στοιχείο μαθηματικού γραμματισμού, όσο και ως θεμελιώδεις ιδέες για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και γνώσης. Η σταδιακή επέκταση από τους φυσικούς στους ακέραιους, στους ρητούς και στους πραγματικούς παρέχει ευκαιρίες ανάπτυξης της μαθηματικής δραστηριότητας, από την μέτρηση μέχρι την διατύπωση αλγεβρικών σχέσεων και συναρτήσεων, ενώ παράλληλα συμβάλλει στην ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού και στην ικανότητας παρακολούθησης και παραγωγής μαθηματικής επιχειρηματολογίας και απόδειξης. Εξ άλλου, τουλάχιστον στην παρούσα φάση του πολιτισμού οι πραγματικοί αριθμοί και οι παραφυάδες τους είναι το κύριο επιστημονικό εργαλείο του ανθρώπου για να κατανοήσει την φύση που τον περιβάλει και τα κοινωνικά φαινόμενα που δημιουργεί. Μπορούμε να πούμε ότι οι Πυθαγόρειες αντιλήψεις, για την ώρα, καλά κρατούν!

Ποιές είναι οι σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο των Πραγματικών Αριθμών;

- Πολλές φορές το αποτέλεσμα μιας μέτρησης δεν μπορεί να εκφραστεί με ρητό αριθμό και αυτός είναι ένας λόγος που χρειαζόμαστε τους άρρητους αριθμούς.
- Κάθε πραγματικός αριθμός (ρητός ή άρρητος) μπορεί να παρασταθεί με ένα ακριβώς σημείο στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και αντιστρόφως, κάθε σημείο ενός άξονα αντιστοιχεί σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό.
- Μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών υπάρχουν άπειροι το πλήθος πραγματικοί αριθμοί.
- Η αλήθεια μιας πρότασης βεβαιώνεται με αποδεικτική διαδικασία.

- Επιλύουμε μια εξίσωση $1^{ου}$ βαθμού, απομονώνοντας τον άγνωστο με εφαρμογή των ιδιοτήτων των πράξεων.
- Η σύγκριση δυο πραγματικών αριθμών μπορεί να γίνει και με το πρόσημο της διαφοράς τους.
- Η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών εκφράζει την απόσταση των αριθμών αυτών πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Πραγματικοί αριθμοί - Πράξεις πραγματικών

Ε1 Ποιά είναι η διαφορά μεταξύ ενός ρητού και ενός άρρητου αριθμού;
Ε2 Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα σε δύο ρητούς;
Ε3 Ποιές είναι οι ιδιότητες των πράξεων των πραγματικών αριθμών;
Ε4 Για τις διάφορες τιμές των α, β πότε η εξίσωση αx=β 0 έχει μία λύση, πότε είναι αδύνατη και πότε έχει άπειρες λύσεις;
Ε5 Ποιές μεθόδους χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε μια πρόταση;
Ε6 Ποιά είναι η διαφορά μιας συνεπαγωγής από μια ισοδυναμία;

Διάταξη στους πραγματικούς αριθμούς

Ε7 Πως μπορούμε να συγκρίνουμε δύο αριθμούς α και β;
Ε8 Ποιες ιδιότητες έχει η διάταξη των πραγματικών αριθμών;
Ε9 Ποιες είναι οι ομοιότητες και ποιές οι διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας;

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Ε10 Ποιός είναι ο αλγεβρικός ορισμός της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού;
Ε11 Με τι ισούται η απόσταση δύο αριθμών πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών;
Ε12 Ποιές είναι οι βασικές ιδιότητες των απολύτων τιμών;

Ρίζες πραγματικών αριθμών

Ε13 Ποιος είναι ο αλγεβρικός ορισμός της ν-οστής ρίζας μη αρνητικού αριθμού;
Ε14 Ποιές είναι οι ιδιότητες του γινομένου και του πηλίκου ν-στων ριζών;
Ε15 Πότε μια εξίσωση $x^ν$ =α έχει δύο, μία ή καμία λύση;

Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά το τέλος της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να :

Πραγματικοί αριθμοί -Πράξεις πραγματικών

Μ1 Να διακρίνουν τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς στις διάφορες μορφές αναπαράστασής τους και να ταξινομούν συγκεκριμένους αριθμούς στα σύνολα N, Z, Q και R. (στόχοι Π.Σ, 2.1.1)
Μ2 Να διερευνούν την έννοια της πυκνότητας στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών . (στόχοι Π.Σ, 2.1.2)
Μ3 Να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών στην απόδειξη προτάσεων, την επίλυση εξίσωσαν $1^{ου}$ βαθμού και τύπων από τη Φυσική/Χημεία. (στόχοι Π.Σ, 2.2.1)
Μ4 Να εφαρμόζουν διάφορες αποδεικτικές μεθόδους για την απόδειξη προτάσεων. (στόχοι Π.Σ, 2.2.3)

Διάταξη στους πραγματικούς αριθμούς

Μ5 Να διατάσσουν πραγματικούς αριθμούς.
Μ6 Να αποδεικνύουν και να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες της διάταξης. (στόχοι Π.Σ, 2.3.1)
Μ7 Να εντοπίζουν ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας. (στόχοι Π.Σ, 2.3.1)
Μ8 Να χρησιμοποιούν διαστήματα για να συμβολίσουν σύνολα που προσδιορίζονται από ανισωτικές σχέσεις. (στόχοι Π.Σ, 2.3.1)

Μ9 Να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες της διάταξης για να λύνουν ανισώσεις $1^{ου}$ βαθμού και προβλήματα με ανισώσεις $1^{ου}$ βαθμού. (στόχοι Π.Σ, 2.3.2).

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Μ10 Να γνωρίζουν τον ορισμό και τη γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού. (στόχοι Π.Σ, 2.4.1)

Μ11 Να αναγνωρίζουν την $|α-β|$ ως την απόσταση των αριθμών α, β πάνω στον άξονα. (στόχοι Π.Σ, 2.4.1)

Μ12 Να γνωρίζουν και να αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες των απολύτων τιμών. (στόχοι Π.Σ, 2.4.2)

Μ13 Να επιλύουν απλές εξισώσεις, ανισώσεις και προβλήματα με απόλυτες τιμές. (στόχοι Π.Σ, 2.4.3)

Ρίζες πραγματικών αριθμών

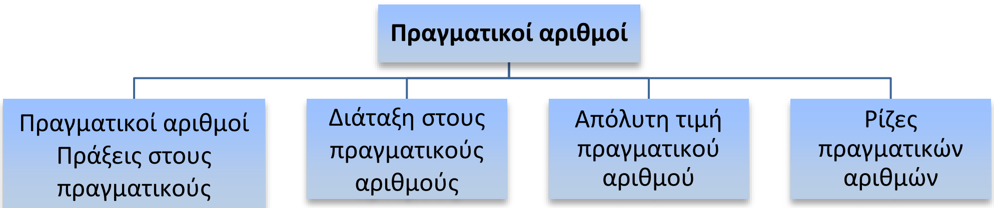
Μ14 Να γνωρίζουν τον ορισμό της ν-όστις ρίζας μη αρνητικού αριθμού. (στόχοι Π.Σ, 2.5.1)

Μ15 Να αποδεικνύουν τις των ν-στων ριζών και να τις χρησιμοποιούν στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων. (στόχοι Π.Σ, 2.5.2)

Μ16 Να επιλύουν εξισώσεις της μορφής $x^ν = α$ ($α \in R$ και ν ακέραιος). (στόχοι Π.Σ, 2.5.3)

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου των Πραγματικών Αριθμών

Όσα αναφέρονται στη συνέχεια είναι προτεινόμενα ώστε ο διδάσκων να διαθέτει μία οργανωμένη πρόταση διδασκαλίας.
Κατά αρχήν καλό θα είναι ο διδάσκων να διαθέτει μία γενική εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η διδασκαλία του κεφαλαίου όπως η παρακάτω.



Με βάση τα μαθησιακά αποτελέσματα και τα ερωτήματα στα οποία θα πρέπει να μπορεί να απαντά ο μαθητής μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας των συνόλων, θα επισημαίναμε ότι :

- **Πραγματικοί αριθμοί**

Στο Γυμνάσιο οι μαθητές γνώρισαν τους άρρητους αριθμούς ως τους αριθμούς που δεν μπορούν να γραφούν ως ρητοί, δηλαδή με μορφή κλάσματος με ακέραιους όρους ή ως δεκαδικοί τερματιζόμενοι ή περιοδικοί. Με διαδοχικές δοκιμές, είτε με μικροϋπολογιστή τσέπης, μπορούσαν να βρουν προσεγγίσεις άρρητων αριθμών της μορφής $\sqrt{α}$ όπου α ακέραιος και χρησιμοποίησαν τις τετραγωνικές ρίζες στην εύρεση του μήκους της πλευράς τετραγώνου με γνωστό εμβαδόν ή ορθογωνίου τριγώνου με γνωστές τις δύο άλλες πλευρές του, με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος. Στην τάξη αυτή, θα εμβαθύνουν στις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

1) Διάκριση των ρητών από τους άρρητους

Οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους, εξ αιτίας των διαφορετικών αναπαραστάσεων των πραγματικών αριθμών, οι οποίες επηρεάζουν την παραπάνω διεργασία. Για το λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους, με χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων, καθώς και στην ταξινόμηση συγκεκριμένων αριθμών στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών.

(Προτεινόμενη δραστηριότητα η Δ3 του Π.Σ)

2) Οι έννοιες της «πυκνότητας» και της «διαδοχικότητας» στα βασικά σύνολα των πραγματικών αριθμών

Οι μαθητές συναντούν μεγάλες δυσκολίες στην κατανόηση της δομής των ρητών αριθμών σε αντίθεση με αυτής των φυσικών όπου δεν παρουσιάζονται ιδιαίτερα προβλήματα. Πολλοί ερευνητές θεωρούν ως πηγή των δυσκολιών αυτών τη καταχρηστική μεταφορά της γνώσης τους από το πεδίο των φυσικών αριθμών στο πεδίο του συνόλου των ρητών. Μια βασική διαφορά του συνόλου των ρητών αριθμών και κατά συνέπεια και των πραγματικών αριθμών είναι η πυκνή δομή τους. Δηλαδή ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι στο πλήθος ρητοί αριθμοί[2].

Μια ακόμα δυσκολία που συναντούν οι μαθητές στην κατανόηση της δομής των ρητών αριθμών, σχετίζεται με τη«διαδοχικότητα» στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών και αφορά την ανυπαρξία του «επόμενου αριθμού» στους ρητούς. Η συνειδητοποίηση ότι για κάθε ρητό αριθμό δεν υπάρχει ένας επόμενος ρητός αριθμός αναστέλλεται από το ότι δεν ισχύει η πρόταση αυτή στους φυσικούς αριθμούς και γι αυτό απαιτείται ριζική εννοιολογική αλλαγή (Merenluoto & Lehtinen 2002).

Με τη δραστηριότητα Δ4 του Π.Σ επιδιώκεται να διερευνηθεί το θέμα της «πυκνότητας» των πραγματικών αριθμών. Οι μαθητές, μέσα από παραδείγματα με συγκεκριμένους αριθμούς θα διαπιστώσουν ότι ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε ρητούς μπορούμε πάντα να βρούμε ένα ρητό, το ημιάθροισμά τους και θα καταλήξουν ότι *μεταξύ δυο ρητών υπάρχουν και άλλοι, άπειροι στο πλήθος ρητοί.* Εκείνο που έχει σημασία και πρέπει να τονισθεί είναι ότι λόγω της πυκνότητας του Q στο R, μπορούμε να προσεγγίσουμε όσο θέλουμε έναν άρρητο με ρητό αριθμό, κάτι που γίνεται με τη χρήση υπολογιστή. *Στην επόμενη τάξη η πυκνότητα των ρητών αριθμών χρησιμοποιείται έμμεσα για τον ορισμό δύναμης με άρρητο εκθέτη* (προσδιορισμός της δύναμης με άρρητο εκθέτη από την ακολουθία των δεκαδικών προσεγγίσεων του άρρητου).

Επιπλέον με τη δραστηριότητα Δ3 του Π.Σ, *θα διερευνήσουν* τις έννοιες της «διαδοχικότητας» στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών *και θα καταλήξουν ότι δεν υπάρχει ο επόμενος ρητός αριθμός (ο «αμέσως μεγαλύτερος») ενός δοθέντος ρητού αριθμού, αφού μεταξύ του 5/8 και του α υπάρχει πάντα ένας ρητός (ερώτηση β).*

Ως προς τη λέξη «διαδοχικότητα» στους ρητούς, γνωρίζουμε ότι οι ρητοί είναι αριθμήσιμο σύνολο και *επομένως μπορούν να παρασταθούν ως όροι ακολουθίας. Αυτό σημαίνει ότι ο καθένας, ως όρος της ακολουθίας έχει επόμενο, χωρίς βέβαια αυτό να σημαίνει και «αμέσως» μεγαλύτερο.*

- **Πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς**

1) Ιδιότητες των πράξεων των πραγματικών αριθμών

Για τον αλγεβρικό λογισμό είναι σημαντικό οι μαθητές να κατανοήσουν τις ιδιότητες των πράξεων των πραγματικών αριθμών. Σε αυτό θα βοηθήσει η διερεύνηση των ιδιοτήτων τους. Ιδιαίτερη έμφαση να δοθεί στις ιδιότητες $\alpha\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ *ή* $\beta=0$ και $\alpha\cdot\beta\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0 \text{ και } \beta\neq 0$ οι οποίες συμβάλλουν στο να χρησιμοποιούν οι μαθητές σωστά τους συνδέσμους «ή» και «και» καθώς και το σύμβολο της ισοδυναμίας.

<u>*Προτεινόμενη δραστηριότητα*</u>

Για ποιές τιμές του x αληθεύουν οι εξισώσεις:

α) $x(x-2) = 0$, β) $(x^2- x)(x^2- 1) = 0$

2) Οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των πράξεων των πραγματικών αριθμών για την απόδειξη προτάσεων, όπως τις ιδιότητες των αναλογιών, την επίλυση εξισώσεων 1[ου] βαθμού, των τύπων της Φυσικής/Χημείας καθώς και προβλημάτων με εξισώσεις 1[ου] βαθμού.

(Παράδειγμα δραστηριότητας η Δ7 του Π.Σ)

[2] Η απόδειξη της πυκνότητας του συνόλου των πραγματικών αριθμών περιέχεται στα πανεπιστημιακά βιβλία του Απειροστικού Λογισμού. Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε. (1992). Απειροστικός Λογισμός. Τόμος Ι σελ 34.

Οι μαθητές συναντούν δυσκολίες στη μετάβαση από την επίλυση μιας εξίσωσης $1^{ου}$ βαθμού της οποίας οι συντελεστές α και β είναι συγκεκριμένοι αριθμοί, στην επίλυση της γενικής μορφής αx+β=0, επειδή είναι δύσκολος ο διαχωρισμός της έννοιας της παραμέτρου από την έννοια της μεταβλητής και επιπλέον δεν είναι εξοικειωμένοι με τη διαδικασία της διερεύνησης. Για αυτό μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να λύσουν αρχικά παραμετρικές εξισώσεις για συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου και στη συνέχεια να προσπαθήσουν να διατυπώσουν γενικά συμπεράσματα για κάθε τιμή της παραμέτρου.

Προτεινόμενη δραστηριότητα:

Να λυθούν οι εξισώσεις : $(λ-1)x = λ-1$ και $(λ-2)x = λ$

α) για λ= -1, λ=0, λ=1, λ=2, λ=3

β) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.

3) Μέθοδοι απόδειξης

Η απόδειξη αποτελεί το κύριο χαρακτηριστικό των μαθηματικών και έχει πρωτεύοντα ρόλο σε όλα τα επίπεδα διδασκαλίας τους. Άλλωστε ένας από τους κεντρικούς στόχος που διαπερνά το Π.Σ, είναι η ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού, η ικανότητα παρακολούθησης και παραγωγής μαθηματικής επιχειρηματολογίας και η απόδειξη. Στο λύκειο η απόδειξη είναι περισσότερο αυστηρή από ότι στις άλλες τάξεις και οι μαθητές ασκούνται στο να εφαρμόζουν διάφορες αποδεικτικές μεθόδους (ευθεία απόδειξη, απαγωγή σε άτοπο, αντιπαράδειγμα) για να επιβεβαιώσουν την αλήθεια των προτάσεων.

Στα μαθηματικά του προσανατολισμού οι μαθητές θα διδαχθούν μια ακόμη μέθοδο απόδειξης την Επαγωγή.

Οι μαθητές σε προηγούμενες τάξεις έχουν αποδείξει την ισχύ απλών αλγεβρικών προτάσεων π.χ ταυτοτήτων. Για να τις αποδείξουν έχουν χρησιμοποιήσει ως μοναδική μέθοδο απόδειξης, την <u>Ευθεία απόδειξη</u>. Στην τάξη αυτή θα εφαρμόσουν επιπλέον τη μέθοδο της Απαγωγής σε Άτοπο και θα χρησιμοποιήσουν το Αντιπαράδειγμα.

<u>Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο</u>

Η μέθοδος της απαγωγής σε άτοπο δεν χρησιμοποιείται μόνο στα Μαθηματικά, αλλά συνιστά ευρύτερα τη συλλογιστική εκείνη μέθοδο με την οποία αποδεικνύεται η αλήθεια μιας πρότασης με βάση το γεγονός ότι η αντίθετή της είναι ψευδής ή λανθασμένη.

Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να αποδείξουμε την πρόταση «αν για ένα ακέραιο α ο $α^2$ είναι περιττός, τότε και ο α είναι περιττός». Αν υποθέσουμε ότι ο α είναι άρτιος, δηλαδή α=2κ, τότε $α^2=4λ^2= 2\cdot 2λ^2$, που είναι άρτιος, άτοπο. Αυτό σημαίνει ότι ο α είναι περιττός.

(Μπορεί να δοθεί ως εργασία στους μαθητές να αποδείξουν την πρόταση και με ευθεία απόδειξη:

Έχουμε : $α^2=2ν-1$, $α^2-1=2ν$, $(α+1)(α-1)=2ν$, $α+1=2λ$ ή $α-1=2ρ$, $α=2λ-1$ ή $α=2ρ+1$

που σημαίνει ότι ο α είναι περιττός. Η αντιπαραβολή των δυο μεθόδων αναδεικνύει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα καθεμίας).

Η απόδειξη ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, είναι δύσκολη για τους μαθητές γιατί χρησιμοποιούνται στοιχεία της θεωρίας αριθμών. Χρησιμοποιούνται όροι, συμβολισμοί και κυρίως ιδέες με τις οποίες δεν είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές (π.χ ο συμβολισμός του ρητού ως κλάσμα δύο φυσικών αριθμών κ, λ και του άρτιου αριθμού ως 2μ, αλλά και η έννοια του ανάγωγου κλάσματος ως του κλάσματος που έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις). Γι αυτό η απόδειξη, προτείνεται, να γίνει στη τάξη αφού πρώτα εξηγηθούν οι έννοιες αυτές.

<u>Απόδειξη με αντιπαράδειγμα</u>

Για να καταρρίψουμε έναν ισχυρισμό, αρκεί να βρούμε ένα μόνο παράδειγμα, που να έρχεται σε αντίθεση με τον ισχυρισμό. Σε αυτήν την περίπτωση, το παράδειγμα που χρησιμοποιούμε λέγεται αντιπαράδειγμα.

Το αντιπαράδειγμα στα Μαθηματικά και στη Λογική, ελέγχει υποθέσεις ως προς την καθολική ισχύ τους. Χαρακτηριστική είναι μια γλαφυρή αρχαία χρήση του αντιπαραδείγματος. Το περιστατικό που

αναφέρει ο Διογένης ο Λαέρτιος στο έργο του «*Βίοι Φιλοσόφων*», αποδίδεται στο Διογένη τον Κυνικό, ο οποίος θέλοντας να γελοιοποιήσει τον λανθασμένο ισχυρισμό του Πλάτωνα περί ανθρώπου, «*όν άπτερον δίπουν*», ξεπουπούλιασε έναν κόκορα και τον πήγε στην σχολή του Πλάτωνος λέγοντας, «*Ιδού ο άνθρωπος του Πλάτωνος*!». Ο Πλάτωνας υποχρεώθηκε τότε να διορθώσει τον ορισμό του, προσθέτοντας μια επί πλέον προϋπόθεση να είναι και ... πλατυώνυξ! Βεβαίως και ένας πίθηκος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως αντιπαράδειγμα στον ήδη «διορθωμένο» ορισμό του Πλάτωνος, αλλά δεν μας λέει τίποτε γι αυτό ο Διογένης ο Λαέρτιος!
Τα αντιπαραδείγματα έχουν παίξει πολύ σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη των μαθηματικών. Οι διάφορες προτάσεις που σήμερα διδάσκονται φορμαλιστικά και προσεγμένα, διαμορφώθηκαν μέσα από διαδικασίες που περιέχουν εικασίες και αντιπαραδείγματα.

<u>Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>
Οι παρακάτω προτάσεις είναι λανθασμένες. Για την κάθε μια από αυτές να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα.

α) Αν $x < 1$ τότε $x^2 < 1$

(Αν x=-2, τότε $(-2)^2=4>1$, επομένως η πρόταση είναι λανθασμένη).

β) Αν ο x είναι πραγματικός αριθμός, διάφορος του μηδενός, μεταξύ του -2 και του 2, τότε ο αντίστροφός του θα είναι μεταξύ του $-\frac{1}{2}$ και του $\frac{1}{2}$.

<u>Σχόλιο</u> Οι μαθητές μπορούν να δείξουν ότι η πρόταση δεν είναι αληθής είτε με αντιπαράδειγμα είτε με ευθεία απόδειξη.

<u>Με αντιπαράδειγμα</u> : Αν x=1, τότε $\frac{1}{x}=1$ που είναι εκτός του διαστήματος $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, επομένως πρόταση είναι λανθασμένη.

<u>Με ευθεία απόδειξη</u> : Έχουμε: $-2< x <2, x \neq 0 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$ ή $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$

Φανερώνεται έτσι το γεγονός ότι πολλές φορές μια άλλη απόδειξη μας δίνει μια με βαθύτερη κατανόηση του θέματος.
Στην αποδεικτική διαδικασία οι διάφορες μορφές των αποδείξεων παρουσιάζουν διαφορετικές παιδαγωγικές ιδιότητες και διδακτικές λειτουργίες (G. Hanna & M. De Villiers, 2008).

Κατά την αποδεικτική διαδικασία οι μαθητές πρέπει να μπορούν να διακρίνουν την ισοδυναμία από τη συνεπαγωγή και με αντιπαραδείγματα να αιτιολογούν γιατί δεν ισχύει η ισοδυναμία, σε ορισμένες περιπτώσεις. Για παράδειγμα συζητούν το νόημα της συνεπαγωγής $α=β \Rightarrow α^2=β^2$, διατυπώνουν το αντίστροφο και διερευνούν την ισχύ του (με ευθεία απόδειξη ή και με χρήση αντιπαραδείγματος).

<u>Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>
Για τους δοσμένους περιορισμούς, να εξετάσετε αν για τις προτάσεις Α και Β, ισχύει η συνεπαγωγή Α $\Leftrightarrow$ Β, ή μια από τις ισοδυναμίες Α $\Rightarrow$ Β και Β $\Rightarrow$ Α

Περιορισμοί	Πρόταση Α	Πρόταση Β
Αν $x, y \in R$	$x = y$	$x^2 = y^2$
Αν $x, y \in R$	$x y = 0$	$x = 0$ ή $y = 0$
Αν $x, y \in R$	$x y = 1$	$x = 1$ και $y = 1$
Αν $x \in R$	$x \leq 3$	$x^2 \leq 9$
Αν $x \in [0, +\infty)$	$x \leq 3$	$x^2 \leq 9$
Αν x μη μηδενικός πραγματικός αριθμός	$\frac{1}{x} > -1$	$x < -1$
Αν $x \in [0, +\infty)$	$x > 5$	$\sqrt{x} > \sqrt{5}$
Αν $x \in R$ και $y \in [0, +\infty)$	$x^2=y$	$x > \sqrt{y}$

- **Διάταξη στους πραγματικούς αριθμούς**

1) Αφού οριστεί η διάταξη μεταξύ πραγματικών αριθμών, οι μαθητές διερευνούν, τις ιδιότητες της διάταξης. Με αντιπαραδείγματα εντοπίζουν ομοιότητες και διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας.
Έμφαση να δοθεί στις ισοδυναμίες : $\alpha^2+\beta^2=0$ α=0 και β=0, ενώ $\alpha^2+\beta^2>0 \Leftrightarrow \alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$

<u>Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>
Βρείτε ένα αντιπαράδειγμα για δείξετε ότι δεν μπορούμε:
α) να αφαιρέσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες της ίδιας φοράς,
β) να διαιρέσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες τις ίδιας φοράς, με θετικούς όρους.

Οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες της διάταξης για να αποδεικνύουν ανισότητες

<u>Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>

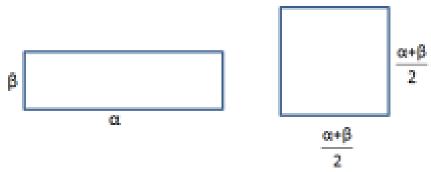
Να χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1) Αν $\alpha > 2$ και $\beta > 5$ τότε $\alpha\beta > 10$
2) Αν $\mu > 5$ και $\nu > -2$ τότε $\mu + \nu > 3$
3) Αν $\alpha > -4$ τότε $\alpha^2 > 16$
4) Αν $\frac{\alpha}{\beta} > 2$ τότε $\alpha > 2\beta$
5) Αν $\alpha - \beta > 0$ και $\alpha, \beta \in R^+$ τότε $\alpha^2 - \beta^2 > 0$
6) Αν $\alpha < \beta < 0$, τότε $\alpha^2 < \beta^2$
7) Αν $\alpha^2 > \alpha\beta$, τότε $\alpha > \beta$
8) Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha - \gamma > \beta - \delta$

<u>Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>

i) Να δείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει $\frac{\alpha+\beta}{2} \le \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$

ii) Να δείξετε ότι το εμβαδόν ορθογωνίου με πλευρές α και β είναι μικρότερο ή ίσο από το εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά $\frac{\alpha+\beta}{2}$



iii) Να δείξετε ότι μεταξύ δύο αριθμών α, β με α < β βρίσκεται πάντα το ημιάθροισμά τους,
$\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$
<u>Σχόλιο :</u> Οι μαθητές χρησιμοποίησαν την πρόταση αυτή, προκειμένου να αποδείξουν την πυκνότητα των ρητών.

2) Οι μαθητές, στο Γυμνάσιο, έχουν διαπραγματευθεί αναλυτικά την επίλυση ανισώσεων 1ου βαθμού της μορφής $\alpha x > \beta$ ή $\alpha x < \beta$ με συγκεκριμένους συντελεστές α και β. Εκτός από τη χρήση της αριθμογραμμής, για την απεικόνιση του συνόλου λύσεων μιας ανίσωσης, προτείνεται να δοθεί έμφαση και στη χρήση των διαστημάτων των πραγματικών αριθμών για την παραπάνω απεικόνιση. Επιπλέον θα πρέπει να συζητηθούν στην τάξη ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στην εξίσωση και την ανίσωση, ως προς τη διαδικασία της επίλυσής τους και το σύνολο των λύσεών τους. Θα πρέπει επίσης να χρησιμοποιούν τη διάταξη και τις ιδιότητες της για να λύνουν προβλήματα με ανισώσεις 1ου βαθμοΠροτεινόμενη
<u>Προτεινόμενη *Δραστηριότητα*</u>
Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Από μετρήσεις έχει βρεθεί ότι για τα μήκη x και y ισχύει : $4{,}12 < x < 4{,}14$ και $2{,}1 < y < 2{,}24$.
- Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
- Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Αντίστοιχη εφαρμογή υπάρχει και στο Φωτόδενδρο με τίτλο : Ιδιότητες των ανισοτήτων.
Μικροπείραμα για την κατανόηση πράξεων με ανισότητες.
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1882

- **Απόλυτη τιμή παραγματικού αριθμού**

1) Οι μαθητές έχουν γνωρίσει στο Γυμνάσιο, την απόλυτη τιμή ενός αριθμού ως την απόστασή του από το μηδέν, στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Στην ενότητα αυτή δίνεται ο αλγεβρικός ορισμός της απόλυτης τιμής και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητές της. Η γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής ενός αριθμού και της απόλυτης τιμής της διαφοράς δύο αριθμών είναι σημαντική, γιατί βοηθά τους μαθητές στην αισθητοποίηση της έννοιας. Η σύνδεση, όμως, της αλγεβρικής σχέσης και της γεωμετρικής της αναπαράστασης δεν είναι κάτι που γίνεται εύκολα κατανοητό από τους μαθητές και γι αυτό απαιτείται να δοθεί σε αυτό ιδιαίτερη έμφαση.

Η γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής ενός αριθμού θα βοηθήσει τους μαθητές στην κατανόηση και ερμηνεία των λύσεων της εξίσωσης $|x| = \vartheta$ και των ανισώσεων $|x| < \vartheta$ και $|x| > \vartheta$ που απορρέουν από τον ορισμό της.
Ομοίως η παρουσίαση και η λύση εξισώσεων και ανισώσεων με απολυτές τιμές πρέπει να συνοδεύεται από τη γεωμετρική τους ερμηνεία ώστε οι μαθητές να μην ενεργούν μηχανικά, αδιαφορώντας για το μαθηματικό περιεχόμενο των όσων γράφουν. Για παράδειγμα η ανίσωση $|x+5| \leq 4$, πρέπει να διατυπωθεί και λεκτικά ως εξής: «Να βρεθούν οι τιμές του x, οι οποίες δεν απέχουν από το -5 περισσότερο από 4 μονάδες». Ομοίως το ζητούμενο στην εξίσωση $|x-3|+|x+5|=8$ πρέπει να διατυπωθεί και λεκτικά ως εξής: «Να βρεθούν οι τιμές του x των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τους 3 και -5 είναι 8 μονάδες»

Προτεινόμενη δραστηριότητα
Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Διάστημα ή ένωση διαστημάτων	Ανισώσεις	Αναπαράσταση στον άξονα	Ανίσωση με απόλυτα
$(-\infty, 3] \cup [5, +\infty)$			$\|x-4\|$ … 1
	$-2 \leq x \leq 2$		
			$\|x+3\| < 0,01$
	$x \leq -\frac{1}{3}$ ή $x > \frac{4}{7}$		

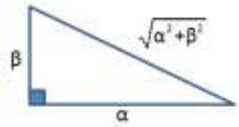
Πιθανά λάθη – Παρανοήσεις στην απόλυτη τιμή:
- Με αντιπαραδείγματα να αντιμετωπισθούν τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών οι οποίοι συχνά πιστεύουν ότι ισχύει πάντα $|-\alpha| = \alpha$ και $|\alpha+\beta| = |\alpha|+|\beta|$.
- Ένα από τα συνηθισμένα λάθη των μαθητών στις απόλυτες τιμές είναι ότι προκειμένου να γράψουν μια παράσταση χωρίς την απόλυτη τιμή δεν εξετάζουν το πρόσημο της παράστασης που είναι μέσα στο απόλυτο αλλά το πρόσημο της μεταβλητής. Γράφουν για παράδειγμα : $|x-3| = x-3$ αν $x \geq 0$ και $|x-3| = -x+3$ αν $x \leq 0$.

- **Ρίζες πραγματικών αριθμών**

Οι μαθητές έχουν ήδη μελετήσει, στο Γυμνάσιο, την τετραγωνική ρίζα και τις ιδιότητές των τετραγωνικών ριζών. Στην ενότητα αυτή γίνεται επέκταση στη ν-οστή ρίζα.

Αφού οριστεί η ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού α ως η μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^{\nu} = α$, οι μαθητές αποδεικνύουν τις ιδιότητες γινομένου και πηλίκου ν-οστών ριζών, κατ' αναλογία προς τις τετραγωνικές ρίζες και τις χρησιμοποιούν για την απλοποίηση μιας αλγεβρικής παράστασης. Με αντιπαραδείγματα να αντιμετωπισθούν τα λάθη και οι παρανοήσεις των μαθητών οι οποίοι αντί των $\sqrt{α^2}=|α|$ και $\sqrt{α^2+β^2} \leq α+β$, όπου $α \geq 0$ και $β \geq 0$ συχνά πιστεύουν ότι ισχύει πάντα $\sqrt{α^2}=α$ και $\sqrt{α^2+β^2}=α+β$.

Για την $\sqrt{α^2+β^2} \leq α+β$, όπου $α \geq 0$ και $β \geq 0$, μπορεί να δοθεί και η γεωμετρική της ερμηνεία, η οποία στηρίζεται στην τριγωνική ανισότητα:



Τέλος, εφαρμόζουν τις τεχνικές επίλυσης και τις ιδιότητες των δυνάμεων και των ριζών για τη λύση απλών εκθετικών εξισώσεων, όπως $x^3= 8$, $x^3= -8$, $x^4= 81$, $x^4= -81$ και για την επίλυση τύπων.

Αξιοποίηση της Τεχνολογίας στη διδασκαλία του κεφαλαίου

Η εννοιολογική κατανόηση των περιεχομένων του κεφαλαίου των πραγματικών αριθμών, μπορεί να υποστηριχθεί με νέες τεχνολογίες, με τη βοήθεια των οποίων οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν σε ουσιαστικές μαθηματικές δραστηριότητες. Μέσα από τη διερεύνηση μπορούν οι μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα έννοιες και διαδικασίες, με την προϋπόθεση βέβαια ότι δεν έχουν το ρόλο του θεατή, αλλά μετέχουν ενεργά στη διαδικασία.

Ενδεικτικά παραδείγματα

- *Γεωμετρική απεικόνιση άρρητων αριθμών*
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1870

- *Λύση ανισώσεων* απολύτων τιμών με τη χρήση της αριθμογραμμής
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1885

- Γραφική επίλυση ανισώσεων με απόλυτη τιμή
  http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5280

- Γεωμετρική επίλυση ανισώσεων με απόλυτες τιμές
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1886

Ιστορικές συνδέσεις :

Η πρώτη κρίση στα Μαθηματικά, σύμφωνα με την παράδοση, εμφανίστηκε όταν ο Πυθαγόρειος Ίππασος ο Μεταπόντιος (450 π.Χ περίπου) «αποκάλυψε» ότι υπάρχουν μεγέθη, όπως η υποτείνουσα τετραγώνου, τα οποία δεν μπορούν να εκφραστούν στα πλαίσια των φυσικών αριθμών.

- Van der Waerden (2000). Η Αφύπνιση της Επιστήμης, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.
- Dirk Sruik (1982). Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών, εκδ Ζαχαρόπουλος, Αθήνα.
- Thomas L. Heath (2001). Η ιστορία των ελληνικών μαθηματικών, τόμος Ι, Από τον Θαλή στον Ευκλείδη, Κ.Ε.Ε.Ε , Αθήνα.
- http://www.cut-the-knot.org/proofs/sq_root.shtml

Βιβλιογραφία

- G. Hanna & M. De Villiers eds (2008). Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study.
- Merenluoto L. , Lehtinen E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In: M. Limon & Mason (Eds), reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice (233-258). Dordrecht, The Nederlands: Kluwer.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - Συναρτήσεις

Τι περιέχει το κεφάλαιο των Συναρτήσεων και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών;

Στο Γυμνάσιο οι μαθητές έχουν ασχοληθεί με φαινόμενα συμμεταβολής μεγεθών και με προβλήματα αναλόγων και αντιστρόφως αναλόγων ποσών και έχουν εκφράσει τις σχέσεις μεταξύ των ποσών αυτών με συναρτήσεις.
Στην τάξη αυτή μελετούν την έννοια της συνάρτησης με πιο συστηματικό και τυπικό τρόπο (τυπικός συμβολισμός, πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, διαστήματα μονοτονίας, ακρότατα, σημεία τομής με τους άξονες, άξονες συμμετρίας, κ.ά) δίνοντας έμφαση στη σύνδεση μεταξύ των διαφόρων αναπαραστάσεων της. Στο πλαίσιο αυτό μελετούν τις βασικές συναρτήσεις $f(x)=αx+β$, $f(x)= αx^2$ και $f(x)=αx^2+βx+γ$.

Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο των Συναρτήσεων;

Η συνάρτηση είναι μια από τις πιο σημαντικές έννοιες των Μαθηματικών με τις οποίες έρχονται σε επαφή οι μαθητές κατά τη διάρκεια των σπουδών τους. Είναι θεμελιώδης μαθηματική έννοια η οποία διαπερνά τυπικά και άτυπα όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, δημιουργεί ένα πλούσιο πεδίο αναπαραστάσεων, ενοποιεί πολλές περιοχές των μαθηματικών, αλλά και άλλων γνωστικών πεδίων και αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο με το οποίο μπορεί να μελετηθεί μια ποικιλία θεμάτων στα Μαθηματικά (εξισώσεις, συστήματα κ.ά). Σε όλους σχεδόν τους κλάδους των σύγχρονων Μαθηματικών, οι συναρτήσεις αποδεικνύονται το κεντρικό αντικείμενο μελέτης. Για κάθε αντικείμενο που εξετάζεται δεν αρκεί απλά να γνωρίζουμε από τι εξαρτάται, ή ποιοι είναι οι παράμετροι που επιδρούν καταλυτικά στη διαμόρφωσή του, είναι απαραίτητο να καταλήγουμε στη σχέση και τις τιμές των παραμέτρων. Η διδασκαλία της έννοιας της συνάρτησης συμβάλλει στη μελέτη και κατανόηση του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλονται δύο μεγέθη που σχετίζονται μεταξύ τους, καθώς και στην οργάνωση και αναπαράσταση της σχέσης αυτής. Η καλλιέργεια της γνώσης αυτής βοηθά τους μαθητές στην κατανόηση του κόσμου που τους περιβάλλει, ενός κόσμου γεμάτου από πολύπλοκα συστήματα αλληλο-εξαρτώμενων μεγεθών (φυσικά, οικονομικά, κοινωνικά, κ.ά). Η έννοια της συνάρτησης άλλωστε γεννήθηκε ως αποτέλεσμα μιας μακρόχρονης αναζήτησης ενός μαθηματικού μοντέλου των φυσικών φαινομένων που περιλαμβάνουν μεταβλητές ποσότητες.

Ποιές είναι οι σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο των Συναρτήσεων

- Η συνάρτηση εκφράζει τη διαδικασία συμμεταβολής δυο μεγεθών.
- Μιας συνάρτηση μπορεί να μελετηθεί και μέσω της γραφικής της παράστασης.
- Οι ποιοτικές ιδιότητες μιας συνάρτησης είναι η μονοτονία, τα ακρότατα, και οι συμμετρίες.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=αx^2+βx+γ,\ α\neq 0$ είναι αποτέλεσμα μετατοπίσεων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=αx^2,\ α\neq 0$

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

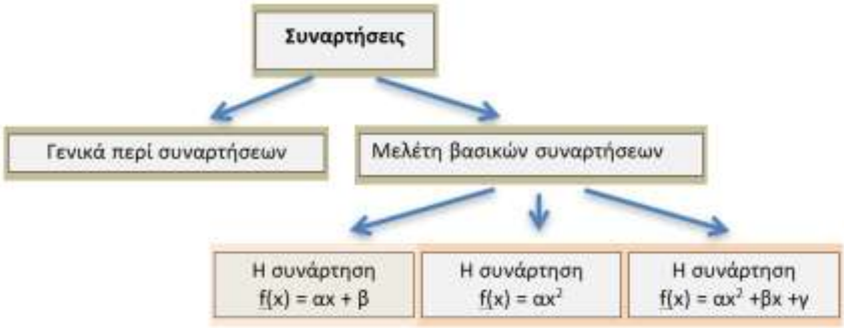
Ε1 Πότε μια διαδικασία αντιστοίχισης από το σύνολο Α στο σύνολο Β λέγεται συνάρτηση;
Ε2 Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να αναπαραστήσουμε μια συνάρτηση;
Ε3 Ποιός είναι ο ρόλος των παραμέτρων α, β στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx + β$;
Ε4 Πότε μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = αx + β$ είναι αύξουσα και πότε φθίνουσα;
Ε5 Ποιός είναι ο άξονας συμμετρίας της συνάρτησης $f(x)= αx^2$;
Ε6 Ποιός είναι ο ρόλος της παραμέτρου α στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $= αx^2$;
Ε7 Σε ποιά διαστήματα η συνάρτησης $f(x)= αx^2$ διατηρεί τη μονοτονία της και ποιά είναι η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της;
Ε8 Ποιά μετατόπιση της γραφική παράσταση της συνάρτησης $φ(x)=x^2$ δίνει τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $h(x) = x^2+λ$, $g(x)= (x+κ)^2$ και $f(x) =(x+κ)^2+λ$.

Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μ1 Να εξετάζουν αν μια αντιστοιχία τιμών είναι συνάρτηση. (στόχοι Π.Σ, 3.1.2)
Μ2 Να συνδέουν διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης. (στόχοι Π.Σ, 3.1.4)
Μ3 Να εξετάζουν το ρόλο των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$. (στόχοι Π.Σ, 3.2.1)
Μ4 Να αποφαίνονται για τη μονοτονία της $f(x)=\alpha x+\beta$. (στόχοι Π.Σ, 3.2.2)
Μ5 Να διερευνούν και να διατυπώνουν συμπεράσματα για τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες της $f(x)=\alpha x^2$. (στόχοι Π.Σ, 3.2.4)
Μ6 Να διερευνούν και να διατυπώνουν συμπεράσματα που αφορούν στη μονοτονία, στα ακρότατα και στις συμμετρίες της $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. (*στόχοι Π.Σ, 3.2.5*)
Μ7 Να αναπαριστούν συγκεκριμένες συναρτήσεις της μορφής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$ μέσω μετατοπίσεων της $g(x)=\alpha x^2$.(στόχοι Π.Σ, 3.2.5)
Μ8 Να χρησιμοποιούν τις συναρτήσεις 1ου και 2ου βαθμού στη μοντελοποίηση καταστάσεων και την επίλυση προβλημάτων. (στόχοι Π.Σ, 3.1.3)

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου των Συναρτήσεων

Όσα αναφέρονται στη συνέχεια είναι προτεινόμενα ώστε ο διδάσκων να διαθέτει μία οργανωμένη πρόταση διδασκαλίας.
Κατά αρχήν καλό θα είναι ο διδάσκων να διαθέτει μία γενική εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η διδασκαλία του κεφαλαίου όπως η παρακάτω.



Με βάση τα μαθησιακά αποτελέσματα και τα ερωτήματα στα οποία θα πρέπει να μπορεί να απαντά ο μαθητής μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας των Συναρτήσεων, θα επισημαίναμε ότι:

- **Γενικά περί συναρτήσεων**

1) Αρχικά προτείνεται να δοθούν συγκεκριμένα παραδείγματα μοντελοποίησης καταστάσεων συμμεταβολής και αντιστοίχισης διαφόρων μεγεθών, ώστε να αναδειχθεί η σημασία της έννοιας της συνάρτησης για τις εφαρμογές και στη συνέχεια να ακολουθήσει ο τυπικός ορισμός της συνάρτησης.
Μέσα από τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιηθούν, να επισημανθεί :
- η διάκριση μεταξύ εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής
- ο ρόλος του πεδίου ορισμού για τον καθορισμό της συνάρτησης (να τονιστεί ότι μια σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών δεν φτάνει για να ορίσουμε πλήρως μια συνάρτηση, αλλά πρέπει, ανάλογα με το πρόβλημα, να καθορίσουμε και τις τιμές που μπορεί να πάρει η ανεξάρτητη μεταβλητή).
- η δυνατότητα διαφορετικών αναπαραστάσεων της συνάρτησης (με πίνακα τιμών, με γραφική παράσταση, με τύπο και λεκτικά).

Να συζητηθεί επίσης η περίπτωση συναρτήσεων που δεν έχουν τύπο. Για παράδειγμα “οι ώρες της ημέρας και οι αντίστοιχες θερμοκρασίες τους” είναι συνάρτηση, η οποία έχει γραφική παράσταση αφού σε κάθε μία ώρα αντιστοιχεί μια θερμοκρασία αλλά δεν έχει τύπο. Τύπο δεν έχουν επίσης και οι συναρτήσεις ύψος και βάρος ή ύψος και ηλικία ενός ατόμου.
Να συζητηθεί επιπλέον η περίπτωση συναρτήσεων των οποίων δεν μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική παράσταση. Για παράδειγμα συνάρτηση “σε κάθε ρητό αντιστοιχούμε το μηδέν ενώ σε κάθε άρρητο το ένα”, έχει τύπο, αλλά δεν μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά. Ο τύπος της είναι :

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ αν x ρητός} \\ 1, \text{ αν x άρρητος} \end{cases}$$

2) Να δοθεί έμφαση στην αναγνώριση του αν είναι συναρτήσεις ή όχι, αντιστοιχίες που δίνονται με διάφορες αναπαραστάσεις (π.χ πίνακας τιμών, γραφική παράσταση).

Προτεινόμενη δραστηριότητα

α) Να εξετάσετε αν καθένας από τους παρακάτω πίνακες εκφράζει μια συνάρτηση.

(1)

x	-2	-1	1	2	3	-3
y	2	3	5	5	4	6

(2)

x	0	1	2	3	4
y	5	5	5	5	5

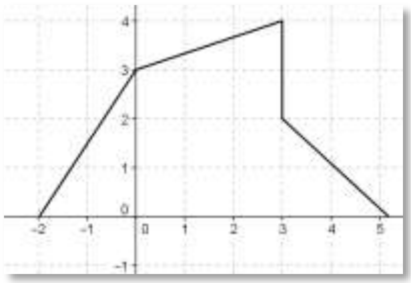
(3)

x	-2	-1	1	1	2	3
y	1	2	3	4	5	6

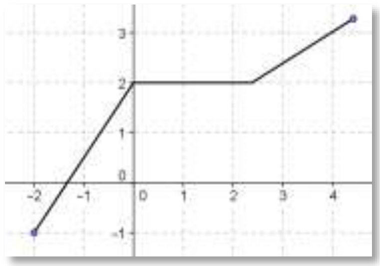
(4)

x	5	5	5	5	5
y	0	1	2	3	4

β) Ποιά από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί σε συνάρτηση;



(Σχήμα 1)



(Σχήμα 2)

Σχόλιο Με αφορμή τον πίνακα (2) του 1ου ερωτήματος και τη γραφική παράσταση (Σχήμα 2) του 2ου ερωτήματος της δραστηριότητας, να επισημανθεί ότι υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι ένα προς ένα.

Σε πολλούς μαθητές δημιουργούνται παρανοήσεις και ελλιπείς εικόνες σχετικά με την έννοια της συνάρτησης, με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν προβλήματα στην αναγνώριση μιας συνάρτησης με βάση τον ορισμό, καθώς και να μη μπορούν να χειριστούν με ευελιξία διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης. Για το λόγο αυτό θα πρέπει οι μαθητές, μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες, να χρησιμοποιούν, να συνδέουν και να ερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης καθώς και να εντοπίζουν πλεονεκτήματα και (ενδεχομένως) μειονεκτήματα καθεμιάς εξ αυτών.

3) Η μοντελοποίηση καταστάσεων και η επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια των συναρτήσεων πρέπει να βρίσκεται στο επίκεντρο της διδασκαλίας του κεφαλαίου γιατί είναι άλλωστε και αυτή που δίνει αξία και νόημα στην ενασχόληση των μαθητών με τις συναρτήσεις.
Οι συνδέσεις με άλλες περιοχές των σχολικών μαθηματικών (πχ. εξισώσεις, εμβαδά, κανονικότητες)

αλλά και με εξωσχολικές εμπειρίες των μαθητών μπορούν να συμβάλουν στην κατανόηση τόσο των συναρτήσεων, όσο και των περιοχών με τις οποίες αυτές συνδέονται.

(Παραδείγματα δραστηριοτήτων *οι* Δ15, Δ16 *του Π.Σ)*

Προτεινόμενες δραστηριότητες

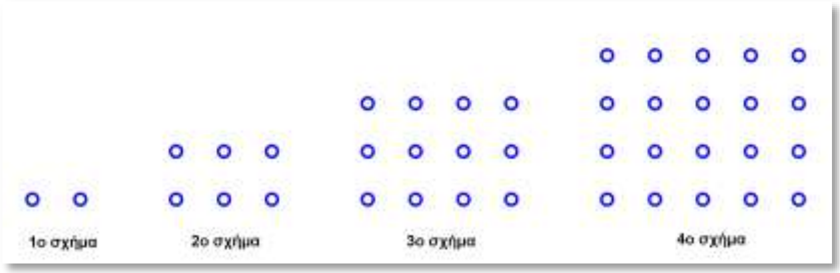
$1^η$ Η διαγώνιος ενός ορθογωνίου είναι 5 cm.

i. Αν x και y είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα τις δυο διαστάσεις
ii. Να εκφράσετε τη μια διάσταση ως συνάρτηση της άλλης διάστασης. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής;

$2^η$ Η συνάρτηση $F(C)=\frac{2}{9}C+32$ χρησιμοποιείται για να μετατρέπουμε βαθμούς Κελσίου (Celsius) σε βαθμούς Φαρενάιτ (Fahrenheit)

i. Να υπολογίσετε τις τιμές F(0), F(100) και F(-40).
ii. Να βρείτε τη συνάρτηση που μετατρέπει βαθμούς Φαρενάιτ σε βαθμούς Κελσίου.
iii. Υπάρχει θερμοκρασία που εκφράζεται με τον ίδιο αριθμό στις δυο κλίμακες θερμοκρασίας;

$3^η$ i) Ποιόν κανόνα πρέπει να εφαρμόσουμε για να υπολογίσουμε από πόσα σημεία θα αποτελείται το $7^ο$ σχήμα ;
ii) Από πόσα σημεία θα αποτελείται το $27^ο$ σχήμα **;**



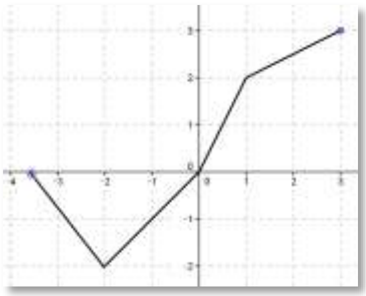
Σχόλιο Η συνάρτηση $f(x)=x^2 + x$, όπου x=1, 2, 3,…, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μοντέλο για τον ακριβή υπολογισμό των σημείων από τα οποία αποτελείται το οποιοδήποτε σχήμα της σειράς αυτής.

4) Ένας από τους στόχους της ενότητας αυτής είναι να καταστήσει τους μαθητές ικανούς να συνδέουν διαφορετικές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση).
Κάθε είδος αναπαράστασης μιας συνάρτησης παρέχει πληροφορίες για ορισμένες μόνο πτυχές της έννοιας, χωρίς να την περιγράφει ολοκληρωτικά. Για παράδειγμα :
- ένας πίνακας τιμών μιας συνάρτησης δεν μπορεί παρά να έχει λίγα μόνο ζευγάρια τιμών της, κατά συνέπεια, κρίσιμα στοιχεία της συνάρτησης π.χ ακρότατα, σημεία τομής με τους άξονες, μπορεί να μην εμφανίζονται σ΄αυτόν,
- από τον τύπο της συνάρτησης μπορούμε να προσδιορίζουμε την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής όταν δίνεται η τιμή της ανεξάρτητης αλλά δεν σχηματίζουμε μια εικόνα για τις τιμές που μπορεί να πάρει η συνάρτηση και για τη συμπεριφορά της, όπως συμβαίνει με τη γραφική παράστασή της.

Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις που αναφέρονται στην ίδια έννοια αλληλοσυμπληρώνονται. Οι δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στη μετάβαση από το ένα είδος αναπαράστασης στο άλλο και στη μεταξύ τους σύνδεση, εν μέρει οφείλονται και στον τρόπο διδασκαλίας της έννοιας, ο οποίος προάγει ένα συγκεκριμένο είδος μετάφρασης συναρτήσεων από την αλγεβρική έκφραση στη γραφική παράσταση. (Γαγάτσης Α. κ.ά, 2006)

Βασικός στόχος της διδασκαλίας της έννοιας της συνάρτησης δεν είναι μόνο να γίνει πλήρως κατανοητή στους μαθητές η συμβολική της μορφή, ο πίνακας τιμών και η γραφική της παράσταση. Η διδασκαλία πρέπει να εστιάζει και στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να περνούν από τη μια αναπαράσταση της συνάρτησης σε μια άλλη με συνέπεια και ακρίβεια χωρίς αντιφάσεις.
Για το σκοπό αυτό μπορεί να δίνεται για παράδειγμα, η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης και να ζητείται να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού, ή/ και να συμπληρωθεί ένας πίνακας τιμών.

<u>$1^η$ προτεινόμενη δραστηριότητα</u>
Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g(x).



α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
β) Να συμπληρωθεί ο πίνακας τιμών της.

x			-2		-1	0		2
g(x)	-3,5	-3		-6			1,5	

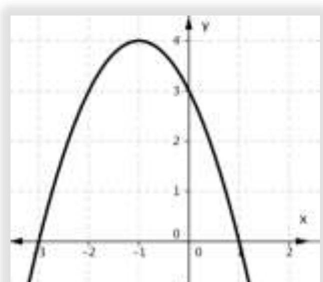
γ) Ποιά είναι η μέγιστη και ποιά η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g(x);
δ) Για ποιές τιμές του x η συνάρτηση είναι κάτω από τον άξονα x΄x;
<u>Σχόλιο</u> Να διευκρινιστεί ότι ο πίνακας τιμών μιας συνάρτησης δεν περιέχει το σύνολο των τιμών της συνάρτησης αλλά, κάνουμε κατάλληλες επιλογές τιμών, που ανταποκρίνονται στις διδακτικές ανάγκες της διδασκαλίας.

<u>2η προτεινόμενη δραστηριότητα</u>
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<0 \\ -x+2, & 0\le x\le 2 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f(-1), f(0), f($\sqrt{2}$), f(2)
β) Ποιό είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών της συνάρτησης;
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
δ) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της f(x)=α, όπου α $\in$ R, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α.
<u>Σχόλιο</u> Για το σχεδιασμό της συνάρτησης οι μαθητές πρέπει να παρατηρήσουν ότι στο πεδίο ορισμού του $1^{ου}$ κλάδου δεν ανήκει το μηδέν και να το παραστήσουν κατάλληλα.

5) Από τη γραφική παράστασης μιας συνάρτησης, οι μαθητές πρέπει να μπορούν να αντλούν πληροφορίες για το πεδίο ορισμού της, το πρόσημο των τιμών της, τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της (αν υπάρχει), τον άξονα συμμετρίας της και τα σημεία τομής της με τ ους άξονες.
<u>Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=αx^2+βx+γ$, α $\neq$ 0.



Να χαρακτηρίσετε ως Σ ή Λ καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις :

α) α > 0

β) το σύνολο τιμών της f είναι το [-1, 4) γ) το πεδίο ορισμού της είναι το [-3, 1]

δ) έχει μέγιστο το 4

ε) έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία x=-1

ζ) στο διάστημα ($-\infty$, -1] είναι αύξουσα

η) οι τετμημένες των σημείων τομής της f με τον άξονα y΄y είναι

το -3 και το 1.

- ## Μελέτη βασικών συναρτήσεων

Η μελέτη μιας συνάρτησης αφορά στη μελέτη της συμπεριφοράς των τιμών της συνάρτησης όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή διατρέχει το πεδίο ορισμού της.

Κατά τη διδασκαλία της παραγράφου αυτής πρέπει να κυριαρχεί η εποπτεία.

Η συνάρτηση f(x) = αx + β

Οι μαθητές έχουν διαπραγματευθεί στο γυμνάσιο τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=αx+β για συγκεκριμένες τιμές των α και β. Στην τάξη αυτή θα δοθεί έμφαση στη διερεύνηση του ρόλου των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=αx+β.
(Παράδειγμα δραστηριότητας η Δ17 του Π.Σ η οποία υποστηρίζεται από πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας)
Να επισημανθεί ότι $f(x+1)=\alpha(x+1)+\beta=\alpha x+\beta+\alpha=f(x)+\alpha$ που σημαίνει ότι για κάθε μοναδιαία μεταβολή του x έχουμε σταθερή μεταβολή του y, ίση με το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης.
Αφού οι μαθητές παρατηρήσουν (από τη γραφική παράσταση και τον πίνακα τιμών συγκεκριμένων γραμμικών συναρτήσεων π.χ f(x) =2x+1 και g(x) =-2x+1) το πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, καταλήγουν σε γενικότερα συμπεράσματα που αφορούν τη μονοτονία της συνάρτησης και βρίσκουν στη συμβολική της διατύπωση. Επιπλέον διερευνούν και το ρόλο της παραμέτρου α σε σχέση με αυτά τα συμπεράσματα.

Η μοντελοποίηση καταστάσεων και η επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια της συνάρτησης f(x) = αx + β πρέπει να βρίσκεται στο επίκεντρο της διδασκαλίας.

(*Παράδειγμα δραστηριότητας η Δ18, του ΠΣ.)*

Η συνάρτηση f(x) = αx^2, α ≠ 0

Οι μαθητές έχουν μελετήσει στο γυμνάσιο τη συνάρτηση f(x)=αx^2 για συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου α. Στην τάξη αυτή θα δοθεί έμφαση στη διερεύνηση του ρόλου της παραμέτρου α και θα εμβαθύνουν στα χαρακτηριστικά της συνάρτησης αυτής.

Οι έννοιες της άρτιας συνάρτησης, της περιττής συνάρτησης, της γνησίως μονότονης συνάρτησης και των ακροτάτων της συνάρτησης θα κατανοηθούν μέσα από τις γραφικές παραστάσεις.

(Παράδειγμα δραστηριότητα η Δ20 του ΠΣ)

Με αφορμή τη διαπίστωση ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης *f(x) = αx²* έχει τον άξονα y΄y άξονα συμμετρίας, να δοθεί ο ορισμός της άρτιας συνάρτησης.

Ως γνωστόν, για να λέγεται μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α, άρτια, πρέπει : για κάθε $x \in A$ να ισχύει - $x \in A$ και f(-x) = f(x), από όπου προκύπτει ότι η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y. Οι δύο αυτές προϋποθέσεις πρέπει να συζητηθούν με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές χαρακτηρίζουν μια συνάρτηση άρτια και όταν αυτή έχει άξονα συμμετρίας μια οποιαδήποτε άλλη ευθεία της μορφής x=α, ή παραλείπουν να εξετάζουν αν το –x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Με ανάλογο τρόπο και με αφορμή τη μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}$ να δοθεί ο ορισμός της περιττής συνάρτησης.

Η συνάρτηση f(x) = αx^2 + βx + γ, με α≠0

Οι μαθητές στο Γυμνάσιο έχουν μελετήσει τη συνάρτηση *f*(*x*)=*αx²+βx+γ* για συγκεκριμένες τιμές των α, β, γ. Στην τάξη αυτή θα διερευνήσουν το ρόλο των παραμέτρων α, β ,γ στη μελέτη και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης *f*(*x*)=*αx²+βx+γ*.

Για να χαράξουν οι μαθητές τη γραφική παράσταση μιας συγκεκριμένης συνάρτηση της μορφής $f(x)=αx^2+βx+γ$, $α \neq 0$ πρέπει πρώτα, με συμπλήρωση τετραγώνου, να τη γράψουν στη μορφή $f(x)= α(x+k)^2+λ$. Στη συνέχεια μέσω μετατοπίσεων της gx)= $αx^2$ κατά κ μονάδες αριστερά ή δεξιά και λ πάνω ή κάτω θα προσδιοριστεί η τελική θέση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στους άξονες.

Δυσκολίες κατανόησης των μετατοπίσεων της f(x)=αx^2

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής $f(x)=αx^2+κ$, που είναι κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $φ(x)=αx^2$ κατά κ μονάδες προς τα πάνω ή προς τα κάτω, δεν παρουσιάζει δυσκολίες κατανόησης για τους μαθητές. Η γραφική παράσταση της φ μετακινείται πάνω ή κάτω, ανάλογα με το πρόσημο του αριθμού που προσθέτουμε στον τύπο της.
Δυσκολίες κατανόησης παρουσιάζονται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=α(x + κ)^2$, που είναι οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $φ(x)=αx^2$ κατά k μονάδες αριστερά ή δεξιά. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση μετακινείται δεξιά όταν το πρόσημο του κ είναι αρνητικό και αριστερά είναι θετικό. Η μετακίνηση όμως αυτή είναι ενάντια στη διαίσθηση, αφού συνήθως το «συν» συνδέεται με το δεξιά και το «πλην» με το αριστερά.

<u>1η Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>

i. Με ποια οριζόντια και με ποια κατακόρυφη μετατόπιση η γραφική παράσταση της συνάρτηση $f(x)=-2x^2$ θα βρεθεί ώστε να έχει κορυφή το σημείο Α(1, 2).

ii. Ποια είναι η εξίσωση της παραβολής που αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της νέας θέσης της συνάρτησης;

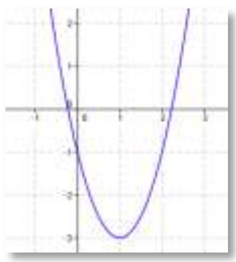
iii. Με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση η γραφική παράσταση θα επανέλθει στην αρχική της θέση;

<u>2η Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^2-4x-1$.

α) Ποιες τιμές πρέπει να δώσουμε στα α, κ και λ στον τύπο $h(x)=α(x+κ)^2+λ$

ώστε οι δύο συναρτήσεις να έχουν την ίδια γραφική παράσταση.



β) Από ποιες μετατοπίσεις της $f(x)=2x^2$ προκύπτει η συνάρτηση

$f(x)=2x^2-4x-1$;

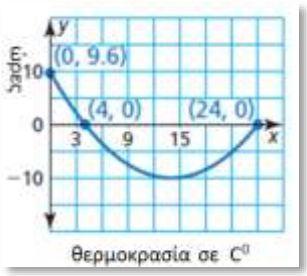
<u>3η Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>

Η αψίδα της γέφυρας της Χιλιετίας στον ποταμό Τάιν στην Αγγλία έχει σχήμα παραβολής. Το μέγιστο ύψος της αψίδας είναι 50m σε ένα σημείο κατά προσέγγιση 63m από την άκρη του ποταμού.

α) να βρείτε την συνάρτηση f που αντιστοιχεί στην παραβολής της καμπύλης της αψίδας.

β) Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και τι δηλώνει στην περίπτωση αυτή;

<u>4η Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>



Ένας μετεωρολόγος δημιούργησε την διπλανή παραβολή για να παρουσιάσει τη θερμοκρασία μιας πόλης μια συγκεκριμένη ημέρα του έτους, όπου το x είναι ο αριθμός ωρών μετά τα μεσάνυχτα και το y είναι η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου).

α) Βρείτε τη συνάρτηση f που αντιστοιχεί στην παραπάνω γραφική παράσταση.

β) Ποια είναι η πιο κρύα θερμοκρασία την ημέρα εκείνη;

Πιθανές δυσκολίες – Παρανοήσεις

Η έννοια της συνάρτησης είναι μια σύνθετη έννοια. Κατ' αρχήν γιατί υπάρχουν πολλοί τρόποι αναπαράστασής της (γραφικές παραστάσεις, βελοδιαγράμματα, τύποι, πίνακες, συμβολικές εκφράσεις, λεκτικές περιγραφές, διατεταγμένα ζεύγη) καθένας από τους οποίους υποστηρίζει και μια διαφορετική πτυχή της έννοιας. Η κατανόηση της έννοιας προϋποθέτει την κατασκευή πολλαπλών αλληλοσυνδεόμενων (με την έννοια της ικανότητας μετάφρασης από μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη) νοητικών αναπαραστάσεων. Δεύτερον, η έννοια της συνάρτησης εμπεριέχει ένα σύνολο άλλων εννοιών (πεδίο ορισμού, πεδίο τιμών, αντίστροφη, σύνθεση κλπ) και συνδέεται άμεσα με άλλες έννοιες (ποσότητα, μεταβλητή, λόγος κλπ) των οποίων το νόημα δεν είναι προφανές για τους μαθητές. Δεν μπορείς να συζητήσεις για τη συνάρτηση χωρίς αναφορά σε αυτές τις έννοιες. Τρίτον υπάρχουν πολλοί ορισμοί για τη συνάρτηση (σχέση εξάρτησης, αντιστοίχιση, σύνολο διατεταγμένων ζευγών) που παρά το γεγονός ότι είναι μαθηματικά ισοδύναμοι, δεν είναι γνωστικά ισοδύναμοι (Ε. Κολέζα κ.ά, 2008)

Αξιοποίηση της Τεχνολογίας στη διδασκαλία του κεφαλαίου

Συνήθως οι μαθητές παραμένουν στην αντίληψη της συνάρτησης ως μιας υπολογιστικής διαδικασίας και δυσκολεύονται να συσχετίσουν έναν τρόπο αναπαράστασής της με έναν άλλο. Η ψηφιακή τεχνολογία παρέχει αποτελεσματικά εργαλεία διερεύνησης, οπτικοποίησης και σύνδεσης των παραπάνω στοιχείων, με την προϋπόθεση ότι οι μαθητές δεν έχουν το ρόλο του θεατή, αλλά εμπλέκονται με τη χρήση των προσφερόμενων αναπαραστάσεων για την εκτέλεση μαθηματικών δράσεων, τη διερεύνηση μαθηματικών ιδεών και την επίλυση προβλημάτων.

Σε πολλές ιστοσελίδες υπάρχουν ενδιαφέρουσες δραστηριότητες, για παράδειγμα:

- Η κλίση της ευθείας ψ=αχ
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2222?locale=el

- Σύγκριση των ψ=αχ και ψ=αχ+β

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2128?locale=el

- Οι συμμετρίες της συνάρτησης y=α/x.
  Μικροπείραμα με το οποίο οι μαθητές, ανακαλύπτουν τις συμμετρίες της συνάρτησης.
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2122

- Επιτάχυνση αυτοκινήτου (η συνάρτηση $ψ=αx^2$)
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5523?locale=el

- Προσαρμογές
  Μικροπείραμα για την συνάρτηση ψ=αx^2+βx+γ.
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5477

- Μετατοπίσεις
  Μικροπείραμα για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ψ=αx^2+βx+γ μέσα από διαδοχικές μετατοπίσεις της ψ=αx^2 .
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5396

- Τομή με τους άξονες
  Μικροπείραμα για τον εντοπισμό των σημείων τομής της με τους άξονες της συνάρτησης με τύπο f(x)=(α-x)(β-x).

  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1873

- Σημεία με ιδιαίτερο ενδιαφέρον
  Μικροπείραμα τον εντοπισμό των συντεταγμένων των σημείων τομής δυο συναρτήσεων, καθώς και τις τετμημένες των σημείων της Cf που βρίσκονται πάνω από την Cg.

  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1875

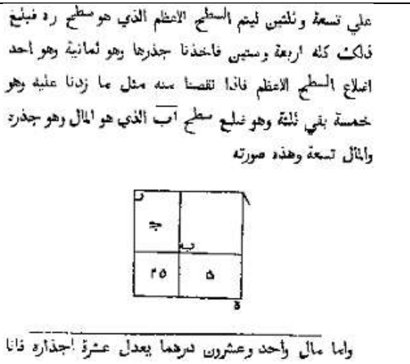
Βιβλιογραφία

- Γαγάτσης Α. - Ηλία Ι.-Ανδρέου Σ. (2003). *Αναπαραστάσεις και μάθηση των Μαθηματικών. Συναρτήσεις και Αριθμητική Γραμμή*, περιοδικό Ευκλείδης γ΄ τεύχος 59, Ιανουάριος-Ιούνιος 2003.
- Κολέζα Ε. - Φακούδης Ε. (2008). Προλεγόμενα μιας ανάλυσης των εγχειρίδιων σχετικά με την έννοια της συνάρτησης, πρακτικά 7ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών Θεσσαλονίκη 15 & 16 Μαρτίου, Επιμέλεια Δ. Χασάπης, σελ 225-244 αλλά και στο διαδίκτυο:
  www.mathlab.upatras.gr/wp-content/.../Η-έννοια-της-**συνάρτησης**.pdf

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο : Εξισώσεις- ανισώσεις 2ου βαθμού

Εισαγωγή

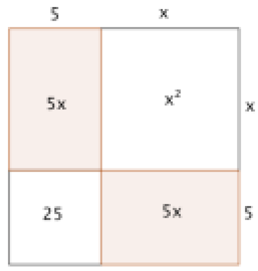
Η λέξη ΑΛΓΕΒΡΑ προέρχεται από τη λατινική Algebra η οποία με τη σειρά της προέρχεται από την αραβική λέξη al-jabr. Η αραβική λέξη πρωτοεμφανίζεται στο έργο του μεγάλου άραβα μαθηματικού al-Khwârizmi «Hisâb al-jabr w'al-mugâbalah» το οποίο γράφτηκε γύρω στα 825μ.Χ και που μεταφράζεται ως «επιστήμη αναγωγής και ισοστάθμισης» ή «περί της τέχνης να συναθροίζεις αγνώστους και να τους εξισώνεις με μια γνωστή ποσότητα». Έτσι η λέξη al-jabr ήταν για πολλά χρόνια συνώνυμο της λέξης «επιστήμη των εξισώσεων». Από τη λέξη al-jabr προέκυψε ο λατινικός όρος Algebra που αποδόθηκε στα ελληνικά με το «Άλγεβρα». Από την παράφραση του ονόματος του αλ Χουαρίσμι σε μια λατινική μετάφραση που άρχιζε με το « Έχει πει ο Αλγορίθμι....», προέκυψε η λέξη ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ που σημαίνει «μια τυπική διαδικασία υπολογισμού με συγκεκριμένο τρόπο».
Το βιβλίο του al-Khwârizmi θεωρείται θεμελιώδες κείμενο της σύγχρονης Άλγεβρας, παρόλο που δεν χρησιμοποίησε το είδος του αλγεβρικού συμβολισμού που χρησιμοποιούμε σήμερα, παρά μόνο λέξεις για να εξηγήσει τα προβλήματα και διαγράμματα για να τα λύσει. Το βιβλίο παρέχει μια λεπτομερή περιγραφή της επίλυσης εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού με χρήση των διαδικασιών "al-jabr" και "al-muqabala". Η συνηθισμένη ερμηνεία του jabr για τους μαθηματικούς χειρισμούς, με σημερινούς όρους είναι : προσθέτουμε ή αφαιρούμε και στα δυο μέλη μιας εξίσωσης τον ίδιο αριθμό. Η συνηθισμένη ερμηνεία του muqabala, με σημερινούς όρους είναι : αναγωγή ομοίων όρων μιας εξίσωσης. Αλλά ο al-Khwarizmi χρησιμοποιεί τον όρο και με την έννοια του "εξισώνω".
Ανάμεσα στις εξισώσεις που περιέχονται στο βιβλίο προβάλλουν τρεις χαρακτηριστικές, που με σύγχρονο συμβολισμό είναι οι : $x^2+10x=39$, $x^2+21=10x$ και $3x+4=x^2$, δηλαδή εξισώσεις της μορφής $αx^2+βx=γ$, $αx^2+γ=βx$ και $βx+γ=x^2$. Οι περιπτώσεις αντιμετωπίζονται ξεχωριστά για το λόγο ότι μόνο θετικοί συντελεστές ήταν αποδεκτοί την εποχή εκείνη. Οι ρίζες ήταν αποδεκτές μόνο αν ήταν θετικές. Η απουσία του μηδενός και των αρνητικών αριθμών καθιστούσε αδύνατη τη διατύπωση ενός γενικού τύπου για την επίλυση των εξισώσεων 2ου βαθμού. Ο Al-Khwarizmi θέλησε, ξεκινώντας με συγκεκριμένα προβλήματα, που είχαν εξεταστεί πριν από αυτόν από τους Ινδούς και τους Κινέζους, να πάει σε έναν γενικότερο τρόπο επίλυσης των προβλημάτων και με αυτό τον τρόπο δημιούργησε μια έναν γενικευμένη στρατηγική επίλυσης των εξισώσεων που χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα. Το βιβλίο μεταφράστηκε από τα Αραβικά τουλάχιστον τρεις φορές, και χρησιμοποιήθηκε στα σχολεία της Ευρώπης στα λατινικά ή περιληπτικά σε τοπικές διαλέκτους. Οι κανόνες που περιέγραφε ίσχυαν πάντοτε. Αν τους ακολουθούσε κανείς, μπορούσε να λύσει εξισώσεις δευτέρου βαθμού ορισμένων τύπων.


علي تسعة وثلثين ليتم السطح الاعظم الذي هو سطح ره فبلغ
ذلك كله اربعة وستين فاخذنا جذرها وهو ثمانية وهو احد
اضلاع السطح الاعظم فاذا نقصنا منه مثل ما زدنا عليه وهو
خمسة بقي ثلثة وهو ضلع سطح اب الذي هو المال وهو جذره
والمال تسعة وهذه صورته

واما مال واحد وعشرون درهما يعدل عشرة اجذاره فانا

Απόσπασμα από το χειρόγραφο του Al-Khwarizmi

Για τη λύση της εξίσωσης $x^2+10x=39$, ο Al-Khwarizmi προσθέτει στο τετράγωνο με πλευρά x, δύο ίσα ορθογώνια που το καθένα έχει εμβαδόν, $10x/2=5x$. Το αρχικό τετράγωνο μαζί με τα δύο ορθογώνια που προστέθηκαν, έχουν εμβαδόν ίσο με 39. Αλλά $x^2+10x = x^2+2\cdot 5x = (x+5)^2-25= 39$, $(x+5)^2=39+25=64$ Αρα το εμβαδόν του τετραγώνου που σχηματίζεται είναι 64 και η πλευρά του 8. Επομένως η πλευρά του αρχικού τετραγώνου είναι 8-5=3.



Η μέθοδός του al-Khwârizmi είναι, ουσιαστικά, γεωμετρική. Πρόκειται για τη «συμπλήρωση τετραγώνου», μια μέθοδο η οποία ήταν γνωστή στους λαούς της αρχαιότητας. Οι Ινδοί, το 800 με 600 π.Χ., περίπου, χρησιμοποίησαν τη μέθοδο στον «τετραγωνισμό» του ορθογωνίου, οι Βαβυλώνιοι, το 400 π.Χ., περίπου, σε προβλήματα, τα οποία, με μεταγενέστερη ορολογία, οδηγούν στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων αλλά κι οι Έλληνες, με τον Ευκλείδη το 300 π.Χ., περίπου, για την κατασκευή τμημάτων, τα μήκη των οποίων, αργότερα, θα μπορούσαν να θεωρηθούν λύσεις

δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Στο Βιβλίο ΙΙ, του Ευκλείδη που έχει χαρακτηριστεί από τον Van der Waerden [6] "γεωμετρική άλγεβρα", βρίσκουμε τη γεωμετρική επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, ενώ στο Βιβλίο VI τη γενικευμένη μορφή της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Για παράδειγμα η διαίρεση σε μέσο και άκρο λόγο (πρόταση ΙΙ11 :«*Να αποκοπεί δοθείσα ευθεία γραμμή έτσι ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου που περιέχεται από όλη την ευθεία και ένα από τα τμήματα, να είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου στο εναπομείναν τμήμα*») μπορεί να ερμηνευθεί ως γεωμετρική επίλυση της εξίσωση $x^2 + \alpha x = \alpha^2$. [1], [8]
Στα «Αριθμητικά» του Διόφαντου[3]*, που* εξαιτίας του εμβληματικού αυτού έργου, *έχει χαρακτηριστεί ως* «πατέρας της Άλγεβρας», *περιέχονται αλγεβρικά προβλήματα τα οποία λύνονται με εξισώσεις και συστήματα πρώτου και δευτέρου βαθμού. Ο Διόφαντος καθιέρωσε και τυποποίησε έναν τύπο σύντομου μαθηματικού συμβολισμού και* ήταν ο πρώτος που άρχισε να χρησιμοποιεί συστηματικά τα κλάσματα. *Ωστόσο ακόμα και με τον Διόφαντο και παρά τη χρήση συγκεκριμένων συμβόλων για τη συντομογραφία σταθερά επαναλαμβανομένων ποσοτήτων και αριθμητικών πράξεων(είχε για παράδειγμα ένα ειδικό σημάδι για να παριστάνει τον άγνωστο, άλλο για το πλήν και άλλο για τον αντίστροφο, σημάδια συντομογραφικά παρά αλγεβρικά), το σύνολο των υπολογισμών διεξάγεται μέσω λέξεων και ουσιαστικά μέσω συνεχούς πεζού λόγου και γι αυτό ήταν δύσχρηστο.[2]*
Ο σύγχρονος συμβολισμός για τις εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού άρχισε να εμφανίζεται γύρω στο 1500 μ.Χ, καθώς τότε έγινε η πρώτη εμφάνιση απλών και εύχρηστων συμβόλων για τον άγνωστο, για τις αλγεβρικές δυνάμεις και τις αλγεβρικές πράξεις. Η επιστήμη των Μαθηματικών είχε ραγδαία ανάπτυξη μετά την επινόηση των συμβόλων. Οι δυνατότητες χρησιμοποίησης αρνητικών ριζών και ακόμα μιγαδικών ριζών προτάθηκαν από τους Cardano και Girard. Η γεωμετρική παράσταση των αρνητικών ριζών από τον Descartes και των μιγαδικών αριθμών από τούς Wessel, Argand και Gauss έκαμε τους αριθμούς αυτούς περισσότερο αποδεκτούς ως ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.
Πολλοί μαθηματικοί, όπως ο Vieta και ο Harriot, εφάρμοσαν πολύ αργότερα και άλλους αλγόριθμους για τον υπολογισμό των λύσεων της εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού. Η ποικιλία των επιλύσεων που αναπτύχθηκε τα αρχαία χρόνια ενέπνευσε την ανάπτυξη ορισμένων τρόπων εύρεσης των ριζών δευτεροβάθμιας εξίσωσης, τους οποίους χρησιμοποιούμε σήμερα στα σχολεία μας.

Τι περιέχει το κεφάλαιο των Εξισώσεων και Ανισώσεων $2^{ου}$ βαθμού και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών;

Οι μαθητές στο Γυμνάσιο έχουν διδαχθεί πως να υπολογίζουν τις ρίζες μιας εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με συγκεκριμένους συντελεστές. Στην τάξη αυτή θα ασχοληθούν συστηματικότερα με την επίλυση και διερεύνηση εξισώσεων και ανισώσεων 2ου βαθμού, στη γενική τους μορφή.
Η εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού επιλύεται με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου. Έτσι οι μαθητές οδηγούνται με κατανοητό τρόπο στον τύπο των λύσεων της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha \neq 0$ και στον πίνακα διερεύνησης της. Στη συνέχεια επιλύονται εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού. Τέλος, μελετούν το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $f(x)= \alpha x^2+ \beta x +\gamma$, $\alpha \neq 0$ και από τη μελέτη αυτή οδηγούνται στην επίλυση ανισώσεων $2^{ου}$ βαθμού.

Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο των Εξισώσεων και Ανισώσεων 2ου βαθμού;

Οι εξισώσεις, οι ανισώσεις και τα συστήματα αποτελούν ισχυρά εργαλεία μοντελοποίησης καταστάσεων που μπορεί να προέρχονται από άλλες μαθηματικές περιοχές ή άλλους επιστημονικούς κλάδους είτε από σύνθετα πραγματικά προβλήματα. Οι έννοιες και οι διαδικασίες που σχετίζονται με την εξίσωση, την ανίσωση αλλά και τα συστήματα συνδέονται στενά με τη χρήση των γραμμάτων, τις αλγεβρικές παραστάσεις, τις συναρτήσεις και τις αναπαραστάσεις τους, την έννοια και τις ιδιότητες της ισότητας και της ανισότητας. Για αυτούς τους λόγους έχουν σημαντική θέση σε κάθε πρόγραμμα σπουδών.

Ποιές είναι οι σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο των Εξισώσεων –Ανισώσεων $2^{ου}$ βαθμού;

[3] *Οι Αραβες μετέφρασαν και μελέτησαν πολλά Μαθηματικά κείμενα των Αρχαίων Ελλήνων, ένα από τα οποία ήταν και τα Αριθμητικά του Διόφαντου.*

- Η εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού μπορεί να λυθεί και με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου.
- Το πρόσημο της διακρίνουσας του τριωνύμου προσδιορίζει αν μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού έχει λύσεις και πόσες.
- Η μελέτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=αx^2+βx+γ$, $α\neq0$, αποκαλύπτει το πρόσημο του τριωνύμου $αx^2+βx+γ$, $α\neq0$

Σε ποιά ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Ε1 Πώς συνδέονται οι τετμημένες των σημείων τομής της συνάρτησης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)= αx^2+βx+γ$, a ¹ 0 με τον άξονα x΄x, *με* την εξίσωση $αx^2+βx+γ=0$;
Ε2 Πότε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού έχει δύο, μία ή καμία πραγματικές ρίζες;
Ε3 Πώς κατασκευάζουμε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού όταν γνωρίζουμε τις ρίζες της;
Ε4 Πως παραγοντοποιείται ένα τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού αν γνωρίζουμε τις ρίζες του;
Ε5 Πως σχετίζεται το πρόσημο του τριωνύμου $αx^2+βx+γ$, $α \neq 0$ με το πρόσημο της διακρίνουσας του και το πρόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου;

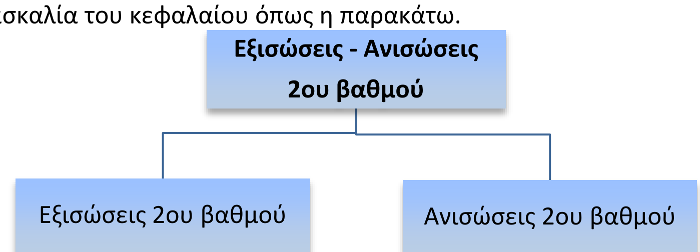
Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά το τέλος της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να :

Μ1 Να επιλύουν εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού.
Μ2 Να χρησιμοποιούν τη διακρίνουσα για να προσδιορίζουν το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού.
Μ3 Να παραγοντοποιούν ένα τριώνυμο.
Μ4 Να επιλύουν απλές εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού.
Μ5 Να μοντελοποιούν καταστάσεις και να επιλύουν προβλήματα με χρήση εξισώσεων $2^{ου}$ βαθμού.
Μ6 Να διερευνούν το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $αx^2+βx+γ$, $α \neq 0$
Μ7 Να επιλύουν ανισώσεις $2^{ου}$ βαθμού.
Μ8 Να μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις και επιλύουν προβλήματα με χρήση εξισώσεων και ανισώσεων $2^{ου}$ βαθμού.

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Όσα αναφέρονται στη συνέχεια είναι προτεινόμενα ώστε ο διδάσκων να διαθέτει μία οργανωμένη πρόταση διδασκαλίας.
Κατά αρχήν καλό θα είναι ο διδάσκων να διαθέτει μία γενική εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η διδασκαλία του κεφαλαίου όπως η παρακάτω.



Με βάση τα μαθησιακά αποτελέσματα και τα ερωτήματα στα οποία θα πρέπει να μπορεί να απαντά ο μαθητής μετά τη διδασκαλία των συνόλων, θα επισημαίναμε ότι:

- **Εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού**

1) Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ότι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=αx^2+βx+γ$, $α\neq0$ με τον άξονα x΄x είναι οι ρίζες της εξίσωσης $αx^2+βx+γ = 0$, τις οποίες πρέπει και να βρουν με ακρίβεια, επιλύοντας αλγεβρικά την εξίσωση. Η επίλυση της εξίσωσης $αx^2+βx+γ=0$, $α\neq0$ στη γενική της μορφή, θα γίνει με τη μέθοδο «συμπλήρωσης

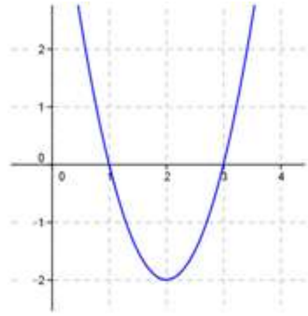
τετραγώνου». Επειδή όμως η εφαρμογή της μεθόδου στην επίλυση της εξίσωσης στη γενική της μορφή δυσκολεύει τους μαθητές, προτείνεται να λυθούν πρώτα με την ίδια μέθοδο εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού, αλλά με συντελεστές συγκεκριμένους αριθμούς και στη συνέχεια να γενικεύσουν τη διαδικασία, για να καταλήξουν στην εύρεση του τύπου των λύσεων.
Οι αλγεβρικές μέθοδοι επίλυσης υπερέχουν των γραφικών στην ακρίβεια και τη γενικότητα, αλλά δεν πρέπει να παραβλέπεται η διδακτική αξία της γραφικής αναπαράστασης μιας εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού η οποία επιπλέον συνδέει την εξίσωση με την αντίστοιχη συνάρτηση .

Προτεινόμενη δραστηριότητα

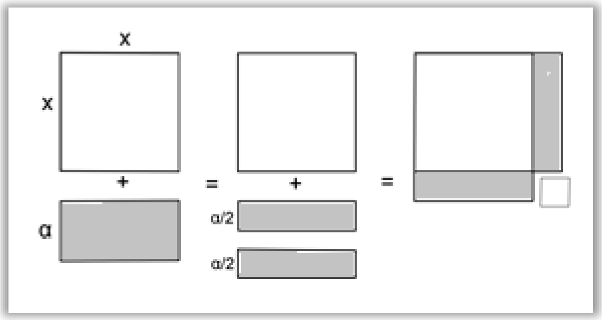
Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης
$f(x)=2x^2-8x+6$

i) Ποιες είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες;
ii) Πως θα βρούμε αλγεβρικά τις ρίζες της συνάρτησης $f(x)=2x^2-8x+6$;

(Ακολουθεί η λύση της εξίσωσης με $2x^2-8x+6=0$ με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου).



Συνιστάται, η συμπλήρωση τετραγώνου να ερμηνευθεί και γεωμετρικά, σύμφωνα με τη μέθοδο του al-Khwarizmi , στην περίπτωση του τριωνύμου $x^2+\alpha x=\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$



2) Από την αλγεβρική διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης *αx²+βx+γ=0, α≠*0 με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου οι μαθητές θα καταλήξουν σε συμπεράσματα για το ρόλο της διακρίνουσας στον προσδιορισμό του πλήθους και του είδους των λύσεων της αλλά και στον τύπο με τον οποίο βρίσκουμε τις λύσεις της.

- Να τονιστεί ότι ο πιο σύντομος τρόπος για τον εύρεση των λύσεων μιας εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού δεν είναι πάντοτε ο ίδιος, αλλά εξαρτάται από τη μορφή της εξίσωσης. Έχει διαπιστωθεί ότι όταν οι μαθητές μάθουν τον τύπο εύρεσης των ριζών μιας 2ας εξίσωσης, τον χρησιμοποιούν για τη λύση οποιασδήποτε μορφής της. Όμως όταν β=0 ή γ=0, τότε η εξίσωση *αx²+βx+γ=0, α≠*0 εκφυλίζεται σε απλούστερη μορφή και μπορεί να λυθεί χωρίς την χρήση της διακρίνουσας.
- Οι μαθητές πρέπει να ασκηθούν στο να παρατηρούν τους συντελεστές μιας εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού και να διατυπώνουν, αν μπορούν, συμπεράσματα για τις ρίζες της, πριν αρχίσουν τη διαδικασία επίλυσης. Για παράδειγμα στην ερώτηση για τον αριθμό των λύσεων της εξίσωσης $2786x^2+765x-1542=0$, πρέπει με σιγουριά να απαντήσουν ότι έχει δυο πραγματικές λύσεις, αφού οι συντελεστές α=2786 και γ=-1542 είναι ετερόσημοι και επομένως Δ>0.

3) Υπάρχουν εξισώσεις που ενώ δεν είναι $2^{ου}$ βαθμού μπορούν με κατάλληλες αντικαταστάσεις ή μετασχηματισμούς να αναχθούν σε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού, όπως είναι για παράδειγμα οι εξισώσεις :

$x^2+5|x|-6=0$, $x^4-6x^2+5=0$ και $x+2=\frac{3}{x}$

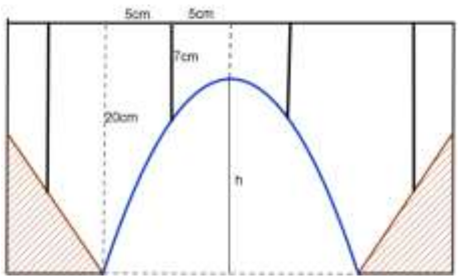
4) Να δοθεί έμφαση στη μοντελοποίηση καταστάσεων και επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων $2^{ου}$ βαθμού.

Προτεινόμενη δραστηριότητα

Από την ταράτσα ενός κτιρίου πετάμε προς τα πάνω μια μπάλα. Η τροχιά που διαγράφει η μπάλα μέχρι να φτάσει στο δρόμο είναι παραβολή με εξίσωση $y = -5t^2 + 10t + 15$, όπου t ο χρόνος που χρειάζεται η μπάλα για να φτάσει στον δρόμο σε sec και y το ύψος της μπάλας σε μέτρα.
α) Να σχεδιάσετε την τροχιά της μπάλας μέχρι την στιγμή που αυτή πέφτει στο έδαφος.
β) Να βρείτε το μέγιστο ύψος στο οποίο έφτασε η μπάλα.
γ) Σε ποιες χρονικές στιγμές η μπάλα βρισκόταν 15m ψηλότερα από το δρόμο;
δ) Για πόσο χρόνο η μπάλα είχε ύψος μεγαλύτερο από 15m;
ε) Πότε η μπάλα είχε ύψος 17,5m ;

Σχόλιο Οι μαθητές ξέρουν από τη Φυσική ότι, στην πλάγια βολή η τεταγμένη της θέσης του σώματος δίνεται από τη σχέση $y(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ όπου $g \approx 10$m/sec. Προκειμένου να μην δημιουργηθεί σύγχυση στους μαθητές με τον τύπο της συνάρτησης του προβλήματος που είναι γραμμένος διαφορετικά να επισημανθεί ότι δεν απέχει από αυτόν της Φυσικής, αφού το $\frac{1}{2}g$ =5.

Προτεινόμενη δραστηριότητα

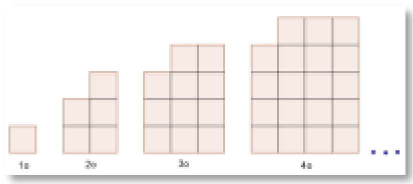


Το τόξο της σήραγγας του σχήματος είναι παραβολικό.
α) Με τα στοιχεία που δίνονται να προσδιορίσετε τη συνάρτηση της παραβολής.
β) Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος h του παραβολικού τόξου.

Σχόλιο Για να διαπραγματευθούν οι μαθητές το πρόβλημα θα πρέπει πρώτα να αποφασίσουν σε ποιά θέση θα τοποθετήσουν τους άξονες, στο σχέδιο. Από τη θέση που θα έχει η γραφική παράσταση της παραβολής σ΄αυτούς, θα εξαρτηθεί η μορφή της συνάρτησης. Για παράδειγμα, αν η αρχή των αξόνων τοποθετηθεί στο μέσο της βάσης της σήραγγας και ο άξονας των y συμπέσει με τον άξονα του ύψους της, τότε η παραβολή έχει εξίσωση $f(x) = αx^2+h$.

Προτεινόμενη δραστηριότητα

Παρακάτω βλέπετε πως εξελίσσεται ένα γεωμετρικό μοτίβο. Από πόσα τετράγωνα θα αποτελείται το 18ο σχήμα;



Σχήμα	1ο	2ο	3ο	4ο	5ο
Αριθμός σημείων	1	5	11	19	…

Σχόλιο Ο τρόπος με τον οποίο θα προσδιοριστεί ο τύπος της συνάρτησης μπορεί να διαφέρει από μαθητή σε μαθητή. Για παράδειγμα, κάποιος μπορεί να παρατηρήσει *ότι* το κάθε ένα από *τα σχήματα* αποτελείται *από*:

- *«ένα μεγαλύτερο τετράγωνο με x^2* τετράγωνα και (*x-1) τετράγωνα επιπλέον" ή*
- *« ένα ορθογώνιο με x · (x+1) τετράγωνα μείον 1 τετράγωνο",*

Και στις δύο αυτές περιπτώσεις θα καταλήξουν ότι η συνάρτηση που περιγράφει το μοτίβο είναι η $f(x)=x^2+x-1$, όπου x φυσικός αριθμός»,

- **Ανισώσεις $2^{ου}$ βαθμού**

Στην τάξη αυτή οι μαθητές θα ασχοληθούν για πρώτη φορά με τη διαπραγμάτευση ανισώσεων $2^{ου}$ βαθμού. Μελετώντας σε διάφορες περιπτώσεις τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=αx^2+βx+γ$, $α\neq0$, θα συνδέσουν το πρόσημο του τριωνύμου $αx^2+βx+γ$, $α \neq 0$ με τη διακρίνουσα και το συντελεστή α και θα χρησιμοποιήσουν τα συμπεράσματα για την επίλυση ανισώσεων $2^{ου}$ βαθμού.

Το πρόσημο του τριωνύμου θα χρησιμοποιηθεί στην επίλυση ανισώσεων 2^{ου} βαθμού αλλά και ανισώσεων που ανάγονται σε ανισώσεις 2^{ου} βαθμού, όπως για παράδειγμα :

$(x^2-9)(x+1)>0$, $\dfrac{x^2-9}{x+1}>0$

(Παράδειγμα δραστηριότητας η Δ30 του Π.Σ)

Να δοθεί έμφαση στη μοντελοποίηση καταστάσεων και στην επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων 2^{ου} βαθμού.

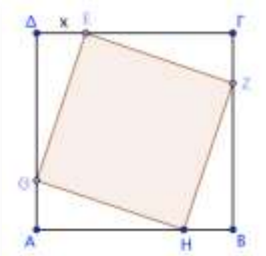
Προτεινόμενη δραστηριότητα

Ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 8cm. Στο εσωτερικό του εγγράφουμε ένα ακόμα τετράγωνο το ΕΖΗΘ του οποίου οι κορυφές ισαπέχουν από τις κορυφές του ΑΒΓΔ.

Αν x είναι η απόσταση της κορυφής Ε από την κορυφή Δ, τότε:

α) να εκφράσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ ως συνάρτηση του x

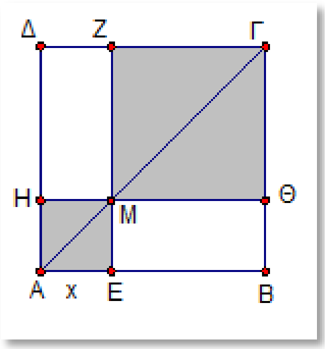
β) να βρείτε για ποιά τιμή του x το εμβαδόν αυτό είναι μικρότερο ή ίσο με 32cm^2. Στην περίπτωση που το εμβαδόν είναι ίσο με 32cm^2 σε ποια θέση βρίσκονται οι κορυφές του ΕΖΗΘ;



Σχόλιο Η άσκηση αυτή μπορεί να διερευνηθεί και με τη βοήθεια του μικροπειράματος που περιέχεται στο φωτόδεντρο με τίτλο: Τετράγωνο σε τετράγωνο

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2118

Προτεινόμενη δραστηριότητα



Στο διπλανό σχήμα, το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς ΑΒ = 3 και το Μ είναι ένα σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Να βρείτε τις θέσεις του σημείου Μ πάνω στη διαγώνιο ΑΓ για τις οποίες το άθροισμα των εμβαδών των σκιασμένων τετραγώνων είναι μικρότερο του 5.

Σχόλιο Η άσκηση αυτή μπορεί να διερευνηθεί και με τη βοήθεια του μικροπειράματος που περιέχεται στο φωτόδεντρο με τίτλο:

Εφαρμογή των ανισώσεων σε γεωμετρικά προβλήματα

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1893

Πιθανές δυσκολίες –Παρανοήσεις

Στον προσδιορισμό του πρόσημου του τριωνύμου, παρατηρείται συχνά οι μαθητές να παραβλέπουν το πρόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου ή να συγχέουν το πρόσημο της διακρίνουσας με το πρόσημο του τριωνύμου (π.χ. όταν Δ<0, θεωρούν ότι και το τριώνυμο παίρνει αρνητικές τιμές).

Αξιοποίηση της Τεχνολογίας στη διδασκαλία του κεφαλαίου

Σε πολλές ιστοσελίδες υπάρχουν ενδιαφέρουσες δραστηριότητες, για παράδειγμα:

- Εξισώσεις 2ου βαθμού – Ελεύθερη πτώση
  Μικροπείραμα με προσομοίωση για την επίλυση προβλήματος ελεύθερης πτώσης με χρήση εξισώσεων 2ου βαθμού.

  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1756

- Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου
  Μικροπείραμα, για την εύρεση της περιοχής που πρέπει να κινείται η τιμή της μεταβλητής x, ώστε το τριώνυμο να παίρνει θετική ή αρνητική τιμή.

  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1752

- Μόνιμες ανισότητες
  Μικροπείραμα, για την απόδειξη μιας ανισότητας.

  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1721

Βιβλιογραφία

[1] L. Bunt-Ph. Jones -J.Bedient : Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών, μετάφραση Άννα Φερεντίνου, εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικός, Αθήνα 1981.

[2] Th.Heath. Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, τόμος ΙΙ, Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ), Αθήνα 2001.

[3] Henderson D.W., *Geometric Solutions of quadratic and Cubic Equations*, Department of Mathematics, Cornell University, άρθρο στο διαδίκτυο.
http://www.math.cornell.edu/~dwh/papers/geomsolu/geomsolu.html

[4] B. Hughes : Understanding algorithms from their history. The teaching and learning of algorithms in school mathematics, NCTM 1998.

[5] O. Neugebauer : Οι θετικές επιστήμες στην αρχαιότητα, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τράπεζας, Αθήνα 1990.

[6] B.L. van der Waerden : Geometry and Algebra in Ancient Civilizations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[7] Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi (biography), άρθρο στο διαδίκτυο : *www-history.mcs.st-and.ac.uk/.../Al-Khwar.*

[8] Ευκλείδη Στοιχεία, Τόμος Ι : Η γεωμετρία του επίπεδου: Βιβλία I, II, III, IV, V, VI: Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή, επεξηγήσεις και σχολιασμό, Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ), Αθήνα 2001.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^o : Συστήματα

Τι περιέχει το κεφάλαιο των Συστημάτων και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών;

Στο Γυμνάσιο οι μαθητές έχουν διδαχθεί πώς να επιλύουν ένα γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους γραφικά, αλλά και αλγεβρικά με τη μέθοδο της αντικατάστασης και τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών, όταν οι συντελεστές είναι συγκεκριμένοι αριθμοί.
Στην τάξη αυτή οι μαθητές θα διδαχθούν τη μελέτη και διερεύνηση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους στη γενική του μορφή. Η επίλυση θα επεκταθεί και σε γραμμικά συστήματα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, καθώς και σε μη γραμμικά συστήματα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.

Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο των Συστημάτων;

Τα γραμμικά συστήματα κατέχουν σημαντική θέση στα προγράμματα σπουδών, αφού χρησιμοποιούνται :

- Στην επίλυση προβλημάτων και στη μελέτη άλλων μαθηματικών περιοχών (για παράδειγμα στην Αναλυτική Γεωμετρία).
- Στην επίλυση προβλημάτων πολλών άλλων επιστημονικών κλάδων όπως της Φυσικής, της Χημείας, της Πληροφορικής, της Οικονομίας κτλ.
- Στην θεωρία προσεγγίσεων.
- Στη μοντελοποίηση σύνθετων πραγματικών προβλημάτων.

Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο των Συστημάτων;

- Κάθε γραμμική εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$, $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία.
- Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων των δυο ευθειών που παριστάνουν τις εξισώσεις του συστήματος είναι λύσεις του συστήματος, δηλαδή επαληθεύουν συγχρόνως όλες τις εξισώσεις.
- Η αλγεβρική επίλυση ενός συστήματος γίνεται με κατάλληλη μετατροπή του σε ισοδύναμα απλούστερα συστήματα.

Σε ποια ερωτήματα πρέπει να απαντούν οι μαθητές;

Ε1 Τι παριστάνει μια γραμμική εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$, $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ σε ένα σύστημα συντεταγμένων;
Ε2 Τι ονομάζουμε λύση μιας γραμμικής εξίσωσης της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$, $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$;
Ε3 Πόσες λύσεις έχει μια γραμμική εξίσωση;
Ε4 Πόσες λύσεις μπορεί να έχει ένα γραμμικό σύστημα 2x2;
Ε5 Πότε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 έχει μία λύση, είναι αδύνατο ή είναι αόριστο;
Ε6 Με ποιούς τρόπους διερευνούμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους;
Ε7 Πως επιλύουμε ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους;
Ε8 Πώς επιλύουμε γραφικά και αλγεβρικά ένα μη γραμμικό σύστημα με δύο αγνώστους;

Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε από τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά το τέλος της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να :
Μ1 Να γνωρίζουν ότι η γραμμική εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$, $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ παριστάνει ευθεία.

(στόχοι Π.Σ, 5.1.1)
M2 Να επιλύουν αλγεβρικά και γραφικά ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. (στόχοι Π.Σ, 5.1.2)
M3 Να διερευνούν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. (στόχοι Π.Σ, 5.1.2)
M4 Να επιλύουν γραμμικά συστήματα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. (στόχοι Π.Σ, 5.2.1)
M5 Να επιλύουν αλγεβρικά και γραφικά μη γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. (στόχοι Π.Σ, 5.3.1)
M6 Μεταφράζουν ένα πρόβλημα στη μαθηματική γλώσσα χρησιμοποιώντας συστήματα (στόχοι Π.Σ, 5.4.1)

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου των Συστημάτων

Όσα αναφέρονται στη συνέχεια είναι προτεινόμενα ώστε ο διδάσκων να διαθέτει μία οργανωμένη πρόταση διδασκαλίας.
Κατά αρχήν καλό θα είναι ο διδάσκων να διαθέτει μία γενική εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η διδασκαλία το κεφαλαίου όπως η παρακάτω.

Συστήματα

- Γραμμικά συστήματα 2x2
- Γραμμικά συστήματα 3x3
- Μη γραμμικά συστήματα 2x2
- Επίλυση προβλημάτων με συστήματα

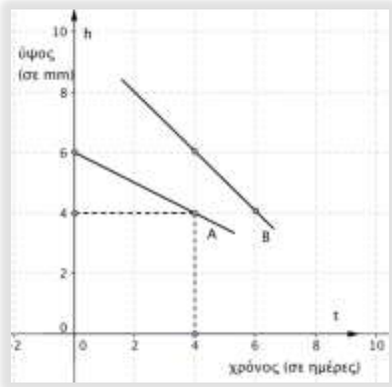
Με βάση τα μαθησιακά αποτελέσματα και τα ερωτήματα στα οποία θα πρέπει να μπορεί να απαντά ο μαθητής μετά τη διδασκαλία των συνόλων, θα επισημαίναμε ότι:

- **Γραμμικά συστήματα 2x2**

1) Πριν ασχοληθούν οι μαθητές με την επίλυση των γραμμικών συστημάτων 2x2 μελετούν τη γραμμική εξίσωση αx+βy=γ, $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.
Βασικός στόχος της ενότητας είναι η εξοικείωση των μαθητών με το σχεδιασμό και την ερμηνεία βασικών στοιχείων της ευθείας που παριστάνει μια γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους (πλήθος λύσεων, σημεία τομής με τους άξονες, μορφές της ευθείας για τις διάφορες τιμές των α, β).

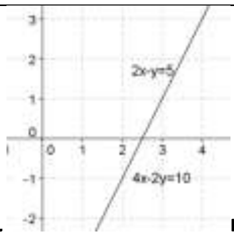
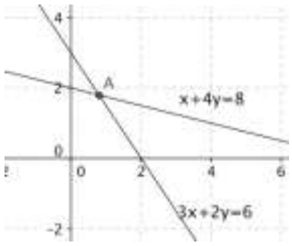
2) Η γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους πρέπει να προηγηθεί της αλγεβρικής, αφού έτσι οι μαθητές θα κατανοήσουν ότι ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους μπορεί να έχει μοναδική λύση, άπειρες λύσεις ή να είναι αδύνατο, ανάλογα με τις σχετικές θέσεις των δυο ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι γνωστές αλγεβρικές μέθοδοι επίλυσης γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (μέθοδος αντιθέτων συντελεστών και αντικατάστασης).

<u>Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>
Σ' ένα εργαστήριο, χρησιμοποιούνται δύο δοκιμαστικοί σωλήνες με υγρά που εξατμίζονται με την πάροδο του χρόνου. Στη διπλανή γραφική παράσταση παριστάνεται το ύψος (σε mm) του υγρού που μένει στους δοκιμαστικούς σωλήνες, ως συνάρτηση του χρόνου (σε ημέρες). Η εξάτμιση του υγρού αρχίζει την ίδια χρονική στιγμή t=0 και για τα δύο υγρά.
1ο Για κάθε δοκιμαστικό σωλήνα να βρείτε:
α) το ύψος του υγρού στην αρχή του πειράματος.
β) τον αριθμό των ημερών που απαιτούνται για να εξατμισθεί εντελώς το υγρό σωλήνα.



2ο Κάποια στιγμή τα υγρά είχαν το ίδιο ύψος μέσα στους σωλήνες. Πώς μπορούμε να επιβεβαιώσουμε αυτή την διαπίστωση, γραφικά και αλγεβρικά;

3) Τέλος η διερεύνηση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους δεν θα καταλήξει σε πίνακα διερεύνησης, αλλά θα γίνεται κατά περίπτωση. Το θέμα της διερεύνησης γραμμικού συστήματος 2x2 στη γενική του μορφή αντιμετωπίζεται στα μαθηματικά προσανατολισμού θετικών σπουδών Β΄ Λυκείου.
Η διερεύνηση προτείνεται να γίνει σε συγκεκριμένα παραδείγματα, με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

Γραμμικό σύστημα 2x2	**Διερεύνηση συστήματος**		
	**γραφικά**	**μέσω αναγωγής στη μορφή y= αx+ β**	**μέσω αναλογιών των συντελεστών**
$\begin{cases} x+4y=8 \\ 3x+2y=6 \end{cases}$	Οι ευθείες τέμνονται, άρα το σύστημα **έχει μοναδική λύση,** τις συντεταγμένες του σημείου τομής.	$\begin{cases} y=-\frac{1}{4}x+2 \\ y=-\frac{3}{2}x+3 \end{cases}$ Οι ευθείες έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης, οπότε τέμνονται και το σύστημα έχει **μοναδική λύση**.	$\frac{1}{3} \neq \frac{4}{2}$ Οι λόγοι των συντελεστών των αγνώστων x και y είναι διαφορετικοί, άρα το σύστημα έχει **μια λύση**.
$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=4 \end{cases}$	Οι ευθείες είναι παράλληλες, οπότε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, συνεπώς το σύστημα είναι **αδύνατο.**	$\begin{cases} y=-x+1 \\ y=-x+4 \end{cases}$ Οι ευθείες έχουν τους ίδιους συντελεστές διεύθυνσης, οπότε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, συνεπώς το σύστημα δεν έχει λύση, είναι **αδύνατο.**	$\frac{1}{1}=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{4}$ Οι λόγοι των συντελεστών των αγνώστων x και y είναι ίσοι αλλά είναι διαφορετικοί από το λόγο των γνωστών όρων, άρα το σύστημα είναι **αδύνατο.**
$\begin{cases} 2x-y=5 \\ 4x-2y=10 \end{cases}$	Οι ευθείες ταυτίζονται, οπότε οι συντεταγμένες κάθε σημείου της κοινής ευθείας αποτελούν λύση του συστήματος, άρα το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**, τα ζεύγη της μορφής $\left(k,\ \frac{k+5}{2}\right)$ k $\in$ R .	$\begin{cases} y=2x-5 \\ y=2x-5 \end{cases}$ Το σύστημα έχει **άπειρο πλήθος λύσεων** αφού οι ευθείες του συστήματος ταυτίζονται (συμπίπτουν)	$\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}=\frac{5}{10}$ Οι λόγοι των συντελεστών των αγνώστων και των γνωστών όρων είναι ίσοι, άρα το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**

Προτεινόμενες δραστηριότητες

α) Δίνεται η γραμμική εξίσωση 2x + y= 4 (1)

Γράψτε μια ακόμη εξίσωση η οποία μαζί με την (1) να αποτελούν ένα σύστημα που να είναι :

i) αδύνατο ii) να έχει άπειρες λύσεις iii) να έχει μια λύση

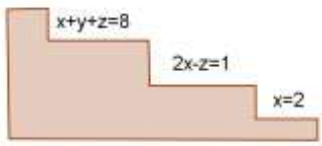
β) Λύνοντας ένα σύστημα καταλήγετε σε μια αντίφαση, όπως για παράδειγμα 0x=1. Τι συμπέρασμα θα βγάζατε για τις λύσεις του συστήματος; Επεξηγήστε τις ιδέες σας με το σύστημα :

$$\begin{cases} x-2y=-3 \\ -2x+4y=7 \end{cases}$$

- **Γραμμικά Συστήματα 3x3**

Η διαπραγμάτευση των συστημάτων τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους να γίνει μέσω προβλημάτων, τα οποία οδηγούν σε γραμμικά συστήματα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Για παράδειγμα, να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=αx^2+βx+γ$ να διέρχεται από τα σημεία Κ(-2, 3), Λ(-1, 2) και Μ(1, 6).

Προκειμένου να ασκηθούν οι μαθητές στο να λύνουν γραμμικά συστήματα 3x3, να δοθούν αρχικά για λύση, απλά παραδείγματα συστημάτων όπως τα παρακάτω :

α) 

β) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ y+z=5 \\ x=1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x+y+z=18 \\ 2y+z=19 \\ x+z=12 \end{cases}$

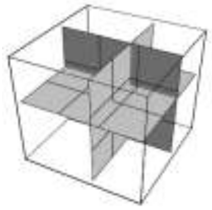
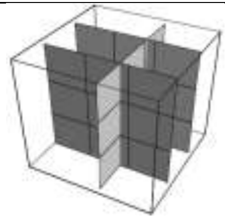
Συμπληρωματικά μπορεί να δοθεί προς λύση και το παρακάτω σύστημα.

$$\begin{cases} x+y=7 \\ y+z=11 \\ z+x=12 \end{cases}$$

Σχόλιο Ένας τρόπος για να λυθεί το σύστημα είναι, να βρούμε πρώτα το άθροισμα x+y+z (προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις του) και στη συνέχεια από αυτό που θα βρούμε, να αφαιρέσουμε την κάθε μια από τις εξισώσεις του. Η τεχνική αυτή οφείλεται στον Έλληνα μαθηματικό **Θυμαρίδα** από την Πάρο που ήταν μαθητής του Πυθαγόρα.

✓ Το παραπάνω σύστημα μπορεί να συνδυαστεί με το σύστημα γ) που αναφέρθηκε πιο πάνω.

Ένα γραμμικό σύστημα 3x3 μπορεί να έχει μία, καμία ή άπειρες λύσεις. Επειδή, κάθε σημείο στο χώρο μπορεί να παρασταθεί από μία μοναδική τριάδα αριθμών (x,y,z), με κάθε συντεταγμένη να αντιστοιχεί στην κάθετη απόσταση του σημείου από κάθε έναν από τους τρεις άξονες αντίστοιχα, κάθε εξίσωση ενός γραμμικού συστήματος 3x3 παριστάνει στον χώρο ένα επίπεδο. Μπορούμε λοιπόν να αναπαραστήσουμε τις λύσεις ενός τέτοιου συστήματος με χρήση τριών επιπέδων, ως εξής:

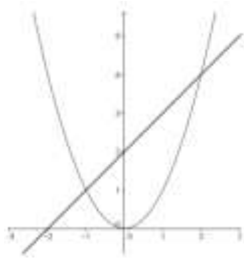
 Αν τα επίπεδα τέμνονται σε ένα σημείο, τότε το σύστημα έχει **μία λύση,** τις συντεταγμένες του κοινού σημείου.	 Αν τα επίπεδα τέμνονται κατά μήκος μιας ευθείας, τότε το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**, τις συντεταγμένες των σημείων της κοινής ευθείας.	 Αν δεν υπάρχει κανένα κοινό σημείο για τα τρία επίπεδα τότε το σύστημα είναι **αδύνατο.**

- **Μη γραμμικά συστήματα 2×2**

Πριν την αλγεβρική επίλυση ενός μη γραμμικού συστήματος να λυθεί γραφικά, ένα απλό μη γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, με μια εξίσωση 1ου βαθμού και μία εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού. Από τη γραφική επίλυση η μαθητές θα διαπιστώσουν ότι ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να έχει το πολύ δύο λύσεις.

Προτεινόμενη δραστηριότητα

Στο διπλανό σχήμα δίνονται η παραβολή $y=x^2$ και η ευθεία x- y + 2=0.

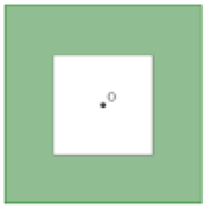


i) Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της παραβολής με την ευθεία
ii) Ποιο σύστημα εξισώσεων επαληθεύουν οι συντεταγμένες των σημείων τομής;
iii) Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα.

Σχόλιο Στη διεύθυνση: http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5281 μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με τη γραφική επίλυση ενός μη γραμμικού συστήματος όπως αυτό του 2ου ερωτήματος της παραπάνω δραστηριότητας.

Να τονιστεί ότι ανάλογα με το σύστημα επιλέγεται και ο καταλληλότερος τρόπος επίλυσής του.
Ως παράδειγμα μπορεί να δοθεί η παρακάτω δραστηριότητα.

Προτεινόμενη δραστηριότητα



Δύο τετράγωνα έχουν το ίδιο κέντρο και το ένα περιέχεται μέσα στο άλλο. Η διαφορά των περιμέτρων τους είναι 40cm. Το εμβαδόν της χρωματιστής ταινίας είναι $500cm^2$.
Να βρεθούν οι πλευρές των τετραγώνων.
Σχόλιο Αν x η πλευρά του εξωτερικού τετραγώνου και y του εσωτερικού, τότε το σύστημα διαμορφώνεται ως εξής : x-y=10 και $x^2-y^2=500$. Ένας τρόπος για να λύσουμε το σύστημα είναι να παραγοντοποιήσουμε τη $2^η$ εξίσωση και να αντικαταστήσουμε σ’ αυτή τη διαφορά των πλευρών, από την $1^η$εξίσωση.

- **Επίλυση προβλημάτων με συστήματα**

Η επίλυση προβλημάτων, όπως και στις εξισώσεις, πρέπει να κατέχει κεντρική θέση στη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού. Είναι σημαντικό για τους μαθητές να μπορούν να μεταφράζουν ένα πρόβλημα σε μαθηματική γλώσσα, να επιλέγουν τους αγνώστους που θα χρησιμοποιήσουν, να δημιουργούν τις εξισώσεις του συστήματος με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, αλλά και να ερμηνεύουν τα αποτελέσματα στο πλαίσιο του προβλήματος ώστε να απορρίπτουν μη εύλογες λύσεις (για παράδειγμα αρνητικές ηλικίες, αρνητική τιμή προϊόντος ή μήκος τμήματος, κλάσμα για αριθμό ατόμων κ.τ.λ.)

(Προτεινόμενη δραστηριότητα η Δ31 του Π.Σ).

Εξίσου σημαντικό είναι να μπορούν οι μαθητές να κατασκευάσουν δικά τους προβλήματα που επιλύονται με σύστημα. Για παράδειγμα, μπορεί να δοθούν στους μαθητές οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου 8cm και 4cm και να ζητηθεί να κατασκευάσουν ένα πρόβλημα που να έχει ως λύση το ζεύγος (8, 4). Ένα τέτοιο πρόβλημα θα μπορούσε να ήταν το εξής : «Να βρεθούν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου που έχει περίμετρο 24 και εμβαδόν 32».

Πιθανές δυσκολίες - Παρανοήσεις

Οι μαθητές αφού βρουν τις λύσεις ενός συστήματος, παραλείπουν να ερμηνεύσουν τα αποτελέσματα και να τα αξιολογήσουν με βάση τους περιορισμούς που δίνονται ή που οι ίδιοι δημιούργησαν ανάλογα με τη φύση του προβλήματος, με αποτέλεσμα να θεωρούν ως λύσεις μη αποδεκτές τιμές για τους αγνώστους.

Αξιοποίηση της Τεχνολογίας στη διδασκαλία του κεφαλαίου

Σε πολλές ιστοσελίδες υπάρχουν ενδιαφέρουσες δραστηριότητες, για παράδειγμα:

- Σημεία που επαληθεύουν μια γραμμική εξίσωση

Μικροπείραμα, όπου ο μαθητής ανακαλύπτει τα σημεία που επαληθεύουν τη γραμμική εξίσωση $4x+3y=18$.
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2228

- Το σύστημα και το σημείο τομής

Μικροπείραμα που δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να πειραματιστεί με τις διάφορες τιμές της παραμέτρου ενός συστήματος και να διερευνήσει την καμπύλη που γράφει το σημείο τομής των ευθειών που αντιστοιχούν στις γραμμικές εξισώσεις του συστήματος.
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5201

- Τα δωμάτια και τα συστήματα

Μικροπείραμα που δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να διερευνήσει, σε περιβάλλον πολλαπλών παραστάσεων, τις λύσεις του προβλήματος.
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5308

- Επίλυση και διερεύνηση γραμμικού συστήματος

Μικροπείραμα, για τη διερεύνηση των λύσεων ενός συστήματος 2x2.
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2046

- Γραφική επίλυση συστήματος- Διερεύνηση

Μικροπείραμα, όπου ο μαθητής οδηγείται μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην διερεύνηση της λύσης ενός γραμμικού συστήματος.
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2069

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $6^{ο}$ – Πιθανότητες

Εισαγωγή

Στην καθημερινή μας ζωή, χρησιμοποιούμε συχνά λέξεις όπως τυχαίο, πιθανό, αναμενόμενο, βέβαιο, αβέβαιο που είναι όροι οι οποίοι σχετίζονται με τις πιθανότητες. Οι έννοιες του «τυχαίου» και του «πιθανού» εξηγούνται συνήθως με τη διαίσθηση και τη κοινή λογική. Σύμφωνα με τον Laplace «*Οι Πιθανότητες δεν είναι τίποτε άλλο παρά η μετατροπή της κοινής λογικής σε μαθηματικές εκφράσεις*».
Η Θεωρία Πιθανοτήτων είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που μελετά τα τυχαία ή στοχαστικά φαινόμενα, δηλαδή εκείνα τα φαινόμενα που εξελίσσονται σε συνθήκες αβεβαιότητας και στα οποία τα δεδομένα δεν είναι αρκετά για την πρόβλεψη των αποτελεσμάτων τους[4]. Η αυστηρά μαθηματική θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων (μετροθεωρητική) έγινε το 1933 από τον A. Kolmogorov. Σήμερα η εφαρμογή των στοχαστικών μοντέλων είναι ευρύτατη και καλύπτει τομείς από τη Φυσική, τη Χημεία, τη Γενετική, τη Ψυχολογία, την Οικονομία, τη Μετεωρολογία, τις Τηλεπικοινωνίες, μέχρι τη Επιδημιολογία, τη Μαθηματική Βιολογία, τη Στατιστική Φυσική, τις Επιχειρησιακές έρευνες κ.ά.

Τι περιέχει το κεφάλαιο των Πιθανοτήτων και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών;

Σε προηγούμενες τάξεις οι μαθητές έχουν εμπλακεί με πειράματα τύχης σε απλά καθημερινά προβλήματα, έχουν εκφράσει αριθμητικά ως κλάσμα ή ποσοστό την πιθανότητα ενός ενδεχομένου, έχουν υπολογίσει την πιθανότητα ως το κλάσμα (πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων/(πλήθος δυνατών περιπτώσεων) για ισοπίθανα ενδεχόμενα και την έχουν συγκρίνουν με τη σχετική συχνότητα των αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης για μικρό και μεγάλο αριθμό επαναλήψεων, παρόλο που δεν γνώριζαν τους αντίστοιχους μαθηματικούς όρους.
Στην τάξη αυτή θα διδαχθούν με συστηματικότερο τρόπο τις προηγούμενες έννοιες και θα εμβαθύνουν περισσότερο στο λογισμό των πιθανοτήτων. Επιπλέον θα συνδέσουν την έννοια της πιθανότητας ενός ενδεχομένου με τη σχετική συχνότητα εμφάνισης του σε ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος.

Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο των Πιθανοτήτων

Η θεωρία Πιθανοτήτων προσφέρει τις μεθόδους με τις οποίες προσδιορίζουμε ένα μέτρο της «προσδοκίας» με την οποία αναμένεται να πραγματοποιηθεί ή να μην πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο, γνώση που βοηθάει στη λήψη αποφάσεων από πολίτες, οργανισμούς, επιστήμονες,

[4] Υπάρχουν φυσικές διαδικασίες που (σε δεδομένο επίπεδο γνώσης του ανθρώπου) έχουν (πρακτικώς) προβλέψιμη εξέλιξη. Π.χ. οι κινήσεις των πλανητών του πλανητικού μας συστήματος, φαινόμενα εκλείψεων, το φαινόμενο του βρασμού ύδατος κατά την θερμανση του στους 100^{0} , κλπ. Προφανώς η δυνατότητα αυτής της πρόβλεψης εξαρτάται από το επίπεδο γνώσης του παρατηρητή. Υπάρχουν όμως και άλλες διαδικασίες, που παρ όλον ότι ενδεχομένως εξηγούνται με αιτιοκρατικές θεωρίες, εντούτοις λόγω της πολυπλοκότητας των, ΔΕΝ μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια την εξέλιξή τους. Π.χ. το φαινόμενο της βροχής κατά τις επόμενες ημέρες ή των σεισμικών δονήσεων κατα τα επόμενα έτη, ή την επιβίωση διαγνωσθέντος καρκινοπαθούς κλπ. Με άλλα λόγια, στην μεγάλη πλειοψηφία των φαινομένων που πρακτικώς εξετάζουμε, η έννοια της τύχη συναρτάται με το επίπεδο γνώσεων που έχουμε την δεδομένη στιγμή. Εάν αυτές οι διαδικασίες (για τις οποίες σήμερα τουλάχιστον) δεν έχουμε δυνατότητα ακριβούς πρόβλεψης, ικανοποιούν όμως κάποιες κανονικότητες, τότε η θεωρία των πιθανοτήτων μπορεί να μας δώσει κάποιο «μέτρο» πρόβλεψης, που υστερεί βεβαιως της βεβαίας πρόβλεψης, όμως εξακολουθεί να έχει χρησιμότητα και να μας οδηγήσει στην λείψει εποφελών προφυλακτικών μέτρων κλπ. Π.χ. «Υπάρχει πιθανότητα 0,7±0.1, να συμβεί σεισμός τουλάχιστον 7.6 ρίχτερ, στην περιοχή του Αγίου Φραγκίσκου (ΗΠΑ), μέχρι το 2030», «Υπάρχει πιθανότητα 40% να βρέξει αύριο στην Αθήνα», «στην κατηγορία αυτού του ασθενούς το προσδόκιμο επιβίωσης είναι περίπου 6 χρόνια» κλπ. (Στ. Παπασταυρίδης, για τον Οδηγό του Εκπαιδευτικού).

κυβερνήσεις κτλ. Για παράδειγμα:

- Στην Ιατρική, όταν σε έναν ασθενή συνιστάται να υποβληθεί σε χειρουργική επέμβαση, συχνά θέλουν να γνωρίζουν το ποσοστό επιτυχίας της εγχείρησης, το οποίο δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια έκφραση πιθανότητας. Με βάση την πιθανότητα αυτή ο ασθενής θα λάβει την απόφαση για το αν πρέπει ή όχι να προχωρήσει στην επέμβαση.
- Σε ασφαλιστικές εταιρίες, το προσδόκιμο ζωής, δηλαδή ο πιθανός αριθμός των ετών που αναμένεται να ζήσει ένα άτομο, προσδιορίζεται με βάση τα χρόνια που έζησαν στο παρελθόν άτομα της ίδιας ομάδας και αποτελεί τη βάση για τον προσδιορισμό του ασφαλίστρου, αλλά και την ενημέρωση των πελατών.
- Στη Μετεωρολογία, οι επιστήμονες προβλέπουν τον καιρό με κάποια πιθανότητα, βασιζόμενοι σε πρότυπα προηγούμενων παρατηρήσεων. Η πρόβλεψη βέβαια είναι μια προσέγγιση και κανένας δεν μπορεί να εγγυηθεί τίποτα για τη θερμοκρασία, την ένταση του ανέμου ή για μια φυσική καταστροφή.

Στόχος της διδασκαλίας των Πιθανοτήτων, όπως και της Στατιστικής, είναι η ανάπτυξη ενός μη ντετερμινιστικού (μη αιτιοκρατικού) τρόπου σκέψης και συλλογισμού, που είναι διαφορετικός από την συλλογιστική που αναπτύσσουμε στην Αλγεβρα ή την Γεωμετρία. Αυτό γίνεται με την μελέτη «φαινομένων» που σχετίζονται με το τυχαίο όπως τα αποτελέσματα της εκτέλεσης πειραμάτων τύχης, παράλληλα με την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης που σχετίζεται με αυτά.

Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο των Πιθανοτήτων;

- Η κλίμακα μέτρησης των πιθανοτήτων είναι από 0 μέχρι 1. Ένα αδύνατο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα να συμβεί 0% =0 , ενώ ένα σίγουρο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα να συμβεί 100%=1.
- Η πειραματική πιθανότητα βασίζεται σε γεγονότα του παρελθόντος, ενώ η θεωρητική πιθανότητα βασίζεται στην ανάλυση τι θα μπορούσε να συμβεί. Η πειραματική πιθανότητα πλησιάζει τη θεωρητική, όταν χρησιμοποιείται μεγάλος αριθμός επαναλήψεων του πειράματος.
- Σε ζητήματα πιθανοτήτων, δεν μπορεί κανείς ποτέ να είναι σίγουρος για το τι θα συμβεί, σε αντίθεση με τα περισσότερα άλλα μαθηματικά συμπεράσματα.
- Μερικές φορές μια πιθανότητα μπορεί να εκτιμηθεί με τη χρήση ενός κατάλληλου μοντέλου και τη διεξαγωγή ενός πειράματος.
- Ο προσδιορισμός του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης, αποτελεί τη βάση για το σωστό προσδιορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου.

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Ε1 Ποιό πείραμα λέγεται αιτιοκρατικό και ποιό πείραμα τύχης ;
Ε2 Τι ονομάζουμε δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και τι ενδεχόμενο αυτού;
Ε3 Ποιό ενδεχόμενο είναι συμπληρωματικό του Α ως προς το βασικό σύνολο Ω και πώς αυτό συμβολίζεται;
Ε4 Πότε πραγματοποιείται η τομή δύο ενδεχομένων Α και Β και πώς αυτή συμβολίζεται;
Ε5 Πότε πραγματοποιείται η ένωση δύο ενδεχομένων Α και Β και πώς αυτή συμβολίζεται;
Ε6 Πότε πραγματοποιείται η διαφορά του ενδεχομένου Β από το Α και πώς αυτή συμβολίζεται;
Ε7 Πότε δύο ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους;
Ε8 Αν ένα πείραμα εκτελείται ν φορές και το ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται κ φορές τότε τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα του Α;
Ε9 Τι ορίζουμε πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α, σ' ένα πείραμα με ν ισοπίθανα αποτελέσματα;
Ε10 Ποιοί είναι οι κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων.

Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά το τέλος της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να :

M1 Να αναγνωρίζουν αν ένα πείραμα είναι πείραμα τύχης. (στόχοι Π.Σ, 6.1.1)

M2 Να προσδιορίζουν το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και ενδεχόμενα αυτού με διάφορους τρόπους. (στόχοι Π.Σ, 6.1.2)

M3 Να γνωρίζουν πώς γίνονται οι πράξεις μεταξύ ενδεχομένων και ποια ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα. (στόχοι Π.Σ, 6.2.1)

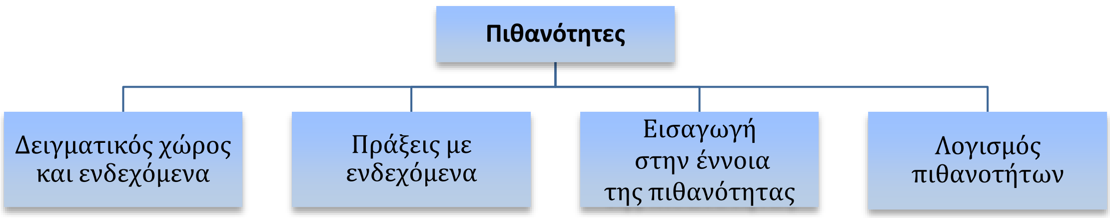
M4 Να μεταφράζουν διάφορες σχέσεις και πράξεις ενδεχομένων που είναι διατυπωμένες σε φυσική γλώσσα, στη γλώσσα των συνόλων και αντίστροφα. (στόχοι Π.Σ, 6.2.1)

M5 Να εκτιμούν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου με τη βοήθεια της σχετικής συχνότητας και να επιλύουν προβλήματα με τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας. (στόχοι 6.3.1 και 6.3.2)

M6 Να διατυπώνουν και αποδεικνύουν τους βασικούς κανόνες λογισμού πιθανοτήτων, να τους αναπαριστούν με διαγράμματα Venn και να τους χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων. (στόχοι Π.Σ, 6.4.1)

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Όσα αναφέρονται στη συνέχεια είναι προτεινόμενα ώστε ο διδάσκων να διαθέτει μία οργανωμένη πρόταση διδασκαλίας.
Κατά αρχήν καλό θα είναι ο διδάσκων να διαθέτει μία γενική εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η διδασκαλία του κεφαλαίου όπως η παρακάτω.



Με βάση τα μαθησιακά αποτελέσματα και τα ερωτήματα στα οποία θα πρέπει να μπορεί να απαντά ο μαθητής μετά τη διδασκαλία των συνόλων, θα επισημαίναμε ότι:

- **Δειγματικός χώρος και ενδεχόμενα**

Πρέπει να γίνει κατανοητό ότι ο δειγματικός χώρος αποτελεί το βασικό στοιχείο μαθηματικής μοντελοποίησης ενός πειράματος τύχης. Οι μαθητές να ασκηθούν στον προσδιορισμό του δειγματικού χώρου, επιλέγοντας και χρησιμοποιώντας την κατάλληλη τεχνική. Οι διάφορες τεχνικές αναπαράστασης του προβλήματος όπως τα δενδροδιάγραμματα και οι πίνακες διπλής εισόδου, βοηθούν στη ανάλυση των σταδίων εκτέλεσης ενός πειράματος τύχης και στην κατασκευή του δειγματικού του χώρου.

Προτεινόμενη δραστηριότητα
Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικές φορές. Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.

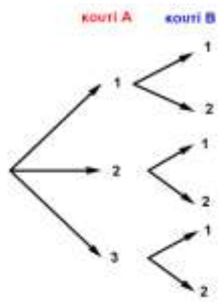
Σχόλιο Τη δραστηριότητα αυτή, μπορούν οι μαθητές να την απαντήσουν από μνήμης. Αν ρίξουμε όμως το νόμισμα τέσσερις φορές, τότε η ανάγκη ενός συστηματικού τρόπου προσδιορισμού όλων των δυνατών αποτελεσμάτων θα δώσει στον διδάσκοντα την ευκαιρία να εισάγει το δενδροδιάγραμμα ως μία τέτοια μέθοδο (τεχνική).
Αν το ερώτημα γίνει, «ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές», τότε το δενδροδιάγραμμα γίνεται πολύπλοκο και στην περίπτωση αυτή καταλληλότερη μέθοδος καταγραφής των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος είναι ο πίνακας διπλής εισόδου.

Προτεινόμενη δραστηριότητα
Η τηλεόραση παρουσιάζει κάθε μέρα ένα παιχνίδι τύχης. Ένα βραβείο τοποθετείται τυχαία πίσω από μια από τις δύο πόρτες της σκηνής κάθε φορά που διαγωνίζεται ένας παίκτης. Ο διαγωνιζόμενος

κερδίζει το βραβείο με την επιλογή της σωστής πόρτας. Ποιά είναι η πιθανότητα ακριβώς δύο από τους τέσσερις διαγωνιζομένους μιας ημέρας να κερδίσουν ένα βραβείο.

Προτεινόμενη δραστηριότητα

Το δενδροδιάγραμμα δείχνει το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης. Γράψε ένα πρόβλημα που να ανταποκρίνεται στα παρακάτω δεδομένα.

	Εξαγόμενο αποτέλεσμα	Άθροισμα	Γινόμενο
	(1, 1)	2	1
	(1, 2)	3	2
	(2, 1)	3	2
	(2, 2)	4	4
	(3, 1)	4	3
	(3, 2)	5	6

- ## Πράξεις με ενδεχόμενα

Αφού τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω, ισχύει η άλγεβρα των συνόλων. Πρέπει επομένως οι μαθητές να είναι εξοικειωμένοι με τις πράξεις μεταξύ συνόλων τις οποίες και να ερμηνεύουν ως αντίστοιχες πράξεις με ενδεχόμενα.

Για την κατανόηση και την επίλυση προβλημάτων, σημαντική είναι η μετάφραση σχέσεων μεταξύ ενδεχομένων από τη φυσική γλώσσα στη γλώσσα των συνόλων και αντίστροφα. Χρειάζεται επίμονη προσπάθεια για να μπορέσουν οι μαθητές να διατυπώνουν με τη γλώσσα των συνόλων εκφράσεις όπως «να πραγματοποιηθούν και τα δυο», «να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα », «να πραγματοποιηθεί μόνο ένα», «να μην πραγματοποιηθεί κανένα» κλπ.

Προτεινόμενη δραστηριότητα

Μια ομάδα έχει πιθανότητα να κερδίσει το πρωτάθλημα 50%, το κύπελλο 15% και τα δύο 10%. Να βρεθούν οι πιθανότητες η ομάδα να κερδίσει :

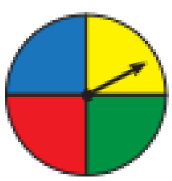
α) τουλάχιστον έναν τίτλο, β) μόνο το πρωτάθλημα, γ) ακριβώς έναν τίτλο, δ) κανέναν τίτλο.

- ## Εισαγωγή στην έννοια της πιθανότητα

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας προτείνεται να είναι η κατάληξη της μελέτης της σχετικής συχνότητας και όχι να δοθεί απλά ο τυπικός ορισμός της.

Οι μαθητές είναι σημαντικό να κατανοήσουν ότι η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου, πλησιάζει την τιμή της πιθανότητας, όταν έχουμε μεγάλο αριθμό εκτελέσεων του ίδιου πειράματος (Νόμος των μεγάλων αριθμών)

Προτεινόμενη δραστηριότητα



Ο τροχός της τύχης είναι χωρισμένος σε τέσσερις ίσους κυκλικούς τομείς με διαφορετικά χρώματα. Το βέλος περιστράφηκε 20 φορές. Ο πίνακας παρουσιάζει τα αποτελέσματα του πειράματος.

Αποτελέσματα του τροχού

Κόκκινο	Πράσινο	Κίτρινο	Μπλέ
3	8	5	4

1. Για ποιο χρώμα η πειραματική πιθανότητα ταυτίζεται με τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας;
2. Για ποιό χρώμα η πειραματική πιθανότητα είναι μεγαλύτερη από αυτήν που προκύπτει από τον κλασσικό ορισμό ;
3. Εξηγείστε τη διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων του πειράματος και του κλασσικού ορισμού της πιθανότητας.

Σχόλιο Στόχος της δραστηριότητας είναι να κατανοήσουν οι μαθητές ότι όταν αυξάνεται ο αριθμός των εκτελέσεων ενός πειράματος τύχης, τότε η σχετική συχνότητα τείνει προς τον αριθμό που υπολογίζουν ως το κλάσμα του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων προς το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων.

Ποιά σημεία θα πρέπει να προσέξει ιδιαίτερα ο διδάσκων;

Εάν βγάλουμε ένα αντικείμενο από ένα κουτί, μπορούμε να το ξαναβάλουμε ή να μην το ξαναβάλουμε πριν βγάλουμε ένα άλλο. Στην πρώτη περίπτωση το ίδιο αντικείμενο μπορεί να βγει πολλές φορές, ενώ στη δεύτερη μόνο μια φορά. Η δειγματοληψία με επανατοποθέτηση και χωρίς επανατοποθέτηση δίνει διαφορετικούς δειγματικούς χώρους και ενδεχόμενα για το ίδιο πείραμα τύχης.

Πιθανές δυσκολίες –Παρανοήσεις

- *Αποφυγή χρησιμοποίησης του δειγματικού χώρου.*

Οι μαθητές απαντούν πολλές φορές παρορμητικά σε προβλήματα πιθανοτήτων και δεν ακολουθούν το μοντέλο μαθηματικοποίησης για να προσδιορίσουν τη ζητούμενη πιθανότητα. Για το λόγο αυτό πρέπει να τους δοθούν ευκαιρίες με ελκυστικές δραστηριότητες, ώστε να αντιμετωπίσουν τις πλάνες και τις παρανοήσεις τους. Για παράδειγμα:

«Το Δίκαιο παιχνίδι »

Οι παίχτες Α και Β ρίχνουν ο καθένας από ένα ζάρι συγχρόνως. Ο παίχτης Α κερδίζει αν η διαφορά των ενδείξεων (των άνω όψεων των ζαριών) είναι 0, 1 ή 2. Ο παίχτης Β κερδίζει αν η διαφορά των ενδείξεων είναι 3, 4 ή 5. Να εξεταστεί αν οι παίχτες έχουν την ίδια πιθανότητα να κερδίσουν, αν δηλαδή το παιχνίδι είναι δίκαιο.

Πολλοί μαθητές θα απαντήσουν άμεσα ότι το παιχνίδι είναι δίκαιο, αφού «ο κάθε παίχτης κερδίζει σε τρεις περιπτώσεις». Το γεγονός να θεωρούν οι μαθητές ότι τα απλά ενδεχόμενα κάθε δειγματικού χώρου είναι ισοπίθανα, είναι αποτέλεσμα παρανόησης που έχει τις ρίζες της στη συμμετρία και την ομοιογένεια, όπως τις χρησιμοποίησαν στις περιπτώσεις ενός αμερόληπτου του νομίσματος ή ζαριού. Όμως μια προσεκτικότερη εξέταση του θέματος μπορεί να γίνει είτε πειραματικά, παίζοντας πολλές φορές το παιχνίδι και συντάσσοντας πίνακα κατανομής συχνοτήτων, είτε, αποτελεσματικότερα, με την κατασκευή του δειγματικού χώρου και βρίσκοντας τις πιθανότητες των δυο ενδεχομένων[5].

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	o

[5] *Ο D' Alembert (1717-1783) , διάσημος Γάλλος μαθηματικός, μηχανικός, φυσικός και φιλόσοφος, πρότεινε ως δειγματικό χώρο σε δυο ρίψεις ενός νομίσματος το σύνολο Ω ={0, 1, 2 },όπου τα απλά ενδεχόμενα {0}, {1} και {2} περιγράφουν τον αριθμό εμφάνισης της όψης «Κ» (κεφαλή). Ισχυρίστηκε, λαθεμένα, ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου να εμφανιστεί μια τουλάχιστον κεφαλή σε δυο ρίψεις ενός νομίσματος είναι ίση με 2/3 (αντί του ορθού 3/4).*

Από τον πίνακα αποτελεσμάτων προκύπτει όχι μόνον ο δειγματικός χώρος του πειράματος, αλλά και η διαπίστωση ότι τα απλά ενδεχόμενα του χώρου αυτού δεν είναι ισοπίθανα.
Έχουμε το δειγματικό χώρο $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ και τις αντίστοιχες πιθανότητες κάθε απλού ενδεχομένου που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Διαφορά	0	1	2	3	4	5
Πιθανότητες	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

Αν Α είναι το ενδεχόμενο να κερδίσει ο πρώτος παίχτης και Β το ενδεχόμενο να κερδίσει ο δεύτερος παίχτης , τότε οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι

$$P(A) = P(0)+P(1)+P(2) = \frac{6}{36}+\frac{10}{36}+\frac{8}{36} = \frac{24}{36}$$

Άρα $P(A) = \frac{2}{3}$

$$P(B) = P(3)+P(4)+P(5) = \frac{6}{36}+\frac{4}{36}+\frac{2}{36} = \frac{12}{36}$$

Άρα $P(B) = \frac{1}{3}$

Ένα αποτέλεσμα που θα τους ξαφνιάσει, αφού έρχεται σε αντίθεση με την αρχική απάντηση των μαθητών ότι το παιχνίδι ήταν δίκαιο και θα τους οδηγήσει σε δεύτερες σκέψεις για την αρχική τους εκτίμηση.

- *Στατιστικός ορισμός της πιθανότητας*

Οι μαθητές φαίνεται να μην κατανοούν ότι η σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου μπορεί να θεωρηθεί ως η πιθανότητα πραγματοποίησης του μόνο όταν ο αριθμός επαναλήψεων του πειράματος τύχης είναι πολύ μεγάλος. Όταν μάλιστα έχουν να αντιμετωπίσουν ερωτήματα μέσα σε πραγματικό πλαίσιο, χάνουν τελείως τον προσανατολισμό τους. Για να κατανοήσουν οι μαθητές ότι τα μεγαλύτερα δείγματα, εφόσον είναι αντιπροσωπευτικά, μοιάζουν περισσότερο στον πληθυσμό από τον οποίο προέρχονται, πρέπει οι μαθητές να απαντούν σε ερωτήματα της μορφής:

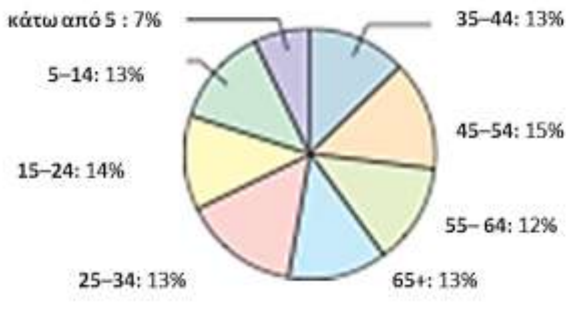
- *Που είναι πιθανότερο το 1/6 των ρίψεων ενός ζαριού να είναι πεντάρια, σε 10 ρίψεις ή σε 200 ρίψεις;*
- *Που είναι πιθανότερο το 70% των νεογέννητων σε ένα μήνα να είναι αγόρια, σε μια κλινική με 20 γεννήσεις ή σε μια κλινική με 200 γεννήσεις;*

- **Λογισμός πιθανοτήτων**

Οι μαθητές διατυπώνουν και αποδεικνύουν τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων για συμβιβαστά και ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, τους αιτιολογούν με τη βοήθεια των διαγραμμάτων του Venn και τους χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.

<u>Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>

Η κατανομή των ηλικιών ενός πληθυσμού παρουσιάζονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα.



Ένα άτομο επιλέγεται τυχαία ποιά είναι η πιθανότητα να είναι :
α) τουλάχιστον 15 χρονών; β) από 25 έως 44 χρονών; γ) το λιγότερο 45 χρονών

Αξιοποίηση της τεχνολογίας στη διδασκαλία του κεφαλαίου

Σε πολλές ιστοσελίδες υπάρχουν ενδιαφέρουσες δραστηριότητες με τις οποίες επιδιώκεται να γίνει κατανοητό ότι τα αποτελέσματα της ρίψης ενός νομίσματος, ενός ή περισσοτέρων ζαριών, του τροχού της τύχης κ.τ.λ. είναι ισοπίθανα, όταν το πείραμα επαναλαμβάνεται πολλές φορές (νόμος μεγάλων αριθμών). Σε άλλες πάλι ιστοσελίδες υπάρχουν δραστηριότητες στις οποίες ζητείται να υπολογιστεί η πιθανότητα διαφόρων ενδεχομένων.
Ενδεικτικά παραδείγματα:

- Δραστηριότητα σε περιστρεφόμενη σβούρα (έννοια της πιθανότητας):
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2009?locale=el

- Δραστηριότητα με ρίψη νομίσματος:
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2011?locale=el

- Δραστηριότητα με πιθανότητες και κίνηση:
  http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1984?locale=el

- Δραστηριότητα με ρίψη νομίσματος και εύρεση της σχετικής συχνότητας
  http://www.shodor.org/interac tirade/activities/Coin/

- Προσομοίωση ταυτόχρονης ρίψης νομισμάτων ή ζαριών (2 έως 16):
  http://www.random.org/coins/
  http://www.random.org/dice/
- Ρίχνοντας ένα νόμισμα 50, 100, ..., 1000 φορές μπορούν οι μαθητές να εκτιμήσουν την πιθανότητα να έλθει κεφάλι ή γράμματα.
  http://www.shodor.org/interactivate/activities/Coin/

- Ρίχνοντας ένα ζάρι 100 φορές (http://tube.geogebra.org/student/m348371) ή από 60 μέχρι 60.000 φορές (http://tube.geogebra.org/student/m348553) οι μαθητές μπορούν να εκτιμήσουν την πιθανότητα να έλθει 1, 2, …, 6.

- Τροχοί της τύχης χωρισμένους σε ίσους και άνισους τομείς
  http://tube.geogebra.org/student/m348829

  http://www.shodor.org/interactivate/Adjustable Spinner

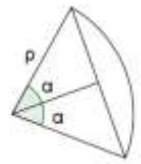
Βιβλιογραφία

- Πολ. Μωυσιάδης. Ιστορία της έννοιας της Πιθανότητας, users.auth.gr/.../Ιστορία%20της%20έννοιας%20της%20Πιθανότητας23_0.
- Στ. Παπασταυρίδης (1986). «Πιθανότητες: Ιστορία, Θεωρία και Πράξη», περιοδικό "ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Γ ", τεύχος 10, σελ. 9-19.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^{o} : Τριγωνομετρία

Εισαγωγή

Η Τριγωνομετρία είναι ο κλάδος των Μαθηματικών, που έχει ως πρωταρχικό σκοπό την επίλυση τριγώνων (τρίγωνο+μέτρον) επίπεδων ή σφαιρικών, δηλαδή τον υπολογισμό των αγνώστων πλευρών και γωνιών του τριγώνου όταν δοθούν επαρκή στοιχεία του. Η ιστορία της Τριγωνομετρίας αρχίζει με τις πρώτες μαθηματικές καταγραφές στην Αίγυπτο και στη Βαβυλώνα. Η μέτρηση των γωνιών με τόξα κύκλου, είναι τόσο αρχαία, όσο και η ίδια η έννοια της γωνίας. Οι παρατηρητές του ουρανού είχαν αντιληφθεί ότι η πορεία που ακολουθούν τα άστρα κάθε νύχτα είναι κυκλικά τόξα πάνω στον ουράνιο θόλο. Οι Βαβυλώνιοι, καθιέρωσαν τη μέτρηση των γωνιών σε μοίρες σε πρώτα λεπτά και σε δεύτερα. Χρησιμοποιούσαν την εκλειπτική ως βασικό κύκλο στην ουράνια σφαίρα [4]. Οι 60° θεωρήθηκαν ως μονάδα πιθανόν επειδή η χορδή 60° ισούται με την ακτίνα του κύκλου. Οι Βαβυλώνιοι, χρησιμοποιούσαν μετρήσεις γωνιών για την εύρεση της θέσης και των τροχιών των ουρανίων αντικειμένων και είχαν συγκεντρώσει έναν τεράστιο αριθμό δεδομένων από παρατηρήσεις, ένα μεγάλο μέρος των οποίων πέρασε στους Ελληνες [4]. Αυτά τα πρώτα βήματα στην Αστρονομία οδήγησαν στη γέννηση της Τριγωνομετρίας. Μέχρι όμως την εποχή των Ελλήνων καμία καθαρά τριγωνομετρική έννοια δεν είχε κάνει την εμφάνισή της. Τον 2ο αιώνα π.Χ ο αστρονόμος Ίππαρχος συνέταξε ένα τριγωνομετρικό πίνακα για την επίλυση τριγώνων. Στον πίνακα αυτόν σε κάθε γωνία απέδιδε μία τιμή που ήταν «το μήκος της χορδής» η οποία αντιστοιχούσε στη γωνία όταν την έκανε επίκεντρη με σταθερή ακτίνα ρ. Σύμφωνα με τον van der Waerden «… *οι Έλληνες, όπως ο Ίππαρχος και ο Πτολεμαίος χρησιμοποιούσαν, πάντοτε χορδές κυκλικών τόξων. Στην πραγματικότητα δεν έχει μεγάλη διαφορά αν εργάζεται κανείς με χορδές ή με ημίτονα, αφού ό,τι ονομάζουμε σήμερα ημίτονο μιας γωνίας, είναι το πηλίκο του μισού της χορδής του διπλασίου του τόξου στο οποίο βαίνει η γωνία, προς την ακτίνα, δηλαδή,* $ημα=\frac{1}{2ρ}χορδή(2α)$ »[4]. Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος, στο έργο του "Αλμαγέστη", διεύρυνε τις χορδές του Ίππαρχου σε ένα κύκλο [2].



Αρχικά λοιπόν η Τριγωνομετρία ήταν ένα «παρακλάδι» της Αστρονομίας. Η ανάγκη της Τριγωνομετρίας προέκυψε, όταν οι Ελληνες, διαπίστωσαν, ότι για την ανάπτυξη της Μαθηματικής Αστρονομίας, χρειάζονταν ένα πρόσθετο μαθηματικό εργαλείο επιβοηθητικό της Γεωμετρίας, που θα τους έδινε τη δυνατότητα να επιλύουν με ακρίβεια τρίγωνα, επίπεδα και σφαιρικά. Αυτό συνέβη κατά τους ελληνιστικούς χρόνους, μετά το 300 π.Χ. περίπου.
Τον 8ο αιώνα μ.Χ, οι Άραβες αστρονόμοι υιοθέτησαν τις τριγωνομετρικές μελέτες των αρχαίων Ελλήνων και των Ινδών και ανάπτυξαν την σφαιρική τριγωνομετρία. Τα έργα των Ινδών και των Ελλήνων μεταφράστηκαν και διαβάστηκαν από τους άραβες μαθηματικούς οι οποίοι χρησιμοποίησαν το ινδικό ημίτονο (οι χορδές αντικαταστάθηκαν τον 5ο μ. Χ αιώνα από τους Ινδούς αστρονόμους με τα ημίτονα) παράλληλα με την ελληνική χορδή. Ο Πέρσης μαθηματικός και αστρονόμος al-Battani εισήγαγε και το συνημίτονο[3]. Αργότερα επανεισήγαγαν την εφαπτομένη των Κινέζων, ενώ πρότειναν και τη συνεφαπτομένη. Στο τέλος του 10ου αιώνα χρησιμοποιούσαν πλέον όλες τις τριγωνομετρικές έννοιες, ενώ είχαν ανακαλύψει αλλά και αποδείξει βασικά θεωρήματα της τριγωνομετρίας τόσο για τα επίπεδα όσο και για τα σφαιρικά τρίγωνα. Όλες αυτές οι ανακαλύψεις είχαν πυροδοτηθεί και από την ανάγκη για την ανάπτυξη της αστρονομίας, αλλά και από την ανάγκη προσανατολισμού. Οι Άραβες συνέταξαν πίνακες εκπληκτικής ακρίβειας με τις τιμές του ημίτονου και της εφαπτομένης για γωνίες ανά ένα πρώτο λεπτό της μοίρας.
Καθοδηγούμενη από τις απαιτήσεις της ναυσιπλοΐας, την ανάγκη σύνταξης ημερολογίου και την αυξανόμενη ανάγκη για ακριβείς χάρτες των μεγάλων περιοχών, η τριγωνομετρία εξελίχθηκε σε ένα σημαντικό κλάδο των μαθηματικών. Ο Bartholomaeus Pitiscus ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τη λέξη, δημοσιεύοντας την trigonometria του το 1595. Η Gemma Frisius περιέγραψε για πρώτη φορά τη μέθοδο της τριγωνοποίησης η οποία χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα στην χωρομέτρηση. Ήταν ο Leonhard Euler ο οποίος ενσωμάτωσε πλήρως τους μιγαδικούς αριθμούς στην τριγωνομετρία. Τα έργα του James Gregory τον 17ο αιώνα και του Colin Maclaurin τον 18ο αιώνα είχαν μεγάλη επιρροή στην ανάπτυξη των τριγωνομετρικών σειρών. Τον 18ο αιώνα, ο Brook Taylor καθόρισε τη γενική σειρά Taylor.
Οι Άραβες υιοθέτησαν τις τριγωνομετρικές μελέτες των αρχαίων Ελλήνων και των Ινδών και ανάπτυξαν την σφαιρική τριγωνομετρία. Οι μαθηματικοί της Ευρώπης μυήθηκαν στην τριγωνομετρία

τον 15ο αιώνα, όταν την εποχή της Αναγέννησης ασχολήθηκαν με τον υπολογισμό βαλλιστικών τροχιών. Ο Γερμανός αστρονόμος Regiomontanus σύνταξε μια πεντάτομη διδασκαλία της επίπεδης και σφαιρικής τριγωνομετρία με τίτλο *De triangulis omnimodis* («Περί των τριγώνων»). Σήμερα ο τρόπος γραφής των τριγωνομετρικών συναρτήσεων βασίζεται κατά μεγάλο βαθμό στα έργα του Euler. Πριν από τον Euler, το έργο του Viéte υπήρξε σημαντικό για την μορφοποίηση της τριγωνομετρίας, όπως τη γνωρίζουμε σήμερα.

Τι περιέχει το κεφάλαιο της Τριγωνομετρίας και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών;

Οι μαθητές σε προηγούμενες τάξεις έχουν διδαχθεί τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας ορθογώνιου τριγώνου και έχουν επιλύσει με αυτούς και το Πυθαγόρειο θεώρημα, ορθογώνια τρίγωνα. Εχουν επεκτείνει τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών και σε αμβλείες γωνίες με χρήση συστήματος ορθοκανονικών συντεταγμένων. Επιπλέον έχουν διδαχθεί τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες καθώς και τους νόμους των ημιτόνων και των συνημιτόνων.
Στην τάξη αυτή επεκτείνουν τις γνώσεις τους, στους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας, με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Χρησιμοποιούν τον τριγωνομετρικό κύκλο για να απλοποιήσουν τους τύπους των τριγωνομετρικών αριθμών και με τον τρόπο αυτό να συντομεύσουν τη διαδικασία υπολογισμού τους. Αποδεικνύουν τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες και τις χρησιμοποιούν για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας, όταν ένας από αυτούς είναι γνωστός. Τέλος χρησιμοποιούν το Νόμο ημιτόνων και το Νόμο συνημιτόνων για να επιλύουν τρίγωνα.

Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο της Τριγωνομετρίας;

Η Τριγωνομετρία είναι ένας κλάδος των Μαθηματικών που συνδέει τη Γεωμετρία, τη Μέτρηση και την Αλγεβρα. Χρησιμοποιείται στην επίλυση προβλημάτων τα οποία προέρχονται είτε από τα Μαθηματικά, είτε από τις άλλες επιστήμες (κυρίως τη Φυσική) ή και από την καθημερινή ζωή. Οι τριγωνομετρικές έννοιες αποτελούν για τους μαθητές, προαπαιτούμενη γνώση για τη μελέτη άλλων μαθηματικών αντικειμένων καθώς, οι έννοιες αυτές, διαπερνούν τα σχολικά μαθηματικά και σχετίζονται τόσο με τη μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων όσο και τη μελέτη περιοδικών κυρίως φαινομένων ή καταστάσεων. Σημαντικές είναι επίσης και οι πρακτικές εφαρμογές της Τριγωνομετρίας όπως είναι η μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων, ο υπολογισμός γωνιών και ο υπολογισμός της κλίσης

Ποιές είναι οι σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο της Τριγωνομετρίας;

- Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας είναι λόγοι ευθύγραμμων τμημάτων, οι οποίοι εξαρτώνται μόνο από το μέγεθος της γωνίας.
- Οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι αποτέλεσμα των ορισμών των τριγωνομετρικών αριθμών και του Πυθαγορείου θεωρήματος.
- Οι Νόμοι ημιτόνων και συνημιτόνων είναι τύποι που συνδέουν τις πλευρές και τις γωνίες ενός τριγώνου.

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Ε1 Πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων;

Ε2 Ποιά σχέση συνδέει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών που διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο των 360^o;

Ε3 Σε ένα σημείο Μ(x, y) του τριγωνομετρικού κύκλου τι παριστάνουν οι συντεταγμένες x και y του σημείου;

Ε4 Ποιές είναι οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες;

Ε5 Ποιος είναι ο Νόμος των ημιτόνων και ποιος των συνημιτόνων σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ.

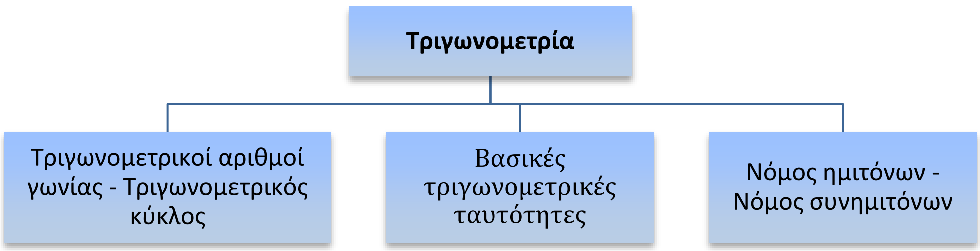
Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά το τέλος της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να :

Μ1 Να ορίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.
Μ2 Να προσδιορίζουν το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας .
Μ3 Να αιτιολογούν τη σχέση που συνδέει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών που διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο των 360^o.
Μ4 Να ερμηνεύουν τις συντεταγμένες ενός σημείου του τριγωνομετρικού κύκλου ως τριγωνομετρικούς αριθμούς.
Μ5 Να χρησιμοποιούν τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών όταν δίνεται ένας από αυτούς, αλλά και για να αποδεικνύουν άλλες ταυτότητες.
Μ6 Να χρησιμοποιούν το Νόμο ημιτόνων και το Νόμο συνημιτόνων για την εύρεση άγνωστων πλευρών και γωνιών τριγώνου όταν δίνονται επαρκή στοιχεία του .

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου της Τριγωνομετρίας

Όσα αναφέρονται στη συνέχεια είναι προτεινόμενα ώστε ο διδάσκων να διαθέτει μία οργανωμένη πρόταση διδασκαλίας.
Κατά αρχήν καλό θα είναι ο διδάσκων να διαθέτει μία γενική εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η διδασκαλία του κεφαλαίου όπως η παρακάτω.



Με βάση τα μαθησιακά αποτελέσματα και τα ερωτήματα στα οποία θα πρέπει να μπορεί να απαντά ο μαθητής μετά τη διδασκαλία της Τριγωνομετρίας, θα επισημαίναμε ότι:

- **Τριγωνομετρικός κύκλος - τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας**

Κύριος στόχος της ενότητας αυτής, είναι να κατανοήσουν οι μαθητές τους τρόπους και τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται για να επεκταθούν οι ορισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών και για γωνίες μεγαλύτερες των 90^o, αρχικά με χρήση ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, (ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων) και στη συνέχεια με χρήση του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων (τριγωνομετρικού κύκλου).

1) Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας
Στην αρχή της ενότητας οι μαθητές επαναλαμβάνουν τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών (ημω, συνω, εφω) οξείας γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο, οι οποίοι τους είναι ήδη γνωστοί από το Γυμνάσιο.

Για να χρησιμοποιήσουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς και να εκτιμήσουν για μια ακόμα φορά, τη χρησιμότητα τους, προτείνεται, να εμπλακούν με τη μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων και την επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με υπολογισμούς απρόσιτων αποστάσεων. Είναι σημαντικό οι μαθητές να μην αντιμετωπίζουν τα μαθηματικά μόνο ως ένα σύνολο αφηρημένων εννοιών, αλλά και ως ιδέες που μπορούν να έχουν εφαρμογή στον πραγματικό κόσμο και μάλιστα σε καταστάσεις που δεν είναι τόσο απλές, όπως είναι η μέτρηση απρόσιτων αποστάσεων.

(Παράδειγμα δραστηριότητας η Δ37 του Π.Σ, η οποία προκύπτει από μια ιστορική αναφορά)

2) Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $90^o \leq \omega \leq 360^o$

Προκειμένου να γενικευθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί και για γωνίες ω μεγαλύτερες των 90^o και μικρότερες ή ίσες των 360^o, οι μαθητές τοποθετούν, τη γωνία κατάλληλα σε ένα σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων. Να τονιστεί ότι η κορυφή της γωνίας πρέπει να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων και η μια πλευρά της (αρχική πλευρά της γωνίας) να ταυτίζεται με τον ημιάξονα Οx.
Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες ενός οποιουδήποτε σημείου Μ(x, y) της τελικής πλευράς της γωνίας και της απόστασης ρ του Μ από την αρχή των αξόνων Ο (που υπολογίζεται με τη βοήθεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος) και θα καταλήξουν στους τύπους :

$$\text{ημω} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}} = \frac{y}{\rho} \qquad \text{συνω} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{απόσταση από το Ο}} = \frac{x}{\rho}$$

Δυσκολίες που σχετίζονται με τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας

Ενώ οι μαθητές κατανοούν τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, δεν κατανοούν τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών μιας μη οξείας γωνίας. Βασική αιτία είναι η αλλαγή του πλαισίου διαπραγμάτευσης των εννοιών αυτών. Οι μαθητές καλούνται να εγκαταλείψουν το ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο μέχρι τώρα έχουν συνηθίσει και να περάσουν σ΄ένα άλλο πλαίσιο.
Το καινούργιο πλαίσιο είναι το ορθογώνιο σύστημα αξόνων. Σ’ αυτό το πλαίσιο, καλούνται να εκφράσουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας μ’ ένα διαφορετικό τρόπο από αυτόν που έχουν συνηθίσει. Χρησιμοποιούν βέβαια και πάλι τους γνωστούς τους λόγους, όχι όμως λόγους πλευρών αλλά λόγους των συντεταγμένων ενός τυχαίου σημείου Μ (x, y) της τελικής πλευράς της γωνίας και της απόστασης ρ του σημείου Μ από το Ο.
Στην προσπάθεια να περάσουν οι μαθητές ομαλότερα στους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών μιας οποιασδήποτε γωνίας σε ένα σύστημα ορθοκανονικών συντεταγμένων, προτείνεται να υπολογιστούν διαδοχικά οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας, αμβλείας γωνίας και μη κυρτής γωνίας.

3) Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών μεγαλυτέρων των 360^o

Το γεγονός ότι δυο γωνίες ω και $\kappa\cdot 360^o+\omega$ έχουν την ίδια τελική πλευρά, δικαιολογεί και το γεγονός ότι έχουν και τους ίδιους αντίστοιχους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

4) Ο τριγωνομετρικός κύκλος

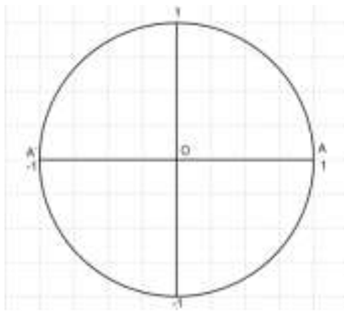
Επειδή στους τύπους υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών της προηγούμενης ενότητας περιέχεται η απόσταση ρ του Μ(x, y) από την αρχή των αξόνων Ο, αν γράψουν κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1, τότε οι μαθητές διαπιστώσουν ότι οι τύποι θα απλοποιηθούν και με τον τρόπο αυτό θα συντομευθεί τη διαδικασία υπολογισμού τους. Παρατηρώντας τον μοναδιαίο αυτό κύκλο (τριγωνομετρικός κύκλος), οι μαθητές διαπιστώνουν ακόμα ότι :

- το ημίτονο μιας γωνίας ω είναι η τεταγμένη y του σημείου Μ της τομής της τελικής πλευράς της γωνίας και του κύκλου, ενώ
- το συνημίτονο της γωνίας ω είναι η τετμημένη x, του σημείου Μ της τομής της τελικής πλευράς της γωνίας και του κύκλου.

Διαπιστώνουν επιπλέον, πως το ημίτονο και το συνημίτονο μιας οποιασδήποτε γωνίας δεν μπορούν να υπερβούν την ακτίνα του κύκλου και επομένως ισχύουν οι ανισότητες $-1 \leq \text{ημω} \leq 1$ και $-1 \leq \text{συνω} \leq 1$.
Οι μαθητές πρέπει ακόμα να μπορούν να χρησιμοποιούν τον τριγωνομετρικό κύκλο και για να προσδιορίζουν το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας .

(Παράδειγμα δραστηριότητας η Δ38 του Π.Σ)

Προτεινόμενη δραστηριότητα



α) Στον άξονα x΄x του τριγωνομετρικού κύκλου προσδιορίστε ένα σημείο Δ με τετμημένη 0,75. Στη συνέχεια προσδιορίστε γραφικά τις γωνίες που έχουν συνημίτο τον αριθμό 0,75. Προσδιορίστε ακόμα και το ημίτονο των γωνιών αυτών.

β) Να κάνετε το ίδιο για το σημείο Λ με τετμημένη 0,50 και για το σημείο Μ με τετμημένη -0,80.

Στη διεύθυνση:
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5140?locale=el μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με τη χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου.

5) Ο άξονας των εφαπτόμενων και των συνεφαπτομένων

Για την πληρότητα του θέματος εισάγεται ο άξονας των εφαπτομένων και των συνεφαπτομένων και οι μαθητές διαπιστώνουν ότι η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη μιας οποιασδήποτε γωνίας, εφόσον ορίζονται, μπορούν να πάρουν τιμές από το $-\infty$ έως το $+\infty$.

- **Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες**

Τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες, τις έχουν μελετήσει οι μαθητές και σε προηγούμενες τάξεις. Στην τάξη αυτή θα τις επαναλάβουν και θα τις χρησιμοποιήσουν για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας, όταν ένας από αυτούς είναι γνωστός αλλά και για την απόδειξη άλλων τριγωνομετρικών ταυτοτήτων. Έτσι δίνεται στους μαθητές μια επιπλέον ευκαιρία για άσκηση στον αλγεβρικό λογισμό και την αποδεικτική διαδικασία.

Προτεινόμενη δραστηριότητα

α) Να αποδειχθεί οι ταυτότητες : $συν^2ω = \dfrac{1}{1+ εφ^2ω}$ και $ημ^2ω = \dfrac{εφ^2ω}{1 + εφ^2ω}$

β) Αν εφω = -2 και $90^o<ω<180^o$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.

Να γίνουν παραδείγματα, εφόσον το επίπεδο της τάξης το επιτρέπει, όπου η σχέση $α^2+β^2=1$ χρησιμοποιείται ως αναγκαία αλλά και ικανή συνθήκη για να είναι οι αριθμοί α, β το συνημίτονο και το ημίτονο αντίστοιχα κάποιας γωνίας, αφού πρώτα εξηγηθεί η σημασία της έκφρασης «ικανή και αναγκαία συνθήκη».

(Προτεινόμενη δραστηριότητα η Δ39 του Π.Σ)

- **Νόμος ημιτόνων - Νόμος συνημιτόνων**

Τους Νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων τους έχουν διδαχθεί οι μαθητές, σε προηγούμενη τάξη και τους έχουν χρησιμοποιήσει για να υπολογίζουν γωνίες και πλευρές τριγώνων όταν δίνονται επαρκή στοιχεία τους. Στην τάξη αυτή τους επαναλαμβάνουν και τους χρησιμοποιούν στην επίλυση τριγώνων.

(Προτεινόμενες δραστηριότητες οι Δ40, Δ41 του Π.Σ)

- Να τονιστεί ότι όταν οι μαθητές με τον νόμο των ημιτόνων υπολογίζουν το ημίτονο γωνίας τριγώνου, τότε η γωνία μπορεί να είναι οξεία ή αμβλεία. Η δικαιολόγηση της πρότασης να γίνει με χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου.

- Να επισημανθεί ότι ο νόμος των συνημιτόνων αποτελεί επέκταση του Πυθαγορείου θεωρήματος σε τυχαίο τρίγωνο γι αυτό όταν εφαρμοστεί σε ορθογώνιο τρίγωνο ($A=90^o$), καταλήγει στο Πυθαγόρειο θεώρημα.

Πιθανές δυσκολίες – Παρανοήσεις

- Οι μαθητές παραβλέπουν να θέτουν τους περιορισμούς προκειμένου να ορίζονται η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη.
- Οι μαθητές δυσκολεύονται πολλές φορές να αποδείξουν μια τριγωνομετρική ταυτότητα, διότι δεν κατανοούν ότι οι τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι ταυτότητες «υπό συνθήκες» που επιβάλλονται από τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1,\ \varepsilon\varphi x=\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\ \ \kappa\alpha\iota\ \sigma\varphi x=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

Αξιοποίηση της Τεχνολογίας στην διδασκαλία του κεφαλαίου

Σε πολλές ιστοσελίδες υπάρχουν ενδιαφέρουσες δραστηριότητες, για παράδειγμα:

- Υπολογίζω τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών μεγαλύτερων των 360° ή αρνητικών γωνιών
Μικροπείραμα για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών μεγαλύτερων των 360° ή αρνητικών γωνιών με τη βοήθεια τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών μεταξύ 0° και 360°.
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5139

- Βασικές σχέσεις τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας
Μικροπείραμα με το οποίο οι μαθητές θα διερευνήσουν τις βασικές σχέσεις των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας.
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2115

- Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες
Μικροπείραμα, όπου ο μαθητής, εμπλέκεται ενεργά και εξοικειώνεται με αποδείξεις βασικών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5190

Βιβλιογραφία

[1] Βρατσάνος Γιαννούλης. Αρχαία Ελληνική Τριγωνομετρία, Αθήνα 2006,Εκδόσεις ΔΙΑΥΛΟΣ
[2] Thomas Heath. Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης- Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα, 2001.
[3] Dirk J. Struik. Συνοπτική ιστορία μαθηματικών, Αθήνα 1982, Εκδ Ζαχαρόπουλος.
[4] B. L. van der Waerden. Η αφύπνιση της επιστήμης, Ηράκλειο, 2000, ΠΕΚ.
[5] http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_trigonometry

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο : Βασικές Αρχές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως Αξιωματικού Συστήματος

Εισαγωγή

Η μαθηματική σκέψη στη γέννησή της συναντήθηκε με τη φιλοσοφική σκέψη και επηρεάστηκε από αυτή. Ενώ οι αρχαίοι φιλόσοφοι κυρίως έθεταν ερωτήματα για τις έσχατες αιτίες και τις γενικές αρχές, οι μαθηματικοί διατύπωναν ορισμούς και αξιώματα και αποδείκνυαν θεωρήματα. Τα ερεθίσματα και οι αρχικές σκέψεις των μαθηματικών βασίζονταν στην παρατήρηση του πραγματικού κόσμου και στην ανάγκη επίλυσης προβλημάτων της καθημερινής ζωής, όπως η μέτρηση του ύψους μιας πυραμίδας ή ο υπολογισμός της απόστασης δύο τόπων, όμως τα αξιώματα και τα θεωρήματα συνιστούν νοητικές κατασκευές, οι οποίες δεν είναι άμεσα ορατές στο φυσικό κόσμο της άμεσης εποπτείας.

Από τον έκτο π. Χ. αιώνα η Γεωμετρία άρχισε να αναπτύσσεται με τη σημερινή μορφή της. Ο Θαλής και ο Πυθαγόρας είναι οι πρώτοι που δεν αρκέστηκαν στη διαχείριση ενός συνόλου ασύνδετων ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων που η ορθότητα τους βασιζόταν μονάχα στην παρατήρηση, αλλά τόλμησαν να θέσουν ερωτήματα, τα οποία οδήγησαν σε ένα σύστημα προτάσεων, η απόδειξη των οποίων προϋπέθετε την ύπαρξη ενός αρχικού συνόλου πρωταρχικών εννοιών και σχέσεων (όροι, αιτήματα, κοινές έννοιες, αποδεικτικές διαδικασίες, θεωρήματα).

Η σκέψη του Πλάτωνα και η λογική του Αριστοτέλη οδήγησαν τη φιλοσοφία στο απόγειό της κατά τον 4ο αιώνα π.Χ. και επηρέασαν σημαντικά την ανάπτυξη των μαθηματικών. Ο Πλάτωνας έθεσε τα φιλοσοφικά ερωτήματα και προσπάθησε να δώσει απαντήσεις για τη φύση των μαθηματικών αντικειμένων, ενώ ο Αριστοτέλης ασχολήθηκε με τη μέθοδο που χρησιμοποιείται στο μαθηματικό διαλογισμό, διαμόρφωσε μια θεωρία αποδείξεων και εξέτασε το ρόλο των ορισμών και των αξιωμάτων στην ανάπτυξη της θεωρίας (Bunt L. κ. α., 1981).

Ο Ευκλείδης υιοθέτησε τη θέση του Πλάτωνα ότι η μαθηματική γνώση αποχτιέται μόνο μέσα από συλλογιστικές διεργασίες και ότι οι αποδείξεις είναι ανεξάρτητες από τα συγκεκριμένα σχήματα και δέχεται τη θέση του Αριστοτέλη ότι η κατασκευή ενός μαθηματικού συστήματος οφείλει να έχει ως αφετηρία τις κοινές έννοιες, οι οποίες αποτελούν το υπόβαθρο κάθε παραγωγικού συλλογισμού. (Bunt L. κ. α., 1981). Έτσι, οι Βασικές Αρχές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και η θεμελίωσή της ως Αξιωματικού Συστήματος από τον Ευκλείδη, γύρω στο 300 π.Χ.,, στηρίζονται σε *«όρους» («ορισμούς»), «αιτήματα»* και *«κοινές έννοιες»*, με τη βοήθεια των οποίων αποδεικνύονται οι *«προτάσεις» (θεωρήματα).*

Από το αρχικό εγχείρημα του Πυθαγόρα να χρησιμοποιηθούν τα μαθηματικά ως εκείνο το σύστημα αφηρημένων κανόνων που θα μπορούσε να απεικονίσει το φυσικό Σύμπαν γεννήθηκαν οι έννοιες της αφαίρεσης και της απόδειξης, οι οποίες απελευθέρωσαν τελικά τα μαθηματικά και οδήγησαν σε μια έννοια του χώρου απαγκιστρωμένη από τους περιορισμούς του φυσικού κόσμου.

Η θεμελίωση της Γεωμετρίας από τον Ευκλείδη στηρίχτηκε στο έργο των μαθηματικών που είχαν προηγηθεί. Εκτός από τον Θαλή και τον Πυθαγόρα, οι Ιπποκράτης ο Χίος, Θεόδωρος ο Κυρηναίος,, Θεαίτητος, Εύδοξος, και πολλοί άλλοι προσέφεραν σημαντικό έργο, ενώ μετά τον Ευκλείδη ακολούθησαν οι Απολλώνιος, Αρχιμήδης (που θεωρείται ο μεγαλύτερος μαθηματικός της αρχαιότητας), Πτολεμαίος, Διόφαντος, Πάππος, Πρόκλος, Θέων, Υπατία (κόρη του Θέωνος) και πολλοί άλλοι, οι οποίοι επίσης συνέχισαν και ολοκλήρωσαν τη δημιουργία της Γεωμετρίας της αρχαιότητας.

1. Τι περιέχει το κεφάλαιο και πως το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Στο πρώτο κεφάλαιο:

- γίνεται η **εισαγωγή στις βασικές αρχές και τους σκοπούς της Ευκλείδειας Γεωμετρίας** (σε 1 διδακτική ώρα) και
- επιχειρείται η **περιγραφή των κατά Ευκλείδη Όρων, Κοινών Εννοιών, Αιτημάτων, και Προτάσεων, καθώς και η μεταγραφή τους στη σύγχρονη επιστημολογία** (σε 1 διδακτική ώρα).

Από τη φοίτησή τους στις προηγούμενες σχολικές τάξεις, οι μαθητές έχουν ήδη μάθει να αναγνωρίζουν και να ονομάζουν γεωμετρικά αντικείμενα και έχουν αποκτήσει γνώσεις και δεξιότητες για τις βασικές γεωμετρικές έννοιες και τις ιδιότητές τους. Επιπλέον, έχουν εξοικειωθεί με απλές αποδεικτικές διαδικασίες, οι οποίες όμως στηρίζονται σε απλές παρατηρήσεις και μετρήσεις και περιορίζονται σε απλή αιτιολόγηση των συμπερασμάτων.

Σημειώνουμε επίσης, ότι οι περισσότεροι όροι της Γεωμετρίας συναντώνται στο καθημερινό λεξιλόγιο των ανθρώπων, ορισμένοι όμως με διαφορετικό νόημα. Αυτό βεβαίως, άλλοτε διευκολύνει στην κατανόηση και άλλοτε δημιουργεί προβλήματα και δυσκολίες. Υπάρχει επομένως το εμπειρικό και εποπτικό υπόβαθρο για τη μετάβαση από τις πρακτικές-εμπειρικές γεωμετρικές γνώσεις και δεξιότητες στην επιχειρούμενη θεωρητική οικοδόμηση της Γεωμετρίας.

2. Γιατί είναι σημαντικό;

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται η μετάβαση από την πρακτική Γεωμετρία που οι μαθητές έχουν διδαχθεί στο Δημοτικό και το Γυμνάσιο, στη Θεωρητική Ευκλείδεια Γεωμετρία. Η εισαγωγή της έννοιας του αξιώματος και της απόδειξης είναι τα κύρια στοιχεία που διαφοροποιούν τη θεωρητική από την πρακτική Γεωμετρία.

Μέσα στο πλαίσιο αυτό, είναι πολύ σημαντικό για τους μαθητές:

- Να αποκτήσουν μια πρώτη αντίληψη για την ***ιστορική εξέλιξη της Γεωμετρίας*** και για τη βεβαιότητα και την καθολική γενίκευση στην οποία οδηγεί η μαθηματική αποδεικτική διαδικασία και που εξασφαλίζει ο παραγωγικός συλλογισμός.
- Να συνειδητοποιήσουν τη σημασία της ***μαθηματικής απόδειξης*** ως μεθοδολογία με την οποία μια υπόθεση καταλήγει σε ένα συμπέρασμα (Davis P.J.-Hersh R., 1980, σελ.29-30). Επιπλέον, να έρθουν σε επαφή με τις αρχές της ***αξιωματικής θεμελίωσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας***, αλλά και γενικότερα με τη σημασία της Αξιωματικής Θεμελίωσης για την καθολική γενίκευση των συμπερασμάτων, αναγνωρίζοντας το ρόλο και την αναγκαιότητα των ορισμών και αξιωμάτων για τη θεμελίωση της Γεωμετρίας.

Το κεφάλαιο είναι επίσης σημαντικό και για τον εξής επιπλέον λόγο: Οι συλλογιστικές πρακτικές και οι αποδεικτικές διαδικασίες που διδάσκονται μέσα από το μάθημα της Γεωμετρίας βοηθούν τους μαθητές να γνωρίσουν τη μαθηματική αυστηρότητα, αλλά και να εφαρμόσουν τις δεξιότητες του λογικού συλλογισμού στην καθημερινή ζωή. Έτσι, τα βασικά επιχειρήματα υπέρ της διδασκαλίας της απόδειξης στο μάθημα της Γεωμετρίας στηρίζονται στις δυνατότητες που προσφέρει η διδασκαλία της Γεωμετρίας στους μαθητές, αφ' ενός μεν να διδαχτούν τις αξίες των μαθηματικών και αφ' εταίρου, μέσα από τη μελέτη της λογικής θεμελίωσης της τυπικής μαθηματικής σκέψης, να μετατρέπονται σε ενημερωμένους πολίτες μια δημοκρατικής κοινωνίας.

3. Ποιες είναι οι Σημαντικές Ιδέες στο κεφάλαιο «Βασικές Αρχές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως Αξιωματικού Συστήματος»;

- **Η ιστορική εξέλιξη της γεωμετρίας:** Η θεωρητική θεμελίωση της γεωμετρίας, και γενικότερα των μαθηματικών, είναι αποτέλεσμα μιας μακράς ιστορικής εξελικτικής διαδικασίας, γεγονός το οποίο οδηγεί στην αναγκαιότητα αποδοχής της ιστορικότητάς της (τόσο της συλλογικής ή δημόσιας ιστορικότητας, όσο και της υποκειμενικής). Στο πλαίσιο της ιστορικότητάς της, η ανάπτυξη και εξέλιξη της γεωμετρίας συνδέεται και βρίσκεται σε αλληλεπίδραση με τη γενικότερη κοινωνική, πολιτισμική και οικονομική ανάπτυξη της κοινωνίας.
- **Το πέρασμα από την πρακτική στη θεωρητική Γεωμετρία**: Η πρακτική Γεωμετρία έχει ενσωματώσει διαδικασίες, οι οποίες σε ένα επόμενο στάδιο οδηγούν στην (Ευκλείδεια) Θεωρητική Γεωμετρία. Έτσι, ενώ στην πρακτική Γεωμετρία το σχήμα «κατασκευάζεται», στη Θεωρητική Γεωμετρία, η ύπαρξη του σχήματος «κατοχυρώνεται» μέσα από τα αξιώματα βήμα-βήμα. Η χρήση οργάνων στη σχεδίαση γεωμετρικών σχημάτων μεσολαβεί μεταξύ αφηρημένης σκέψης και πραγματικότητας (Λάππας, 2010, σ.135-136). Το πέρασμα, από την πρακτική Γεωμετρία στη θεωρητική (αξιωματική) θεμελίωση της Γεωμετρίας, αποτελεί αναμφισβήτητα τον πρώτο και μεγαλύτερο σταθμό στην εξέλιξη της Γεωμετρίας. Η μετάβαση ξεκίνησε με τα ερωτήματα που έθεσε ο Θαλής (ο «πρώτος γεωμέτρης») για την ανάγκη απόδειξης των μέχρι τότε γνωστών προτάσεων στη γενική τους μορφή και ουσιαστικά ολοκληρώθηκε και

επικυρώθηκε σε ιεραρχημένη διάταξη και πλήρη λογική αλληλουχία, ως ολοκληρωμένη γεωμετρική θεωρία, με τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, όπου οι μαθηματικές γνώσεις, από απλές πρακτικές διαπιστώσεις της άμεσης εμπειρίας, ανάγονται σε προτάσεις θεωρητικού διαλογισμού, η αλήθεια των οποίων προκύπτει μέσα από τη διαδικασία της απόδειξης.

- **Τα δομικά υλικά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και η αναγκαιότητά τους:** Η αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στηρίζεται σε: *Κοινές έννοιες, Όρους, Αιτήματα, Προτάσεις*. Οι ορισμοί και τα αξιώματα είναι αναγκαία για τη θεμελίωση της Γεωμετρίας. Κάθε νέα έννοια, με εξαίρεση ενός μικρού αριθμού εννοιών, πρέπει να ορίζεται. Αυτό σημαίνει ότι το νόημα της πρέπει να ερμηνεύεται αποκλειστικά μέσω εννοιών και σχέσεων που έχουν ήδη εισαχθεί. (Bunt L.N.H., 1981, σελ. 152). Στον Ευκλείδη τα γεωμετρικά σχήματα και οι πρώτες σχέσεις τους προέρχονται από την εποπτεία και την ενόραση. Έτσι, τα αξιώματα του Ευκλείδη δεν είναι αυθαίρετες έννοιες αλλά είναι καταστάλαγμα της κοινής εμπειρίας και έχουν συγκεκριμένο περιεχόμενο (Μαρουσάκης, 1980).
- **Η αποδεικτική διαδικασία – Απόδειξη:** Στη Γεωμετρία, τόσο τα αξιώματα, όσο και τα θεωρήματα, είναι αποτέλεσμα διερευνητικών διαδικασιών και δραστηριοτήτων, οι οποίες οδηγούν σε εικασίες σχετικά με ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα, υπό τον όρο ότι τηρούνται ορισμένες προϋποθέσεις. Μετά από περαιτέρω διερεύνηση, μια εικασία μπορεί να γίνει δεκτή ως πρόταση. Εάν η πρόταση αυτή μπορεί να αποδειχθεί ως αληθής μέσω παραγωγικών συλλογισμών ονομάζεται θεώρημα. Η σαφής διαφορά μεταξύ μιας πρότασης και ενός θεωρήματος έγκειται στο ότι *μια πρόταση είναι μια αναπόδεικτη δήλωση, η οποία πιστεύεται ότι είναι αληθής, ενώ ένα θεώρημα είναι μια δήλωση που έχει αποδειχθεί ότι είναι αληθής*. Το μονοπάτι για την επαγωγική απόδειξη οδηγεί από την εξερεύνηση μέσω εικασιών στην πρόταση και στη συνέχεια, από την πρόταση μέσω απόδειξης στο θεώρημα. Βεβαίως, αν υπάρχει ένα λάθος όσον αφορά στις υποκείμενες παραδοχές, ή μια ρωγμή στη λογική του συλλογισμού, η απόδειξη είναι λανθασμένη.

4. Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Με την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου αναμένουμε από τους μαθητές να είναι σε θέση να απαντούν σε ερωτήματα, όπως:

- Ποιες είναι οι διαφορές της πρακτικής από τη θεωρητική Γεωμετρία;
- Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της μετάβασης από την πρακτική στη θεωρητική γεωμετρία;
- Που στηρίζεται και γιατί είναι αναγκαία η αποδεικτική διαδικασία;
- Ποιος είναι ο ρόλος και η αναγκαιότητα των ορισμών και των αξιωμάτων για τη θεμελίωση της Γεωμετρίας;

5. Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Στο κεφάλαιο αναδεικνύεται **η Ιστορική εξέλιξη της Θεωρητικής Γεωμετρίας και η βεβαιότητα που εξασφαλίζει ο παραγωγικός συλλογισμός**. Έτσι, μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου αναμένουμε οι μαθητές να είναι σε θέση:

- Μ1: να αναγνωρίζουν τα στοιχεία που διαφοροποιούν την εμπειρική από τη θεωρητική γνώση, την εμπειρική (πρακτική) από τη θεωρητική Γεωμετρία. (Ο συγκεκριμένος στόχος συνδέεται με την ανάγκη να αναδειχτεί το ευρύτερο πλαίσιο θεμελίωσης της Γεωμετρίας)
- Μ2: να εξηγούν την ανάγκη των αποδεικτικών διαδικασιών. (Στόχος 1.1.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ1)
- Μ3: να αναγνωρίζουν το ρόλο και την αναγκαιότητα των ορισμών και αξιωμάτων για τη θεμελίωση της Γεωμετρίας. (Στόχος 1.1.2 του Προγράμματος Σπουδών)

6. Δραστηριότητες

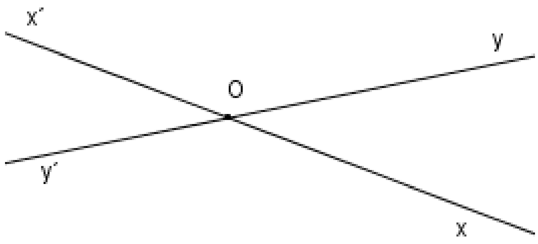
Προτείνονται από το Πρόγραμμα Σπουδών:

Δραστηριότητα Δ1

Η δραστηριότητα Δ1 αντιστοιχεί στο στόχο 1.1.1 του Προγράμματος Σπουδών για εξήγηση της ανάγκης των αποδεικτικών διαδικασιών (Μ2).

- Να πραγματοποιήσετε μέτρηση των ακόλουθων κατακορυφήν γωνιών.

Συγκρίνετε τα μέτρα των γωνιών που μετρήσατε με τη μέτρηση δύο συμμαθητών σας. Τι παρατηρείτε σε σχέση με τις μετρήσεις των συμμαθητών σας;



Σχόλιο: Μέσα από την υλοποίηση της δραστηριότητας αναμένουμε οι μαθητές να οδηγηθούν στην εικασία για την ισότητα των κατακορυφήν γωνιών, αλλά και να προβληματιστούν για τη δυσκολία και τα ενδεχόμενα σφάλματα στις μετρήσεις .

Δραστηριότητα Δ2

Η δραστηριότητα Δ2α αντιστοιχεί στο στόχο 1.1.2 του Προγράμματος Σπουδών για εξήγηση της ανάγκης των αποδεικτικών διαδικασιών (Μ3)

- Πόσες ισότητες διαφορετικών κατακορυφήν γωνιών χρειάζονται, ώστε να μπορείτε να υποστηρίξετε ότι όλες οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους; Με ποιο τρόπο θα μπορούσατε να επιβεβαιώσετε ότι σε κάθε περίπτωση οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους;

Σχόλιο: Μέσα από την υλοποίηση της δραστηριότητας αναμένουμε οι μαθητές να προβληματιστούν για το αν επαρκεί ένας αριθμός μετρήσεων που επιβεβαιώνει την εικασία για την ισότητα των κατακορυφήν γωνιών, αλλά και για την αναγκαιότητα μιας γενικής απόδειξης.

Δραστηριότητες πέραν των προτεινομένων από το Πρόγραμμα Σπουδών:

Δραστηριότητα Δ1(Ο).

Η δραστηριότητα Δ1(Ο) αντιστοιχεί στο στόχο 1.1.1 του Προγράμματος Σπουδών για εξήγηση της ανάγκης των αποδεικτικών διαδικασιών.

- Οι μαθητές (ατομικά ή σε ομάδες δύο ή περισσοτέρων μαθητών) κατασκευάζουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο και τη διάμεσό του προς την υποτείνουσα. Στη συνέχεια μετράνε το μήκος της διαμέσου και της υποτείνουσας και συγκρίνουν τα δύο μήκη. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων καταγράφονται στον πίνακα.

  (α)Ζητάμε από τους μαθητές να διατυπώσουν το αποτέλεσμα της σύγκρισης για τις μετρήσεις που έκαναν και να συγκρίνουν το αποτέλεσμα των δικών τους μετρήσεων με τα αποτελέσματα των μετρήσεων των συμμαθητών τους.

  (β) Θέτουμε στους μαθητές το ερώτημα, αν οι συγκεκριμένες μετρήσεις αρκούν για να συμπεράνουμε ότι το ίδιο ισχύει για τη σχέση της υποτείνουσας και της διαμέσου προς την υποτείνουσα σε κάθε ορθογώνιου τρίγωνο (διατύπωση εικασίας-γενίκευση).

  (γ) Συζητάμε για την ανάγκη και για τον τρόπο τεκμηρίωσης του ισχυρισμού τους (απόδειξης της εικασίας)

Σχόλιο:

Η δραστηριότητα μπορεί να προσαρμοστεί ή να τροποποιηθεί από το διδάσκοντα (κατά την κρίση του) και αντί για τη σχέση των μηκών της διαμέσου και της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου, να ζητηθεί η μέτρηση δυο κατακορυφήν γωνιών (Δραστηριότητα Δ1 του Προγράμματος Σπουδών), ή των διαγωνίων ενός ορθογωνίου, ή του αθροίσματος των γωνιών ενός τριγώνου ή να γίνει συνδυασμός περιπτώσεων.

Δραστηριότητα Δ2(Ο)

Η δραστηριότητα Δ2(Ο) είναι μια συνθετική –διεπιστημονική δραστηριότητα με στόχο την ανάδειξη του κοινωνικού και πολιτισμικού περιβάλλοντος μέσα στο οποίο εξελίχτηκε και αναπτύχθηκε *η γεωμετρία κατά την αρχαιότητα.*

Ανατίθεται στους μαθητές να συγκεντρώσουν και να παρουσιάσουν στοιχεία για:

- Το κοινωνικό-πολιτιστικό περιβάλλον της αρχαίας Ελλάδας και την ανάπτυξη της Θεωρητικής Γεωμετρίας.

- Πρόσωπα και προβλήματα που συνέβαλαν στη δημιουργία και εξέλιξη της θεωρητικής γεωμετρίας κατά την αρχαιότητα.

7. Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Οι Βασικές Αρχές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως Αξιωματικού Συστήματος, προφανώς, δεν εξαντλούνται κατά τη διδασκαλία του πρώτου κεφαλαίου. Τα θέματα που περιέχονται στο κεφάλαιο αναπτύσσονται σταδιακά κατά τη διδασκαλία του μαθήματος σε όλα τα κεφάλαια που ακολουθούν.

Εισαγωγικά, προτείνεται να χρησιμοποιηθούν *δραστηριότητες/ερωτήματα* που στηρίζονται σε γνώσεις προηγουμένων τάξεων και στις οποίες υπεισέρχονται σφάλματα μετρήσεων (π.χ. μέτρηση κατακορυφήν γωνιών, εύρεση αθροίσματος γωνιών τριγώνου ή τετραπλεύρου). Στόχος είναι να δοθεί η ευκαιρία στους μαθητές να διαπιστώσουν τους περιορισμούς των μετρήσεων που αποτελούν χαρακτηριστικό της πρακτικής Γεωμετρίας.

Ο περιορισμένος χρόνος που διατίθεται για τη διδασκαλία του κεφαλαίου δεν επιτρέπει, παρά μόνο τη διεξαγωγή σύντομων διδακτικών δραστηριοτήτων, καθώς και μιας διεπιστημονικής προσέγγισης, η οποία ενδείκνυται να σχετίζεται με την ιστορική μετάβαση από τα προελληνικά και τα πρώτα ελληνικά μαθηματικά στην αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας από τον Ευκλείδη

8. Ποια σημεία πρέπει να προσέξει ιδιαίτερα ο διδάσκων;

Χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής από το διδάσκοντα:

- **Η κατανόηση της έννοιας των γεωμετρικών αντικειμένων και των μεταξύ τους σχέσεων:** Με ποιά διαδικασία, από τη μελέτη ενός συγκεκριμένου γεωμετρικού αντικειμένου και των ιδιοτήτων του ή από τη λύση ενός συγκεκριμένου πρακτικού προβλήματος, περνάμε στην κατανόηση ενός ιδεατού γεωμετρικού αντικειμένου ή στη διατύπωση ενός γενικού και αφηρημένου κανόνα. (π.χ. πως από τη διαπίστωση της σχέσης των πλευρών και των γωνιών ενός συγκεκριμένου τριγώνου, η οποία διαπιστώθηκε με μετρήσεις καταλήγουμε σε συμπέρασμα για τις σχέσεις μεταξύ των πλευρών και των γωνιών κάθε τριγώνου).
- **Η ιστορική εξέλιξη της γεωμετρίας:** Η κατάλληλη αξιοποίηση της ιστορικής εξέλιξης και κυρίως το πέρασμα από το προ-ελληνικά μαθηματικά στα μαθηματικά των ελλήνων με το ερώτημα που πρώτος έθεσε ο Θαλής «γιατί αυτό ισχύει για κάθε …;» και την απαίτηση για απόδειξη της γενικής πρότασης και όχι της συγκεκριμένης περίπτωσης.
- **Η μεταβλητότητα των μετρήσεων:** Η ακρίβεια περιορίζεται από τα σφάλματα των μετρήσεων, αφού οι μετρήσεις με όργανα δεν είναι απολύτως ακριβείς και αποτελούν προσεγγίσεις των πραγματικών μεγεθών.
- Οι **περιορισμοί των μετρήσεων:** Η περιορισμένη ισχύς των αποτελεσμάτων των μετρήσεων, αφού αυτά ισχύουν μόνο για τις συγκεκριμένες περιπτώσεις των μετρήσεων που πραγματοποιήθηκαν, αλλά και διότι δεν είναι όλες οι μετρήσεις εφικτές.
- **Ο «ορισμός» του ορισμού**. Συνήθως οι μαθητές θεωρούν ως ορισμό ενός σχήματος το σύνολο των ιδιοτήτων του, αντί του «ελαχίστων των ιδιοτήτων που περιγράφουν το σχήμα». Οι μαθητές μπορούν να ασκηθούν στο να διατυπώνουν «εναλλακτικούς ορισμούς» ενός σχήματος και να αποδεικνύουν ιδιότητες στη βάση του ορισμού.
- **Η δυσκολία των ορισμών:** Η ορθή διατύπωση ενός ορισμού δεν μπορεί να είναι αποτέλεσμα απομνημόνευσης, αλλά αποτέλεσμα εννοιολογικής κατανόησης. Η επιμονή στην στείρα απομνημόνευση ορισμών και κανόνων, συνήθως έχει αρνητικές επιπτώσεις στη στάση των μαθητών και δημιουργεί αποστροφή για τα μαθηματικά.
- **Οι αποδεικτικές μέθοδοι:** Η εξοικείωση των μαθητών με τις διάφορες αποδεικτικές μεθόδους θα γίνεται κατά τη διδασκαλία, όταν συναντώνται αντίστοιχες περιπτώσεις. Στο κεφάλαιο αυτό αναδεικνύεται η αναγκαιότητα της απόδειξης και ενδεικτικά μόνο, γίνεται περιγραφική αναφορά στις διάφορες αποδεικτικές μεθόδους, οι οποίες θα παρουσιαστούν διεξοδικότερα στα επόμενα κεφάλαια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο : Τα Βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

Εισαγωγή

Πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες για τη Γεωμετρία, δηλαδή έννοιες που δεν ορίζονται με τη βοήθεια άλλων εννοιών, είναι το ***σημείο***, η ***γραμμή*** (με ειδική περίπτωση την ***ευθεία***), η ***επιφάνεια*** (με ειδική περίπτωση το ***επίπεδο***) και ο ***χώρος***.

Σημείο: Η έννοια *σημείο* θεωρείται αρχική και είναι από τις πλέον θεμελιώδης για τη γεωμετρία. Σύμφωνα με τον πρώτο ορισμό του Ευκλείδη, *σημείο* είναι «αυτό που δεν έχει μέρος» *(«Σημείον εστιν, ου μέρος ουθέν», Ευκλείδης, Στοιχεία Ι., όρος α΄).* Με την έννοια *μέρος* εννοεί τη *διάσταση*, την οποία η ελληνική Γεωμετρία δέχεται ως δεδομένη εκ των πραγμάτων (Σταμάτης, 1975, σελ. 28). Με τον ορισμό που δίνει ο Ευκλείδης δεν προφασίζεται το φυσικό άτμητο του σημείου, αλλά υποστηρίζει την αδυναμία, από εννοιολογική άποψη, να εφαρμοστεί στο σημείο η έννοια του μέρους (Levi, 2014, σελ. 108). Ο Αριστοτέλης χρησιμοποιεί για το σημείο τον όρο *«στιγμή»*, το περιγράφει ως «*κάθε τι που είναι αδιαίρετο*» *(«Μετά τα Φυσικά» (1035b 32))* και αποσαφηνίζει τη σχέση μεταξύ σημείων και γραμμών, υποστηρίζοντας ότι τα σημεία είναι αδιαίρετα και δεν είναι σε θέση να σχηματίσουν ευθεία *(«Ευθεία ου σύγκειται εκ στιγμών»)*, ενώ οι Πυθαγόρειοι όριζαν το σημείο ως μια μονάδα που έχει μια θέση *(«σημείον εστίν μονάς προσλαβούσα θέσιν»).*
Στην Αναλυτική Γεωμετρία το σημείο ορίζεται ως ένα διατεταγμένο ζεύγος (α, β), ή ως μια διατεταγμένη τριάδα (α, β, γ) στον τρισδιάστατο χώρο, όπου α, β, γ ∈R .

Γραμμή: Η έννοια της «*γραμμής»* ορίζεται από τον Ευκλείδη ως *ένα μέγεθος που δεν έχει πλάτος*. Η γραμμή, όπως και το σημείο, είναι επίσης «άυλη». Δεν είναι ένα νήμα με κάποιο πάχος, αλλά είναι *«μήκος δίχως πλάτος» («Γραμμή δε μήκος απλατές», Ευκλείδης, Στοιχεία Ι., όρος δ΄).* Η γραμμή ορίζεται επίσης ως το αντικείμενο που προκύπτει από την κίνηση ενός σημείου, αφού, σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, *«το σημείο που θα κινηθεί θα δημιουργήσει γραμμή, οι μονάδες που κινούνται θα δημιουργήσουν γραμμές, διότι το σημείο είναι μονάδα που έχει θέση» (Αριστοτέλης, Περί Ψυχής, (Α, 409 α 4-7)).*

Επιφάνεια: Η έννοια της «*επιφάνειας»* ορίζεται από τον Ευκλείδη ως «*ένα μέγεθος που έχει μόνο μήκος και πλάτος» («επιφάνεια δε εστίν, ό μήκος και πλάτος μόνον έχει»*, Ευκλείδης, Στοιχεία Ι., όρος *ε΄).* Ως *«επίπεδη επιφάνεια»* θεωρείται αυτή, *«η οποία κείται εξ ίσου ως προς τις ευθείες της» («Επίπεδος επιφάνεια εστιν, ήτις εξ ίσου ταις εαυτής ευθείαις κείται», Ευκλείδης, Στοιχεία Ι., όρος ζ΄),* δηλαδή αυτή επί της οποίας όταν τεθεί μια ευθεία γραμμή εφαρμόζουν όλα της τα σημεία.

Γωνία: Η έννοια της γωνίας είναι πολύ σημαντική για τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά, αφού ήταν ήδη γνωστή από το Θαλή, ο οποίος τη χρησιμοποιούσε στις μετρήσεις και στην ομοιότητα. Οι Πυθαγόρειοι επίσης γνώριζαν και χρησιμοποιούσαν τις γωνίες (τις ονόμαζαν *«γλωχίνας»*), ενώ ο Πλάτων και ο Αριστοτέλης επίσης αναφέρονταν συχνά σε γωνίες .
Ο Ευκλείδης ορίζει την έννοια της επίπεδης γωνίας ως την αμοιβαία *«κλίση»* δυο γραμμών στο επίπεδο, που *άπτονται* μεταξύ τους και δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Όταν οι γραμμές που περικλείουν τη γωνία είναι ευθείες, η γωνία ονομάζεται ευθύγραμμη. *(«Επίπεδος δε γωνία εστίν η εν επιπέδω δύο γραμμών απτομένων αλλήλων και μη επ ευθείας κειμένων προς αλλήλας των γραμμών κλίσις», «Όταν δε αι περιέχουσαι την γωνίαν γραμμαί ευθείαι ώσιν, ευθύγραμμος καλείται η γωνία», Ευκλείδης, Στοιχεία Ι., όροι η΄, θ΄).* Παρατηρούμε ότι για τον ορισμό της γωνίας χρησιμοποιείται ο όρος «*κλίσις»*, ο οποίος δεν διευκρινίζεται περαιτέρω και η λειτουργία του γίνεται κατανοητή από το πώς χρησιμοποιείται μετά. Όπως σημειώνει ο *Λάππας* (2009, σελ. 88), *«οι ορισμοί γίνονται κατανοητοί μέσα από τις απαιτήσεις που επιβάλλουν σε αυτούς τα αξιώματα και από τη χρήση τους».*
Ο Ευκλείδης δίνει τον ορισμό της *ορθής* γωνίας, από τον οποίο απορρέει η καθετότητα δύο ευθειών, ως εξής: «*όταν μία ευθεία, αφού σταθεί πάνω σε άλλη ευθεία, σχηματίζει τις εφεξής γωνίες ίσες, τότε κάθε μια από τις ίσες γωνίες είναι ορθή και η τέμνουσα ευθεία ονομάζεται κάθετη στη δεύτερη» («όταν δε ευθεία επ΄ ευθείαν σταθείσα τας εφεξής ίσας γωνίας αλλήλαις ποιή, ορθή*

εκατέρα των ίσων γωνιών εστί, και η εφεστηκυία ευθεία κάθετος καλείται, εφ ην εφέστηκεν», Ευκλείδης, Στοιχεία I., όρος ι΄).

Κύκλος: Ο Ευκλείδης ορίζει τον κύκλο ως το επίπεδο σχήμα το οποίο περιέχεται σε μια γραμμή που ονομάζεται περιφέρεια, της οποίας τα σημεία ισαπέχουν από ένα σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου («*Κύκλος εστί σχήμα επίπεδον υπό μιας γραμμής περιεχόμενον [ή καλείται περιφέρεια], προς ήν αφ΄ ενός σημείου των εντός του σχήματος κειμένων πάσαι αι προσπίπτουσαι ευθείαι [προς την του κύκλου περιφέρειαν] ίσαι αλλήλαις εισίν», Ευκλείδης, Στοιχεία I., όρος ιε΄).*

1. Τι περιέχει το κεφάλαιο «Τα Βασικά Γεωμετρικά Σχήματα» και πως το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Στα περιεχόμενα του δεύτερου κεφαλαίου περιλαμβάνονται οι ενότητες:

- **Σχεδίαση και συμβολισμοί βασικών γεωμετρικών σχημάτων** (1 διδακτική ώρα),
- **Υποθέσεις και Συμπεράσματα** (3 διδακτικές ώρες),

Βασικά Γεωμετρικά Σχήματα

Τα Βασικά Γεωμετρικά Σχήματα που περιλαμβάνονται στο κεφάλαιο είναι:

- Σημείο, γραμμή, ευθεία, επίπεδο και ημιεπίπεδο, ημιευθεία, αντικείμενες ημιευθείες, ευθύγραμμο τμήμα,
- Γωνία, κύκλος, τεθλασμένη γραμμή, πολύγωνο.

Αναλυτικότερα, στο κεφάλαιο περιλαμβάνονται:

- Ο **σχεδιασμός** των βασικών γεωμετρικών σχημάτων, ο οποίος υλοποιείται με κανόνα και διαβήτη
- Η **ονομασία** των βασικών γεωμετρικών σχημάτων
- Ο **ορισμός** των βασικών γεωμετρικών σχημάτων
- Ο συμβατικός **συμβολισμός** των βασικών γεωμετρικών σχημάτων
- Η θέση δύο ευθειών στο επίπεδο (παράλληλες, τεμνόμενες), η σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων, το μέσο ευθυγράμμου τμήματος, καθώς και πράξεις μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων, μήκος τμήματος, απόσταση σημείων.
- Οι γωνίες, η σύγκριση γωνιών, κάθετες ευθείες, ορθή γωνία, πράξεις γωνιών, διχοτόμος γωνίας, είδη γωνιών, σχέσεις γωνιών (συμπληρωματικές, παραπληρωματικές, κατακορυφήν γωνίες),
- Ο κύκλος και τα στοιχεία του κύκλου (ακτίνα, χορδή, διάμετρος), τόξο, σύγκριση τόξων, μέσο τόξου, πράξεις τόξων, επίκεντρη γωνία και αντίστοιχο τόξο

Υποθέσεις και Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο περιγράφονται:

- Τα χαρακτηριστικά της υπόθεσης και του συμπεράσματος μιας πρότασης, καθώς και ότι τα συμπεράσματα προκύπτουν ως αποτέλεσμα της ικανοποίησης των υποθέσεων της πρότασης.
- Ο σχηματισμός της αντίθετης, της αντίστροφης και της αντιθετοαντίστροφης μιας πρότασης.
- Η διαδρομή από την υπόθεση στο συμπέρασμα με τη βοήθεια των αποδεικτικών διαδικασιών.

Ως αποδεικτικές μέθοδοι εισάγονται σε αυτό το κεφάλαιο: η ευθεία απόδειξη, το αντιπαράδειγμα, η αντιθετοαντίστροφη.

Η σύνδεση του περιεχομένου αυτού του κεφαλαίου με προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών

Το περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου συνδέεται με προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών, αφού:

- Οι μαθητές έχουν διδαχθεί στο Γυμνάσιο, αλλά και στο Δημοτικό τις βασικές έννοιες του κεφαλαίου αυτού. Όμως η διδασκαλία στηριζόταν κυρίως στην εμπειρική και εποπτική προσέγγιση και κατανόησή τους**.**

- Οι μαθητές έχουν μάθει να αναγνωρίζουν και να ονομάζουν γεωμετρικά αντικείμενα και έχουν αποκτήσει γνώσεις και δεξιότητες για τις βασικές γεωμετρικές έννοιες και τις ιδιότητές τους, καθώς και μια πρώτη εξοικείωση με αποδεικτικές διαδικασίες.

Επομένως υπάρχει εμπειρικό και εποπτικό υπόβαθρο για την αναγνώριση, το σχεδιασμό και την κατανόηση των Βασικών Γεωμετρικών Σχημάτων, αλλά και για την έναρξη μιας περισσότερο αυστηρής εφαρμογής των αποδεικτικών διαδικασιών και της μεθοδολογίας με την οποία μια υπόθεση καταλήγει σε ένα συμπέρασμα.

2. Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο;

Η σημασία του κεφαλαίου είναι μεγάλη, διότι οι μαθητές:

- Περνάνε από την οπτική αναγνώριση και την πρακτική κατασκευή των γεωμετρικών σχημάτων στην περιγραφή τους, στη βάση των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων τους και τελικά στη διατύπωση του ορισμού τους και το συμβολισμό τους.
- Έρχονται σε επαφή με τους τυπικούς ορισμούς των γεωμετρικών εννοιών και σχημάτων.
- Ξεκινώντας από τα δεδομένα της υπόθεσης, με τη βοήθεια θεμελιωδών προτάσεων και κάνοντας χρήση συμφωνημένων κανόνων της λογικής οδηγούνται στο συμπέρασμα και με αυτό τον τρόπο έρχονται σε επαφή με την αποδεικτική διαδικασία και την απόδειξη
- Προβαίνουν σε ταξινόμηση – κατηγοριοποίηση των γεωμετρικών οντοτήτων, κατασκευάζοντας με τον τρόπο αυτό τα δομικά υλικά, με τα οποία προχωρούν στο «χτίσιμο» του οικοδομήματος της Γεωμετρίας.

3. Ποιες είναι οι Σημαντικές Ιδέες στο κεφάλαιο;

- *Η εμπειρική αναγνώριση – ονομασία –ταξινόμηση των Βασικών Γεωμετρικών Σχημάτων:* Τα γεωμετρικά αντικείμενα, στην περίπτωσή μας τα βασικά γεωμετρικά σχήματα είναι ένα νοητικά αντικείμενα, τα οποία κατ΄ αρχήν αναγνωρίζονται και ταξινομούνται μέσω των αισθήσεων (εποπτικά) αυστηρά, με βάση τα χαρακτηριστικά τους γνωρίσματα, ενώ η κατασκευή τους ενσωματώνει ίχνη του εργαλείου ή των εργαλείων κατασκευής τους.
- *Ο αξιωματικός – θεωρητικός ορισμός και απόδειξη των ιδιοτήτων των Βασικών Γεωμετρικών Σχημάτων*: Τα γεωμετρικά αντικείμενα, ορίζονται και ταξινομούνται αυστηρά, με βάση τα χαρακτηριστικά τους γνωρίσματα και τις ιδιότητες που τα χαρακτηρίζουν. Οι ορισμοί παραγάγουν και αντικατοπτρίζουν τη δομή και συχνά εξαρτώνται από μια συγκεκριμένη ταξινόμηση.
- Η ταξινόμηση, η ονομασία, ο ορισμός, η διατύπωση και η τεκμηρίωση εικασιών, είναι αλληλοεξαρτώμενες δραστηριότητες στη γεωμετρική αναζήτηση έρευνα.
- *Η μετάβαση από την εποπτική στη θεωρητική θεμελίωση*: Από την πρακτική και εμπειρική διαπίστωση και αποδοχή της αλήθειας του ορισμού, της κατασκευής και των ιδιοτήτων των Βασικών Γεωμετρικών Σχημάτων (εμπειρικός ισχυρισμός και τεκμηρίωση της αλήθειας), περνάμε στη θεωρητική γεωμετρία, η οποία στηρίζεται στη θεωρητική τεκμηρίωση-απόδειξη και αποδοχή της αλήθειας των προτάσεων με τη βοήθεια και μέσα από ορισμούς, αξιώματα-αιτήματα, κοινές έννοιες και προτάσεις (θεωρήματα).
- Οι εικασίες προκύπτουν από διαδικασίες παρατήρησης και ερωτημάτων που δημιουργούν ισχυρισμούς που πρέπει να τεκμηριωθούν.
- *Η δυνατότητα μετακίνησης – μετατόπισης γεωμετρικού σχήματος:* Κατά τις μετακινήσεις – μετατοπίσεις τους, τα γεωμετρικά σχήματα παραμένουν αναλλοίωτα ως προς τη μορφή και το μέγεθός τους.
- *Μια πρόταση μπορεί να αποδειχτεί με ευθεία απόδειξη, ή με εις άτοπον απαγωγή, ή να απορριφθεί με ένα αντιπαράδειγμα.*

4. Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα μπορούν να απαντούν στα ερωτήματα:

- Ποια είναι τα βασικά γεωμετρικά σχήματα, πώς ορίζονται και με ποια γεωμετρικά όργανα τα σχεδιάζουμε;
- Πως συμβολίζονται τα σημεία, οι ευθείες, οι ημιευθείες, τα ευθύγραμμα τμήματα, οι γωνίες, οι κύκλοι, οι τεθλασμένες γραμμές και τα πολύγωνα;
- Ποια είναι η σχέση (πως συνδέονται) μεταξύ της υπόθεσης και του συμπεράσματος σε μία πρόταση;
- Πώς από την ευθεία πρόταση σχηματίζουμε την αντίστροφη και πώς την αντιθετοαντιστροφή πρόταση;
- Ποια είναι η διαδρομή που ακολουθούμε σε μια ευθεία απόδειξη;
- Τι αποδεικνύει η ύπαρξη ενός αντιπαραδείγματος μιας πρότασης;

5. Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Στους γενικότερους σκοπούς του κεφαλαίου περιλαμβάνεται η ε**ξοικείωση των μαθητών με αποδεικτικές διαδικασίες**. Στο πλαίσιο αυτό, μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου αναμένουμε οι μαθητές να είναι σε θέση:

◦ Να αναγνωρίζουν, σχεδιάζουν με κανόνα και διαβήτη (και με ψηφιακά εργαλεία, όταν είναι εφικτό), ονομάζουν και δίνουν τον ορισμό των Βασικών Γεωμετρικών Σχημάτων. (Στόχος 2.1.1 του Προγράμματος Σπουδών)
◦ Να χρησιμοποιούν τους συμβατικούς συμβολισμούς για να αναφερθούν σε γεωμετρικά σχήματα. (Στόχος 2.1.2 του Προγράμματος Σπουδών)
◦ Να αντιλαμβάνονται την ανάγκη των ορισμών και των αποδείξεων.
◦ Να εντοπίζουν τις υποθέσεις και τα συμπεράσματα θεωρημάτων, λημμάτων, πορισμάτων κ.λ.π. (Στόχος 2.2.1 του Προγράμματος Σπουδών)
◦ Να αποδεικνύουν απλές προτάσεις χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ευθείας απόδειξης (Στόχος 2.2.2 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ1).
◦ Να ανατρέπουν εικασίες με χρήση αντιπαραδειγμάτων (Στόχος 2.2.3 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ3)
◦ Να σχηματίζουν και διαφοροποιούν αντίθετες, αντίστροφες και αντιθετοαντίστροφες προτάσεις που έχουν υποθέσεις και συμπεράσματα. (Στόχος 2.2.4 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητες Δ4 και Δ5)

6. Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες Δ3, Δ4 και Δ5 προτείνονται από το πρόγραμμα σπουδών:

Δραστηριότητα Δ3

Η δραστηριότητα Δ3 αντιστοιχεί στο στόχο 2.2.3 του Προγράμματος Σπουδών και επιδιώκεται να είναι σε θέση οι μαθητές να ανατρέπουν εικασίες με χρήση αντιπαραδειγμάτων.

- Να καταγράψετε τον αντίστροφο ισχυρισμό των προτάσεων:
  α) αν ένα τρίγωνο είναι ισόπλευρο, τότε είναι ισοσκελές και
  β) αν δύο γωνίες είναι ορθές, τότε είναι ίσες και
  να βρείτε ένα αντιπαράδειγμα για την ανατροπή τους.

Δραστηριότητα Δ4

Η δραστηριότητα Δ4 αντιστοιχεί στο στόχο 2.2.4 του Προγράμματος Σπουδών, με τον οποίο επιδιώκεται να είναι σε θέση οι μαθητές να σχηματίζουν και διαφοροποιούν αντίθετες, αντίστροφες και αντιθετοαντίστροφες προτάσεις που έχουν υποθέσεις και συμπεράσματα.

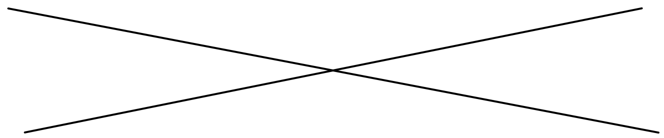
- Δίνεται η αληθής πρόταση: «αν δύο γωνίες είναι ορθές, τότε είναι ίσες». Ζητείται η διατύπωση της αντιθετοαντίστροφης και η πιστοποίηση της αλήθειάς της.

Σχόλιο: Η δραστηριότητα μπορεί να προσαρμοστεί ή να τροποποιηθεί από το διδάσκοντα (κατά την κρίση του) και εκτός από τη διατύπωση της αντιθετοαντίστροφης, να συζητηθεί η ισοδυναμία προτάσεων κλπ.

Δραστηριότητες πέραν των προτεινομένων από το Πρόγραμμα Σπουδών:
Δραστηριότητα Δ3(Ο).
Με τη δραστηριότητα Δ3(Ο), η οποία αντιστοιχεί στους στόχους 2.2.3 και 2.2.4 του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκεται να είναι σε θέση οι μαθητές να ανατρέπουν εικασίες με χρήση αντιπαραδειγμάτων και να σχηματίζουν και διαφοροποιούν αντίθετες, αντίστροφες και αντιθετοαντίστροφες προτάσεις που έχουν υποθέσεις και συμπεράσματα.

- Με ανάλογο τρόπο προς τις δραστηριότητες *του Προγράμματος Σπουδών* Δ3 και Δ4, μπορεί να εξεταστούν οι προτάσεις:

  Αν δύο γωνίες είναι κατακορυφήν, τότε είναι ίσες
  Αν δύο γωνίες είναι ίσες, τότε είναι κατακορυφήν
  Αν δύο γωνίες δεν είναι ίσες, τότε δεν είναι κατακορυφήν
  Αν δύο γωνίες είναι κατακορυφήν, τότε δεν είναι ίσες
  Αν δύο γωνίες είναι κατακορυφήν, τότε είναι ίσες



7. Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου:

- Αξιοποιώντας εποικοδομητικά τις προηγούμενες γνώσεις και εμπειρίες των μαθητών, οι νέες έννοιες προσεγγίζονται αρχικά μέσα από την εποπτεία και την εμπειρία του αισθητού χώρου και στη συνέχεια επιχειρείται ο θεωρητικός ορισμός τους.
- Η σχεδίαση των γεωμετρικών σχημάτων γίνεται με κανόνα και διαβήτη και όταν υπάρχει δυνατότητα, με τα εργαλεία που προσφέρουν τα λογισμικά δυναμικής Γεωμετρίας.
- Είναι πολύ σημαντικό να διευκρινίζουμε όχι μόνο το «πως» μιας απόδειξης, αλλά και το «γιατί» και να κατανοούνται από τους μαθητές, τόσο ο ρόλος της υπόθεσης στην αποδεικτική διαδικασία, όσο και η αλληλουχία των βημάτων που ακολουθούνται σε μια απόδειξη.
- Για την κατανόηση της ευθείας αποδεικτικής διαδικασίας ενδείκνυται να χρησιμοποιηθούν οι αποδείξεις των θεωρημάτων: «Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες», «Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφήν της γωνίας», «Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες μεταξύ τους».
- Να δοθούν ενδεικτικές δραστηριότητες ώστε οι μαθητές να βρίσκουν αντιπαράδειγμα για την ανατροπή των αντιστρόφων ισχυρισμών.

8. Ποια σημεία πρέπει να προσέξει ιδιαίτερα ο διδάσκων;

Πρέπει να προσεχτούν ιδιαίτερα:

- Η δυσκολία κατανόησης των εννοιών, η σημασία της ορθής διατύπωσής των ορισμών και των προτάσεων και ο κίνδυνος να απομνημονευτούν χωρίς την κατανόησή τους.
- Η ανάγκη για τη διευκρίνιση της διαφοράς των πρωταρχικών όρων και των ορισμών από τα αιτήματα και τις προτάσεις.
- Η απαίτηση της χρησιμοποίησης του ελάχιστου αριθμού χαρακτηριστικών γνωρισμάτων για τον ορισμό ενός γεωμετρικού αντικειμένου.
- Η δυσκολία κατανόησης και χρήσης των μαθηματικών συμβόλων και των συμβολισμών και οι κίνδυνοι από την υπερβολική ή την εσφαλμένη χρήση τους. Οι κύριες λειτουργίες ενός συμβόλου στα μαθηματικά είναι η σήμανση μιας έννοιας με ακρίβεια, σαφήνεια και συντομία. Ένας καλός συμβολισμός απελευθερώνει και αυξάνει τις νοητικές δυνατότητες, η υπερβολική χρήση του όμως δημιουργεί δυσκολίες και προβλήματα γι αυτό πρέπει να γίνεται με οικονομία και ιδιαίτερη προσοχή.

- Η ανάγκη των αποδείξεων, η αναγνώριση των διαφορών τους και η σωστή επιλογή της κατάλληλης αποδεικτικής μεθόδου, σε κάθε περίπτωση .
- Η εξοικείωση με τις αποδεικτικές διαδικασίες: Η εξοικείωση με τις αποδεικτικές διαδικασίες που εισάγονται δεν είναι εύκολη υπόθεση και παρουσιάζονται ιδιαίτερες δυσκολίες κατά την εφαρμογή τους. Γι αυτό και δεν πρέπει να θεωρούμε ως δεδομένη την ικανότητα των μαθητών να τις κατανοήσουν και να τις εφαρμόσουν σωστά. Είναι χρήσιμο να δοθούν συγκεκριμένα απλά παραδείγματα, σχετικά με:
- *Την ευθεία απόδειξη:* Με τη βοήθεια μιας σειράς λογικών συλλογισμών, ξεκινώντας από την αλήθεια των υποθέσεων (δεδομένων) της πρότασης καταλήγουμε στην αλήθεια του συμπεράσματος. Αρχίζοντας από την πρόταση P και ακολουθώντας μια σειρά από συλλογισμούς φτάνουμε στο συμπέρασμα Q
- *Την έννοια της εικασίας*: Η έννοια της εικασίας είναι πολύ σημαντική και χρήσιμη γιατί μας βοηθάει να φτάσουμε στη διατύπωση μιας πρότασης. Όμως, αν δεν ακολουθήσει η απόδειξη, δεν παράγεται μαθηματικό αποτέλεσμα.
- *Το αντιπαράδειγμα*: Για τη διάψευση της αλήθειας μιας πρότασης αρκεί η ύπαρξη ενός αντιπαραδείγματος, έτσι το αντιπαράδειγμα χρησιμοποιείται για να δείξουμε ότι κάτι δεν ισχύει γενικώς, για να διαψεύσουμε μια εικασία και όχι για να αποδείξουμε μια πρόταση. Με το αντιπαράδειγμα διαψεύδεται η αλήθεια του ισχυρισμού μιας πρότασης, χωρίς να επιβεβαιώνεται η αντίθετη πρόταση. Η διάψευση αναφέρεται στη γενικότητα της ισχύος και στην καθολικότητα της αλήθειας μιας πρότασης. Προσοχή: Η άρνηση (Το αντίθετο) του «πάντα», «για όλα» ή «για κάθε» δεν είναι το «ποτέ» ή το «για κανένα», αλλά το «όχι πάντα», «όχι για όλα». Επίσης, η άρνηση του «μικρότερο» δεν είναι το «μεγαλύτερο», αλλά το «όχι μικρότερο», δηλαδή το «μεγαλύτερο ή ίσο».
- *Την απαγωγή σε άτοπο*: Όταν η υπόθεση ότι η πρόταση P δεν συνεπάγεται την πρόταση Q οδηγεί σε κάτι άτοπο, είμαστε αναγκασμένοι να δεχτούμε ότι η πρόταση P δεν συνεπάγεται την πρόταση Q .
- *Η μέθοδος της αντιθετοαντιστροφής*: Η απόδειξη με τη μέθοδο της αντιθετοαντιστροφής, σύμφωνα με την οποία αν η άρνηση μιας πρότασης Q συνεπάγεται την άρνηση της πρόταση P, τότε πρόταση P συνεπάγεται την πρότασης Q

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο} : Παράλληλες Ευθείες

Εισαγωγή

Παράλληλες ευθείες:

Το πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη αρχίζει με τους 23 ορισμούς («όρους»). Στον τελευταίο από αυτούς ορίζεται ότι *«παράλληλες ευθείες είναι οι ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες επ΄ άπειρον εκατέρωθεν δεν τέμνονται («Παράλληλοι εισίν ευθείαι, αίτινες εν τω αυτώ επιπέδω ούσαι και εκβαλλόμεναι εις άπειρον εφ' εκάτερα τα μέρη επί μηδέτερα συμπίπτουν αλλήλαις», Ευκλείδης, Στοιχεία Ι., όρος κγ΄).*

Το Πέμπτο Αίτημα:

Ο Ευκλείδης βάσισε τα «*Στοιχεία*» σε πέντε αιτήματα. Με τα αιτήματα ζητείται να γίνει κάτι παραδεκτό και όπως σημειώνεται από τον Πρόκλο, *«τα αιτήματα ισχυρίζονται τη δυνατότητα μιας κατασκευής ήτις δε δύναται να αναχθή εις άλλας κατασκευάς γενομένας δεκτάς ως δυνατάς»*, (Σταμάτης, 1975, σελ.22). Το διασημότερο από τα αιτήματα είναι το πέμπτο, σύμφωνα με το οποίο, *αν μία ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει με αυτές δύο εσωτερικές και προς το αυτό μέρος (εντός και επί τα αυτά μέρη) γωνίες μικρότερες (κατά το άθροισμα) των δύο ορθών, τότε οι δύο ευθείες προεκτεινόμενες επ άπειρον, τέμνονται προς το μέρος που βρίσκονται οι γωνίες αυτές. («Και εάν εις δύο ευθείας ευθεία εμπίπτουσα τας εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίας δύο ορθών ελάσσονας ποιή, εκβαλλομένας τας δυο ευθείας επ΄ άπειρον συμπίπτειν, εφ΄ά μέρη εισίν αι των δύο ορθών ελάσσονες» (Στοιχεία Ι., Αίτημα ε΄).*

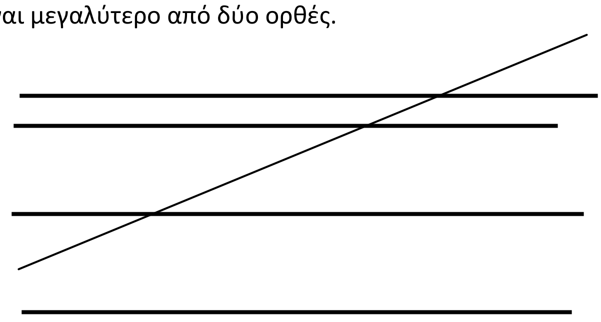
Σχεδόν από την εποχή του Ευκλείδη και για περισσότερο από 2000 χρόνια, αρκετοί μαθηματικοί (Nasir Eddin al-Tusi, j. Wallis, Commandino, Cataldi, G. Saccheri, Lambert κ.α.) θεωρούσαν ότι το 5^{ο} αίτημα των Στοιχείων είναι πρόταση, η οποία θα μπορούσε να αποδειχθεί. Οι προσπάθειες όμως, αν και δεν είχαν αποτέλεσμα, βοήθησαν στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας.

Προτάσεις ισοδύναμες με το πέμπτο αίτημα:

- *«Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι ίσο με 180 μοίρες»*
- *«Από κάθε σημείο που βρίσκεται εκτός ευθείας στο ίδιο επίπεδο, διέρχεται μία μόνο παράλληλη προς την ευθεία»*

Οι μη ευκλείδειες Γεωμετρίες:

Η μη επίτευξη του στόχου της απόδειξης του πέμπτου αιτήματος του Ευκλείδη, είχε τελικά ένα εντελώς απρόσμενο αποτέλεσμα. Στις αρχές του 19^{ου} αιώνα, ο Ρώσος μαθηματικός N. Lobachevsky και ο Ούγγρος J. Bolyai, ανεξάρτητα μεταξύ τους και μέσα από διαφορετική προσέγγιση ο καθένας, ανακοινώνουν και δημοσιεύουν εργασίες, με τις οποίες θεμελιώνουν την Υπερβολική Γεωμετρία, η οποία αποτελεί την πρώτη μη Ευκλείδεια αντίληψη για τη γεωμετρία. Σε παρόμοια συμπεράσματα είχε καταλήξει και ο C. F. Gauss, τα οποία όμως δεν είχε δημοσιεύσει. Στην Υπερβολική Γεωμετρία το πέμπτο Αίτημα έχει αντικατασταθεί με το *«από κάθε σημείο που βρίσκεται εκτός ευθείας στο ίδιο επίπεδο, διέρχονται άπειρες ευθείες, παράλληλες προς την ευθεία»*. Αργότερα, ο Riemann δημιουργεί την ελλειπτική γεωμετρία, στην οποία το πέμπτο Αίτημα έχει αντικατασταθεί με το *«από κάθε σημείο που βρίσκεται εκτός ευθείας στο ίδιο επίπεδο, δεν διέρχεται καμία παράλληλη προς την ευθεία»*. Σύμφωνα με την Υπερβολική Γεωμετρία, το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές, ενώ σύμφωνα με την Ελλειπτική Γεωμετρία, το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι μεγαλύτερο από δύο ορθές.



1. Τι περιέχει το κεφάλαιο «Παράλληλες Ευθείες» και πως το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Σύμφωνα με το Πρόγραμμα Σπουδών, στο τρίτο κεφάλαιο περιέχονται:

- Το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη ή αξίωμα των παραλλήλων (1 ώρα)
- Τα θεωρήματα-κριτήρια παραλληλίας (3 ώρες)
- Το άθροισμα γωνιών τριγώνου (3 ώρες)
- Γωνίες με πλευρές παράλληλες – κάθετες (1 ώρα)

Η αναφορά στο πέμπτο αίτημα πλαισιώνεται από αναφορές στη θεμελίωση και την εξέλιξη της Γεωμετρίας.

Στα θεωρήματα-κριτήρια παραλληλίας περιέχονται οι προτάσεις:

Αν δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και $\varepsilon_{2,}$ τέμνονται από μια τρίτη ευθεία ε , τότε σχηματίζονται:

- Οι εντός εναλλάξ γωνίες ίσες
- Οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες
- Οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές

Οι προτάσεις αυτές ισχύουν και αντίστροφα και μπορούν να χρησιμοποιούνται ως κριτήρια παραλληλίας: αν δύο ευθείες ε_1 και $\varepsilon_{2,}$ τέμνονται από μια τρίτη ευθεία ε και σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

Επίσης:

- Αν δύο ευθείες ε_1 και $\varepsilon_{2,}$ είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία ε , τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες
- Αν μια ευθεία ε τέμνει τη μια από δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2, τότε θα τέμνει και την άλλη.

Στην ενότητα άθροισμα γωνιών τριγώνου αποδεικνύεται το θεώρημα:

- Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες.

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια του προηγούμενου θεωρήματος αποδεικνύεται ότι:

- Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε μια από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου
- Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος προς την ευθεία

Ο τύπος του αθροίσματος των γωνιών κυρτού ν-γώνου

- Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου είναι 2ν-4 ορθές
- Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κάθε κυρτού ν-γώνου είναι 4 ορθές

Γωνίες με πλευρές παράλληλες – κάθετες)

- Γωνίες με τις πλευρές της μιας να είναι αντίστοιχα παράλληλες με τις πλευρές μιας άλλης
- Γωνίες με τις πλευρές της μιας να είναι αντίστοιχα κάθετες με τις πλευρές μιας άλλης

Οι μαθητές έχουν διδαχτεί και σε ικανοποιητικό βαθμό γνωρίζουν τα κριτήρια της παραλληλίας από τις προηγούμενες τάξεις, χωρίς όμως να έχουν δοθεί «αυστηρές» αποδείξεις.

2. Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο;

- Στο κεφάλαιο των παραλλήλων ευθειών εμπεριέχονται ορισμένα από τα πρώτα θεωρήματα-προτάσεις που παίζουν καθοριστικό ρόλο στο ευκλείδειο μαθηματικό οικοδόμημα
- Το πέμπτο αίτημα έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας και των Μαθηματικών γενικότερα και για περισσότερο από 2000 χρόνια βρισκόταν στο κέντρο του ενδιαφέροντος όσων ασχολούνταν με τη γεωμετρία, οδηγώντας τελικά στη δημιουργία νέων γεωμετριών.

3. Ποιες είναι οι Σημαντικές Ιδέες στο κεφάλαιο;

Ως οι πλέον σημαντικές έννοιες του κεφαλαίου μπορούν να θεωρηθούν:

- Δύο διαφορετικές ευθείες σε ένα επίπεδο είναι είτε παράλληλες ή τέμνονται.
- Δύο τεμνόμενες ευθείες στο επίπεδο σχηματίζουν γωνίες με συγκεκριμένες σχέσεις (π.χ. κατακόρυφες γωνίες, παραπληρωματικές γωνίες).
- Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180 μοίρες.
- Οι σχέσεις εξωτερικής και απέναντι εσωτερικών γωνιών τριγώνου
- Δύο παράλληλες ευθείες οι οποίες τέμνονται από μια τρίτη ευθεία σχηματίζουν ζεύγη των γωνιών που είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

- Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός πολυγώνου σχετίζεται με τον αριθμό των πλευρών.
- Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός πολυγώνου, ένα σε κάθε κορυφή, είναι πάντα ίση με 360.
- Το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη διαφοροποιεί την Ευκλείδεια από τις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες.

4. Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;
Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα μπορούν να απαντούν στα ερωτήματα:
- Πως ορίζονται οι παράλληλες ευθείες;
- Ποια είναι τα κριτήρια παραλληλίας δυο ευθειών;
- Ποια είναι η ιστορική σημασία και οι συνέπιες του $5^{ου}$ αιτήματος του Ευκλείδη;
- Ποια είναι σχέση εξωτερικής και εσωτερικών γωνιών τριγώνου;
- Ποιο είναι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου;
- Ποια είναι η σχέση του αθροίσματος των γωνιών κυρτού πολυγώνου με τον αριθμό των πλευρών του;
- Εξαρτάται το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού πολυγώνου από τον αριθμό των πλευρών του;

5. Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;
Κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου αναμένουμε να αναδειχθεί ο θεμελιακός χαρακτήρας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και να δημιουργηθούν χρηστικά εργαλεία για την πραγμάτευση επομένων κεφαλαίων. Επίσης, μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου αναμένουμε οι μαθητές να:
- Μ1: Γνωρίζουν τη σημασία του *«Πέμπτου Αιτήματος»* για τη θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, καθώς και την ύπαρξη άλλων Γεωμετριών πλην της Ευκλείδειας. (Στόχος 3.1.1 του Προγράμματος Σπουδών)
- Μ2: Αποφαίνονται για την παραλληλία ή μη δύο ευθειών του επιπέδου από τις σχέσεις των γωνιών που σχηματίζουν αυτές όταν τέμνονται από μια Τρίτη ευθεία. (Στόχος 3.2.1 του Προγράμματος Σπουδών)
- Μ3: Χρησιμοποιούν το θεώρημα του αθροίσματος των γωνιών τριγώνου στην απόδειξη προτάσεων (όπως για παράδειγμα να αποδεικνύουν τη μοναδικότητα της καθέτου προς ευθεία που φέρεται από σημείο εκτός αυτής). (Στόχος 3.3.1 του Προγράμματος Σπουδών)
- Μ4: Παρατηρούν, πειραματίζονται, διατυπώνουν εικασία και αποδεικνύουν τον τύπο για το άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου. (Στόχος 3.3.2 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητες Δ6 και Δ7)
- Μ5: Αναγνωρίζουν γωνίες με πλευρές κάθετες ή παράλληλες. (Στόχος 3.4.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ8)

6. Δραστηριότητες
Οι δραστηριότητες Δ6, Δ7 και Δ8, που προτείνονται από το πρόγραμμα σπουδών μπορούν να υλοποιηθούν στη σχολική τάξη ή στο εργαστήριο.
Δραστηριότητα Δ6
Με τη δραστηριότητα Δ6, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (3.3.2.), επιδιώκεται να οδηγηθούν οι μαθητές στην ανάγκη απόδειξης του τύπου για το άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου μέσα από διαδικασίες παρατήρησης, πειραματισμού και διατύπωσης εικασιών.
Δραστηριότητα Δ7
Η δραστηριότητα Δ7 αντιστοιχεί στο στόχο 3.3.2. του προγράμματος Σπουδών (Μ4) και με την υλοποίησή της επιδιώκεται να οδηγηθούν οι μαθητές στην ανάγκη απόδειξης του τύπου για το άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου μέσα από διαδικασίες παρατήρησης, πειραματισμού και διατύπωσης εικασιών.

- Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα. Στη στήλη «Τρίγωνα» συμπληρώστε τον αριθμό των τριγώνων στα οποία χωρίζεται το πολύγωνο από διαγωνίους που άγονται από μία κορυφή του.

Αριθμός πλευρών	Τρίγωνα	Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου
4		
5		
6		
...		
ν		

Μπορείτε να προσδιορίσετε τον τύπο του αθροίσματος των γωνιών κυρτού ν-γώνου;

Σχόλιο1: Η δραστηριότητα μπορεί να τροποποιηθεί από το διδάσκοντα(κατά την κρίση του) και να ζητηθεί από τους μαθητές ένα σημείο στο εσωτερικό του πολυγώνου, να το συνδέσουν με τις κορυφές του και να υπολογίσουν το άθροισμα τον γωνιών του πολυγώνου από το άθροισμα των γωνιών των τριγώνων που έχουν σχηματιστεί.

Σχόλιο2: Η δραστηριότητα μπορεί να επίσης να τροποποιηθεί και να γίνει περισσότερο «ανοιχτή» αν δεν υποδειχτεί στους μαθητές ο χωρισμός του πολυγώνου σε τρίγωνα, αλλά αφεθούν οι μαθητές να αναζητήσουν τη λύση χωρίς υπόδειξη από το διδάσκοντα.

Δραστηριότητα Δ8

Η δραστηριότητα Δ8 αντιστοιχεί στο στόχο (3.4.1.) του προγράμματος Σπουδών (Μ4) και με την υλοποίησή της επιδιώκεται να αναγνωρίζουν οι μαθητές γωνίες με πλευρές παράλληλες ή κάθετες.

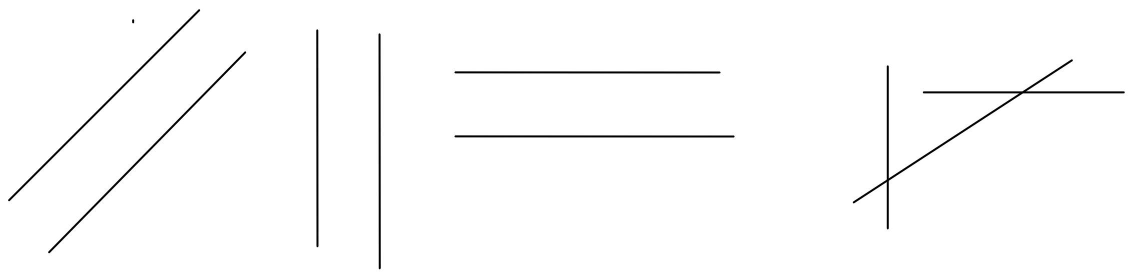
7. Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Η διδασκαλία του κεφαλαίου και η υλοποίηση των Δραστηριοτήτων θα διεξαχθεί σύμφωνα με τις υποδείξεις και τα σχόλια που περιέχονται στο Πρόγραμμα Σπουδών.

8. Ποια σημεία πρέπει να προσέξει ιδιαίτερα ο διδάσκων;

Χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής από το διδάσκοντα:

Οι συνήθεις παρανοήσεις για την έννοια της παραλληλίας από τους μαθητές, όπως ότι αρκετοί μαθητές συγχέουν την έννοια της παραλληλίας με την έννοια «οριζόντιες ευθείες» (όπως και την έννοια της καθετότητας ευθειών με τις «κατακόρυφες ευθείες»)



Σχήμα 1 Σχήμα 2 Σχήμα 3 Σχήμα 4

Είναι πιθανό ορισμένοι μαθητές να ισχυριστούν ότι στο σχήμα 1 οι ευθείες είναι πλάγιες, στο σχήμα 2 οι ευθείες είναι κάθετες και ότι μόνο στο σχήμα 3 οι ευθείες είναι παράλληλες, ενώ στο σχήμα 4 έχουμε μια ευθεία κάθετη, μια παράλληλη και μια πλάγια..

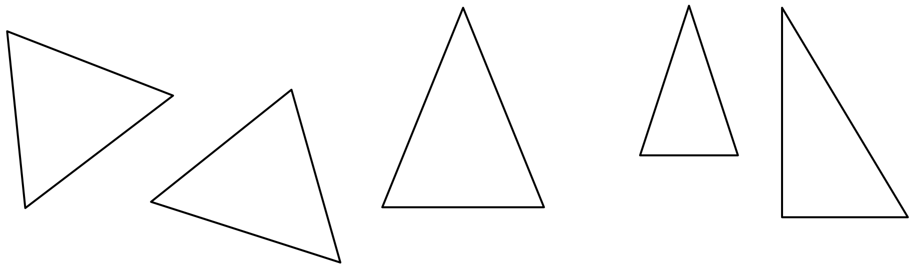
9. Αξιοποίηση της Τεχνολογίας στην διδασκαλία του κεφαλαίου.

Κατά τη διεξαγωγή της δραστηριότητας Δ6, με την οποία επιδιώκεται η απόδειξη του τύπου για το άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου, να αξιοποιηθεί το περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας να κατασκευαστεί κυρτό πολύγωνο, να μετρηθούν οι γωνίες του και να βρεθεί το άθροισμά τους. Να μετακινηθεί μία κορυφή του, έτσι ώστε το πολύγωνο να παραμένει κυρτό και να διαπιστωθεί η σταθερότητα του αθροίσματος των γωνιών του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο} : Τρίγωνα

Εισαγωγή

Τρίγωνο: Το τρίγωνο είναι το πλέον θεμελιώδες σχήμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι ορισμοί 19, 20 και 21 των Στοιχείων (Βιβλίο Ι.) του Ευκλείδη περιγράφουν τα τρίγωνα. Με τον ορισμό 19 ορίζεται ότι: «*Ευθύγραμμα σχήματα είναι αυτά που περικλείονται από ευθύγραμμα τμήματα, τρίπλευρα αυτά που περικλείονται από τρεις, τετράπλευρα αυτά που περικλείονται από τέσσερες, πολύπλευρα από περισσότερες των τεσσάρων γραμμές*». Με τον ορισμό 20 ορίζεται ότι: «*Από τα τρίπλευρα σχήματα, αυτό που έχει ίσες τις τρεις πλευρές ονομάζεται ισόπλευρο τρίγωνο, αυτό που έχει δύο μόνο πλευρές ίσες ισοσκελές και σκαληνό αυτό που έχει τις τρεις πλευρές άνισες*». Με τον ορισμό 21 ορίζονται ομοίως τα *ορθογώνιο, οξυγώνιο* και *αμβλυγώνιο* τρίγωνα. Είναι επίσης χαρακτηριστικό ότι η πρώτη πρόταση των στοιχείων του Ευκλείδη αφορά στην κατασκευή ισοπλεύρου τριγώνου και ότι το μεγαλύτερο μέρος του πρώτου βιβλίου των «Στοιχείων» είναι αφιερωμένο στα τρίγωνα και τις ιδιότητές τους.



Τρίγωνα

1. Τι περιέχει το κεφάλαιο «Τρίγωνα» και πως το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Στο τέταρτο κεφάλαιο περιλαμβάνονται:

- Ο ορισμός ισότητας τριγώνων και κριτήρια ισότητας τριγώνων (3 ώρες)
- Προτάσεις στα ισοσκελή τρίγωνα (2 ώρες)
- Γεωμετρικοί τόποι (η περίπτωση της διχοτόμου γωνίας και της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος) (2 ώρες)
- Ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα (2 ώρες)
- Προτάσεις σε χορδές, τόξα, αποστήματα και εφαπτομένη κύκλου (3 ώρες)

Σύνδεση με προηγούμενες γνώσεις:

Η διδασκαλία των περιεχομένων του κεφαλαίου είναι η συνέχεια του περιεχομένου των προηγούμενων κεφαλαίων και έχει άμεση σχέση μαζί τους, αφού:

- Σε προηγούμενες τάξεις οι μαθητές έχουν διδαχθεί σε μεγάλο βαθμό τα τρίγωνα και τις ιδιότητες τους (ορισμοί, κριτήρια ισότητας, ανισοτικές σχέσεις), χωρίς όμως τις αυστηρές αποδείξεις των περισσοτέρων ιδιοτήτων.
- Μεγάλο μέρος της ορολογίας επίσης είναι γνωστή στους μαθητές

2. Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο;

Το τρίγωνο και οι ιδιότητες του παίζουν σημαντικό ρόλο στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.

- Κάθε πολύγωνο μπορεί να διαμεριστεί σε τρίγωνα, οπότε προβλήματα που εμφανίζονται σε πολύγωνα ανάγονται σε προβλήματα σε τρίγωνα (π.χ. υπολογισμός εμβαδού πολυγώνου). Αντίστροφα, με τρίγωνα μπορούμε να κατασκευάσουμε όλα τα πολύγωνα.
- Η μελέτη των γωνιών και των περισσοτέρων ιδιοτήτων τους γίνεται με τη βοήθεια των τριγώνων
- Το τρίγωνο είναι πολύτιμο εργαλείο για τη μεταφορά και τη σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών καθώς και για την επίλυση προβλημάτων ισότητας ευθυγράμμων τμημάτων και

γωνιών, τα οποία συνήθως ανάγονται σε προβλήματα κατασκευής και ισότητας τριγώνων. (Η κατασκευή είναι ουσιαστικά απόδειξη ύπαρξης)

- Μέσα από τη διδασκαλία της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος και της διχοτόμου γωνίας γίνεται μια καλή εισαγωγή στους γεωμετρικούς τόπους

3. Ποιες είναι οι Σημαντικές Ιδέες στο κεφάλαιο;

- Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180 μοίρες (δύο ορθές).
- Απέναντι από μεγαλύτερη πλευρά ενός τριγώνου βρίσκεται μεγαλύτερη γωνία και αντιστρόφως
- Σε ένα τρίγωνο, το μήκος των δύο πλευρών και η περιεχόμενη γωνία καθορίζουν το μήκος της πλευράς απέναντι από την γωνία.
- Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο εντός και απέναντι γωνιών του τριγώνου
- Σε κάθε τρίγωνο υπάρχει ένα σημείο που ισαπέχει από τις κορυφές του (είναι εγγράψιμο σε κύκλο)
- Σε κάθε τρίγωνο υπάρχει ένα σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές του (είναι περιγράψιμο σε κύκλο)
- Αρκεί η ισότητα τριών αντίστοιχων πλευρών δύο τριγώνων για να είναι ίσα
- Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δυο άλλων πλευρών του (τριγωνική ανισότητα)

4. Σε ποια ερωτήματα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Στον ορισμό και στα κριτήρια ισότητας και στην κατηγοριοποίηση τω τριγώνων:

- Πως ταξινομούνται τα τρίγωνα σε σχέση με τις πλευρές του και σε σχέση με τις γωνίες του;
- Ποια είναι τα κύρια και ποια τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου;
- Πώς ορίζεται η ισότητα τριγώνων;
- Ποια είναι τα κριτήρια ισότητας τριγώνων;
- Ποιά είναι τα είδη τριγώνων σε σχέση με τις πλευρές τους;
- Ποια είναι τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά κάθε κατηγορίας;
- Ποιά είναι τα είδη τριγώνων σε σχέση με τις γωνίες τους;
- Ποια είναι τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά κάθε κατηγορίας;

Στους γεωμετρικούς τόπους, στην περίπτωση της διχοτόμου γωνίας και της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος

- Ποιες είναι οι ιδιότητες της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος; (γεωμετρικός τόπος)
- Ποιες είναι οι ιδιότητες της διχοτόμου γωνίας; (γεωμετρικός τόπος)

Στις ανισοτικές σχέσεις στα τρίγωνα:

- Ποιοι περιορισμοί υπάρχουν στις σχέσεις μεταξύ των πλευρών ενός τριγώνου για να είναι κατασκευάσιμο; (τριγωνική ανισότητα)
- Ποιοι περιορισμοί υπάρχουν στις σχέσεις μεταξύ των γωνιών ενός τριγώνου για να είναι κατασκευάσιμο; (άθροισμα γωνιών τριγώνου)
- [Ποιοι περιορισμοί υπάρχουν στις σχέσεις μεταξύ των πλευρών και γωνιών ενός τριγώνου για να είναι κατασκευάσιμο; (νόμος ημιτόνων)]
- Ποιοι περιορισμοί υπάρχουν στις σχέσεις μεταξύ των πλευρών και των γωνιών ενός τριγώνου ως προς τις μεταξύ τους ανισοτικές σχέσεις;

Στις προτάσεις σε χορδές, τόξα, αποστήματα και εφαπτομένη κύκλου:
Πώς κατασκευάζονται και πώς ορίζονται οι χορδές, τόξα, αποστήματα και εφαπτομένη κύκλου ;

5. Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου αναμένουμε οι μαθητές να είναι σε θέση:

- Μ1: να διακρίνουν τον ορισμό της ισότητας, από τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και να μπορούν να εξηγήσουν γιατί για την ισότητα τριγώνων αρκούν λιγότερες συγκρίσεις από τις έξι που απαιτεί ο ορισμός·
- Μ2: να διακρίνουν πότε σχέσεις μεταξύ πλευρών και γωνιών τριγώνων αποτελούν κριτήριο ισότητας αυτών και πότε όχι
- Μ3: να κατασκευάζουν με κανόνα και διαβήτη ένα τρίγωνο από τα αναγκαία για την κατασκευή στοιχεία του τριγώνου.
- Μ4: να κατασκευάζουν με κανόνα και διαβήτη τη διχοτόμο γωνίας και τη μεσοκάθετο ευθυγράμμου τμήματος·
- Μ5: να αξιοποιούν τις ιδιότητες της διχοτόμου γωνίας και της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος στην επίλυση προβλημάτων·
- Μ6: να διαπιστώσουν την αναγκαιότητα της τριγωνικής ανισότητας στην κατασκευή τριγώνου·
- Μ7: να εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων ότι απέναντι από μεγαλύτερη πλευρά ενός τριγώνου βρίσκεται μεγαλύτερη γωνία και αντιστρόφως·
- Μ8: να κάνουν τη γεωμετρική κατασκευή της εφαπτομένης κύκλου σε σημείο αυτού

6. Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες Δ9, Δ10 και Δ11, που προτείνονται από το πρόγραμμα σπουδών μπορούν να υλοποιηθούν στη σχολική τάξη.

Δραστηριότητα Δ9

Η δραστηριότητα Δ9 αντιστοιχεί στο στόχο (4.4.1.), του Προγράμματος Σπουδών (Μ6) και με την υλοποίησή της επιδιώκεται να διαπιστώσουν οι μαθητές την αναγκαιότητα της τριγωνικής ανισότητας στην κατασκευή τριγώνου.

- Να εξετάσετε αν κατασκευάζονται τρίγωνα με μήκη πλευρών τις τιμές των α, β, γ για τις περιπτώσεις του παρακάτω πίνακα:

α	β	γ
5	6	7
10	3	4
8	9	10
12	3	5

Σχόλιο: *Αν η δραστηριότητα υλοποιηθεί μετά τη διδασκαλία της τριγωνικής ανισότητας τότε αποτελεί απλή εφαρμογή της. Προτείνεται να δοθεί πριν και να αποτελέσει αφόρμηση για να αναπτυχθούν διαδικασίες παρατήρησης, πειραματισμού και διατύπωσης εικασιών.*

Δραστηριότητα Δ10

Με τη δραστηριότητα Δ10, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (4.4.2.) του Προγράμματος Σπουδών (Μ7) και με την υλοποίησή της επιδιώκεται να εφαρμόσουν οι μαθητές τις ανισοτικές σχέσεις που διέπουν γωνίες και πλευρές τριγώνου στην επίλυση προβλημάτων.

Δραστηριότητα Δ11

Με τη δραστηριότητα Δ11, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (4.4.2.) του Προγράμματος Σπουδών (Μ7) και με την υλοποίησή της επιδιώκεται να εφαρμόσουν οι μαθητές τις ανισοτικές σχέσεις που διέπουν γωνίες και πλευρές τριγώνου στην επίλυση προβλημάτων.

7. Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Η διδασκαλία του κεφαλαίου και η υλοποίηση των Δραστηριοτήτων θα διεξαχθεί σύμφωνα με τις υποδείξεις και τα σχόλια που περιέχονται στο Πρόγραμμα Σπουδών. Κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου:

1. Να επισημανθεί ότι για την ισότητα τριγώνων αρκούν λιγότερες συγκρίσεις από τις έξι που απαιτεί ο ορισμός.

2. Να γίνει ιστορική αναφορά στην απόδειξη του Ευκλείδη που περιέχεται στα «Στοιχεία» και στο μεσαιωνικό χαρακτηρισμό ως «pons asinorum» (γέφυρα του όνου), όπως υποδεικνύεται από το Πρόγραμμα Σπουδών.

Σημείωση:
Πρόκειται για την απόδειξη της πρότασης (Ι.5) του Ευκλείδη, για την οποία οι φοιτητές θεωρούσαν ότι η κατανόησή της απαιτεί «γαϊδουρινή υπομονή» και επειδή το σχήμα της απόδειξης έμοιαζε με γέφυρα προέκυψε ο χαρακτηρισμός «pons asinorum» (γέφυρα του όνου)
Σύμφωνα με την Πρόταση Ι.5. των «Στοιχείων», «Στα ισοσκελή τρίγωνα οι παρά την βάση γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους και εάν προεκταθούν οι ίσες πλευρές του τριγώνου, οι γωνίες που σχηματίζονται κάτω από τη βάση είναι μεταξύ τους ίσες».
Η απόδειξη που περιέχεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη δεν είναι απλή. Μια διαφορετική απόδειξη είχε δώσει ο Αριστοτέλης, ενώ μια απλούστερη απόδειξη είχε δώσει ο Πάππος, ο οποίος συνέκρινε το τρίγωνο ΑΒΓ με το τρίγωνο ΑΓΒ, η απόδειξη αυτή όμως δεν γινόταν πάντα αποδεκτή. Η αρχική διατύπωση και απόδειξη της πρότασης αποδίδεται στον Θαλή.

3. Να αποδειχθεί το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων, το οποίο αναφέρεται στην υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά, καθώς δεν προκύπτει άμεσα από τα κριτήρια

4. Με αφορμή τη διχοτόμο να υπάρξει ιστορικό σημείωμα για την αδυναμία τριχοτόμησης γωνίας με κανόνα και διαβήτη

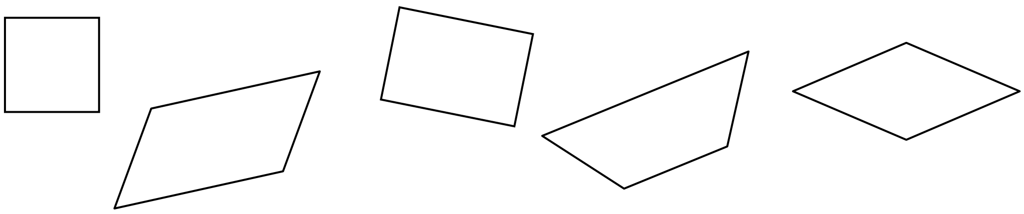
5. Να γίνει ιστορική αναφορά για την τριγωνική ανισότητα και την θέση των Επικουρείων φιλοσόφων. Επίσης να σημειωθεί η λειτουργικότητα της τριγωνικής ανισότητας στην κατασκευή τριγώνων: γνωρίζοντας τα μήκη τριών ευθυγράμμων τμημάτων μπορούμε να αποφανθούμε εάν υπάρχει τρίγωνο το οποίο έχει τα συγκεκριμένα ευθύγραμμα τμήματα ως πλευρές.
Σχόλιο: Η τριγωνική ανισότητα περιέχεται στην Πρόταση Ι.20 των στοιχείων του Ευκλείδη,
«Κάθε τριγώνου οι δύο πλευρές είναι μεγαλύτερες από την τρίτη, με οποιονδήποτε τρόπο και αν λαμβάνονται» («Παντός τριγώνου αι δύο πλευραί της λοιπής μείζονές εισι πάντη μεταλαμβανόμενοι»). Για να διασύρουν οι Επικούριοι την Πρόταση Ι.20, συνήθηζαν να λένε ότι αυτή είναι προφανής και για ένα γάιδαρο και ότι δε χρειάζεται κάποιο σχήμα.

6. Ως εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας, να διερευνηθούν οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων. Για την παραπάνω διερεύνηση προτείνεται η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο : Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια

Εισαγωγή

Στο πρώτο βιβλίο των στοιχείων του Ευκλείδη δίνεται ο ορισμός των κυριότερων τετραπλεύρων: *«Από τα τετράπλευρα σχήματα, τετράγωνα είναι εκείνα που είναι ισόπλευρα και ορθογώνια, ετερομήκη είναι εκείνα που είναι ορθογώνια αλλά όχι ισόπλευρα, ρόμβοι είναι εκείνα που είναι ισόπλευρα αλλά όχι ορθογώνια και ρομβοειδή είναι εκείνα που δεν είναι ισόπλευρα ή ορθογώνια. Τα υπόλοιπα ονομάζονται τραπέζια» (Στοιχεία, Βιβλίο 1, ορισμός 22).* Όπως είναι γνωστό, τα τετράπλευρα ήταν γνωστά και είχαν μελετηθεί πριν από τον Ευκλείδη.



Παραλληλόγραμμα και τραπέζια

1. Τι περιέχει το κεφάλαιο «Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια» και πως το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Σύμφωνα με το Πρόγραμμα Σπουδών, στο κεφάλαιο **«Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια»** περιλαμβάνονται:

- Παραλληλόγραμμα: ορισμός, ιδιότητες, κριτήρια (3 ώρες)
- Ειδικά παραλληλόγραμμα: Ορθογώνιο, Ρόμβος, Τετράγωνο (3 ώρες)
- Εφαρμογές των παραλληλογράμμων (5 ώρες)
- Χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου: Έγκεντρο, Περίκεντρο, Ορθόκεντρο, Βαρύκεντρο (5 ώρες)
- Τραπέζια (2 ώρες)

2. Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο;

Η σημασία της διδασκαλίας του κεφαλαίου, έγκειται στο ότι περνάμε από τη μελέτη των παραλλήλων ευθειών και των τριγώνων, στη μελέτη περισσότερο σύνθετων σχημάτων, όπως είναι τα παραλληλόγραμμα και τα τραπέζια. Η μελέτη των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων οδηγεί σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα για τη σχέση μεταξύ των πλευρών τους, των γωνιών τους και των διαγωνίων τους

3. Ποιες είναι οι Σημαντικές Ιδέες στο κεφάλαιο;

Ως Σημαντικές Ιδέες του κεφαλαίου μπορούν να θεωρηθούν:

- Η σχέση των απέναντι πλευρών των παραλληλογράμμων, οι οποίες είναι παράλληλες και ίσες.
- Η σχέση των απέναντι γωνιών των παραλληλογράμμων, οι οποίες είναι ίσες.
- Η σχέση των διαγωνίων των παραλληλογράμμων, οι οποίες είναι διχοτομούνται.
- Οι συμμετρίες που διαπιστώνονται στα παραλληλόγραμμα.
- Οι διάμεσοι των τραπεζίων είναι ίσες με το ημιάθροισμα των παραλλήλων πλευρών του.
- Τα χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου (Έγκεντρο, Περίκεντρο, Ορθόκεντρο, Βαρύκεντρο)

4. Σε ποια ερωτήματα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα μπορούν να απαντούν στα ερωτήματα:

- Πως ορίζονται τα παραλληλόγραμμα; (τετράγωνο, ορθογώνιο, ρόμβος, παραλληλόγραμμο, ισοσκελές τραπέζιο, τραπέζιο)
- Ποιες είναι οι χαρακτηριστικές ιδιότητες των παραλληλογράμμων;

- Ποιά είναι τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο;
- Ποιές είναι οι ιδιότητες των διαγωνίων των παραλληλογράμμων;
- Πως ταξινομούνται τα παραλληλόγραμμα με βάση τις ιδιότητες τους;
- Πώς εντοπίζουμε τη θέση του περίκεντρου και του ορθόκεντρου ανάλογα με το είδος του τριγώνου;
- Ποιές είναι οι ιδιότητες της διαμέσου του τραπεζίου;

5. Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;
Μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου αναμένουμε οι μαθητές να είναι σε θέση:

- Να διακρίνουν τον ορισμό από τις ιδιότητες παραλληλογράμμων και από τα κριτήρια που εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο. (Στόχος 5.1.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ12)
- Να πιστοποιούν το ισοδύναμο μεταξύ δοθέντος ορισμού και ενός εκ των προηγουμένων κριτηρίων. (Στόχος 5.1.2 του Προγράμματος Σπουδών)
- Να ταξινομούν τα παραλληλόγραμμα με βάση τις ιδιότητές τους. (Στόχος 5.2.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ13)
- Να ελέγχουν με αντιπαραδείγματα την αλήθεια αντιστρόφων προτάσεων σχετικές με τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων. (Στόχος 5.2.2 του Προγράμματος Σπουδών)
- Να διαπιστώνουν συμμετρίες (κεντρικές, αξονικές) σε παραλληλόγραμμα. (Στόχος 5.2.3 του Προγράμματος Σπουδών).
- Να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων στην επίλυση προβλημάτων (Στόχος 5.3.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ14)
- Να εντοπίζουν τις θέσεις του περικέντρου και του ορθοκέντρου ανάλογα με το είδος του τριγώνου. (Στόχος 5.4.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητες Δ15 και Δ16)
- Να αξιοποιούν την ιδιότητα της διαμέσου του τραπεζίου στην επίλυση προβλημάτων. (Στόχος 5.5.1 του Προγράμματος Σπουδών)

6. Δραστηριότητες
Οι δραστηριότητες Δ12, Δ13, Δ14, Δ15 και Δ16, που προτείνονται από το πρόγραμμα σπουδών μπορούν να υλοποιηθούν στη σχολική τάξη.
Δραστηριότητα Δ12
Η δραστηριότητα Δ12 αντιστοιχεί στο στόχο (5.1.1.) του Προγράμματος Σπουδών και με την υλοποίησή της επιδιώκεται να διακρίνουν οι μαθητές τον ορισμό από τις ιδιότητες παραλληλογράμμων και από τα κριτήρια που εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.
Δραστηριότητα Δ13
Με τη δραστηριότητα Δ13, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (5.2.1.) του Προγράμματος Σπουδών και με την υλοποίησή της επιδιώκεται να ταξινομούν οι μαθητές τα παραλληλόγραμμα με βάση τις ιδιότητές τους.
Δραστηριότητα Δ14
Με τη δραστηριότητα Δ14, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (5.3.1.) του Προγράμματος Σπουδών και με την υλοποίησή της επιδιώκεται να χρησιμοποιούν οι μαθητές τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων στην επίλυση προβλημάτων
Δραστηριότητα Δ15
Με τη δραστηριότητα Δ15, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (5.4.1.) του Προγράμματος Σπουδών και με την υλοποίησή της επιδιώκεται να εντοπίζουν οι μαθητές τις θέσεις του περικέντρου και του ορθοκέντρου ανάλογα με το είδος του τριγώνου.
Δραστηριότητα Δ16
Με τη δραστηριότητα Δ16, η οποία επίσης αντιστοιχεί στο στόχο (5.4.1.) του Προγράμματος Σπουδών και με την υλοποίησή της επιδιώκεται να εντοπίζουν οι μαθητές τις θέσεις του περικέντρου και του ορθοκέντρου ανάλογα με το είδος του τριγώνου.

7. Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Η διδασκαλία του κεφαλαίου και η υλοποίηση των Δραστηριοτήτων θα διεξαχθεί σύμφωνα με τις υποδείξεις και τα σχόλια που περιέχονται στο Πρόγραμμα Σπουδών.

8. Ποια σημεία πρέπει να προσέξει ιδιαίτερα ο διδάσκων;

- Η κατανόηση εκ μέρους των μαθητών της διαφοράς μεταξύ «ικανής» και «αναγκαίας» συνθήκης
- Το απροσδόκητο αποτέλεσμα τα μέσα των πλευρών κάθε τετραπλεύρου να είναι κορυφές παραλληλογράμμου τα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται από τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από τα μέσα των πλευρών οποιουδήποτε τετραπλεύρου.
- Η σχεδίαση βοηθητικής ευθείας για την απόδειξη της πρότασης ότι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δυο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την Τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.
- Η ευφυής απόδειξη της πρότασης ότι τα ύψη παντός τριγώνου συντρέχουν

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{ο} : Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

Εισαγωγή

Η Ευκλείδεια Στερεομετρία περιγράφει το χώρο των τριών διαστάσεων μέσα στον οποίο ζούμε. Οι προτάσεις του Ευκλείδη για τη Στερεομετρία περιέχονται στα τρία τελευταία βιβλία (XI., XII., XIII.) των Στοιχείων. Σύμφωνα με τους ορισμούς που δίνει ο Ευκλείδης:

- *«Στερεό είναι αυτό που έχει μήκος και πλάτος και βάθος» («Στερεόν εστι το μήκος και πλάτος και βάθος έχον», Ευκλείδης, Στοιχεία XI., όρος α΄).*

Με τον ορισμό αυτό, ορίζει ο Ευκλείδης την έννοια του στερεού στον πρώτο ορισμό του ενδέκατου βιβλίου των «Στοιχείων». Και συνεχίζει:

- *«Στερεού δε πέρας επιφάνεια» (Στοιχεία XI., Όρος β΄),*
- *«Ἑυθεία προς επίπεδον ορθή εστιν, όταν προς πάσας τας απτομένας αυτής ευθείας και ούσας εν τω [υποκειμένω] επιπέδω ορθάς ποιεί γωνίας» (Στοιχεία XI., Όρος γ΄),*
- *«Επίπεδον προς επίπεδον ορθόν εστιν, όταν αι τη κοινή τομή των επιπέδων προς ορθάς αγόμεναι ευθείαι εν ενί των επιπέδων τω λοιπώ επιπέδω προς ορθάς ώσιν»…» (Στοιχεία XI., Όρος δ΄),*
- *«Ευθείας προς επίπεδον κλίσις εστιν, όταν από του μετεόρου πέρατος της ευθείας επί το επίπεδον κάθετος αχθή και από του γενομένου σημείου επί τώ εν τώ επιπέδω πέρας της ευθείας ευθεία επιζευχθή, η περιεχομένη γωνία υπό της αχθείσης και της εφεστώσης» (Στοιχεία XI., Όρος ε΄).*

Στο κεφάλαιο αυτό, μέσα από τη μελέτη των ευθειών και των επιπέδων στο χώρο επιδιώκεται η μετάβαση από τις έννοιες της Γεωμετρίας του Επιπέδου (Επιπεδομετρία) σε αυτές της Γεωμετρίας του Χώρου (Στερεομετρία).

1. Τι περιέχει το κεφάλαιο «Ευθείες και επίπεδα στο χώρο» και πως το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Σύμφωνα με το Πρόγραμμα Σπουδών, στο κεφάλαιο περιλαμβάνονται οι ενότητες:

Ευθείες και επίπεδα στο χώρο (3 ώρες)

- Ο ορισμός της Γεωμετρίας του Χώρου
- Ο ορισμός ενός επιπέδου στο χώρο από τρία μη συνευθειακά σημεία
- Τρόποι ορισμού ενός επιπέδου
- Σχετικές θέσεις ευθειών του χώρου
- Η έννοια των ασυμβάτων ευθειών
- Σχετικές θέσεις ευθείας του χώρου και επιπέδου.
- Σχετικές θέσεις επιπέδων του χώρου – τομή επιπέδων – δίεδρη γωνία.

Τα Θεωρήματα παραλληλίας – καθετότητας ευθειών και επιπέδων (3 ώρες)

- Παραλληλία ευθειών
- Παραλληλία ευθειών και επιπέδων
- Παραλληλία επιπέδων
- Το μεσοπαράλληλο επίπεδο
- Καθετότητα ευθειών
- Καθετότητα επιπέδων
- Καθετότητα ευθειών και επιπέδων – κριτήριο καθετότητας ευθείας σε επίπεδο – θεώρημα τριών καθέτων – μεσοκάθετο επίπεδο σε ευθύγραμμο τμήμα

2. Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο;

Η σημασία του κεφαλαίου είναι μεγάλη, αφού ο χώρος αποτελεί το κοινό υπόβαθρο της ανθρώπινης εμπειρίας. Η σημασία της διδασκαλίας του στο Λύκειο έγκειται στο γεγονός ότι οι μαθητές:

- Εισάγονται στη μελέτη του χώρου των τριών διαστάσεων…
- Εκτός από την εποπτεία αξιοποιούν και τη φαντασία τους στην αντίληψη του χώρου
- Έχουν τη δυνατότητα να μελετήσουν προβολικές απεικονίσεις και παραστάσεις σχημάτων του χώρου στο επίπεδο.

3. Ποιες είναι οι Σημαντικές Ιδέες στο κεφάλαιο;
Ως Σημαντικές Ιδέες του κεφαλαίου μπορούν να θεωρηθούν:

- Οι τρόποι ορισμού ενός επιπέδου
- Η δίεδρη γωνία
- Οι ασύμβατες ευθείες
- Οι έννοιες της παραλληλίας: ευθειών στο χώρο, ευθείας και επιπέδου στο χώρο, επιπέδων στο χώρο

4. Σε ποια ερωτήματα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;
Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα μπορούν να απαντούν στα ερωτήματα:

- Ποια είναι τα βασικά στοιχεία του χώρου;
- Πώς ορίζεται ένα επίπεδο στο χώρο;
- Ποιες είναι οι σχετικές θέσεις ευθειών, επιπέδων, ευθειών και επιπέδων στο χώρο;
- Πώς ορίζεται η παραλληλία ευθειών στο χώρο;
- Πώς ορίζεται η παραλληλία ευθειών και επιπέδων;
- Πώς ορίζεται η παραλληλία επιπέδων;
- Πώς ορίζεται το μεσοπαράλληλο επίπεδο;
- Πώς ορίζεται η καθετότητα επιπέδων;
- Πώς ορίζεται η καθετότητα ευθείας και επιπέδου;
- Πώς αποδεικνύεται το κριτήριο καθετότητας ευθείας σε επίπεδο και το θεώρημα των τριών καθέτων;
- Ποιος είναι γεωμετρικός τόπος στο χώρο, των μεσοκάθετων ευθειών ενός ευθυγράμμου τμήματος;
- Πώς διαφοροποιούνται μεταξύ τους οι κάθετες από τις ασύμβατες ευθείες;
- Πώς διαφοροποιούνται μεταξύ τους οι κάθετες από τις ορθογώνιες ευθείες;
- Πώς διαφοροποιείται η καθετότητα σε ευθεία του επιπέδου από την καθετότητα ευθείας στο επίπεδο;

5. Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;
Κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου αναμένουμε να πραγματοποιηθεί η μετάβαση από την Επιπεδομετρία στη Στερεομετρία με την αντιπαραβολή αξιωμάτων, ορισμών, εννοιών και ιδιοτήτων και να γίνει η εισαγωγή των μαθητών στο χώρο των τριών διαστάσεων.
Στο πλαίσιο αυτό, μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου αναμένουμε οι μαθητές να είναι σε θέση:

- Να σχεδιάζουν τα βασικά στοιχεία του χώρου (Στόχος 6.1.1 του Προγράμματος Σπουδών)
- Να αναγνωρίζουν τις σχετικές θέσεις ευθειών, επιπέδων, ευθειών και επιπέδων στο χώρο. (Στόχος 6.1.2 του Προγράμματος Σπουδών)
- Να διακρίνουν:
  (α)την παραλληλία ευθειών
  (β)την παραλληλία ευθειών και επιπέδων
  (γ)την παραλληλία επιπέδων
  (Στόχος 6.2.1 του Προγράμματος Σπουδών)

Να αναγνωρίζουν:
(α) την καθετότητα ευθειών
(β) την καθετότητα επιπέδων
(γ) την καθετότητα ευθειών και επιπέδων.
(Στόχος 6.2.2 του Προγράμματος Σπουδών)

Να διαφοροποιούν:
(α) τις κάθετες μεταξύ τους ευθείες από τις ορθογώνιες ευθείες και
(β) την καθετότητα σε ευθεία του επιπέδου από την καθετότητα ευθείας στο επίπεδο.
(Στόχος 6.2.3 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητες Δ17 και Δ18)

6. Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες Δ17 και Δ18, που προτείνονται από το πρόγραμμα σπουδών μπορούν να υλοποιηθούν στη σχολική τάξη.

Δραστηριότητα Δ17

Με τη δραστηριότητα Δ17, η οποία αντιστοιχεί στους στόχους (6.1.2 και 6.2.2), του Προγράμματος Σπουδών και με την υλοποίησή της επιδιώκεται οι μαθητές να σχεδιάζουν τα βασικά στοιχεία του χώρου και να αναγνωρίζουν την καθετότητα ευθειών, επιπέδων, ευθειών και επιπέδων στο χώρο.

Δραστηριότητα Δ18

Με τη δραστηριότητα Δ18, η οποία επίσης αντιστοιχεί στους στόχους (6.1.2 και 6.2.2), του Προγράμματος Σπουδών (Μ6) και με την υλοποίησή της επιδιώκεται οι μαθητές να σχεδιάζουν τα βασικά στοιχεία του χώρου και να αναγνωρίζουν την καθετότητα ευθειών, επιπέδων, ευθειών και επιπέδων στο χώρο.

7. Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Η διδασκαλία του κεφαλαίου και η υλοποίηση των Δραστηριοτήτων θα διεξαχθεί σύμφωνα με τις υποδείξεις και τα σχόλια που περιέχονται στο Πρόγραμμα Σπουδών και θα υλοποιηθούν οι δραστηριότητες Δ17 και Δ18.]

Βιβλιογραφία

1. Αναπολιτάνος Δ., Καρασμάνης Β. (1993). Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας, εκδ. τροχαλία
2. Bunt L., Jones P., Bedient J. (1981). Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών, εκδ. Πνευματικού
3. Davis D. Η φύση και η δύναμη των Μαθηματικών
4. Davis-Hersh, (1980). Η μαθηματική εμπειρία, Τροχαλία
5. Εξαρχάκος Γ. (επιστ. υπεύθυνος). (2001) Ευκλείδη «Στοιχεία», τόμοι Ι., ΙΙ., ΙΙΙ., Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα
6. Hilbert D., (1995). Τα θεμέλια της γεωμετρίας, Τροχαλία
7. Θωμαίδης Γ., Πούλος Α. (2000). Διδακτική της ευκλείδειας γεωμετρίας, εκδ. Ζήτη
8. Κολέζα, Ε., (2000). Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών, Leader Books
9. Λάππας, Δ. (2010). Αναλυτικά Προγράμματα με αναφορά στη Σχολική Γεωμετρία, στο ΕΠΕΔΙΜ, Η Γεωμετρία και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση, εκδ. Ζήτη
10. Λάππας, Δ. (2009). Θεμελιώδεις Γεωμετρικές Έννοιες (Μία γενετική προσέγγιση), στο ΕΠΕΔΙΜ, Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Ναθηματικών, εκδ. Ζήτη
11. Levi, B. (2014). Διαβάζοντας τον Ευκλείδη, εκδ. Πατάκης,
12. Mlodinow , L. (2007). Το παράθυρο του Ευκλείδη, εκδ. Κάτοπτρο.
13. Μαρουσάκης Π., (1980). Η αξιωματική του Hilbert και η μέση παιδεία, στο Επιστήμη και Εκπαίδευση 2, Ελληνική Μαθηματικά Εταιρεία, Αθήνα.
14. Waerden, B.L.Van. (2000). Η αφύπνιση της επιστήμης, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
15. Σταμάτης, Ε., (1975). Ευκλείδου Γεωμετρία Στοιχεία, τομ. 1, ΟΕΔΒ,
16. Σταμάτης, Ε., (1957). Ευκλείδου Στερεομετρία Στοιχείων Βιβλία XI., XII., XIII., τομ. 4, ΟΕΔΒ, Αθήνα
17. Struik, D. (1982). Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών, εκδ. «Ι. Ζαχαρόπουλος»
18. Szabo, A. (1973). Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών εκδ Τ.Ε.Ε,
19. Χασάπης Δ. (επιμ.) (2003). Το επιχείρημα και η απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, θεσσαλονίκη

Β ΤΑΞΗ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο} – Τριγωνομετρία

Τι περιέχει το κεφάλαιο της Τριγωνομετρίας και πως το αυτό περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερες γνώσεις των μαθητών;

Οι μαθητές στο Γυμνάσιο έχουν μελετήσει πολλές έννοιες της τριγωνομετρίας. Έχουν ορίσει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο και τους έχουν γενικεύσει για οποιαδήποτε γωνία, σε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων. Έχουν ακόμα γνωρίσει την έννοια του μοναδιαίου (τριγωνομετρικού κύκλου), ως εργαλείου για την απλοποίηση του τύπου υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας σε σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων. Έχουν αποδείξει και χρησιμοποιήσει τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες για την απόδειξη άλλων ταυτοτήτων και τους Νόμους ημιτόνων-συνημιτόνων για την επίλυση τριγώνων.

Στην τάξη αυτή θα μελετήσουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας, με την εισαγωγή των ακτινίων ως μονάδας μέτρησης τόξων και γωνιών. Θα χρησιμοποιήσουν τον τριγωνομετρικό κύκλο για την αναγωγή του υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας, στους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας του 1^{ου} τεταρτημορίου. Θα μάθουν να επιλύουν βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις αλλά και τριγωνομετρικές εξισώσεις που καταλήγουν στις βασικές. Τέλος θα μελετήσουν τις βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις και θα επεκτείνουν τη μελέτη τους και στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις της μορφής:

$f(x) = ρ·ημ(ωx) + β$ και $g(x) =ρ·συν(ωx) + β$, όπου $ρ, β, ω \in R$.

Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο της Τριγωνομετρίας;

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις επειδή περιγράφουν επαναλαμβανόμενες διαδικασίες, χρησιμοποιούνται στη μοντελοποίηση περιοδικών φαινομένων, όπως η ταλάντωση, το κύμα, το ηλεκτρικό ρεύμα, οι τηλεπικοινωνίες κ.ά. Αποτελούν επιπλέον και ένα σημαντικό εργαλείο το οποίο χρησιμοποιείται για να μελετηθεί μια ποικιλία θεμάτων στα μαθηματικά. Για χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, στην τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών στις παραμετρικές εξισώσεις των κωνικών τομών, κ.ά.

Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο της Τριγωνομετρίας;

- Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης τόξων και γωνιών.

- Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οποιασδήποτε γωνίας, μπορούν να αναχθούν σε υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας του $1^{ου}$ τεταρτημορίου.
- Η περιοδικότητα είναι βασικό χαρακτηριστικό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
- Η τριγωνομετρία βοηθάει στην αλγεβροποίηση γεωμετρικών ζητημάτων, δίνοντας έτσι ένα πολύ δυνατό νέο εργαλείο για τη γεωμετρία.

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές

Ε1 Τι ονομάζουμε ακτίνιο και ποια σχέση συνδέει τις μοίρες και τα ακτίνια ως μονάδες μέτρησης τόξων και γωνιών;

Ε2 Ποια σχέση συνδέει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών που είναι αντίθετες, που έχουν άθροισμα 180^o, που διαφέρουν κατά 180^o και των γωνιών με άθροισμα 90^o.

Ε3 Ποιοι είναι οι τύποι που χρησιμοποιούμε για την αναγωγή του υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας, στον υπολογισμό τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας του $1^{ου}$ τεταρτημορίου του;

Ε4 Ποιος είναι ο γενικός τύπος των λύσεων εξισώσεων της μορφής: ημx = α, συνx = α, εφx = α, σφx = α;

Ε5 Ποιο είναι το βασικό χαρακτηριστικό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων;

Ε6 Πώς ερμηνεύονται οι γενικοί τύποι των λύσεων των τριγωνομετρικών εξισώσεων στο πλαίσιο των τριγωνομετρικών συναρτήσεων;

Ε7 Ποιος είναι ο ρόλος των παραμέτρων ρ, β,ω ∈ R στις γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων της μορφής : f(x) = ρ·ημ(ωx) + β και g(x) =ρ·συν(ωx) + β ;

Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά το τέλος της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να :

Μ1 Να ορίζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο και να γνωρίζουν τον τρόπο που παριστάνονται σ' αυτόν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας σε μοίρες ή ακτίνια.

Μ2 Να χρησιμοποιούν το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης τόξων και γωνιών (στόχοι Π.Σ, 1.1.1)

Μ3 Να διατυπώνουν και να χρησιμοποιούν τις σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών που είναι αντίθετες, που έχουν άθροισμα 180^o (παραπληρωματικές γωνίες), που διαφέρουν κατά 180^o και των γωνιών με άθροισμα 90^o (συμπληρωματικές γωνίες).

(στόχοι Π.Σ, 1.2.1)

M4 Να γνωρίζουν τις σχέσεις που χρησιμοποιούνται για την αναγωγή του υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας στον υπολογισμό τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας του $1^{ου}$ τεταρτημορίου και να τις χρησιμοποιούν. (στόχοι Π.Σ, 1.3.2)

M5 Να επιλύουν τις βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις. (στόχοι Π.Σ, 1.3.1)

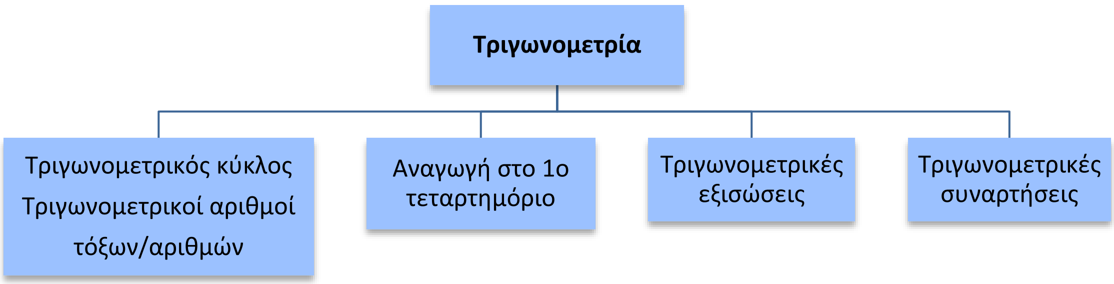
M6 Να χρησιμοποιούν τους γενικούς τύπους των λύσεων για την επίλυση εξισώσεων που ανάγονται σε βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις. (στόχοι Π.Σ, 1.4.2 και 1.4.3)

M7 Να μελετούν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και να αναγνωρίζουν το ρόλο των παραμέτρων ρ, β, ω ∈ R στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις της μορφής $f(x) = ρ·ημ(ωx)+ β$ και $g(x) =ρ·συν(ωx)+β$. (στόχοι Π.Σ, 1.4.4)

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου της Τριγωνομετρίας

Όσα αναφέρονται στη συνέχεια είναι προτεινόμενα ώστε ο διδάσκων να διαθέτει μία οργανωμένη πρόταση διδασκαλίας.

Κατά αρχήν καλό θα είναι ο διδάσκων να διαθέτει μία γενική εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η διδασκαλία του κεφαλαίου όπως η παρακάτω.



Με βάση τα μαθησιακά αποτελέσματα και τα ερωτήματα στα οποία θα πρέπει να μπορεί να απαντά ο μαθητής μετά τη διδασκαλία της Τριγωνομετρίας, θα επισημαίναμε ότι:

- **Τριγωνομετρικός κύκλος – Τριγωνομετρικοί αριθμοί τόξων / αριθμών**

1) Στην προηγούμενη τάξη οι μαθητές χρησιμοποίησαν τον τριγωνομετρικό κύκλο για να απλοποιήσουν τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών γωνιών σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Αφού γίνει μια επανάληψη στην έννοια του τριγωνομετρικού κύκλου, χτίζοντας επάνω στην προγενέστερη εμπειρία των μαθητών, επιδιώκεται:

- Να αντιληφθούν την ανάγκη, που τον δημιούργησε και κατ’ επέκταση την ανάγκη δημιουργίας και χρήσης μαθηματικών εργαλείων για την απλούστευση υπολογισμών.
- Να αναδειχθούν τα πλεονεκτήματα του τριγωνομετρικού κύκλου στον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας.
- Να αξιοποιήσουν την έννοια της θετικής και αρνητικής φοράς κίνησης στον τριγωνομετρικό κύκλο για να κατανοήσουν τις θετικές– αρνητικές γωνίες.

Να τονιστεί ακόμα ότι :

- αρχή μέτρησης των τόξων (γωνιών) στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι το σημείο τομής του με τον άξονα x΄x, είτε κατά τη θετική φορά (αριστερόστροφα) οπότε έχουμε θετικά τόξα (γωνίες) είτε κατά την αρνητική φορά (δεξιόστροφα) οπότε έχουμε αρνητικά τόξα (γωνίες).
- δεν αρκεί ένας κύκλος να έχει ακτίνα ρ=1 για να λέγεται τριγωνομετρικός, θα πρέπει επιπλέον να έχει οριστεί η θετική φορά, δηλαδή ο τριγωνομετρικός κύκλος είναι ένας προσανατολισμένος κύκλος με ακτίνα ρ=1 και ως τέτοιον τον χρησιμοποιούμε, ακόμα και αν δεν σημειώνεται πάνω του, το σχετικό σύμβολο.

2) Οι μαθητές γνωρίζουν από προηγούμενες τάξης το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης τόξων. Ο εκπαιδευτικός, στηριζόμενος σ' αυτή τη γνώση, ορίζει το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης των γωνιών, εξηγεί γιατί στον τριγωνομετρικό κύκλο μπορούμε αντί να μετράμε τις γωνίες, να μετράμε τα αντίστοιχα τόξα τους. Στη συνέχεια με βάση τον ορισμό του ακτινίου οι μαθητές καταλήγουν στη σχέση που συνδέει τις μοίρες με τα ακτίνια, ως μονάδες μέτρησης των γωνιών.
Να δοθεί έμφαση στην έννοια του ακτινίου, στη σύνδεσή του με τις μοίρες και την αναπαράστασή του στον τριγωνομετρικό κύκλο καθώς και στην «κατάληξη» της τελικής πλευράς μιας γωνίας πάνω σε αυτόν, για τον προσδιορισμό του προσήμου των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας.

Στο νέο πλαίσιο - των ακτινίων οι μαθητές πρέπει επιπλέον να μπορούν να μεταφράζουν όσα ήδη γνωρίζουν για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Να γίνουν παραδείγματα, στα οποία το μέτρο του τόξου εκφράζεται ως πολλαπλάσιο του π, (π.χ να υπολογισθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών -11π rad, 11/2π rad) αλλά και παραδείγματα στα οποία το μέτρο του τόξου εκφράζεται ως δεκαδικός αριθμός (π.χ 0,5π, 1,5π, ...)

(Παραδείγματα δραστηριοτήτων οι Δ1, Δ2 του Π.Σ)

Να τονιστεί ότι υπάρχουν άπειρες γωνίες στον τριγωνομετρικό κύκλο που η τελική τους πλευρά ταυτίζεται. Οι τελικές πλευρές των γωνιών αυτών τέμνουν τον κύκλο στο ίδιο σημείο. Αν μία από αυτές τις γωνίες έχει μέτρο θ ακτίνια, όλες οι άλλες θα έχουν μέτρα 2κπ+θ, $\kappa \in \mathbb{Z}$ ακτίνια.
Την αλγεβρική σχέση που συνδέει τα μέτρα των γωνιών με την ίδια τελική πλευρά (ή τα τόξα με το ίδιο πέρας) θα τα αξιοποιήσουν στα επόμενα μαθήματα οι μαθητές για να κατανοήσουν την περιοδικότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και να λύσουν τριγωνομετρικές εξισώσεις.

Προτεινόμενες δραστηριότητες

α) i) Η γωνία με μέτρο $\frac{3\pi}{2}$ έχει την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία $-\frac{\pi}{2}$. (Σ - Λ)

ii) Γωνία με μέτρο 60^o έχει την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία 240^o. (Σ - Λ)

β) Να βρεθούν πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο τα σημεία που ορίζονται από την τελική πλευρά της γωνίας : $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. Ποιανού τετραπλεύρου είναι κορυφές;

γ) Να βρεθούν πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο τα σημεία στα οποία οι τελικές πλευρές των γωνιών κπ , $\kappa \in Z$ τέμνουν τον κύκλο και στη συνέχεια να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών αυτών.

δ) Αν το σημείο Μ($\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$) είναι σημείο της τελικής πλευράς μιας γωνίας ω να δείξετε ότι :

i) το Μ είναι σημείο του τριγωνομετρικού κύκλου

ii) να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 2κπ+ ω , $\kappa \in Z$

iii) σε ποιό τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας ω;

ε) Στον τριγωνομετρικό κύκλο τοποθετήστε τις γωνίες $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$.

i) Ποιές από τις γωνίες αυτές έχουν το ίδιο ημίτονο και ποιές το ίδιο συνημίτονο;

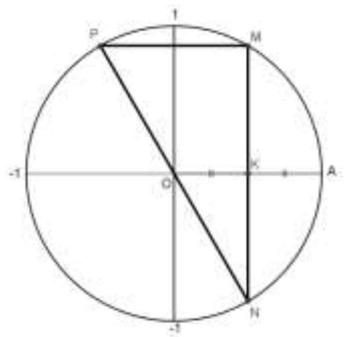
ii) Ποιές από τις γωνίες αυτές έχουν την ίδια εφαπτομένη και ποιές την ίδια συνεφαπτομένη;

- **Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο**

Στόχος της ενότητας είναι να γνωρίζουν οι μαθητές τις σχέσεις που συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών, που είναι αντίθετες, που έχουν άθροισμα 180^o (παραπληρωματικές γωνίες), που διαφέρουν κατά 180^o και των γωνιών με άθροισμα 90^o (συμπληρωματικές γωνίες) και να τις χρησιμοποιούν προκειμένου να ανάγουν τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας, στον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας από 0^o μέχρι 90^o .

Η αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο προτείνεται να γίνεται, για όλες τις περιπτώσεις των γωνιών που εξετάζονται, με χρήση του τριγωνομετρικού κύκλου, ώστε να αποφευχθεί η μηχανιστική απομνημόνευση τύπων.

<u>Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>



Η μεσοκάθετος της ακτίνας ΟΑ του τριγωνομετρικού κύκλου του διπλανού σχήματος, τέμνει τον κύκλο στα σημεία Μ και Ν.

Αν οι γωνίες ΑΟΜ=ΜΟΡ=60^o:

α) Δείξτε ότι τα σημεία Μ, Ρ και Ν είναι σημεία της τελικής πλευράς της γωνίας $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ και $\frac{5\pi}{3}$ αντίστοιχα.

β) Να υπολογίσετε τα ημίτονα και τα συνημίτονα αυτών των γωνιών.

- **Τριγωνομετρικές εξισώσεις**

1) Στόχος της ενότητας αυτής είναι να μάθουν οι μαθητές, να επιλύουν τις τριγωνομετρικές εξισώσεις της μορφής ημx=α, συνx=α, εφx = α, σφx = α, με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου και να καταλήγουν στους γενικούς τύπους των λύσεών τους. Επιπλέον να χρησιμοποιούν τους γενικούς τύπους των λύσεων τους για την επίλυση εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις της παραπάνω μορφής.

Η επίλυση των εξισώσεων να εξηγηθεί με τη βοήθεια γραφικών παραστάσεων των γωνιών αφού με τον τρόπο αυτό γίνεται καλύτερα κατανοητή η πολλαπλότητα των λύσεων και η παραγωγή των τύπων των λύσεων.

Να τονιστεί ότι η λύση μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης περιλαμβάνει δύο μέρη:

1ο αναζητούμε μια γωνία (ένα τόξο) το οποίο έχει τον δοθέντα τριγωνομετρικό αριθμό.

2ο αν γνωρίζουμε τη γωνία (ή το τόξο) αναζητούμε όλες τις άλλες λύσεις, δηλαδή όλες τις άλλες γωνίες (τόξα) οι οποίες έχουν τον δοθέντα τριγωνομετρικό αριθμό.

(Παράδειγμα δραστηριότητας η Δ3 του Π.Σ)

2) Στη συνέχεια να δοθούν προς λύση, παραδείγματα εξισώσεων που ανάγονται σε βασικές εξισώσεις. Να τονιστεί ότι η επίλυση αυτών των τριγωνομετρικών εξισώσεων στηρίζεται, στο μετασχηματισμό τους σε κάποια από τις βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις (ή ένα σύστημα βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων), με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, των τριγωνομετρικών τύπων και των ιδιοτήτων των πράξεων.

- **Τριγωνομετρικές συναρτήσεις**

1) Πριν τη μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων προτείνεται να συζητηθούν στην τάξη παραδείγματα, που αναφέρονται σε περιοδικά φαινόμενα, τα οποία εξελίσσονται και επαναλαμβάνονται αναλλοίωτα σε σταθερά χρονικά διαστήματα. Να τονιστεί ότι ένα περιοδικό φαινόμενο χαρακτηρίζεται από την περίοδο του (Τ), τον ελάχιστο χρόνο δηλαδή που απαιτείται για να εκτελεστεί ένας πλήρης κύκλος του φαινομένου.

Στη διεύθυνση : http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/11126 μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με τη μελέτη ενός περιοδικού φαινομένου (ένα αβαρές ελατήριο από το οποίο κρέμεται μια μάζα m, ταλαντώνεται).

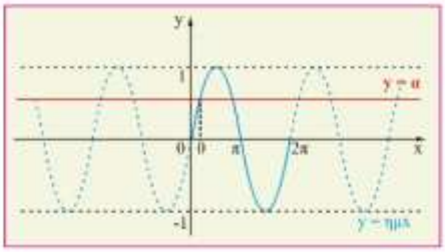
2) Στη συνέχεια αφού δοθεί ο ορισμός της περιοδικής συνάρτησης, οι μαθητές, μελετούν τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη αναγνωρίζοντας την περιοδικότητα ως βασικό χαρακτηριστικό τους και χαράσσουν τις γραφικές τους παραστάσεις. Για τη χάραξη των γραφικών παραστάσεων από το Π.Σ προτείνεται η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας.

(Παράδειγμα δραστηριότητας Δ4 του Π.Σ)

Στη διεύθυνση http://photodentro.edu.gr/ugc/r/8524/104 έχει αναρτηθεί από το ΙΤΥΕ / Εκπαιδευτική Πύλη Υ.ΠΑΙ.Θ «Η τριγωνομετρική συνάρτηση f(x) = ημx», η οποία αποτελεί ένα σενάριο για τη διδασκαλία της συνάρτησης f(x)=ημx (η γραφική της παράσταση, ο πίνακας μεταβολής, η μονοτονία και τα ακρότατα της, η περιοδικότητα της σε διάστημα πλάτους 2π και οι συμμετρίες της). Περιλαμβάνεται ακόμα και σχέδιο μαθήματος - φύλλο εργασίας με χρήση Η/Υ για μαθητές.

Από τη γραφική παράσταση μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης πρέπει οι μαθητές να εξάγουν συμπεράσματα για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, το σύνολο τιμών της, τη μονοτονία, τα ακρότατα, την περίοδο, τις συμμετρίες της συνάρτησης.

3) Στο πλαίσιο των τριγωνομετρικών συναρτήσεων οι μαθητές ερμηνεύουν τις λύσεις τριγωνομετρικών εξισώσεων που μελέτησαν στην προηγούμενη ενότητα, ως τα σημεία τομής της συνάρτησης με μια ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x.



Οι τριγωνομετρικές εξισώσεις, λόγω της περιοδικότητας που εμφανίζουν οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, έχουν άπειρες λύσεις.

Για παράδειγμα η εξίσωση ημx=α ($1\leq α \leq -1$) έχει άπειρες λύσεις όσες είναι και οι τετμημένες των σημείων τομής της ευθείας y=α με την καμπύλη της ημιτονοειδούς συνάρτησης (σχημα).

Στη διεύθυνση: http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5141 μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με την εξίσωση ημx = α.

(Παράδειγμα δραστηριότητας η Δ5 του Π.Σ)

4) Μελετούν συναρτήσεις της μορφής f(x) = ρ·ημ(ωx) + β και g(x) =ρ·συν(ωx) + β (όπου ρ, β, ω∈ R) αναγνωρίζοντας το ρόλο των παραμέτρων ρ, β, ω και χαράζουν τη γραφική τους παράσταση.

Προτεινόμενη δραστηριότητα

Δίνεται η συνάρτηση f(x)= 2α+1+2ημ(x/2) με α>0. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα y΄y στο 2.

α) Να βρεθεί ο αριθμός α,

β) Να βρεθεί η περίοδος, καθώς και τα σημεία στα οποία παίρνει η συνάρτηση την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της

γ) Να γίνει πίνακας με τις τιμές της συνάρτησης και η η γραφική παράσταση στο διάστημα [-π, 3π]

Πιθανές δυσκολίες – Παρανοήσεις

- Οι μαθητές δυσκολεύονται πολλές φορές στο να εξετάσουν αν μια συνάρτηση όπως είναι η $f(x)=\eta\mu\frac{x}{2}+\eta\mu\frac{x}{3}$ είναι περιοδική και να βρουν την περίοδο.
- Δυσκολεύονται στη χάραξη της γραφικής παράστασης μιας ημιτονοειδούς καμπύλης όταν η περίοδος δεν είναι 2π.
- Στους τύπους επίλυσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων , για παράδειγμα $\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6}x \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6} \end{cases}$, παραβλέπουν το γεγονός ότι ο κ είναι ακέραιος.

  Για το λόγο αυτό να ζητείται από τους μαθητές να υπολογίζουν τις λύσεις που περιέχονται σε συγκεκριμένο διάστημα, π.χ. στο διάστημα [3π , 5π]

Αξιοποίηση της Τεχνολογίας στη διδασκαλία του κεφαλαίου της Τριγωνομετρίας;

Σε πολλές ιστοσελίδες υπάρχουν ενδιαφέρουσες δραστηριότητες. Εκτός από τα παραδείγματα που προαναφέρθηκαν είναι και τα εξής:

- Η εξίσωση συνχ=α

Μικροπείραμα για την ανακάλυψη των λύσεων της εξίσωσης συνχ=α.
http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5256

- Η εξίσωση εφχ=α

Μικροπείραμα για την ανακάλυψη των λύσεων της εξίσωσης εφχ=α.

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5143

- Βρίσκοντας τη λύση μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης από τομές τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Μικροπείραμα για τη γραφική επίλυση μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης.

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5260

Τι περιέχει το κεφάλαιο των Πολυωνυμικών και ρητών εξισώσεων και ανισώσεων και πως το περιεχόμενο αυτό συνδέεται με προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών;

Οι μαθητές σε προηγούμενες τάξεις έχουν διδαχθεί εξισώσεις και ανισώσεις $1^{ου}$ και $2^{ου}$ βαθμού, καθώς και τις πολυωνυμικές συναρτήσεις $f(x)=αx+β$ και $g(x)=αx^2+βx+γ$.

Στην τάξη αυτή επεκτείνουν τις γνώσεις τους μελετώντας πολυωνυμικές συναρτήσεις, εξισώσεις και ανισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του $2^{ου}$ και επιλύουν εξισώσεις προσεγγιστικά.

Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο των Πολυωνυμικών και ρητών εξισώσεων και ανισώσεων;

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις και οι πολυωνυμικές εξισώσεις είναι σημαντικές διότι χρησιμοποιούνται σε όλα σχεδόν τα Μαθηματικά του Λυκείου όπως είναι οι Πρόοδοι, οι Λογάριθμοι η Τριγωνομετρία, η Αναλυτική Γεωμετρία, αλλά και σε κλάδους των Ανώτερων Μαθηματικών όπως είναι η Αριθμητική Ανάλυση και η Συναρτησιακή Ανάλυση. Μεγάλη επίσης είναι η σημασία των πολυωνυμικών συναρτήσεων και εξισώσεων και σε άλλες επιστήμες όπως είναι η Βιολογία, η Οικονομία, η Κρυπτογραφία και η Χημεία, αφού με τη βοήθεια τους επιτυγχάνεται η μοντελοποίηση πολλών φαινομένων και καταστάσεων των επιστημών αυτών.

Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες των πολυωνυμικών και ρητών εξισώσεων και ανισώσεων;

- Τα σημεία τομής μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$ με τον άξονα των τετμημένων είναι οι λύσεις της πολυωνυμικής εξίσωσης $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0=0$
- Η παραγοντοποίηση πολυωνύμου οδηγεί σε αλγεβρική λύση της αντίστοιχης πολυωνυμικής εξίσωσης.
- Αν η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης συνδέει δυο σημεία εκατέρωθεν του άξονα x΄x , τότε τέμνει τον άξονα x΄x.
- Αν υψώσουμε και τα δυο μέλη μιας εξίσωσης σε μια δύναμη, δεν προκύπτει πάντα ισοδύναμη εξίσωση.
- Οι τιμές των παραστάσεων $\frac{A(x)}{B(x)}$ και $A(x)\cdot B(x)$ με $B(x)\neq 0$ είναι ομόσημες.

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Ε1 Ποιά συνάρτηση λέγεται πολυωνυμική και ποια ρητή;

Ε2 Πως μπορούμε από τη γραφική παράσταση, να εντοπίσουμε τις ρίζες εξισώσεων της μορφής $f(x)=0$ και $f(x)=g(x)$ και ανισώσεων της μορφής $f(x)>0$ και $f(x)>g(x)$;

Ε3 Τι αποτελούν για μια εξίσωση οι τετμημένες των σημείων τομής μιας συνάρτηση με τον άξονα x'x και τι οι τετμημένες των σημείων τομής δύο συναρτήσεων;

Ε4 Πως επιλύουμε αλγεβρικά μια πολυωνυμική εξίσωση.

Ε5 Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης περνά από δύο σημεία που βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x΄x τότε τι συμπεραίνουμε για τη συνάρτηση;

Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε από τη διδασκαλία του κεφαλαίου ;

Μ1 Να ορίζουν τις πολυωνυμικές συναρτήσεις και να συνδέουν τα χαρακτηριστικά τους με τα χαρακτηριστικά των αντίστοιχων πολυωνύμων.(στόχοι Π.Σ, 2.1.1)

Μ2 Να ορίζουν τις ρητές συναρτήσεις και να προσδιορίζουν το πεδίο ορισμού τους. (στόχοι Π.Σ, 2.1.1)

Μ3 Να διερευνούν μια πολυωνυμική συνάρτηση ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες, με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης. (στόχοι Π.Σ, 2.1.2)

Μ4 Να εντοπίζουν από γραφικές παραστάσεις, τις λύσεις εξισώσεων της μορφής f(x)=0 και f(x)=g(x) και ανισώσεων της μορφής f(x)>0 και f(x)>g(x).(στόχοι Π.Σ, 2.1.3)

Μ5 Να επιλύουν πολυωνυμικές και απλές ρητές εξισώσεις και ανισώσεις με παραγοντοποίηση. (στόχοι Π.Σ, 2.2.1 και 2.3.1)

Μ6 Να συνδέουν τη λύση μιας εξίσωσης με τις τετμημένες των σημείων τομής μιας συνάρτησης με τον άξονα x΄x όσο και με τις τετμημένες των σημείων τομής δύο συναρτήσεων.(στόχοι Π.Σ, 2.2.2 και)

Μ7 Να επιλύουν προβλήματα που μοντελοποιούνται με πολυωνυμικές ή ρητές συναρτήσεις (στόχοι Π.Σ, 2.2.3)

Μ8 Να βρίσκουν τις ρίζες πολυωνυμικής συνάρτησης με προσέγγιση.(στόχοι Π.Σ, 2.2.4)

Μ9 Να λύνουν εξισώσεις με ριζικά. (στόχοι Π.Σ, 2.4.1)

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου των ολυωνυμικών και ρητών εξισώσεων και ανισώσεων

Όσα αναφέρονται στη συνέχεια είναι προτεινόμενα ώστε ο διδάσκων να διαθέτει μία οργανωμένη πρόταση διδασκαλίας.

Κατά αρχήν καλό θα είναι ο διδάσκων να διαθέτει μία γενική εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η διδασκαλία του κεφαλαίου όπως η παρακάτω.

Πολυωνυμικές και ρητές εξισώσεις και ανισώσεις

- Πολυωνυμικές και ρητές εξισώσεις
- Πολυωνυμικές και ρητές ανισώσεις
- Εξισώσεις με ριζικά

Με βάση τα μαθησιακά αποτελέσματα και τα ερωτήματα στα οποία θα πρέπει να μπορεί να απαντά ο μαθητής μετά τη διδασκαλία των Εκθετικών συναρτήσεων και Λογαρίθμων, θα επισημαίναμε ότι:

- **Πολυωνυμικές και ρητές Συναρτήσεις**

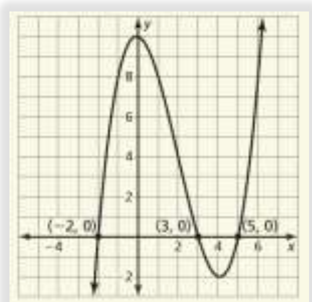
1) Στόχος ενότητας αυτής είναι οι μαθητές να διερευνήσουν τα χαρακτηριστικά μιας πολυωνυμικής συνάρτησης βαθμού μεγαλύτερου του 2^{ου} (βαθμός, συντελεστές, ρίζες) συνδέοντάς τα με τα γνωστά σε αυτούς χαρακτηριστικά των πολυωνύμων, που μελέτησαν στο Γυμνάσιο.

Επιπλέον μέσω της γραφικής παράστασης, να διερευνήσουν, συγκεκριμένες πολυωνυμικές συναρτήσεις, ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες τους.

Η κατανόηση των συνδέσεων μεταξύ των συναρτήσεων και των γραφημάτων τους θεωρείται θεμελιώδης στην ανάπτυξη νοήματος για πολλές αλγεβρικές έννοιες (Knuth, E. J. ,2000).

Η χρήση λογισμικού, σύμφωνα με το Π.Σ, διευκολύνει τη χάραξη γραφικών παραστάσεων.

Επειδή η χρήση Η/Υ στην τάξη δεν είναι πάντα εφικτή, προτείνεται στην περίπτωση αυτή να δοθούν τυπωμένες στο χαρτί, οι συναρτήσεις τις οποίες θα κληθούν οι μαθητές να διερευνήσουν. Για παράδειγμα :



<u>Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>

Η καμπύλη του διπλανού σχήματος είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο R.

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης :

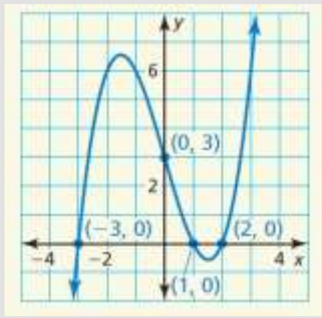
α) Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

β) Προσδιορίστε τα ακρότατα της συνάρτησης.

γ) Προσδιορίστε τα σημεία τομής της με τους άξονες.

2) Οι μαθητές έμαθαν στην προηγούμενη τάξη να προσδιορίζουν τις λύσεις μιας συνάρτησης 2^{ου} βαθμού ως τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τον άξονα x'x. Με τον ίδιο τρόπο, μέσω των γραφικών παραστάσεων, εντοπίζουν τις λύσεις εξισώσεων της μορφής $f(x)=0$ και $f(x)=g(x)$ και ανισώσεων της μορφής $f(x)>0$ και $f(x)>g(x)$.

(Παράδειγμα δραστηριότητας η Δ9 του Π.Σ)



Προτεινόμενη δραστηριότητα

Η συνάρτηση που απεικονίζεται στο διπλανό γράφημα είναι της μορφής :

$f(x)= \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)$, όπου ρ_1, ρ_2, ρ_3, οι ρίζες της.

Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, να προσδιορίσετε τις ρίζες της συνάρτησης και τον τύπο της.

- **Πολυωνυμικές και ρητές εξισώσεις**

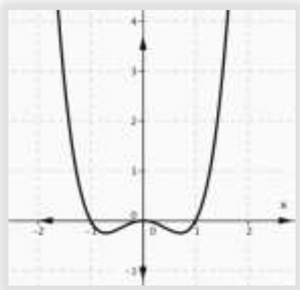
1) Στόχος της παραγράφου είναι οι μαθητές να επιλύουν πολυωνυμικές εξισώσεις με παραγοντοποίηση. Στην αλγεβρική επίλυση εξισώσεων να δοθεί έμφαση στο ρόλο της παραγοντοποίησης (κοινός παράγοντας, ομαδοποίηση, συμπλήρωση τετραγώνου, διαφορά τετραγώνων, κ.τ.λ.), χωρίς την ανάπτυξη πολύπλοκων τεχνικών παραγοντοποίησης. Είναι σημαντικό να αναδειχθεί η σύνδεση των πρωτοβάθμιων παραγόντων ενός πολυωνύμου με τις ρίζες του πολυωνύμου.

Προτεινόμενη δραστηριότητα

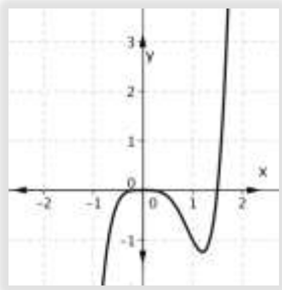
Μερικές πολυωνυμικές εξισώσεις έχουν απλές ρίζες που ανά δύο είναι διαφορετικές. Άλλες πάλι έχουν πολλαπλές (διπλές, τριπλές, …) ρίζες.

Δίνονται οι πολυωνυμικές συναρτήσεις $f(x)=x^4-x^2$, $g(x)= x^3+x^2-2x$, $h(x)=2x^5-3x^4$, και οι γραφικές παραστάσεις των σχημάτων (1), (2) και (3)

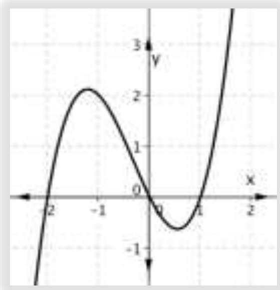
i) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=0$, $g(x)=0$ και $h(x)=0$
ii) Να αντιστοιχίσετε κάθε πολυωνυμική συνάρτηση στη γραφική της παράσταση.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

(iii) Να περιγράψτε τη μονοτονία κάθε συνάρτησης. Τι παρατηρείτε για τα σημεία στα οποία μια συνάρτηση έχει πολλαπλή ρίζα;

2) Είναι σημαντικό οι μαθητές να συνδέουν τη λύση μιας εξίσωσης τόσο με τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τον άξονα x΄x, όσο και με τις τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων δυο συναρτήσεων.

Ένα ερώτημα στο οποίο πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές είναι : *Ποιά διαδικασία θα μπορούσε να σας οδηγήσει να εξακριβώσετε αν οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων έχουν κοινά σημεία;*

Στη διεύθυνση: http://photodentro.edu.gr/lor/handle/8521/1876?locale=en, με το μικροπείραμα με τίτλο: "Τι κοινό μπορεί να έχουμε; " - Ρώτησε η Cf την Cg, μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με τον εντοπισμό των συντεταγμένων των σημείων τομής των συναρτήσεων f(x) =αx^2+βx+γ και g(x)=κx^3 +λ, για διάφορες τιμές των παραμέτρων τους, καθώς και τις τετμημένες είτε των κοινών σημείων των Cf , Cg , είτε αυτών που η Cf βρίσκεται πάνω από την Cg καθώς και την αλγεβρική ερμηνεία.

Προβλήματα και δραστηριότητες που μοντελοποιούνται με πολυωνυμικές ή και ρητές εξισώσεις βοηθούν τους μαθητές να εμπεδώσουν τις έννοιες που διδάχθηκαν.

(Παραδείγματα δραστηριοτήτων οι Δ10, Δ11, Δ12 του Π.Σ)

3) Στόχος της ενότητας είναι να βρίσκουν οι μαθητές τη ρίζα μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, με προσέγγιση (μέσω διαισθητικής κατανόησης του θεωρήματος Bolzano).

(Παράδειγμα δραστηριότητας η Δ13 του Π.Σ)

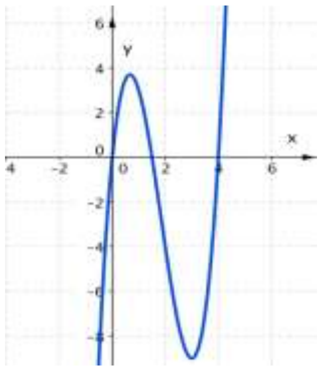
Αυτός ο στόχος θα μπορούσε να προσεγγισθεί ξεκινώντας από την ερώτηση: *Όταν δυσκολεύεστε να λύσετε μια εξίσωση και ενδιαφέρεστε αν έχει ρίζα σε ένα διάστημα, τι μπορείτε να δοκιμάσετε;*

Η διαδικασία διαδοχικών προσεγγίσεων μιας ρίζας μιας εξίσωσης είναι σημαντική τόσο γιατί αντιμετωπίζονται περισσότερες περιπτώσεις εξισώσεων για τις οποίες δεν είναι δυνατή ή είναι δύσκολη η επίλυσή τους με τις γνωστές αλγεβρικές μεθόδους. Επιπλέον προετοιμάζονται οι μαθητές για την κατανόηση του θεωρήματος του Bolzano που είναι το βασικό θεώρημα που συναντάνε στην Ανάλυση και το οποίο δεν το συνδέουν με την προσπάθεια ενεύρεσης ριζών μιας πολυωνυμικής συνάρτησης με προσέγγιση. Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος δίνει νόημα στην αλγεβρική έκφρασή του.

- **Πολυωνυμικές και ρητές ανισώσεις**

Στόχος της ενότητας είναι να μπορούν οι μαθητές να επιλύουν πολυωνυμικές ανισώσεις με παραγοντοποίηση και να συνδέουν την ανίσωση με τη γραφική παράσταση μιας ή δύο συναρτήσεων. Είναι σημαντικό η λύση της ανίσωσης να συνδέεται με το πρόσημο των τιμών της αντίστοιχης πολυωνυμικής συνάρτησης.

Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να επιλύουν προβλήματα που μοντελοποιούνται με πολυωνυμικές ή και ρητές ανισώσεις και να τα διερευνούν, όπως το παρακάτω.



Προτεινόμενη δραστηριότητα

Ο όγκος ενός κουτιού που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου δίνεται από τον τύπο $V(x)=2x^3-11x^2+12x$, όπου x το μήκος του κουτιού σε m.

Η γραφική παράσταση του όγκου V(x) δίνεται στο διπλανό σχήμα.

Για ποιές τιμές του x ο τύπος έχει νόημα;

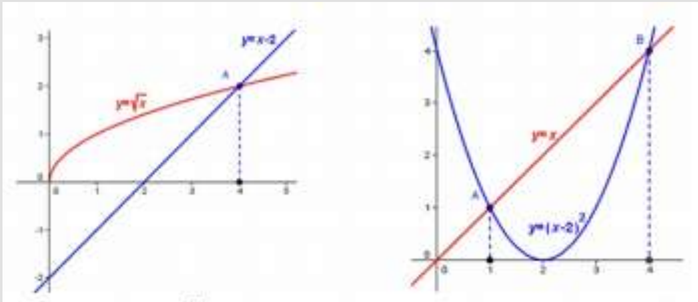
Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

- **Εξισώσεις με ριζικά**

Οι μαθητές πρέπει να ασκηθούν να λύνουν απλές εξισώσεις με ριζικά (άρρητες εξισώσεις).

(Παράδειγμα δραστηριότητας η Δ14 του Π.Σ)

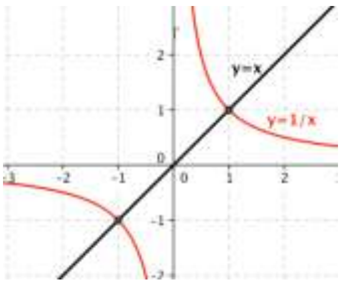
Να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι η ύψωση των μελών μιας εξίσωσης στο τετράγωνο δεν οδηγεί πάντα σε ισοδύναμη εξίσωση. Αυτό μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια των παρακάτω γραφικών παραστάσεων

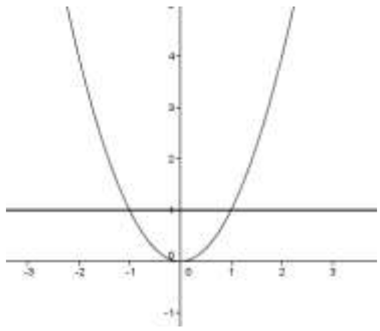


Γραφική λύση της $\sqrt{x}=x-2$ Γραφική λύση της $x=(x-2)^2$

Δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στην κατανόηση των Πολυωνυμικών και ρητών εξισώσεων και ανισώσεων

- Στην επίλυση ρητών ανισώσεων, για παράδειγμα στην $\frac{1}{x}>x$, οι μαθητές κάνουν απαλοιφή των παρονομαστών, χωρίς να λάβουν υπόψη το πρόσημο του παρονομαστή x και θεωρούν ότι η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την ανίσωση $x^2<1$. Αν όμως αντιμετωπίσουν το πρόβλημα και γραφικά θα διαπιστώσουν το λάθος τους.





- Στην επίλυση εξισώσεων με ριζικά δεν επαληθεύουν αν οι ρίζες που βρήκαν είναι και ρίζες της αρχικής.
- Αδυνατούν να μεταβούν από τη γλώσσα ενός προβλήματος στη μαθηματική γλώσσα και να κατασκευάσουν την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση ή ανίσωση που θα τους οδηγήσει στην επίλυσή του.

Αξιοποίηση της Τεχνολογίας στη διδασκαλία του κεφαλαίου

Τις τελευταίες δεκαετίες η μελέτη των συναρτήσεων και των αναπαραστάσεων τους βρίσκεται στο επίκεντρο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι γραφικές αναπαραστάσεις είναι τα εργαλεία με το οποία μπορούμε να αποδώσουμε νόημα στις λεκτικές-συμβολικές αλγεβρικές αναπαραστάσεις. Μέσα σ’ αυτό το πλαίσιο οι

Η/Υ μπορούν να εμπλουτίσουν την διδασκαλία των συναρτήσεων με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Ομως ο εμπλουτισμός της αναπαράστασης, η λειτουργικότητα και η ανατροφοδότηση που μπορούν να επιτευχθούν με τη νέα τεχνολογία, δεν μειώνουν τη σημασία του φορμαλισμού στην μαθηματική έκφραση (Kynigos et al, 1997). Αντιθέτως, όπως οι συγγραφείς υποστηρίζουν, η νέα τεχνολογία μπορεί ταυτόχρονα να ενδυναμώσει και τα δύο είδη μαθηματικών αναπαραστάσεων και να κάνει εφικτή την εστίαση στην κατασκευή παιδαγωγικών περιβαλλόντων, με στόχο την κατασκευή μαθηματικού νοήματος. Αυτή τη θέση εκφράζει και ο Heid (1996, σελ 239) όταν λέει πως «Η συναρτησιακή προσέγγιση της αλγεβρικής σκέψης.....προτείνει μια μελέτη της άλγεβρας που επικεντρώνει στην ανάπτυξη εμπειριών με συναρτήσεις και οικογένειες συναρτήσεων μέσα από πραγματικές καταστάσεις των οποίων οι ποσοτικές σχέσεις μπορούν να περιγραφούν από αυτά τα μοντέλα».
Αν λοιπόν οι συνθήκες του σχολείου το επιτρέπουν, συνιστάται, η χρήση λογισμικού που διευκολύνει εκτός από τη χάραξη γραφικών παραστάσεων και τη διερεύνησή τους με την προϋπόθεση τα ψηφιακά μέσα θα τα χειρίζονται οι ίδιοι οι μαθητές .

Σε πολλές ιστοσελίδες υπάρχουν ενδιαφέρουσες δραστηριότητες. Εκτός από τα παραδείγματα που προαναφέρθηκαν είναι και τα εξής:

- Ρίζες πολυωνυμικής εξίσωσης 3ου ή 4ου βαθμού

Μικροπείραμα για την κατανόηση του ρόλου των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης στην παραγοντοποίηση του πολυωνύμου.

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5293

- Πολυωνυμική εξίσωση 4ου βαθμού

Μικροπείραμα, για την κατανόηση της σχέσης των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης 4ου βαθμού με τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της αντίστοιχης πολυωνυμικής συνάρτησης τέμνει τον οριζόντιο άξονα και του ρόλου των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης στην παραγοντοποίηση του πολυωνύμου

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5197

- Προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση

Μικροπείραμα για τον προσδιορισμό της ρίζας πολυωνυμικής εξίσωσης 3ου βαθμού με προσέγγιση, εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano - Weierstrass.

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5297

Βιβλιογραφία

- Knuth, E. J. (2000), Student understanding of the Cartesian connection: An explortory study, *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*, 500-508.
- Heid, M., (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching (pp. 239-255), Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.*
- Kynigos, C., Koutlis, M., Hadzilakos, T. (1997). Mathematics with component oriented exploratory software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2, 229-250.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $3^{ο}$- Πρόοδοι

Εισαγωγή

Η μελέτη των κανονικοτήτων αποτελεί, με την ευρεία έννοια, τον πυρήνα της κατανόησης εννοιών, αλλά και της απόκτησης γνώσεων σε πολλά επιστημονικά πεδία, όπως στις θετικές επιστήμες, την οικονομία, στις κοινωνικές επιστήμες κ.ά. Σε καμία όμως επιστημονική περιοχή δεν είναι τόσο θεμελιώδης όπως είναι στα Μαθηματικά. Η επιστήμη έχει κατορθώσει να φτάσει σε υψηλά επιτεύγματα επειδή μέσα από τα Μαθηματικά μπόρεσε να καταγράψει, να κατηγοριοποιήσει, να συσχετίσει, να γενικεύσει και με τον τρόπο αυτό να ερμηνεύσει πολλές επαναλήψεις και δεδομένα που αφορούν επαναληπτικά φαινόμενα ή καταστάσεις. Ο Devlin Keith (1994) στο βιβλίο του «Mathematics: The science of Patterns» υποστηρίζει ότι τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη των κανονικοτήτων (μοτίβα, patterns).

Διερευνώντας κανονικότητες οι μαθηματικοί : υποθέτουν, δοκιμάζουν, ελέγχουν, εκφράζουν περιφραστικά και γενικεύουν. Μέσα από αυτή τη διαδικασία ανακαλύπτουν τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα τους, ανακαλύπτουν έννοιες και σχέσεις, αναπτύσσουν μια γλώσσα για να μιλήσουν για το μοτίβο, ενοποιούν αλλά και κάνουν διακρίσεις μεταξύ του συγκεκριμένου μοτίβου που μελετούν και άλλων που έχουν ήδη μελετήσει. Όταν επιπλέον μελετούν τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων σ' ένα μοτίβο, τότε καταλήγουν σε μαθηματικές σχέσεις (τύπους) και συναρτήσεις. Αποκαλύπτοντας κρυμμένες κανονικότητες, τα Μαθηματικά μας βοηθούν να καταλάβουμε καλύτερα τον φορτωμένο με πληροφορία κόσμο στον οποίο ζούμε.

Τι περιέχει το κεφάλαιο των Προόδων και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών;

Οι μαθητές σε προηγούμενες τάξεις έχουν ασχοληθεί με κανονικότητες, (patterns) όπως τα γεωμετρικά μοτίβα αλλά και με ακολουθίες αριθμών (αριθμητικά μοτίβα). Σε πολλές περιπτώσεις έχουν φτάσει να διατυπώνουν το γενικό όρο μιας κανονικότητας (τουλάχιστον λεκτικά) είτε έχουν ανακαλύψει τον κανόνα που παράγει για γνωστή ακολουθία αριθμών (αλγεβρική διατύπωσή του με χρήση μόνο μιας μεταβλητής) και έχουν αποτυπώσει γραφικά, τα αριθμητικά δεδομένα ενός μοτίβου.

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της ακολουθίας των πραγματικών αριθμών και μελετούν περιπτώσεις ακολουθιών που εμφανίζουν κάποιες ειδικές μορφές κανονικότητας, την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο.

Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο των Προόδων;

Η έννοια της ακολουθίας είναι μια από τις σημαντικότερες μαθηματικές έννοιες με πλήθος εφαρμογών σε όλους τους μαθηματικούς κλάδους. Συστηματικότερη και σε μεγαλύτερο βάθος μελέτη των ακολουθιών γίνεται στα μαθηματικά προσανατολισμού θετικών σπουδών στη Β΄ Λυκείου.

Η διδασκαλία των προόδων έχει μεγάλη σημασία γιατί, εκτός του ότι θα εξοικειώσει τους μαθητές με τη λογική και το συμβολισμό των ακολουθιών, οι πρόοδοι έχουν ποικίλες εφαρμογές σε άλλους επιστημονικούς κλάδους όπως στην οικονομία (ανατοκισμός, ίσες καταθέσεις, χρεολυσία) και επιπλέον εισάγει στον τρόπο σκέψης με τη βοήθεια των κανονικοτήτων.

Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο των Προόδων;

- Η έννοια της αλληλουχίας, δηλαδή μιας διαδικασίας τοποθέτησης αριθμών, γεγονότων, αντικειμένων ακόμα και ιδεών σε μια λογική σειρά.
- Η σταθερή διαφορά δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας.
- Ο σταθερός λόγος δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας.

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Ε1 Πως ονομάζεται μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών στους πραγματικούς και πως συμβολίζεται;

Ε2 Σε τι διαφέρει μια ακολουθία από μια συνάρτηση;

Ε3 Ποιά ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος;

Ε4 Πως υπολογίζουμε το ν-οστό όρο και το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας αριθμητικής προόδου;

Ε5 Πότε τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου ;

Ε6 Ποια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος;

Ε7 Πως υπολογίζουμε το ν-οστό όρο και το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου;

Ε8 Πότε τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου ;

Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε από τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά το τέλος της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να :

Μ1 Να γνωρίζουν την έννοια της ακολουθίας, τους τρόπους που αυτή ορίζεται και τις διαφορές της από μία συνάρτηση. (στόχοι Π.Σ 3.1.1)

Μ2 Να υπολογίζουν τους όρους ακολουθίας από τον γενικό όρο ή από τον αναδρομικό τύπο της (στόχοι Π.Σ 3.1.2)

M3 Να αναγνωρίζουν ακολουθίες με σταθερή διαφορά διαδοχικών όρων και να ορίζουν την αριθμητική πρόοδο. (στόχοι Π.Σ 3.2.1)

M4 Υπολογίζουν το ν-οστό όρο και το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας αριθμητικής προόδου. (στόχοι Π.Σ 3.1.2)

M5 Να αναγνωρίζουν ακολουθίες με σταθερό λόγο διαδοχικών όρων και να ορίζουν τη γεωμετρική πρόοδο. (στόχοι Π.Σ 3.3.1)

M6 Να υπολογίζουν το ν-οστό όρο και το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου. (στόχοι Π.Σ 3.3.2)

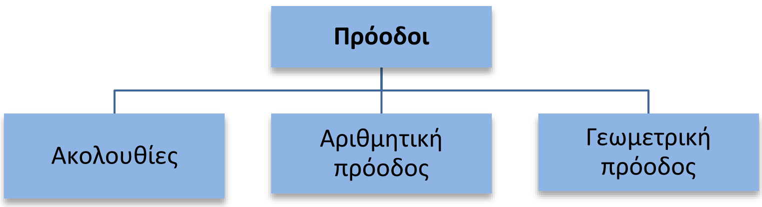
M7 Να προσδιορίζουν και να εφαρμόζουν τη σχέση τριών διαδοχικών όρων αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

M8 Να μοντελοποιούν καταστάσεις και να επιλύουν προβλήματα με χρήση της αριθμητικής και της γεωμετρικής προόδου. (στόχοι Π.Σ 3.3.3)

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου των Προόδων

Όσα αναφέρονται στη συνέχεια είναι προτεινόμενα ώστε ο διδάσκων να διαθέτει μία οργανωμένη πρόταση διδασκαλίας.

Κατά αρχήν καλό θα είναι ο διδάσκων να διαθέτει μία γενική εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η διδασκαλία του κεφαλαίου όπως η παρακάτω.



Με βάση τα μαθησιακά αποτελέσματα και τα ερωτήματα στα οποία θα πρέπει να μπορεί να απαντά ο μαθητής μετά τη διδασκαλία των Προόδων, κάνουμε κάποιες επισημάνσεις:

- **Ακολουθίες**

Να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση της ακολουθίας ως αντιστοιχίας των φυσικών στους πραγματικούς αριθμούς και στην εξοικείωση των μαθητών με το συμβολισμό της (π.χ. πρώτος όρος ακολουθίας καλείται ο πραγματικός αριθμός που αντιστοιχεί στο φυσικό αριθμό 1 και συμβολίζεται με α_1) επειδή έχει παρατηρηθεί ότι ο συμβολισμός αυτός δυσκολεύει τους μαθητές.

Να τονιστούν οι διαφορές μεταξύ μιας συνάρτησης και μιας ακολουθίας και να γίνει η γραφική της παράσταση ώστε να γνωρίζουν οι μαθητές ότι αυτή αποτελείται από διακεκριμένα σημεία.

Να δοθούν παραδείγματα ακολουθιών που ορίζονται με γενικό τύπο και ακολουθιών που ορίζονται με αναδρομικό τύπο, όπως η αριθμητική και η γεωμετρική πρόοδος.

Παραδείγματα

- Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu},\ \nu \in \mathrm{N}$
- Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας $\alpha_1=1$, $\alpha_2=3$, $\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu$ (Ακολουθία Lucas).

Μια χαρακτηριστική ακολουθία που δίνεται με αναδρομικό τύπο είναι η ακολουθία Fibonacci ($\alpha_0=0$ $\alpha_1=1$, $\alpha_\nu=\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}$). Η ακολουθία Fibonacci με τις πολλές ιδιότητές της συνδυαζόμενη με τη χρυσή τομή, θα μπορούσε να δοθεί στους μαθητές, ως **σχέδιο εργασίας**.

- ## Αριθμητική πρόοδος

Αρχικά οι μαθητές, χρειάζεται να μπορούν να αναγνωρίζουν, με βάση τον ορισμό, μια αριθμητική πρόοδο. Στη συνέχεια να μπορούν να σχεδιάζουν σε ένα σύστημα αξόνων μερικούς διαδοχικούς όρους της, και να παρατηρήσουν ότι η γραφική της παράσταση αποτελείται από διαδοχικά σημεία που βρίσκονται όλα πάνω σε μια ευθεία η οποία έχει κλίση ίση με τη διαφορά της προόδου .

Προτεινόμενη δραστηριότητα

α) Να παραστήσετε γραφικά τους τρεις πρώτους όρους της ακολουθίας $\alpha_\nu=2\nu-1$, $\nu \in \mathrm{N}^*$

β) Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

γ) Τα σημεία της γραφικής παράστασης της ακολουθίας που βρήκατε ενδέχεται να βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία. Πως μπορούμε να βεβαιωθούμε ότι όλα τα σημεία της ακολουθίας ανήκουν στην ευθεία.

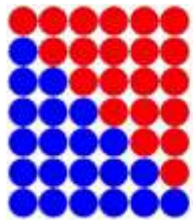
δ) Τα σημεία Α(6, 13) και $\mathrm{B}\left(\frac{2}{3}, -3\right)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της ακολουθίας ;

Στη συνέχεια, μέσα από δραστηριότητες θα καταλήξουν στον τύπο του ν-οστού όρου και του αθροίσματος των πρώτων ν όρων, αριθμητικής προόδου. Το να δοθούν απλώς οι τύποι και στη συνέχεια οι μαθητές να επιδοθούν στην αλγοριθμική χρήση τους για την επίλυση ασκήσεων, δεν είναι συμβατό με το πνεύμα του Π.Σ, γι αυτό είναι σημαντικό να εμπλακούν οι μαθητές στη διαδικασία απόδειξης τους.

Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ότι μια αριθμητική πρόοδος μπορεί να παρασταθεί με περισσότερους από έναν τύπους, καθένας από τους οποίους προβάλλει διαφορετικές ιδιότητες και να μπορούν από τη μια μορφή μα μεταβαίνουν στην άλλη.
Για παράδειγμα, ο τύπος $\alpha_\nu = -2 + (\nu - 1)\cdot 3$, ν=1, 2, 3,.... μας περιγράφει την αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο το $\alpha_1=-2$ και διαφορά ω=3. Η ίδια πρόοδος περιγράφεται με τον τύπο $\alpha_\nu=3\nu-5$ν=1,2,3,... ο οποίος προβάλλει την ιδιότητα της αριθμητικής προόδου ως γραμμικής συνάρτησης. Ακόμα η πρόοδος αυτή μπορεί να παρασταθεί

με τον αναδρομικό τύπο $\alpha_1=-2$ και $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+3$, $\nu=1,2,3,...$ ο οποίος μας επιτρέπει από έναν όρο να βρίσκουμε τον επόμενο.

Ένα παράδειγμα οποίο μπορεί να χρησιμοποιήσει ο διδάσκων, προκειμένου να βοηθήσει τους μαθητές του να καταλάβουν τη μέθοδο που εφαρμόζουμε στην απόδειξη του τύπου του αθροίσματος των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου, είναι ο τρόπος με τον οποίο λέγεται, ότι ο νεαρός Carl Friedrich Gauss υπολόγισε το άθροισμα των 100 πρώτων στη σειρά φυσικών αριθμών (γράφοντας δύο φορές το άθροισμα 1+2+3+…+100 αλλά με αντίθετη τη σειρά των προσθετέων και προσθέτοντας τις ισότητες κατά μέλη). Ο συμβατικός τρόπος (διαδοχική πρόσθεση των αριθμών) περιλάμβανε πάρα πολλές πράξεις και ήταν σχεδόν βέβαιο ότι θα γινόταν λάθος.



Οπτικά παραδείγματα υπολογισμού του αθροίσματος των έξη πρώτων φυσικών αριθμών 1+2+3+4+5+6, με τον τύπο (6x7)/2, όπως αυτό στο διπλανό σχήμα, βοηθούν επίσης στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίον υπολογίζουμε το άθροισμα των πρώτων ν όρων, μιας αριθμητικής προόδου.

Στη διεύθυνση : photodentro.edu.gr/lor/handle/8521/1989 μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με την εύρεση του αθροίσματος των ν πρώτων στη σειρά φυσικών αριθμών.

Θα πρέπει ακόμα οι μαθητές να κατανοήσουν οι μαθητές τον αριθμητικό μέσο και τον συμβολισμό τριών διαδοχικών όρων μιας αριθμητικής προόδου και να μπορούν να τους χρησιμοποιούν.

Η μοντελοποίηση καταστάσεων και επίλυση προβλημάτων συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της αριθμητικής προόδου.

<u>Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>

Χρειάζεσαι 5 οδοντογλυφίδες για να σχηματίσεις το τραπέζιο της πρώτης σειράς του διπλανού σχήματος, 9 για τα τραπέζια της δεύτερης σειράς και 13 για τα τραπέζια της τρίτης σειράς.

α) Αν διαθέτεις 1000 οδοντογλυφίδες πόσα ολοκληρωμένα τραπέζια θα έχει η τελευταία σειρά που θα σχηματίσεις;

β) Πόσες ολοκληρωμένες σειρές θα έχεις σχηματίσει;

γ) Πόσες οδοντογλυφίδες θα έχεις χρησιμοποιήσει για να σχηματίσεις την τελευταία σειρά;

- **Γεωμετρική πρόοδος**

Η διαπραγμάτευση της έννοιας της γεωμετρικής προόδου προτείνεται να γίνει κατ’ αντιστοιχία με την έννοια της αριθμητικής προόδου.

<u>Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>

Την ημέρα που η Μαρία γιόρταζε τα 12α γενέθλιά της, η γιαγιά της, της έδωσε 50 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα 21α γενέθλιά της θα της αύξανε κάθε χρόνο το ποσό του δώρου της κατά 10 ευρώ. Ο παππούς της Μαρίας της έδωσε 5 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα 21α γενέθλιά της θα της διπλασίαζε κάθε χρόνο, το προηγούμενο ποσό του δώρου του. Η Μαρία δυσαρεστήθηκε με την πρόταση του παππού της. Είχε δίκιο; Πόσα χρήματα θα είναι το δώρο της, στα 15α και στα 21α γενέθλια της, από τον παππού της και πόσα από τη γιαγιά της;

Προκειμένου να συνδεθεί η έννοια της γεωμετρικής προόδου με πραγματικές καταστάσεις θα πρέπει οι μαθητές να ασχοληθούν με παραδείγματα ίσων καταθέσεων, ανατοκισμού κ.ά

Προτεινόμενη δραστηριότητα

Η αξία ενός καινούργιου αυτοκινήτου είναι κ ευρώ και μειώνεται κάθε χρόνο κατά 10%.

Αν η αρχική αξία του αυτοκινήτου είναι 15.000 ευρώ, να υπολογίσετε την αξία του μετά από

i) 3 χρόνια,
ii) 10 χρόνια.

Πιθανές δυσκολίες – παρανοήσεις

- Δεν συνειδητοποιούν ότι η γραφική παράσταση μιας ακολουθίας αποτελείται από διακριτά σημεία.
- Συναντούν δυσκολίες στον υπολογισμό των όρων μιας ακολουθίας από τον γενικό και τον αναδρομικό της τύπο επειδή δεν κατανοούν τον συμβολισμό τους.

Αξιοποίηση της Τεχνολογίας στη διδασκαλία του κεφαλαίου

Σε πολλές ιστοσελίδες υπάρχουν ενδιαφέρουσες δραστηριότητες.

- Χιονονιφάδα

Μικροπείραμα, όπου ο μαθητής χρησιμοποιώντας τις γνώσεις του εξοικειώνεται με την έννοια της αναδρομής.

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5269

- Αναδρομές, Τρίγωνα-Τετράγωνα

Μικροπείραμα, δημιουργεί τρίγωνα (τετράγωνα) στο εσωτερικό ενός ισοπλεύρου τριγώνου (αντίστοιχα τετραγώνου).

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5172

- Υπολογισμός όρων και γραφική παράσταση γεωμετρικής προόδου.

Μικροπείραμα το οποίο δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές, να ορίσουν μια γεωμετρική πρόοδο και να υπολογίσουν ένα όρο της, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της και να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση των όρων της.

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/1742

Βιβλιογραφία

- Devlin Keith, (1994). Mathematics: The science of Patterns. New York: W. H. Freeman.

- Livio Mario. Ο Χρυσός Λόγος, Η ιστορία του Φ, του εκπληκτικότερου αριθμού, εκδόσεις Ενάλιος.

- Άρθουρ Μπέντζαμιν : Η μαγεία της ακολουθίας Φιμπονάτσι, στη διεύθυνση

  tvxs.gr/.../arthoyr-mpentzamin-i-mageia-tis-akoloythias-fimponatsi-binte

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο – Εκθετικές συναρτήσεις και Λογάριθμοι

Εισαγωγή

Η **εκθετική συνάρτηση** είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όχι μόνο στα Μαθηματικά, αλλά και στις άλλες επιστήμες, αφού με τη βοήθεια της μοντελοποιούνται πολλά φαινόμενα της Φυσικής, της Βιολογίας, της Οικονομίας κτλ. Η βασική ιδιότητα των εκθετικών συναρτήσεων είναι ότι μεταβάλλονται με σταθερό λόγο σε ίσα διαστήματα. Για παράδειγμα, το φαινόμενο της διάσπασης ενός ιατρικού ισότοπου στο μισό του προηγούμενου ποσού κάθε είκοσι λεπτά ή το φαινόμενο μιας βακτηριακής καλλιέργειας που τριπλασιάζεται κάθε μέρα, παρουσιάζουν εκθετική συμπεριφορά, διότι στο πρώτο, στο δεδομένο χρονικό διάστημα είκοσι λεπτών, το ισότοπο υποδιπλασιάζεται, ενώ το δεύτερο, στο δεδομένο χρονικό διάστημα μιας μέρας, ο πληθυσμός τριπλασιάζεται.

Οι λογάριθμοι εισήχθησαν από τον Σκωτσέζο Τζον Νάπιερ (John Napier) στις αρχές του 17ου αιώνα ως ένα μέσο για την απλοποίηση των υπολογισμών και υιοθετήθηκαν από Αστρονόμους, Μηχανικούς και από άλλους επιστήμονες. Αυτή η μέθοδος υπολογισμού βασίζεται στο γεγονός ότι ο λογάριθμος ενός γινομένου ισούται με το άθροισμα των λογαρίθμων των παραγόντων του:

$$\ell og_{\beta}(xy) = \ell og_{\beta}x + \ell og_{\beta}y$$

Ο λογάριθμος με βάση το β=10 λέγεται κοινός ή δεκαδικός λογάριθμος και έχει πολλές εφαρμογές στην επιστήμη και τη μηχανική. Ο λογάριθμος που έχει ως βάση την σταθερά e (≈ 2.718), λέγεται *φυσικός λογάριθμος* και χρησιμοποιείται στα Μαθηματικά και ιδιαίτερα στη Μαθηματική Ανάλυση. Ο δυαδικός αλγόριθμος έχει ως βάση τον αριθμό β=2 και αποτελεί σημαντικό στοιχείο της επιστήμης υπολογιστών.

Απλοποιώντας δύσκολους υπολογισμούς, οι λογάριθμοι συνέβαλαν στην πρόοδο των επιστημών, και ειδικότερα της Αστρονομίας, της Τοπογραφίας, αλλά και άλλων επιστημονικών πεδίων που χρειάζονται πολύπλοκους και χρονοβόρους υπολογισμούς. Ο Πιέρ Σιμόν Λαπλάς (*Pierre -Simon Laplace*), Γάλλος Μαθηματικός, Αστρονόμος και Φιλόσοφος ονόμασε του λογάριθμους *«ένα θαυμαστό κατασκεύασμα το οποίο, μειώνοντας σε λίγες μέρες τον χρόνο δουλειάς πολλών μηνών, διπλασιάζει την ζωή του αστρονόμου και τον γλυτώνει από τα λάθη και την αηδία που είναι αχώριστα κομμάτια των μεγάλων υπολογισμών».*

Επιπροσθέτως, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \ell ogx$ αυξάνεται πολύ αργά για μεγάλα *x*, η λογαριθμική κλίμακα χρησιμοποιείται για την συμπίεση μιας μεγάλης κλίμακας επιστημονικών δεδομένων. Έτσι, οι λογάριθμοι, εμφανίζονται και σε πάρα πολλούς επιστημονικούς τύπους διαφόρων επιστημών όπως είναι η Σεισμολογία, η Χημεία, η Ψυχολογία, η Μηχανική των πυραύλων κτλ.

Τι περιέχει το κεφάλαιο των Εκθετικών συναρτήσεων και Λογαρίθμων και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών;

Το $4^{ο}$ Κεφάλαιο περιέχει τις δυνάμεις με πραγματικό εκθέτη, την εκθετική συνάρτηση και τους λογαρίθμους.

Η έννοια της δύναμης πραγματικού αριθμού με εκθέτη ακέραιο είναι γνωστή στους μαθητές από προηγούμενες τάξεις, καθώς και οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο. Στην τάξη αυτή οι μαθητές επεκτείνουν τις γνώσεις τους μελετώντας την έννοια της δύναμης πραγματικού αριθμού με πραγματικό εκθέτη (ρητό και άρρητο).

Οι ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, θα προκύψουν με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης ανάλογα με τις τιμές της βάσης α.

Η εισαγωγή της έννοιας του λογαρίθμου θα γίνει μέσω της εξίσωσης $\alpha^x = \theta$, $\alpha>0$. Οι μαθητές δεν έχουν μέχρι τώρα στη διάθεση τους άλλη μέθοδο επίλυσης τέτοιων εξισώσεων, εκτός της γραφικής μεθόδου. Από τη διαδικασία γραφικής επίλυσης θα επισημάνουν τη μοναδικότητα της λύσης, την οποία ονομάζουμε «λογάριθμο του θ με βάση α» και συμβολίζουμε με $\ell og_\alpha \theta$, δηλαδή $\alpha^{\ell og_\alpha \theta} = \theta$. Έτσι για θετικούς αριθμούς α και θ έχουμε την ισοδυναμία: $\alpha^x = \theta \Leftrightarrow \ell og_\alpha \theta = x$

Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο των Εκθετικών συναρτήσεων και Λογαρίθμων;

Εκτός από τις αλγεβρικές (πολυωνυμικές) και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις που οι μαθητές έχουν γνωρίσει μέχρι τώρα, σημαντική για τα Μαθηματικά είναι μια ακόμα συνάρτηση, η εκθετική η οποία δεν είναι πολυωνυμική συνάρτηση αλλά υπερβατική[6]. Η μελέτη της εκθετικής συνάρτησης αποτελεί μια φυσιολογική διδακτική εξέλιξη μετά τη μελέτη των πολυωνυμικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Η διδασκαλία της κρίνεται σκόπιμη στο Λύκειο γιατί είναι ένα μέσο μαθηματικής περιγραφής καταστάσεων του φυσικού κόσμου και γενικότερα των θετικών επιστημών.

Η εκθετική συνάρτηση $y=e^x$ χρησιμοποιείται ως μοντέλο για την περιγραφή φαινομένων σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους. Στη Φυσική για παράδειγμα περιγράφει διαδικασίες διάσπασης και απόσβεσης ενώ στην Οικονομία και Βιολογία αυξητικές διαδικασίες.

Οι λογάριθμοι μπορεί να έχουν χάσει την εξέχουσα θέση που είχαν άλλοτε στους υπολογισμούς, παραμένει όμως τεράστια η σημασία των δεκαδικών και των νεπέριων λογαρίθμων για εφαρμογές στις διάφορες επιστήμες όπως τη Φυσική, τη Χημεία, τη Σεισμολογία, την Αστρονομία κλπ.

Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο των Εκθετικών συναρτήσεων και Λογαρίθμων;

[6] Υπερβατικές λέγονται οι συναρτήσεις που δεν είναι αλγεβρικές. Στην επόμενη τάξη οι μαθητές θα μελετήσουν, μια ακόμα υπερβατική συνάρτηση, τη λογαριθμική.

- Ο προσδιορισμός δύναμης με άρρητο εκθέτη από την ακολουθία των δεκαδικών προσεγγίσεων του άρρητου και την αντίστοιχη ακολουθία των δυνάμεων της βάσης.
- Η ιδιότητα των εκθετικών συναρτήσεων να μεταβάλλονται με σταθερό λόγο σε ίσα διαστήματα.
- Οι λογάριθμοι βοηθούν να απλοποιηθούν τους υπολογισμούς μετατρέποντας τους πολλαπλασιασμούς σε προσθέσεις.

Σε ποιά ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Ε1 Πως ορίζουμε τη δύναμη με ρητό εκθέτη $\alpha^{\mu/\nu}$, όπου α > 0 , μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος;

Ε2 Πως ορίζουμε τη δύναμη ενός θετικού αριθμού α με εκθέτη άρρητο αριθμό x;

Ε3 Ποια συνάρτηση ονομάζεται εκθετική συνάρτηση με βάση α (α > 0, $\alpha \neq 1$) και ποιές είναι οι βασικές της ιδιότητες;

Ε4 Από ποιές μετατοπίσεις της εκθετικής συνάρτησης $f(x)= \alpha^x$ ($\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$) προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)= \alpha^x +c$ και $h(x)= \alpha^{x+c}$;

Ε5 Τι ονομάζουμε λογάριθμο ενός αριθμού θ ως προς βάση α ($\alpha >0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$) και ποιές είναι οι ιδιότητές των λογαρίθμων;

Ε6 Ποιοι λογάριθμοι ονομάζονται δεκαδικοί και ποιοι νεπέριοι ;

Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε από τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά το τέλος της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου οι μαθητές θα είναι ικανοί να:

Μ1 Να ορίζουν τη δύναμη πραγματικού αριθμού με ρητό εκθέτη. (στόχοι Π.Σ 4.1.1)

Μ2 Να υπολογίζουν αριθμητικές παραστάσεις και να απλοποιούν αλγεβρικές εκφράσεις που περιέχουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη. (στόχοι Π.Σ 4.1.2)

Μ3 Να γνωρίζουν τη διαδικασία με την οποία ορίζονται δυνάμεις με άρρητο εκθέτη (στόχοι Π.Σ 4.1.3)

Μ4 Να γνωρίζουν την εκθετική συνάρτηση και τις βασικές ιδιότητες της (στόχοι Π.Σ 4.2.1)

Μ5 Από τη γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης να ορίζουν τη μονοτονία και το σύνολο τιμών της. (στόχοι Π.Σ 4.2.2)

Μ6 Να σχεδιάζουν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, που προκύπτουν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ ($\alpha>0$ και $\alpha \neq 1$) (στόχοι Π.Σ 4.2.3)

Μ7 Να συγκρίνουν τον τρόπο μεταβολής των τιμών συναρτήσεων της μορφής $y=\alpha x$, $y=x^\alpha$, $y=\alpha^x$ με $x>0$ για συγκεκριμένες τιμές του α. (στόχοι Π.Σ 4.2.4)

Μ8 Να επιλύουν απλές εκθετικές εξισώσεις και ανισώσεις. (στόχοι Π.Σ 4.2.5)

Μ9 Να μοντελοποιούν καταστάσεις και να επιλύουν προβλήματα με χρήση της εκθετικής συνάρτησης. (στόχοι Π.Σ 4.2.6)

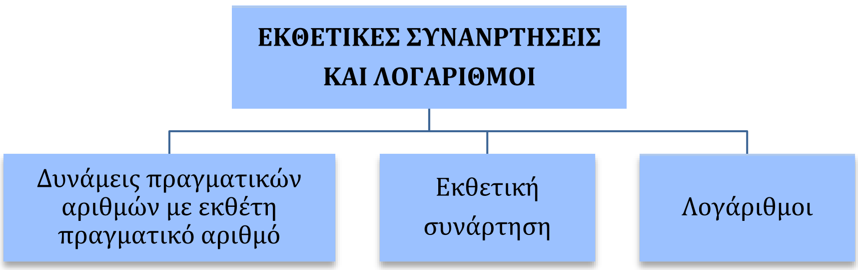
Μ10 Να αναγνωρίζουν τον λογάριθμο του αριθμούς, $\theta > 0$ είναι λύση της εξίσωσης $\alpha^x=\theta$. (στόχοι Π.Σ 4.3.1)

Μ11 Να εφαρμόζουν τις ιδιότητες των λογαρίθμων και να τις χρησιμοποιούν στη επίλυση προβλημάτων (στόχοι Π.Σ 4.3.2 και 4.3.3)

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου των Εκθετικών συναρτήσεων και λογαρίθμων

Όσα αναφέρονται στη συνέχεια είναι προτεινόμενα ώστε ο διδάσκων να διαθέτει μία οργανωμένη πρόταση διδασκαλίας.

Κατά αρχήν καλό θα είναι ο διδάσκων να διαθέτει μία γενική εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η διδασκαλία του κεφαλαίου όπως η παρακάτω.



Με βάση τα μαθησιακά αποτελέσματα και τα ερωτήματα στα οποία θα πρέπει να μπορεί να απαντά ο μαθητής μετά τη διδασκαλία των Εκθετικών συναρτήσεων και Λογαρίθμων, θα επισημαίναμε ότι:

- **Δυνάμεις πραγματικών αριθμών με εκθέτη πραγματικό αριθμό**

1) Στην αρχή του κεφαλαίου συμπληρώνεται ο ορισμός της δύναμης πραγματικού αριθμού με την εισαγωγή της έννοιας της δύναμης με εκθέτη ρητό. Στόχος είναι να μάθουν οι μαθητές τις δυνάμεις με εκθέτες ρητούς αριθμούς καθώς και τις ιδιότητές τους και να μπορούν να τις χρησιμοποιούν. Επίσης να μάθουν να χρησιμοποιούν τον επιστημονικό υπολογιστή (κομπιουτεράκι) για να βρίσκουν τέτοιες δυνάμεις.
Σημαντικό είναι να συζητήσουν τα προβλήματα που θα προέκυπταν αν δεν υπήρχε η απαίτηση για θετική βάση στον ορισμό της δύναμης πραγματικού αριθμού με ρητό εκθέτη.

<u>Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα :

Ισοδύναμες εκφράσεις		
δύναμη	ρίζα	ακέραιος ή δεκαδικός αριθμός
$64^{\frac{2}{3}}$		
	$\left(\sqrt[3]{512}\right)^4$	
$9^{\frac{5}{2}}$		
$16^{\frac{3}{4}}$		
	$\left(\sqrt{36}\right)^3$	

2) Στη συνέχεια συμπληρώνεται ο ορισμός της δύναμης πραγματικού αριθμού με την εισαγωγή της έννοιας της δύναμης με άρρητο εκθέτη, με τη βοήθεια των διαδοχικών δεκαδικών προσεγγίσεων του άρρητου αριθμού. Η επέκταση των δυνάμεων με εκθέτη άρρητο βασίζεται στην πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς.
Ο τρόπος αυτός προσδιορισμού της δύναμης με άρρητο εκθέτη από την ακολουθία των δεκαδικών προσεγγίσεων του άρρητου και την αντίστοιχη ακολουθία των δυνάμεων της βάσης γίνεται αφού δεν είναι γνωστά στους μαθητές τα όρια των ακολουθιών. Με τον τρόπο όμως αυτό οι μαθητές εισάγονται και στην έννοια της οριακής τιμής ή του ορίου μιας ακολουθίας. Η προσέγγιση προτείνεται να γίνει με τη βοήθεια κατάλληλου αριθμητικού παραδείγματος και για τις αριθμητικές προσεγγίσεις να χρησιμοποιηθεί αριθμομηχανή.

- **Εκθετική συνάρτηση**

1) Η εισαγωγή στην έννοια της εκθετικής συνάρτησης, προτείνεται, να γίνει μέσω προβλήματος, για παράδειγμα με τη δραστηριότητα Δ23 του Π.Σ. Με τη δραστηριότητα οι μαθητές θα αναγνωρίσουν την εκθετική συνάρτηση $f(x)=α^x$ ($α>0$ και $α\neq1$) και θα συνδέσουν τις αναπαραστάσεις της (πίνακας τιμών, τύπος). Η δραστηριότητα θα μπορούσε να συμπληρωθεί με τον σχεδιασμό της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Μέσω της γραφικής παράστασης, θα περιγραφούν το πεδίο ορισμού, η μονοτονία και το σύνολο τιμών αλλά και θα προσεγγιστεί διαισθητικά η έννοια της ασύμπτωτης.

Στη διεύθυνση: http://photodentro.edu.gr/lor/handle/8521/5238 μπορούν οι μαθητές να εμπλακούν διαδραστικά με τη μελέτη της μονοτονίας της εκθετικής συνάρτησης.

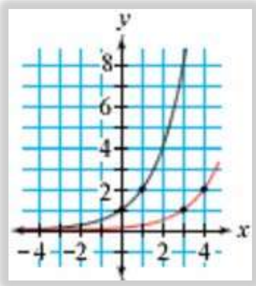
(Παράδειγμα δραστηριότητας η Δ24 του Π.Σ)

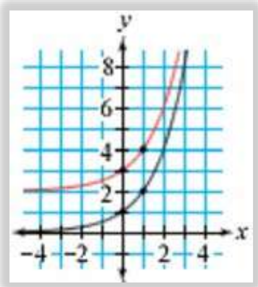
2) Με τη βοήθεια του τύπου του ανατοκισμού οι μαθητές περιγράφουν τη διαδικασία ορισμού του αριθμού e. Μέσω της παρατήρησης $2 < e < 3$ να συσχετιστεί η γραφική παράσταση της $f(x) = e^x$ με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) =2^x$ και $h(x) = 3^x$ και να προσδιοριστούν οι ομοιότητές τους.

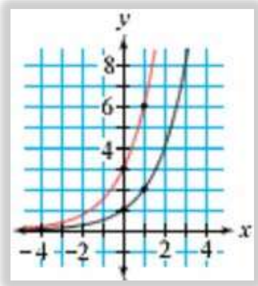
3) Οι μαθητές με τη δραστηριότητα Δ24 καλούνται να κατασκευάσουν τις γραφικές παραστάσεις διαφόρων εκθετικών συναρτήσεων, οι οποίες θα προκύψουν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) = a^x (a > 0 και a≠1), να συγκρίνουν τα γραφήματα τους και να προσδιορίσουν τυχόν ομοιότητες ή διαφορές. Συμπληρωματικά θα μπορούσαν να δοθούν και οι παρακάτω δραστηριότητες.

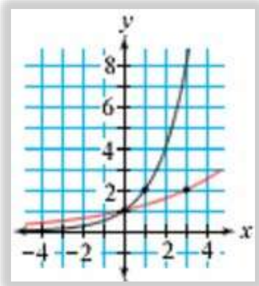
Προτεινόμενη δραστηριότητα

Καθεμιά από τις καμπύλες με κόκκινο χρώμα στο παρακάτω σχήμα έχει προκύψει από μια μετατόπιση της καμπύλης y=2^x (με μαύρο χρώμα). Για κάθε μια περίπτωση γράψτε τον τύπο της συνάρτησης.


Σχήμα 1

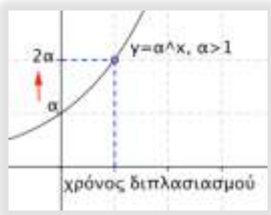

Σχήμα 2

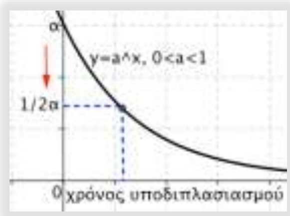

Σχήμα 3


Σχήμα 4

Εφαρμογές της εκθετικής συνάρτησης

Όλες οι αύξουσες εκθετικές συναρτήσεις έχουν έναν χρόνο διπλασιασμού, ενώ όλες οι φθίνουσες εκθετικές συναρτήσεις έχουν έναν χρόνο υποδιπλασιασμού (ημιζωή).





Οι έννοιες, χρόνος διπλασιασμού και υποδιπλασιασμού, είναι πολύ βασικές για την κατανόηση των εφαρμογών της εκθετικής συνάρτησης. Στη συνέχεια δίνονται δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα.

α) Οι πληθυσμοί, ανθρώπων, ζώων, βακτηριδίων, μικροοργανισμών κλπ. έχουν την τάση να αυξάνονται εκθετικά με διάφορους ρυθμούς. Ένα αξιόπιστο και εύκολα κατανοητό μέτρο του ρυθμού με τον οποίον αυξάνεται ο πληθυσμός είναι ο **χρόνος διπλασιασμού** του, ο χρόνος δηλαδή που απαιτείται για να διπλασιαστεί ο πληθυσμός του προς εξέταση είδους. Από την τιμή του χρόνου διπλασιασμού συμπεραίνουμε πόσο γρήγορα ή πόσο αργά επιτυγχάνεται η αύξηση.

Στη διεύθυνση www.otherwise.com/population/exponent.html, οι μαθητές με ένα μικροπείραμα μπορούν να ελέγχουν την αύξηση ενός πληθυσμού ψαριών καθορίζοντας το ρυθμό γέννησης τους, ενώ παράλληλα βλέπουν τη γραφική παράσταση της εξέλιξης του φαινομένου, η οποία είναι εκθετικής μορφής.

β) Τα ραδιενεργά υλικά χρησιμοποιούνται στις μέρες μας σε πολλές ιατρικές εφαρμογές, αλλά και ως πηγές ενέργειας χωρών, δορυφόρων κ.ά. Άν έχουμε μια συγκεκριμένη ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού που θεωρητικά θα αντιδράσει όλο, τότε σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα η μισή ποσότητα της ουσίας αντιδρά και άρα χάνεται. Το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα είναι χαρακτηριστικό για κάθε αντίδραση. Ο ρυθμός μείωσης ποικίλλει από ισότοπο σε ισότοπο. Ένα λοιπόν βασικό χαρακτηριστικό των ραδιοϊσοτόπων είναι η **ημιζωή** τους δηλαδή ο **χρόνος υποδιπλασιασμού** τους. Στη διεύθυνση: www.lon-capa.org/~mmp/applist/decay/decay.htm οι μαθητές επιλέγοντας το χρόνο ημιζωής βλέπουν εκτός από τη διαδικασία της σταδιακής μείωσης και την αντίστοιχη γραφική παράσταση της εξέλιξης του φαινομένου, η οποία είναι εκθετικής μορφής.

Αντίστοιχη δραστηριότητα είναι η Δ23 για το βακτήριο της σαλμονέλας και η Δ26 του Π.Σ για τον χρόνο ημιζωής στο σώμα μας, ενός φαρμάκου.

Στη διεύθυνση https://phet.colorado.edu/en/simulations/translated/el οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν με τη ραδιοχρονολόγηση (μεταφρασμένο στα ελληνικά).

- **Λογάριθμοι**

Η εισαγωγή στους λογαρίθμους προτείνεται να γίνει μέσω της αντιστοίχισης μιας γεωμετρικής προόδου, π.χ. της 1, 2, 2^2, 2^3, … , με την αριθμητική πρόοδο των αντίστοιχων εκθετών 0,1, 2, 3,… όπως και καταγράφεται ιστορικά

Π.χ Αν θέσουμε σε αντιστοιχία ένα προς ένα τους όρους μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής προόδου όπως για παράδειγμα:

1, 2, **3**, 4, 5, 6, **7**, 8, 9, …

2, 4, **8** (2^3), 16, 32, 64, **128**(2^7), 256, 512, …

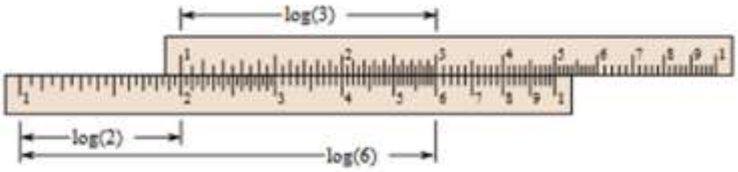
Παρατηρούμε ότι το γινόμενο δύο όρων της γεωμετρικής προόδου (π.χ 8·128=1024) βρίσκεται κάτω ακριβώς από το άθροισμα των αντιστοίχων όρων της αριθμητικής προόδου (3+7=10). Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός ανάγεται σε πρόσθεση….

Με τη βοήθεια αυτού του παραδείγματος, να επισημανθεί η σημασία των λογαρίθμων στην απλοποίηση των υπολογισμών από την αρχή της ιστορίας τους μέχρι την εφεύρεση των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η ιστορία των Μαθηματικών πρέπει να χρησιμοποιείται για την καλύτερη κατανόηση και εμβάθυνση στις νέες έννοιες.

Απλοποιώντας δύσκολους υπολογισμούς, οι λογάριθμοι συνέβαλαν στην πρόοδο της επιστήμης και ειδικότερα της αστρονομίας. Ήταν κρίσιμοι για τις προόδους στην τοπογραφία, στην αστρονομική ναυτιλία, που τον 17ο αιώνα ήταν πολύ σημαντικοί κλάδοι της επιστήμης. Ο Πιέρ Σιμόν Λαπλάς ονόμασε του λογάριθμους: *"ένα θαυμαστό κατασκεύασμα το οποίο, μειώνοντας σε λίγες μέρες τον χρόνο δουλειάς πολλών μηνών, διπλασιάζει την ζωή του αστρονόμου και τον γλυτώνει από τα λάθη και την αηδία που είναι αχώριστα κομμάτια των μεγάλων υπολογισμών"*

Στις αρχές του 17ου αιώνα για την εκτέλεση των πράξεων επινοήθηκε και κατασκευάστηκε ο λογαριθμικός κανόνας, που στηρίζεται στις ιδιότητες των λογαρίθμων. Η επινόηση του αποδίδεται στον Άγγλο μαθηματικό E. Gunter, χωρίς να παραβλέπεται και η προσφορά των John Napier, L. Euler, Jobst Burgi και άλλων.

Οι λογαριθμικοί κανόνες χρησιμοποιήθηκαν μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1970, όπου εμφανίστηκαν στην αγορά οι αριθμομηχανές, τα κομπιουτεράκια. Ο λογαριθμικός κανόνας μπορεί να θεωρηθεί πρόδρομος των ηλεκτρονικών υπολογιστών.



Ξεκινώντας από το 2 στην κάτω κλίμακα, προσθέτοντας το 3 της πάνω κλίμακας υπολογίζεται το γινόμενο 6. Ο λογαριθμικός κανόνας δουλεύει επειδή είναι σημειωμένος έτσι ώστε η απόσταση από το 1 στο *x* να είναι ανάλογη του λογάριθμου του *x*.

2) Με τη βοήθεια του παραδείγματος της εισαγωγής μπορούν επιπλέον θα ερμηνευτούν και οι ιδιότητες των λογαρίθμων. Το να δοθούν απλώς οι τύποι των ιδιοτήτων των λογαρίθμων και στη συνέχεια οι μαθητές να επιδοθούν στην αλγοριθμική χρήση τους για την επίλυση ασκήσεων, δεν είναι συμβατό με το πνεύμα του Π.Σ, γι αυτό είναι σημαντικό να εμπλακούν στη διαδικασία απόδειξης τους .

Αξιοποίηση της Τεχνολογίας στην διδασκαλία του κεφαλαίου

- Εκθετικές εξισώσεις

Μικροπείραμα για την εύρεση λύσεων της εκθετικής εξίσωσης γραφικά.

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5151

Με την εφαρμογή της ιστοσελίδας http://ggbtu.be/m535811 Μπορούν οι μαθητές να μελετήσουν τη συμπεριφορά των γραφικών παραστάσεων τόσο της εκθετικής όσο και της λογαριθμικής συνάρτησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{ο} –Στατιστική

Εισαγωγή

Στατιστική είναι ο επιστημονικός κλάδος που ασχολείται με τη συλλογή, την οργάνωση και την ανάλυση των αριθμητικών δεδομένων και με προβλήματα όπως ο σχεδιασμός πειραμάτων και η λήψη αποφάσεων.

Η λέξη “στατιστική” προέρχεται από τη λατινική λέξη “status” (που σημαίνει κράτος) και δηλώνει αρχικά τη συλλογή στοιχείων για τις κρατικές ανάγκες (έκταση, παραγωγή, πληθυσμός, κ.ά). Μια πρώτη γραφή στατιστικής μορφής με αριθμητικά δεδομένα είναι “*ο νεών κατάλογος*” ο κατάλογος δηλαδή των πλοίων των Αχαιών που εκστράτευσαν εναντίον της Τροίας, όπως διασώζεται στην β' ραψωδία της Ιλιάδας του Ομήρου (στ. 494-759). Από τον κατάλογο αυτόν οι ιστορικοί άντλησαν σημαντικές εκτιμήσεις της οικονομικής ευρωστίας και του πληθυσμού των πόλεων-κρατών που συμμετείχαν στον Τρωικό πόλεμο. Πρώτη όμως ιστορική συλλογή καθαρά στατιστικών στοιχείων θεωρείται η απογραφή πληθυσμού από τον Αυτοκράτορα της Κίνας Γιάο (Yao) το 2238 π.Χ.
Οι αρχαιότερες στατιστικές, όπως οι απογραφές πληθυσμού των αρχαίων Αιγυπτίων, των Βαβυλωνίων και των Κινέζων πραγματοποιούνταν για δύο κυρίως λόγους. Για την καταγραφή όσων μπορούσαν να φέρουν όπλα και για τον επιμερισμό και την είσπραξη των φόρων. Απογραφές, έκαναν και οι Ρωμαίοι κάθε 15 χρόνια, με χαρακτηριστικότερη την απογραφή του Αύγουστου Οκταβιανού. Η απογραφή αυτή ήταν η πρώτη που πραγματοποιήθηκε στην περιοχή της Ιουδαίας, που ήταν τότε υπό την κυριαρχία των Ρωμαίων και είναι αυτή που αναφέρεται στην Καινή Διαθήκη και συνδέεται με την γέννηση του Χριστού.
Στο τέλος του 11ου αιώνα, επί εποχής Γουλιέλμου του Κατακτητή, πραγματοποιήθηκε μια σπουδαία στατιστική απογραφή που αφορούσε μονάδες παραγωγής της Αγγλίας, όπως μεταλλεία, ιχθυοτροφεία κ.λπ. Οι μεγάλοι όμως ρυθμοί θνησιμότητας που άρχισαν να παρατηρούνται λίγο αργότερα, από επιδημικές ασθένειες, πολέμους και λιμοκτονίες έδωσαν ιδιαίτερη ώθηση στη στατιστική έρευνα καταγράφοντας αιτίες και απώλειες. Έτσι το 1348 ξεκίνησαν οι καταγραφές θανάτων από την πανώλη, την φοβερή ασθένεια που κράτησε τέσσερις αιώνες. Στις καταγραφές αυτές προστέθηκαν και θάνατοι από άλλες αιτίες.
Το 1620 ο Άγγλος έμπορος Τζον Γκράουντ ξεκίνησε πρώτος μια δειγματοληπτική έρευνα σε οικογένειες του Λονδίνου όπου και διαπίστωσε ότι σε κάθε 88 άτομα υπήρχαν τρεις θάνατοι. Από το στοιχείο αυτό και χρησιμοποιώντας τους εν λόγω καταλόγους που έδιναν 13.200 θανάτους εκτιμήθηκε ότι ο πληθυσμός του Λονδίνου το 1620 αριθμούσε 387.000 κατοίκους. Έτσι πολλοί επιστήμονες θέτουν ως αφετηρία της Στατιστικής το έτος 1663, με την έκδοση του βιβλίου *Φυσικές και Πολιτικές παρατηρήσεις της Θνησιμότητας* του John Graunt (Wikipedia). Το έργο του Γκράουντ ήταν πρώιμο παράδειγμα Επιδημιολογίας, δηλαδή στατιστικής μελέτης για την υγεία και τις ασθένειες των πληθυσμών.
Η ραγδαία ανάπτυξη του εμπορίου που σημειώθηκε από τον 16ο αιώνα και μετά, υποχρέωσε κατά μία έννοια, τις αρχές των κρατών να μελετήσουν τα νέα οικονομικά δεδομένα του εμπορίου των

μεταφορών και των βιομηχανιών καθώς και του εργατικού δυναμικού. Η Αναλογιστική (η επιστήμη που εφαρμόζει μαθηματικές και στατιστικές μεθόδους για την εκτίμηση των κινδύνων στον τομέα της ασφάλισης) έγινε μια επίσημη επιστήμη στα τέλη του 17ου αιώνα, λόγω της αυξημένης ζήτησης για μακροπρόθεσμη ασφαλιστική κάλυψη. Ενώ παλιότερα η Στατιστική ασχολείτο μόνο με την παράθεση τεράστιων πινάκων με δεδομένα και αναρίθμητα διαγράμματα, σήμερα η στατιστική έρευνα από μαθηματική τεχνική έχει αναχθεί σε αυτοτελή επιστήμη ακολουθώντας ιδιαίτερες μεθόδους ανάλυσης. Τις στατιστικές μεθόδους τις χρησιμοποιεί σχεδόν το σύνολο των επιστημονικών ειδικοτήτων, για να θεμελιωθούν προβλέψεις, να εντοπιστούν αιτίες που παράγουν αποτελέσματα και να εξαχθούν συμπεράσματα για ένα μεγάλο σύνολο δεδομένων εξετάζοντας μόνο ένα μικρό σύνολο από αυτά. Κύριο αντικείμενο έρευνας και μελέτης της επιστήμης της Στατιστικής είναι η **συλλογή**, **ταξινόμηση**, **επεξεργασία**, **παρουσίαση**, **ανάλυση** και **ερμηνεία** διαφόρων δεδομένων με απώτερο στόχο την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων για τη λήψη ορθών αποφάσεων.

Τι περιέχει το κεφάλαιο της Στατιστικής και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών;

Οι μαθητές, από το Δημοτικό κιόλας, έχουν έλθει σε επαφή με βασικές έννοιες της Στατιστικής, όπως είναι τα ποσοστά, οι πίνακες συχνοτήτων, τα διαγράμματα και η μέση τιμή. Στην Α΄ τάξη του Λυκείου έγινε εισαγωγή στην έννοια της πιθανότητας για την οποία, εκτός από τον κλασικό, δόθηκε και ο στατιστικός ορισμός της.

Στη Β΄ τάξη του Λυκείου γίνεται συστηματικότερη μελέτη των βασικών εννοιών και μεθόδων της περιγραφικής Στατιστικής και οι γνώσεις των μαθητών εμπλουτίζονται με επιπλέον στατιστικά διαγράμματα και στατιστικές παραμέτρους.

Πιο συγκεκριμένα:

- Παρουσιάζεται η ανάγκη χρησιμοποίησης δειγμάτων για μια στατιστική έρευνα.
- Εξηγούνται οι μέθοδοι οργάνωσης και παρουσίασης των δεδομένων με στατιστικούς πίνακες και διαγράμματα.
- Εισάγονται τα στατιστικά μέτρα θέσης και μεταβλητότητας, αναγκαία για τη συνοπτική παρουσίαση των δεδομένων και την εξαγωγή συμπερασμάτων.
- Παρουσιάζεται το θηκόγραμμα, ένα διάγραμμα στο οποίο ενσωματώνονται όλες οι πληροφορίες μιας στατιστικής έρευνας.

Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο της Στατιστικής;

Ο πολίτης κατακλύζεται καθημερινά από στατιστικές πληροφορίες. Οι δημοσκοπήσεις, οι οικονομικές αναλύσεις, οι επιστημονικές ανακοινώσεις, οι κοινωνικές μελέτες, τα μετεωρολογικά και γεωλογικά δελτία είναι γεμάτα από όρους και στατιστικά διαγράμματα σε μια προσπάθεια να δοθεί εγκυρότητα στις απόψεις που παρουσιάζονται. Οι στατιστικές αποτελούν πολλές φορές τη βάση πάνω στην οποία οι αρμόδιοι λαμβάνουν αποφάσεις που αφορούν τη ζωή των πολιτών.

Ενα σύγχρονο Πρόγραμμα Σπουδών πρέπει να προετοιμάζει τους αυριανούς πολίτες, να έχουν μια θετική στάση για τις στατιστικές πληροφορίες, να κατανοούν τις βασικές έννοιες και τις μεθόδους της Στατιστικής, αλλά και να είναι σε θέση να ελέγχουν κριτικά τα αποτελέσματα, τις ερμηνείες και τα συμπεράσματα των στατιστικών ερευνών. Ο στατιστικός αλφαβητισμός, αποτελεί μία ανάγκη της σύγχρονης αντίληψης για την μαθηματική παιδεία, καθώς σηματοδοτεί την αναγνώριση της αξίας μη αιτιοκρατικών προσεγγίσεων της ερμηνείας πολλών φαινομένων.

Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο της Στατιστικής;

- Η συγκέντρωση **δεδομένων** είναι μια μέθοδος επίλυσης προβλημάτων στα οποία δεν μπορούμε να απαντήσουμε άμεσα.
- Αντί της εξέτασης όλων των ατόμων ενός πληθυσμού, είναι προτιμότερο να εξετάσουμε ένα **δείγμα,** δηλαδή ένα μικρό υποσύνολο του, επιλεγμένο όμως με τέτοιον τρόπο, ώστε να «μοιάζει» με τον πληθυσμό.
- Η κατανόηση και η επεξεργασία των δεδομένων που είναι «ατάκτως ερριμμένα», καθώς και η εξαγωγή συμπερασμάτων, γίνεται δυνατή μόνο αφού τα δεδομένα οργανωθούν σε **πίνακες συχνοτήτων** και παρουσιαστούν με στατιστικά **διαγράμματα**.
- Η συνοπτική παρουσίαση των δεδομένων και η παραπέρα επεξεργασία τους γίνεται με τα **μέτρα θέσης** και τα **μέτρα διασποράς**, τα οποία ενσωματώνουν το μεγαλύτερο μέρος των πληροφοριών που περιέχονται σε ένα δείγμα.
- Η από κοινού παρουσίαση στατιστικών μέτρων μιας κατανομής με το **θηκόγραμμα**, βοηθάει στο σχηματισμό ολοκληρωμένης εικόνας της κατανομής.

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Ε1 Ποιες είναι οι βασικές έννοιες της Στατιστικής ;

Ε2 Με ποιές μεθόδους γίνεται η συλλογή των δεδομένων και ποια είναι τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα καθεμιάς**;**

Ε3 Πως οργανώνουμε τα δεδομένα σε πίνακες συχνοτήτων;

Ε4 Ποιοι είναι οι βασικοί τρόποι παράστασης των δεδομένων με διαγράμματα;

Ε5 Ποια είναι τα μέτρα θέσης μιας κατανομής και ποια τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα καθενός;

Ε6 Ποια είναι τα μέτρα μεταβλητότητας μιας κατανομής και ποια τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα καθενός;

Ε7 Τι παρουσιάζει ένα θηκόγραμμα και ποια είναι η σημασία του για τη σύγκριση δυο κατανομών;

Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά το τέλος της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να :

Μ1 Να μπορούν να κατηγοριοποιούν τις μεταβλητές σε ποιοτικές και ποσοτικές και να αναγνωρίζουν την αναγκαιότητα χρήσης δειγμάτων. (στόχοι Π.Σ 5.1)

Μ2 Να οργανώνουν και να παρουσιάζουν δεδομένα σε πίνακες συχνοτήτων και να εξάγουν συμπεράσματα από αυτούς. (στόχοι Π.Σ 5.2)

Μ3 Να οργανώνουν και να παρουσιάζουν δεδομένα με κατάλληλες γραφικές παραστάσεις και να εξάγουν συμπεράσματα από αυτές. (στόχοι Π.Σ 5.3)

Μ4 Να υπολογίζουν μέτρα θέσης και μεταβλητότητας και κυρίως να μπορούν να εξηγούν τη σημασία τους εντός του πλαισίου των δεδομένων. (στόχοι Π.Σ 5.4.1, 5.4.3)

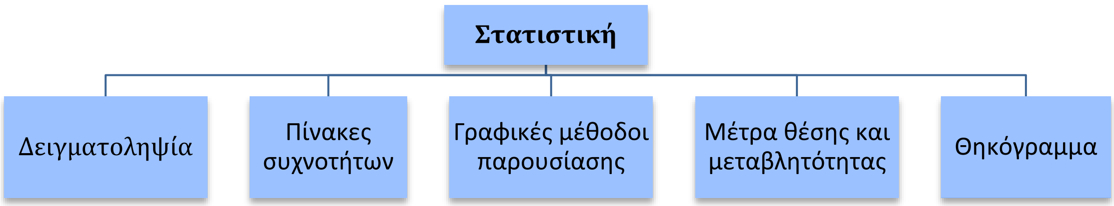
Μ5 Να συγκρίνουν χαρακτηριστικά δύο ή περισσότερων δειγμάτων με βάση τα μέτρα θέσης και διασποράς. (στόχοι Π.Σ 5.4.5)

Μ6 Να κατασκευάζουν και να διαβάζουν θηκογράμματα, και να συγκρίνουν δύο κατανομές δεδομένων από τις πληροφορίες που αντλούν από τα αντίστοιχα θηκογράμματα. (στόχοι Π.Σ 5.5)

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου της Στατιστικής

Όσα αναφέρονται στη συνέχεια είναι προτεινόμενα ώστε ο διδάσκων να διαθέτει μία οργανωμένη πρόταση διδασκαλίας.

Κατά αρχήν καλό θα είναι ο διδάσκων να διαθέτει μία γενική εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η διδασκαλία του κεφαλαίου όπως η παρακάτω



Με βάση τα μαθησιακά αποτελέσματα και τα ερωτήματα στα οποία θα πρέπει να μπορεί να απαντά ο μαθητής μετά τη διδασκαλία των Προόδων, κάνουμε κάποιες επισημάνσεις:

- **Δειγματοληψία**

Με κατάλληλα παραδείγματα οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν τις βασικές έννοιες της Στατιστικής όπως πληθυσμός, μεταβλητή (ποιοτική ποσοτική) απογραφή και δείγμα. Τα προβλήματα με τα οποία θα εμπλακούν οι μαθητές θα πρέπει να είναι πραγματικά και να αναφέρονται σε καταστάσεις που τους αφορούν.

Η ανάδειξη της σπουδαιότητας του αντιπροσωπευτικού δείγματος από το οποίο μπορούν να προκύψουν πληροφορίες για ολόκληρο τον πληθυσμό, μπορεί να γίνει με αναφορά σε διάφορες δημοσκοπήσεις που έγιναν και απέτυχαν επειδή το δείγμα που επιλέχθηκε δεν ήταν αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού όπως για παράδειγμα οι προεδρικές εκλογές ΗΠΑ το 1936.

- **Οργάνωση και παρουσίαση δεδομένων σε πίνακες**

Μια από τις σημαντικότερες διαδικασίες για την οργάνωση και συνοπτική παρουσίαση των δεδομένων είναι η κατανομή συχνοτήτων. Είναι σημαντικό οι μαθητές να κατανοήσουν ότι :

- Οι τιμές μιας μεταβλητής δεν ταυτίζονται με τις παρατηρήσεις. Έτσι, για παράδειγμα, ενώ οι τιμές της μεταβλητής «ομάδα αίματος» είναι Α, Β, ΑΒ και Ο, σε ένα δείγμα 40 ατόμων, καθεμία από αυτές τις τιμές μπορεί να καταγραφεί πολλές φορές. Η συχνότητα v_i μιας τιμής x_i δηλώνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i στο δείγμα.
- Με την κατανομή σχετικών συχνοτήτων γίνεται συμπίεση μιας μεγάλης ενδεχομένως κλίμακας των δεδομένων στην κλίμακα από 0 έως 1 (0% - 100%), οι υπάρχουσες σχέσεις μεταξύ των δεδομένων γίνονται άμεσα κατανοητές και επιπλέον διευκολύνεται η σύγκριση μεταξύ πληθυσμών, όταν αυτοί εξετάζονται ως προς την ίδια μεταβλητή.
- Η κατανομή αθροιστικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων μας παρέχει άλλου είδους πληροφορίες, αφού μας γνωστοποιούν πόσες ή ποιο ποσοστό παρατηρήσεων είναι ίσες ή μικρότερες από μια ορισμένη τιμή. Για παράδειγμα, έχει μεν κάποια αξία η πληροφορία ότι ένας μαθητής πήρε σε ένα διαγώνισμα 15, αλλά έχει μεγαλύτερη σημασία η πληροφορία ότι από τους 25 μαθητές της τάξης του οι 18 έγραψαν ίσο ή λιγότερο από 15 (στην περίπτωση αυτή το 18 είναι η αθροιστική συχνότητα του 15).

- **Οπτικοποίηση των δεδομένων** (Παρουσίαση των δεδομένων με διαγράμματα)

Οπτικοποίηση είναι η ικανότητα, η διαδικασία και το προϊόν της δημιουργίας, ερμηνείας και χρήσης εικόνων, σχεδίων και διαγραμμάτων στο χαρτί, στην οθόνη ή στο μυαλό μας, με σκοπό την αποτύπωση και την κοινοποίηση πληροφοριών, καθώς και τον προβληματισμό για την ανάπτυξη άγνωστων προηγουμένως ιδεών και την προώθηση αντιλήψεων.

Ο κύριος στόχος των οπτικοποίησης των δεδομένων είναι να κοινοποιεί πληροφορίες με σαφήνεια και αποτελεσματικότητα μέσω γραφικών αναπαραστάσεων. Αυτό δεν σημαίνει ότι η οπτικοποίηση θα πρέπει να είναι βαρετή για να είναι λειτουργική ή εξαιρετικά περίπλοκη για να φαίνεται «ωραία».

Προκειμένου να μεταφερθούν οι ιδέες αποτελεσματικά, πρέπει τόσο η αισθητική μορφή όσο και η λειτουργικότητα να συμβαδίζουν, παρέχοντας γνώσεις για σύνθετα δεδομένα με έναν πιο διαισθητικό τρόπο που καθορίζεται από τις βασικές πτυχές της επικοινωνίας.
Η δημιουργία ενός διαγράμματος είναι μια κωδικοποίηση των πληροφοριών, ενώ η ανάγνωση του μια αποκωδικοποίηση. O Cleveland (1985) υποστηρίζει ότι ο δημιουργός μιας γραφικής παράστασης κωδικοποιεί τις πληροφορίες, ενώ ο αναγνώστης τις αποκωδικοποιεί.
Η ικανότητα της κριτικής ανάγνωσης των δεδομένων είναι μια συνιστώσα του στατιστικού αλφαβητισμού και μια ανάγκη της κοινωνίας μας στο σύγχρονο τεχνικό και οικονομικό περιβάλλον. Η αναπαράσταση των δεδομένων με στατιστικά διαγράμματα είναι μεν ενδιαφέρουσα και ελκυστική και, επιπλέον, ένα διάγραμμα, έχει μεγάλη δύναμη πληροφόρησης, αλλά μπορεί και εύκολα να παραπλανήσει τον αναγνώστη.

Σήμερα βέβαια τα στατιστικά διαγράμματα κατασκευάζονται με τη βοήθεια λογισμικών, αλλά για να είναι αξιοποιήσιμα από τους μαθητές πρέπει, πριν τη χρήση έτοιμων διαγραμμάτων, να τους δοθούν ευκαιρίες να κατασκευάσουν μόνοι τους διαγράμματα. Μέσα από αυτές τις δραστηριότητες, οι μαθητές θα κατανοήσουν τα κριτήρια επιλογής του κατάλληλου διαγράμματος, τη λογική και τις δυσκολίες της κατασκευής του, τα συστατικά του και το στόχο στον οποίο αποβλέπει.

<u>Προτεινόμενη δραστηριότητα</u>

Οι βαθμοί 24 μαθητών ενός τμήματος σ ένα διαγώνισμα, βαθμολογημένο σε εκατονταβάθμια κλίμακα, είναι οι παρακάτω :

92, 86, 49, 86, 82, 56, 91, 63, 64, 73, 78, 81, 62, 48, 88, 54, 72, 77, 87, 53, 78, 61, 60, 89

Ο καθηγητής παρουσίασε τα δεδομένα με ένα φυλλόγραμμα και ένα διάγραμμα σχετικής συχνότητας. Από ποιο, από τα δύο αυτά διαγράμματα, αντλούμε περισσότερες πληροφορίες για την επίδοση των μαθητών;

Φυλλόγραμμα

Μίσχος	Φύλλο						
4	9	8					
5	6	4	3				
6	3	4	2	1	0		
7	3	8	2	7	8		
8	6	6	2	1	8	7	9
9	2	1					

Κατανομή συχνότητας

Κλάσεις [-)	Συχνότητα ν_i
[40, 50)	2
[50, 60)	3
[60, 70)	5
[70, 80)	5
[80, 90)	7
[90, 100]	2
	24

<u>Σχόλιο</u>

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ως μίσχο θεωρήσαμε τις δεκάδες και ως φύλλα τις μονάδες της βαθμολογίας των μαθητών. Από το φυλλόγραμμα (steam-leaf plots) μπορούν οι μαθητές, αμέσως, να διαπιστώσουν αν μια συγκεκριμένη τιμή ανήκει στο δείγμα π.χ το 50 (η βάση της βαθμολογίας), μπορεί να "δουν" ότι δύο βαθμολογίες που είναι κάτω από τη βάση είναι κοντά στην βάση(49 και 48), οι δύο βαθμολογίες της ανώτερης κλάσης είναι κοντά στο κάτω άκρο της (92 και 91)ενώ υπάρχουν δύο μαθητές με βαθμολογία 78 και άλλοι δύο με 86, κάτι το οποίο δεν είναι δυνατόν να γίνει από τον πίνακα συχνοτήτων ή το ιστόγραμμα, όπου πολλές πληροφορίες χάνονται.

- **Μέτρα θέσης** *(μέση τιμή, επικρατούσα τιμή , διάμεσος)*

Τα ποσοτικά δεδομένα μπορούν να περιγραφούν με τα μέτρα κεντρικής τάσης και με τα μέτρα διασποράς. Στους μαθητές πρέπει να δοθούν δραστηριότητες με τις οποίες θα κατανοήσουν όχι μόνο τη χρησιμότητα των μέτρων θέσης στην περιγραφή των δεδομένων, αλλά θα αντιμετωπίσουν και τους περιορισμούς, τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα στη χρήση της κάθε παραμέτρου. Για παράδειγμα, για την περιγραφή μιας περίπου συμμετρικής κατανομής ενδείκνυται η μέση τιμή, αφού λαμβάνει υπόψη όλα τα δεδομένα, ενώ για μια κατανομή με ασυμμετρία ενδείκνυται η διάμεσος, αφού μένει ανεπηρέαστη από τις ακραίες τιμές, στις οποίες η μέση τιμή είναι πολύ ευαίσθητη. Επίσης για την περιγραφή μιας κατανομής ποιοτικών δεδομένων δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ούτε τη μέση τιμή, ούτε τη διάμεσο, αλλά μόνο την επικρατούσα τιμή.
Η μέση τιμή, λόγω των καλών στατιστικών ιδιοτήτων που έχει, χρησιμοποιείται συχνότερα από τις άλλες παραμέτρους θέσεις.

Πτυχές της εννοιολογικής κατανόησης της μέσης τιμής είναι οι εξής:

(α) Η μέση τιμή βρίσκεται μεταξύ των ακρότατων τιμών της κατανομής

(β) Το άθροισμα των αποκλίσεων από τη μέση τιμή είναι μηδέν

(γ) Η μέση τιμή επηρεάζεται από όλες τις τιμές

(δ) Η μέση τιμή δεν είναι αναγκαστικά ίση με ένα δεδομένο

(ε) Η μέση τιμή μπορεί να είναι ένα κλάσμα που δεν έχει φυσική ερμηνεία

(στ) Όταν στα δεδομένα υπάρχει η τιμή μηδέν , πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στον υπολογισμό της μέσης τιμής.

Έχει διαπιστωθεί ότι οι μαθητές που έχουν κατανοήσει την έννοια των παραμέτρων θέσεως μπορούν:

α) Για ένα σύνολο δεδομένων, να επιλέγουν την καταλληλότερη παράμετρο θέσης και να την υπολογίζουν

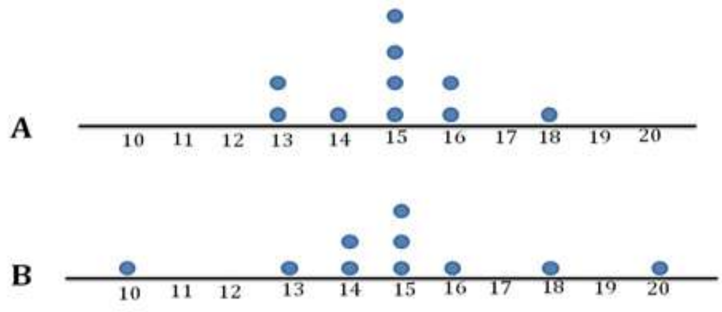
β) Να κατασκευάζουν ένα σύνολο δεδομένων που έχει δεδομένη παράμετρο θέσεως

γ) Να κατανοούν την επίδραση που έχει μια μεταβολή σε ένα ή και περισσότερα

δεδομένα στις παραμέτρους θέσεως

- **Μέτρα διασποράς** *(εύρος, διακύμανση, τυπική απόκλιση)*

Δυο κατανομές ενδέχεται να έχουν την ίδια μέση τιμή, αλλά ωστόσο να είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Για παράδειγμα οι παρακάτω κατανομές Α και Β έχουν την ίδια μέση τιμή 15, αλλά στην πρώτη οι τιμές είναι πιο συγκεντρωμένες κοντά στη μέση τιμή, ενώ στη Β είναι πιο διασκορπισμένες ως προς τη μέση τιμή. Για να περιγράψουμε αυτό το φαινόμενο χρησιμοποιούμε άλλες παραμέτρους, τις λεγόμενες παραμέτρους διασποράς.



Ενα μέτρο διασποράς είναι το **εύρος** που ισούται με τη διαφορά της ελάχιστης από τη μέγιστη τιμή ενός δείγματος και χρησιμοποιείται συχνά σε περιπτώσεις ελέγχου ποιότητας βιομηχανικών προϊόντων, όταν εργαζόμαστε σε πολλά ισομεγέθη δείγματα. Αυτό γίνεται διότι το εύρος υπολογίζεται εύκολα και έχει άμεσα κατανοητή ερμηνεία. Έτσι στην κατανομή Α το εύρος είναι 18-13=5, ενώ στην κατανομή Β είναι 20-10=10. Το εύρος όμως έχει τα μειονεκτήματα να εξαρτάται μόνο από τις ακραίες τιμές, παραβλέποντας όλες τις άλλες, είναι ευαίσθητο στις ακραίες τιμές και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη σύγκριση της διακύμανσης δυο δειγμάτων διαφορετικού μεγέθους.

Το σημαντικότερο μέτρο διασποράς είναι **η διακύμανση** ή **διασπορά.** Η διασπορά ορίζεται ως η μέση τιμή των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή και συμβολίζεται με s^2, δηλαδή ισχύει: $s^2 = \dfrac{(t_1-\overline{x})^2+(t_2-\overline{x})^2+(t_3-\overline{x})^2+\ldots+(t_\nu-\overline{x})^2}{\nu}$

Τα πλεονεκτήματα της διασποράς είναι ότι λαμβάνει υπόψη όλες τις παρατηρήσεις και έχει πολύ καλές στατιστικές ιδιότητες που χρησιμοποιούνται στη στατιστική συμπερασματολογία. Μειονέκτημα της διασποράς είναι το γεγονός ότι δεν εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τη μεταβλητή, αλλά αυτό θεραπεύεται με την εξαγωγή της τετραγωνικής της ρίζας, οπότε το μέτρο διασποράς που προκύπτει λέγεται **τυπική απόκλιση.**

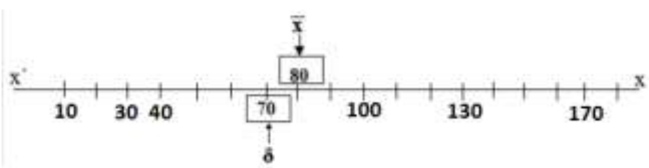
<u>Προτεινόμενη Δραστηριότητα</u>

Η μέση τιμή των δεδομένων που δίνονται στον άξονα είναι 80 και η διάμεσος είναι 70.

1. Μπορείτε να αλλάξετε κάποια δεδομένα έτσι ώστε να διατηρηθεί στη θέση της η διάμεσος;

2. Μπορείτε να αλλάξετε κάποια δεδομένα έτσι ώστε να διατηρηθεί στη θέση της η μέση τιμή;

3. Μπορείτε να αλλάξετε κάποια δεδομένα έτσι ώστε να διατηρηθούν στη θέση τους η μέση τιμή και η διάμεσος;



Προτεινόμενη Δραστηριότητα

Μπορείτε να κατασκευάσετε ένα σύνολο πέντε αριθμητικών δεδομένων με μέση τιμή 20, διάμεσο 10 και εύρος 50;

Λύση

Πρέπει να συμπληρώσουμε πέντε θέσεις:

____ ____ ____ ____ ____

Η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή , η διάμεσος, θα είναι υποχρεωτικά δ=10 :

____ ____ 10 ____ ____

Η διαφορά των ακραίων παρατηρήσεων, δηλαδή το εύρος, πρέπει να είναι

R = 50, για παράδειγμα μπορεί οι ακραίες παρατηρήσεις να είναι 5 και 55:

5 ____ 10 ____ 55

Οι δυο άλλοι αριθμοί πρέπει να έχουν άθροισμα 30 και μπορεί για παράδειγμα να είναι οι 8 και 22, οπότε αριθμοί που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις είναι οι :

5 8 10 22 55

- **Κατασκευή θηκογράμματος**

Το θηκόγραμμα(Boxplot) είναι ένα γράφημα με το οποίο μπορούμε να παρουσιάσουμε τα κυριότερα χαρακτηριστικά της κατανομής του δείγματος. Μας βοηθάει να έχουμε μια εποπτική εικόνα της κατανομής της μεταβλητής και να εντοπίζουμε τυχόν παράτυπα σημεία. Επίσης, μπορούν να προϊδεάσουν για τη σχηματική μορφή της κατανομής ως προς την ασυμμετρία που πιθανώς αυτή εμφανίζει.

Το Φυλλόγραμμα και το Θηκόγραμμα (box plot) είναι οι πιο γνωστές τεχνικές μεθόδων διερευνητικής ανάλυσης που είναι ένας συνδυασμός γραφικών και αριθμητικών μεθόδων για διερεύνηση τάσεων και ιδιαίτερων τιμών στα δεδομένα.

(Προτεινόμενη δραστηριότητα η Δ30 του Π.Σ)

Πιθανές δυσκολίες – παρανοήσεις

- Διαγράμματα

Στην κατασκευή διαγραμμάτων οι μαθητές:

- παραλείπουν την οριζόντια ή την κατακόρυφη κλίμακα
- Δεν επισημαίνουν την αρχή των αξόνων

- Δεν μπορούν να διαιρέσουν τους άξονες σύμφωνα με τις κλίμακες μέτρησης των χαρακτηριστικών που εξετάζονται
- Παραλείπουν τη σήμανση των αξόνων

Χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στη χρήση λογισμικών για την κατασκευή στατιστικών διαγραμμάτων. Μια ακατάλληλη χρήση λογισμικών αποκρύπτει παρανοήσεις, όπως για παράδειγμα, όταν σε ένα κυκλικό διάγραμμα οι τομείς δεν είναι ανάλογοι προς τις συχνότητες των τιμών της μεταβλητής. Η ευκολία της κατασκευής γραφημάτων με computer ενέχει τον κίνδυνο της μη χρησιμοποίησης της κοινής λογικής. Για παράδειγμα της σύγκρισης στο ίδιο γράφημα 25 καθισμάτων με 40 κιλά κρέας.

- *Παράμετροι θέσης*

Η αδυναμία πολλών μαθητών να επιλύουν ορισμένα προβλήματα, οφείλεται στο γεγονός ότι δεν έχουν αποκτήσει μια καθαρή εννοιολογική αντίληψη της μέσης τιμής. Η γνώση μόνο του υπολογιστικού κανόνα όχι μόνο δεν συνεπάγεται μια βαθειά κατανόηση της έννοιας αυτής , αλλά μπορεί στην πραγματικότητα να εμποδίζει την απόκτηση της. Η αποστήθιση του υπολογιστικού τύπου είναι ένα φτωχό υποκατάστατο της έννοιας.

Η μελέτη της διαμέσου παρουσιάζει τόσο υπολογιστικές όσο και εννοιολογικές δυσκολίες. Κατ' αρχήν ο υπολογισμός της διαμέσου, καθώς και των τεταρτημορίων και των εκατοστημορίων, γίνεται με διαφορετικούς αλγορίθμους στις ομαδοποιημένες απ' ότι στις μη ομαδοποιημένες κατανομές. Όπως γνωρίζουμε, η απόφαση για το αν θα ομαδοποιηθούν ή όχι τα δεδομένα και η επιλογή του πλάτους των διαστημάτων παίρνεται από εκείνον που κάνει την ανάλυση των στοιχείων.

Οι μαθητές βρίσκουν δυσκολία στο να αποδεχτούν δυο διαφορετικούς αλγορίθμους υπολογισμού της ίδιας έννοιας και, πολύ περισσότερο, όταν για την ίδια παράμετρο έχουν διαφορετικά αποτελέσματα, ανάλογα με την επιλογή της μεθόδου και την επιλογή του πλάτους των διαστημάτων.

Αν εργαζόμαστε με μη ομαδοποιημένα δεδομένα, η γραφική αναπαράσταση των αθροιστικών συχνοτήτων είναι μια ασυνεχής συνάρτηση, η οποία παίρνει σταθερή τιμή μεταξύ δυο διαδοχικών τιμών της μεταβλητής. Έχουν παρατηρηθεί δυσκολίες στην ερμηνεία του γραφήματος των αθροιστικών συχνοτήτων , διότι μια τιμή στον άξονα των x μπορεί να έχει δυο διαφορετικές εικόνες, ή διαφορετικές τιμές στον άξονα των x να έχουν την ίδια εικόνα.

Υπάρχει μεγάλη απόσταση μεταξύ εννοιολογικής γνώσης της διαμέσου και του αλγορίθμου που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της. Για να περάσουμε από τον ορισμό της διαμέσου ως «μεσαίας παρατήρησης», ή, ως «της τιμής ως προς την οποία το πολύ το 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτή και το πολύ το 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτή», στον υπολογισμό της, υπάρχουν πολλά βήματα τα οποία δεν εξηγούνται πάντοτε επαρκώς ή δεν είναι επαρκώς κατανοητά. Ο τελικός αλγόριθμος προκύπτει από την επίλυση της ανίσωσης $F(x)\le\frac{n}{2}$, όπου n είναι το μέγεθος του δείγματος. Είναι ανάγκη να λυθεί η ανίσωση στην οποία $F(x)$ είναι η συνάρτηση μιας εμπειρικής κατανομής και μπορεί να μην δίνεται με έναν αλγεβρικό τρόπο , αλλά μόνο μέσω ενός πίνακα αριθμητικών δεδομένων. (Έτσι κάποιος πρέπει να χρησιμοποιήσει παρεμβολή για να προσεγγίσει την $F(x)$).

Έχει παρατηρηθεί ότι αν και οι μαθητές έχουν αντιληφθεί ότι η διάμεσος είναι μια κεντρική τιμή για «κάτι», ωστόσο πολλές φορές είναι εμφανής η αμφιβολία τους για το τι είναι αυτό το «κάτι». Άλλοι μαθητές μπορεί να ερμηνεύουν τη διάμεσο ως το μεσαίο αριθμό στην καταγραφή των παρατηρήσεων πριν γίνει η διάταξη τους από το μικρότερο στο μεγαλύτερο, ή, σε έναν πίνακα συχνοτήτων, άλλοι ως το μεσαίο αριθμό στη στήλη των συχνοτήτων, ή ως το μεσαίο αριθμό στη στήλη των τιμών της μεταβλητής.

Για παράδειγμα, στον υπολογισμό της διαμέσου των δεδομένων:

14, 13, 16, 16, 13, 15, 18, 15, 15, 15

αρκετοί μαθητές παραλείπουν να τα διατάξουν κατά αύξουσα σειρά και δίνουν ως διάμεσο την τιμή $\frac{13+15}{2}=14$. Επίσης όταν στη συνέχεια δίνονται τα ίδια δεδομένα με μορφή πίνακα συχνοτήτων:

Τιμή	Συχνότητα
13	2
14	1
15	4
16	2
18	1
Σύνολο	10

άλλοι μαθητές δίνουν ως διάμεσο την τιμή 15 (σωστό αποτέλεσμα στο οποίο φτάνουν με λάθος λογική!) και άλλοι την τιμή 4.

- *Μέτρα διασποράς*

Έχει παρατηρηθεί ότι για την εκτίμηση της διασποράς πολλές φορές οι μαθητές χρησιμοποιούν τη «διαφορετικότητα» των παρατηρήσεων παρά τις αποκλίσεις τους από τη μέση τιμή. Για παράδειγμα, αν δοθούν στους μαθητές τα σύνολα των αριθμών

Α: *10, 20, 30, 40, 50*, 60 και ***Β***: *10, 10, 10, 60, 60, 60*

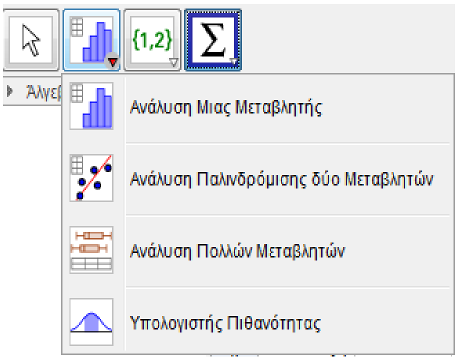
και τους ζητηθεί να απαντήσουν στο ερώτημα ποιο από τα δυο σύνολα δεδομένων έχει μεγαλύτερη διακύμανση, πολλοί μαθητές ενδέχεται να απαντήσουν ότι τα δεδομένα Α έχουν μεγαλύτερη διακύμανση από τα δεδομένα Β , συγχέοντας την έννοια της διασποράς με την έννοια της ανομοιομορφίας των τιμών. Ωστόσο η διακύμανση των δεδομένων Α είναι μικρότερη από εκείνη των δεδομένων Β, πράγμα που φανερώνει ελλιπή εννοιολογική κατανόηση της διασποράς. Αυτό είναι αποτέλεσμα της ιδιαίτερης σημασίας που δίνεται στους τύπους υπολογισμού της με αποτέλεσμα οι υπολογισμοί αυτοί να υπερισχύουν της κοινής λογικής.

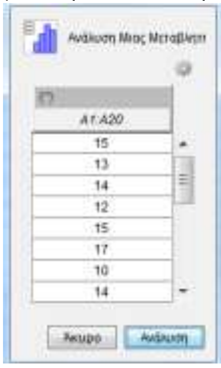
Αξιοποίηση της Τεχνολογίας στην διδασκαλία του κεφαλαίου

Δραστηριότητα Στατιστικής με το λογισμικό Geogebra

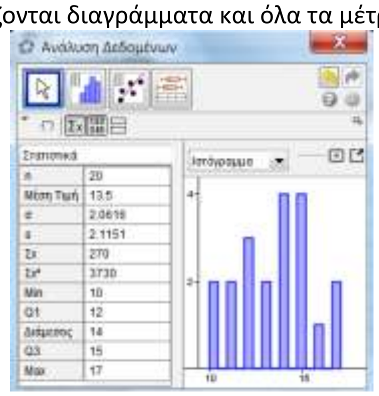
1) Εγκαταστήστε το λογισμικό Geogebra και ανοίξτε ένα αρχείο.
2) Από το μενού Προβολή επιλέξτε το λογιστικό φύλλο και κάντε κλικ πάνω σε αυτό. Συμπληρώστε την πρώτη στήλη με τους βαθμούς των μαθητών ενός τμήματος στα Μαθηματικά. Στην οθόνη θα πρέπει να έχετε την παρακάτω εικόνα.

3) Επιλέξτε όλες τις εγγραφές της στήλης με τους βαθμούς και στη συνέχεια επιλέξτε Ανάλυση μίας μεταβλητής και θα εμφανιστεί ο πίνακας που φαίνεται στην παρακάτω αντίστοιχη εικόνα.





4) Πατώντας ¨Ανάλυση¨ εμφανίζονται διαγράμματα και όλα τα μέτρα θέσης και διασποράς.



Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να αλλάξουν τον τρόπο παράστασης από Ιστόγραμμα σε Ραβδόγραμμα ή Θηκόγραμμα ή Σημειόγραμμα και να μελετήσουν τους συγκεκριμένους τρόπους παράστασης. Επιπλέον έχουν την ευκαιρία να πειραματιστούν αλλάζοντας τις τιμές των βαθμών στον πίνακα (+ENTER)και να μελετήσουν τις αλλαγές που συμβαίνουν στις παραστάσεις και στους δείκτες.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΜΕ ΧΡΗΣΗ GEOGEBRA

Η χρήση λογισμικού είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη διδασκαλία της Στατιστικής. Είναι προφανές ότι στα αρχικά στάδια επιβάλλεται να γίνουν με το χέρι όλες οι διαδικασίες (υπολογισμοί στατιστικών μέτρων, πίνακες, διαγράμματα κλπ), αλλά στη συνέχεια και προκειμένου να δοθεί έμφαση στην κατανόηση των εννοιών είναι χρήσιμο να μην αναλώνεται κάθε φορά ο διδακτικός χρόνος σε πράξεις και κατασκευές πινάκων ή διαγραμμάτων, αλλά η έμφαση να δίνεται στις ερμηνείες.

Προς την κατεύθυνση αυτή αρχικά θα παρουσιάσουμε ορισμένες βασικές εντολές του λογισμικού Geogebra που αναφέρονται στη Στατιστική και στη συνέχεια θα γίνει εφαρμογή των εντολών αυτών σε συγκεκριμένα παραδείγματα.

Ανάλυση μιας μεταβλητής (μόνο για ποσοτικές μεταβλητές):

1. Από το μενού <Προβολή> του Geogebra εμφανίζεται το Λογιστικό φύλο και με κλικ σε αυτό εμφανίζεται το μενού της Στατιστικής.

2. Με το εικονίδιο 2.1 του μενού της Στατιστικής πραγματοποιούμε ανάλυση μιας μεταβλητής. Για το σκοπό αυτό εγγράφουμε τις τιμές της μεταβλητής σε μια στήλη του Λογιστικού φύλου, επιλέγουμε τις τιμές και με κλικ στο 2.1 ανοίγει παράθυρο με τίτλο <Ανάλυση μιας μεταβλητής> και κλικ στο <Ανάλυση> εμφανίζεται ειδικό παράθυρο με τίτλο <Ανάλυση δεδομένων> στο οποίο αποτυπώνονται τα στατιστικά διαγράμματα. Το πρώτο διάγραμμα που αυτόματα εμφανίζεται είναι το ιστόγραμμα.

3. Στο παράθυρο της <Ανάλυσης δεδομένων>, από το κουμπί Σx, με τίτλο <Δείξε τα Στατιστικά>, εμφανίζουμε τα βασικά στατιστικά μέτρα μιας μεταβλητής (αριθμός ατόμων του δείγματος, μέσος όρος, τυπική απόκλισης, μέγιστο, ελάχιστο, διάμεσος, τεταρτημόρια).

4. Στο παραγόμενο ιστόγραμμα ο χωρισμός σε κλάσεις είναι αυτός που προτείνεται από το ίδιο το πρόγραμμα. Εάν θέλουμε διαφορετικό αριθμό κλάσεων μετακινούμε το δρομέα επιλογής αριθμού κλάσεων.

5. Από το κυλιόμενο μενού του ιστογράμματος μπορούμε να παράγουμε και άλλα διαγράμματα, με σημαντικότερα το σημειόγραμμα, το ραβδόγραμμα (κυρίως για ποιοτικές ή διακριτές ποσοτικές μεταβλητές) και το θηκόγραμμα.

6.Με κλικ στο βελάκι (Επιλογές), στο παράθυρο της <Ανάλυσης δεδομένων>, είναι δυνατό να κάνουμε τις εξής ρυθμίσεις:

Στον τύπο συχνότητας με το <μέτρησε> να εμφανίσουμε τον πίνακα συχνοτήτων, ενώ με το <σχετικά> να εμφανίσουμε τον πίνακα σχετικών συχνοτήτων. Εάν στον τύπο συχνότητας επιλέξουμε <συγκεντρωτικά> τότε με το <μέτρησε> έχουμε ιστόγραμμα και πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων, ενώ με το <σχετικά> έχουμε πολύγωνο και ιστόγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων. Από το βελάκι (Επιλογές) μέσω της εντολής <Γράφημα>, και με απενεργοποίηση των αυτόματων διαστάσεων, ρυθμίζουμε το βήμα (μονάδα) και τις διαστάσεις (μεγίστη και ελαχίστη τιμή) των αξόνων. Η επιλογή αυτή είναι ιδιαίτερη χρήσιμη διότι επιτρέπει την εμφάνιση στους άξονες των επιθυμητών τιμών.

7. Το γράφημα με δεξί κλικ και <αντιγραφή στη προβολή γραφικών> εμφανίζεται στο παράθυρο της Γεωμετρίας, καθώς και ο πίνακας συχνοτήτων εάν έχει επιλεγεί στο παράθυρο της Στατιστικής. Γενικά είναι χρήσιμο ένα γράφημα να μεταφέρεται στο παράθυρο της Γεωμετρίας, γιατί εκεί είναι επεξεργάσιμο, δηλαδή μπορούμε να μεταβάλλουμε το χρώμα, την αδιαφάνεια, στο στυλ κλπ.

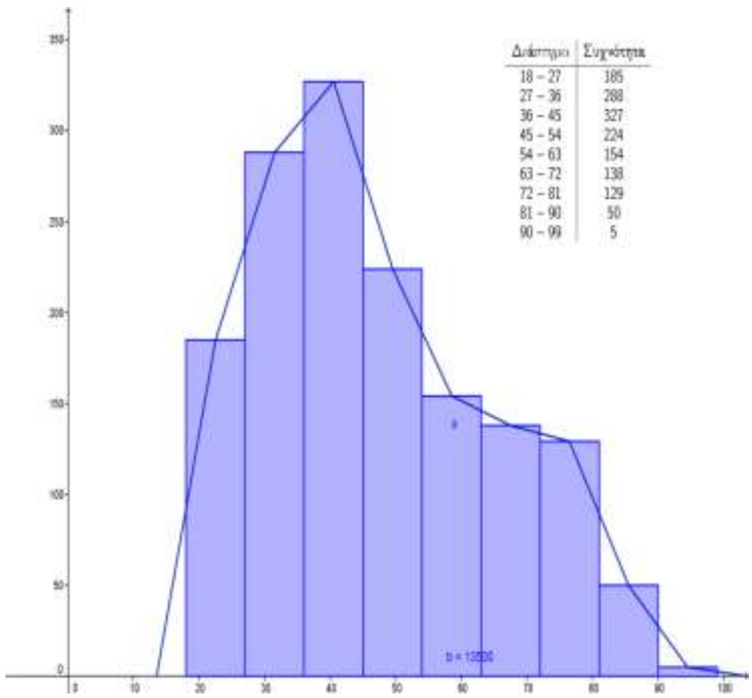
8. Από του βασικό μενού του Geogebra και επιλέγοντας Εξαγωγή / Σχέδιο στη μνήμη μπορούμε να επικολλήσουμε στο Word τα παραγόμενα διαγράμματα.

Το μεγάλο πλεονέκτημα της προσέγγισης της Στατιστικής μέσω λογισμικών είναι ότι δίνουν τη δυνατότητα να πραγματοποιηθούν στατιστικές αναλύσεις με δεδομένα που αντιστοιχούν σε πραγματικά προβλήματα, όπου ο αριθμός των ατόμων ενός δείγματος είναι μεγάλος, άρα είναι πολύ δύσκολο να πραγματοποιηθούν «με το χέρι» οι απαιτούμενες μαθηματικές πράξεις, προκειμένου να υπολογισθούν τα διάφορα στατιστικά μέτρα.

Παράδειγμα: Ένα δείγμα 1500 ατόμων μελετάται ως προς την ηλικία.

1. Να παραχθεί το ιστόγραμμα συχνοτήτων που αντιστοιχεί στα ομαδοποιημένα δεδομένα σε 9 κλάσεις, το πολύγωνο συχνοτήτων και ο αντίστοιχος πίνακας κατανομής συχνοτήτων. Να βρεθεί ποια είναι η πολυπληθέστερη ηλικιακή ομάδα, ποια είναι η κεντρική της τιμή και ποια αθροιστική συχνότητα αντιστοιχεί σε αυτήν την ομάδα. Να βρεθεί πόσα άτομα έχουν ηλικία από 81 και άνω. Να εξετασθεί η ύπαρξη συμμετρίας

<u>Παρατήρηση</u>: Είναι προφανές ότι για τόσο μεγάλο δείγμα διαφορετικών παρατηρήσεων το αντίστοιχο γράφημα μπορεί να είναι το ιστόγραμμα.

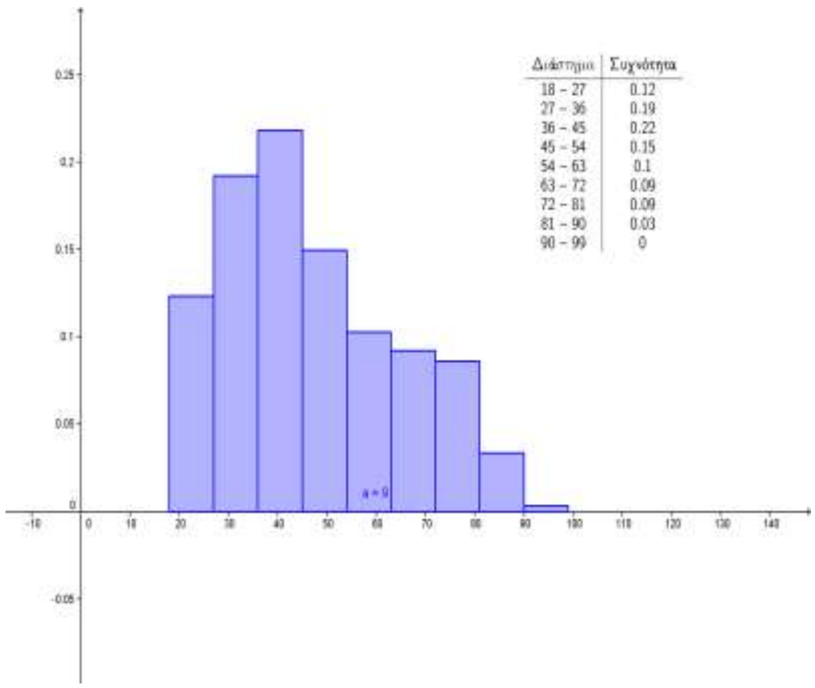


Η πολυπληθέστερη ηλικιακή ομάδα είναι η [36 , 45) η οποία περιέχει 327 άτομα, η κεντρική της τιμή είναι το 40 και η αθροιστική συχνότητα που αντιστοιχεί σε αυτήν την ομάδα είναι 800.

Ηλικία από 81 και άνω έχουν 55 άτομα.

Από το σχήμα της πολυγωνικής γραμμής (ουρά προς τα δεξιά) είναι φανερή η ύπαρξη δεξιάς ασυμμετρίας, δηλαδή οι μεγάλες ηλικίας εκτείνονται σε πολύ μεγαλύτερο εύρος σε σχέση με τις μικρότερες. Το θέμα της συμμετρίας θα εξετασθεί πιο αναλυτικά κατά τη μελέτη του θηκογράμματος.

2. Να παραχθεί για τα ίδια δεδομένα το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων καθώς και ο αντίστοιχος πίνακας κατανομής σχετικών συχνοτήτων. Να βρεθεί η κλάση που περιέχει το μεγαλύτερο ποσοστό των ατόμων του δείγματος.

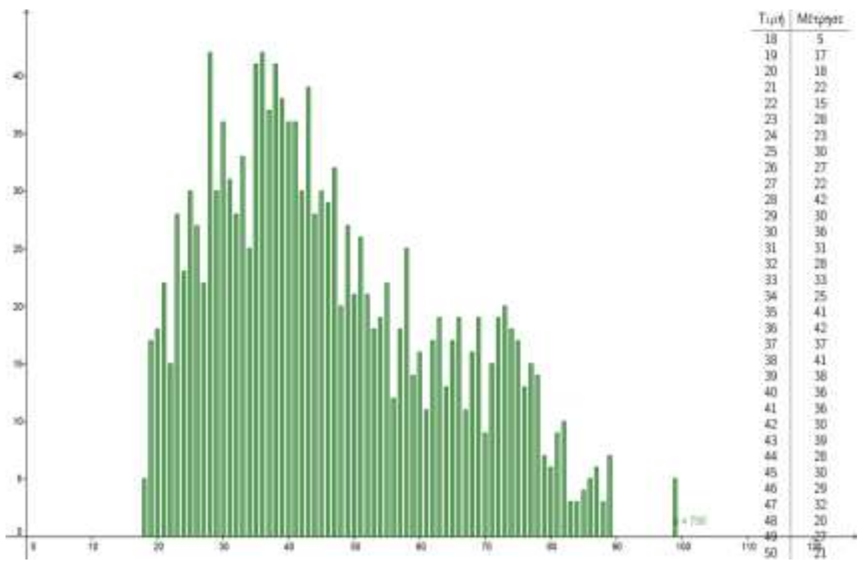


Η κλάση που περιέχει το μεγαλύτερο ποσοστό των ατόμων του δείγματος είναι η ηλικιακή ομάδα [36 , 45) που περιέχει το 22% των ατόμων του δείγματος.

3. Να βρεθεί για τα ίδια δεδομένα η επικρατούσα τιμή

Επειδή δεν είναι εύκολο να βρεθεί με ακρίβεια η επικρατούσα τιμή όταν τα δεδομένα είναι ομαδοποιημένα (ακόμα και αν θεωρηθεί ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημενες) κατασκευάζουμε το ραβδόγραμμα καθώς και τον πίνακα συχνοτήτων. Εάν οι διαφορετικές τιμές είναι πολλές εμφανίζουμε ένα μόνο τμήμα του πίνακα συχνοτήτων, αυτό που αντιστοιχεί στις ράβδους με τα μεγαλύτερα ύψη.

Σύμφωνα με το παρακάτω ραβδόγραμμα και τον αντίστοιχο πίνακα συχνοτήτων οι επικρατούσες τιμές είναι δύο και αφορούν τις ηλικίες 28 και 36 ετών, οι οποίες βρέθηκαν σε 42 άτομα, δηλαδή οι ηλικίες αυτές εμφανίζουν τη μέγιστη συχνότητα.



4. Να παραχθεί για τα ίδια δεδομένα το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων και να γίνουν οι παρακάτω υπολογισμοί:

1. *Εύρεση της διαμέσου*.

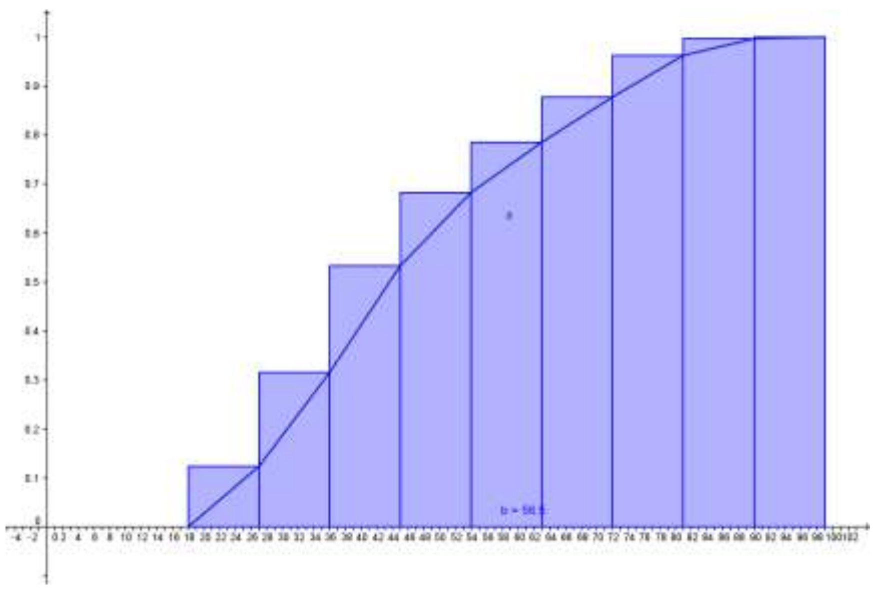
Για να υπολογισθεί γραφικά η διάμεσος πρέπει στον άξονα ψψ΄ να θέσουμε ως απόσταση (βήμα) το 0,1 οπότε θα εμφανισθεί το σημείο 0,5 δηλαδή το 50% (δεξί κλικ στο παράθυρο της γεωμετρίας και <γραφικά>) και από το σημείο 0,5 να φέρουμε κάθετο στον άξονα ψψ΄ που θα τμήσει την πολυγωνική γραμμή σε κάποιο σημείο του οποίου η τιμή της τετμημένης, δηλαδή το 43, εκφράζει την διάμεσο (Μπορούμε να βρούμε τη διάμεσα και εάν από το σημείο αυτό να φέρουμε κάθετη στον χχ΄).

2. *Εύρεση της ηλικίας κάτω από την οποία ευρίσκεται το 30% των ατόμων του δείγματος*.

Από το σημείο 0,3 του άξονα Oy φέρνουμε κάθετο στον άξονα μέχρι να τμήσει την πολυγωνική γραμμή. Από το σημείο που η κάθετος τέμνει την πολυγωνική γραμμή φέρνουμε κάθετο στον άξονα Ox που τον τέμνει στο σημείο 34 που εκφράζει την ηλικία κάτω από την ευρίσκεται το 30% των ατόμων του δείγματος.

3. *Εύρεση του ποσοστό των ατόμων του δείγματος που η ηλικία τους είναι κάτω των 54*.

Από το σημείο 54 του άξονα Ox φέρνουμε κάθετο στον άξονα μέχρι να τμήσει την πολυγωνική γραμμή. Από το σημείο που η κάθετος τέμνει την πολυγωνική γραμμή φέρνουμε κάθετο στον άξονα Oy που τον τέμνει στο σημείο 0,7 που σημαίνει ότι το ποσοστό ατόμων του δείγματος που η ηλικία τους είναι κάτω των 54 είναι 70%.



Το Geogebra με την εντολή <Δείξε τα Στατιστικά>, εμφανίζει για τα ίδια δεδομένα, τα βασικά στατιστικά μέτρα που αφορούν την ηλικία των ατόμων του δείγματος (μέση τιμή, τυπική απόκλισης, μέγιστο, ελάχιστο, διάμεσος, τεταρτημόρια).

Μέση τιμή	46,40
Τυπική απόκλιση	17,65
Μέγιστη τιμή	99
Ελάχιστη τιμή	18
Q1 ($1^{ο}$ τεταρτημόριο)	33
Q2 ($2^{ο}$ τεταρτημόριο) = Διάμεσος	43
Q3 ($3^{ο}$ τεταρτημόριο)	59

Δραστηριότητα

Να υπολογισθούν τα ως άνω στατιστικά μέτρα αυτά, εκτός της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης, από το παρακάτω θηκόγραμμα (εφόσον ο άξονας των x έχει την κατάλληλη διαβάθμιση)
Λύση

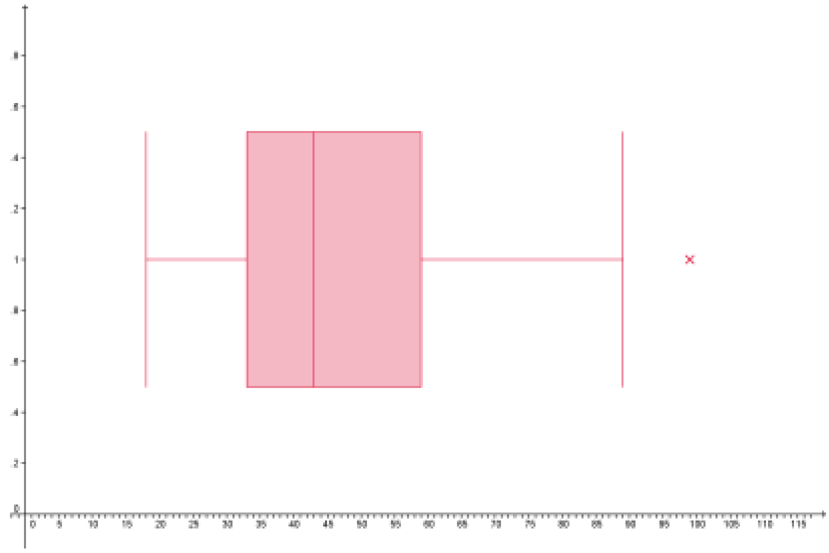
Η προέκταση της αριστερής πλευράς του ορθογωνίου παρ/μου θα τμήσει τον xx΄ στο 33, που σημαίνει ότι το $1^{ο}$ τεταρτημόριο έχει την τιμή 33, δηλαδή ότι το 25% των ατόμων του δείγματος έχει ηλικία μικρότερη ή ίση των 33 ετών.

Η προέκταση της δεξιάς πλευράς του ορθογωνίου παρ/μου θα τμήσει τον xx΄ στο 59, που σημαίνει ότι το $3^{ο}$ τεταρτημόριο έχει την τιμή 33, δηλαδή ότι το 75% των ατόμων του δείγματος έχει ηλικία μικρότερη ή ίση των 59 ετών.

Η προέκταση του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τις δύο οριζόντιες βάσεις του ορθογωνίου παρ/μου και είναι κάθετο προς αυτές θα τμήσει τον άξονα xx΄ στο 43, επομένως το $2^{ο}$ τεταρτημόριο, δηλαδή η διάμεσος έχει την τιμή 43.

Οι ράβδοι στην αριστερή και την δεξιά άκρη του θηκογράμματος τέμνουν τον άξονα xx΄ στα σημεία 18 και 89 αντιστοίχως. Οι συγκεκριμένοι ράβδοι τέμνουν τον άξονα xx΄ στην ελαχίστη και στη μεγίστη τιμή των παρατηρήσεων, όταν δεν υπάρχουν ακραίες ή παράτυπες τιμές, δηλαδή μεμονωμένες τιμές, σε πολύ μεγάλη απόσταση από την διάμεσο, η ύπαρξη των οποίων επισημαίνεται στο διάγραμμα με το σύμβολο Χ. Όπως όμως φαίνεται από τον πίνακα που εμφανίζει τα στατιστικά μέτρα η μεν ελαχίστη ηλικία είναι τα 18 έτη και συμπίπτει με αυτή που εμφανίζεται στο θηκόγραμμα, αλλά η πραγματικά μεγίστη ηλικία είναι τα 99 και επειδή είναι ακραία τιμή δεν συμπίπτει με αυτή που εμφανίζεται στο θηκόγραμμα, απλώς υποδηλώνεται με το σύμβολο Χ.

Από το θηκόγραμμα φαίνεται ότι η απόσταση της δεξιάς ράβδου από τη διάμεσο είναι πολύ μεγαλύτερη από την απόσταση της αριστερής ράβδου από τη διάμεσο, πράγμα που σημαίνει ότι τα δεδομένα μας εμφανίζουν δεξιά ή θετική ασυμμετρία, δηλαδή ενώ αριστερά της διαμέσου οι ηλικίες είναι συγκεντρωμένες ανάμεσα στα 18 και 43, δεξιά της διαμέσου οι ηλικίες εκτείνονται από τα 43 έως τα 89, οπότε αριστερά και δεξιά της διαμέσου υπάρχει ασύμετρη κατανομή των ηλικιών.



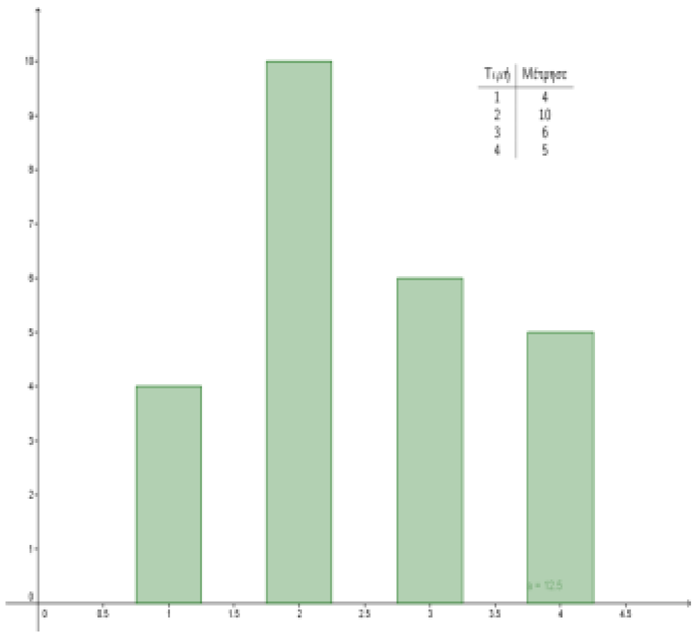
<u>Ποιοτικές (κατηγορικές) μεταβλητές</u>:

Το πρόγραμμα δίνει και τη δυνατότητα παραγωγής ραβδογραμμάτων (μόνο απολύτων και όχι σχετικών συχνοτήτων) μέσω των οποίων απεικονίζονται κατηγορικές μεταβλητές καθώς και ποσοτικές με διακριτές τιμές..

Παράδειγμα: Να κατασκευασθεί το ραβδόγραμμα που απεικονίζει συχνότητες των αθλημάτων που προτιμούν οι 25 μαθητές μιας τάξη και να βρεθεί η επικρατούσα τιμή.

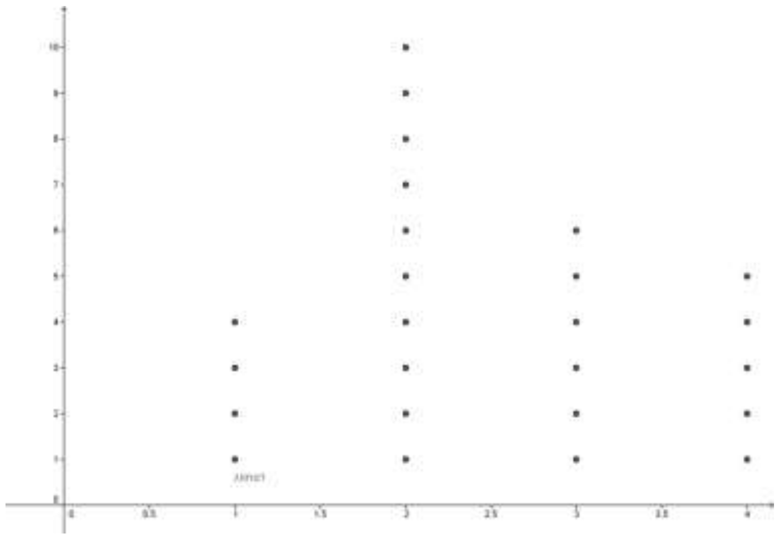
Έστω ότι τα αθλήματα είναι μπάσκετ, ποδόσφαιρο, στίβος, λοιπά και γνωρίζουμε ότι το μπάσκετ επιλέγεται από 4 μαθητές, το ποδόσφαιρο από 10, ο στίβος από 6 και τα λοιπά από 5. Θεωρούμε τους κωδικούς 1 για μπάσκετ, 2 για ποδόσφαιρο και 3 για στίβο, 4 για τα λοιπά και σε μια στήλη του λογιστικού φύλου γράφουμε 4 φορές το 1, 10 φορές το 2, 6 φορές το 3 και 5 φορές το 4. Στη συνέχεια επιλέγουμε ραβδόγραμμα.

Με δεξί κλικ πάνω στο ραβδόγραμμα και <Αντιγραφή στην προβολή γραφικών>, το ραβδόγραμμα και ο πίνακας συχνοτήτων αντιγράφονται στο παράθυρο της Γεωμετρίας.



Είναι προφανές ότι η επικρατούσα τιμή είναι το 2 που αφορά την ενασχόληση με το ποδόσφαιρο

Με την εντολή <σημειόγραμμα> παράγεται για τα ίδια δεδομένα το παρακάτω διάγραμμα που ουσιαστικά περιέχει ταυτόσημη πληροφορία με το ραβδόγραμμα.



Ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων %,

Εάν θέλουμε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων %, αυτό δεν παράγεται άμεσα, αλλά κάνουμε την εξής διαδικασία. Γνωρίζουμε ότι το μπάσκετ επιλέγεται από 4 μαθητές, το ποδόσφαιρο από 10 και ο στίβος από 6 και τα λοιπά από 5. Διαιρούμε κάθε τιμή με το άθροισμα 25 και πολλαπλασιάζουμε το αποτέλεσμα επί 100. Άρα στο μπάσκετ αντιστοιχεί το 16 ως σχετική συχνότητα %, στο ποδόσφαιρο το 40, στο στίβο το 24 και στο λοιπά το 20. Επομένως φτιάχνουμε στο λογιστικό φύλο μια νέα στήλη που περιέχει τις σχετικές συχνότητες, δηλαδή περιέχει το 16, 4 φορές, το 40, 10 φορές, το 24. 6 φορές και το 20, 5 φορές και για τα δεδομένα αυτά παράγουμε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα.

Βιβλιογραφία

- G. V. Barr (1980). Some Student Ideas on the Median and the Mode, Teaching Statistics Volume 2, Issue 2, pages 38–41, May 1980.
- Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical development: The case of statistical data analysis. Mathematical Thinking and Learning, 1(1), 5–43.
- Garfield, J. (1995). How Students Learn Statistics. International Statistical Review, 63 (1), 25-34.

  www.fraw.org.uk/files/.../garfield_1995
- Χ. Δαμιανού, Ν. Παπαδάτος, Χ. Α. (2003). Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική (Διδακτικές Σημειώσεις). Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών users.uoa.gr/~npapadat/BOOKS/PithStatOpen.pdf
- Οι δυσκολίες κατανόησης εννοιών της Στατιστικής. Άρθρο στο διαδίκτυο www.unipi.gr/faculty/dghinis/ts/diaf18.pdf
- el.wikipedia.org/wiki/Στατιστική

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Εισαγωγή

Η διδασκαλία της **Ευκλείδειας Γεωμετρίας** στη Β΄ Λυκείου, αποτελεί συνέχεια της διδασκαλίας της στην Α΄Λυκείου. Όπως προβλέπεται στο Πρόγραμμα Σπουδών, «Στη Γεωμετρία της Β΄ Λυκείου παρουσιάζονται θεωρήματα και προβλήματα που έχουν μεγάλη ιστορική και μαθηματική αξία. Αξιοποιείται η αναλυτική-συνθετική μέθοδος και επιχειρείται μία πρώτη επαφή με διαδικασίες απειροστικού λογισμού. Επιπλέον, με την ανάγκη που υπάρχει στη στερεομετρία να απεικονίζονται σχήματα του χώρου στο επίπεδο, ασκείται η φαντασία. Ακόμα, πραγματοποιείται η μετάβαση από το ευθύγραμμο τμήμα στο εμβαδόν και από το εμβαδόν στον όγκο. Σε σχέση με την προηγούμενη χρονιά πληθαίνουν οι εφαρμογές που είναι χρήσιμες στην καθημερινότητα. Μέσα από τα ιστορικά σημειώματα, τα οποία αναμιγνύονται με τη θεωρία και δεν είναι αποκομμένα από αυτήν, οι ιδέες του παρελθόντος συγκρίνονται με τις σημερινές. Οι παρουσιαζόμενες δυνατότητες για περισσότερες από μία αποδείξεις του ίδιου θεωρήματος, αναδεικνύουν ότι ο δρόμος για την αλήθεια δεν είναι μοναδικός.»

Τα περιεχόμενα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στη Β΄ Λυκείου

Η ανάπτυξη της ύλης του μαθήματος, παίρνοντας υπόψη τη διδασκαλία του στις προηγούμενες τάξεις, καθορίζεται από το Πρόγραμμα Σπουδών και περιλαμβάνει τα ακόλουθα κεφάλαια:

Κεφάλαιο 1: Εγγεγραμμένα σε κύκλο Σχήματα

Οι εγγεγραμμένες γωνίες αποτελούν ένα επιπλέον εργαλείο σύγκρισης γωνιών ενώ παράλληλα, δίνουν τη δυνατότητα γεωμετρικών κατασκευών. Χρησιμοποιείται πιο εμπεριστατωμένα η αναλυτική-συνθετική μέθοδος.

Κεφάλαιο 2: Αναλογίες - Ομοιότητα

Παρουσιάζεται το Θεώρημα Θαλή και αναδεικνύονται οι εφαρμογές του. Ακόμα, τα σχήματα εντάσσονται, μέσω της ομοιότητας, σε κατηγορίες ευρύτερες από εκείνες τις ισότητας.

Κεφάλαιο 3: Πυθαγόρειο Θεώρημα (και μετρικές σχέσεις)

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα, εκτός από την πρακτική του αξία στις μετρήσεις, κατέχει κεντρική θέση στα Μαθηματικά, αφού μέσα από αυτό ανακαλύφθηκαν οι άρρητοι αριθμοί. Με το νόμο των συνημιτόνων και τις προβολές, επιχειρείται η σύνδεση με τη Φυσική (π.χ. έργο δύναμης, κανόνας του παραλληλογράμμου).

Κεφάλαιο 4: Εμβαδά ευθυγράμμων σχημάτων

Η έννοια του εμβαδού, στενά συνδεδεμένη με τη μέτρηση, βρίσκει πλήθος εφαρμογών και στην καθημερινότητα. Στο κεφάλαιο αυτό το γινόμενο δύο ευθυγράμμων τμημάτων αποκτά αναπαραστατική υπόσταση ως εμβαδόν παραλληλογράμμου. Από την άλλη μεριά, η έκφραση εμβαδών ως γινομένου ευθυγράμμων τμημάτων προσφέρει τη δυνατότητα να αναχθούν συγκρίσεις εμβαδών σε συγκρίσεις ευθυγράμμων τμημάτων.

Κεφάλαιο 5: Κανονικά Πολύγωνα

Οι γεωμετρικές ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων προετοιμάζουν το έδαφος για το θεωρητικό πρόβλημα της μέτρησης του κύκλου. Η μελέτη τους έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς αυτά χρησιμοποιούνται όχι μόνο σε κατασκευές με αισθητική αξία (πλακοστρώσεις, ζωγραφική κ.λπ.), αλλά εμφανίζονται και στη φύση (κυψέλες μελισσών κ.ά.).

Κεφάλαιο 6: Μέτρηση Κύκλου

Πραγματοποιείται μια πρώτη επαφή με διαδικασίες ορίου και γνωριμία με τη μέθοδο της προσέγγισης που είναι μια από τις κεντρικές ιδέες των Μαθηματικών.

Κεφάλαιο 7: Στερεά Σχήματα - Μέτρηση Στερεών

Η ανάγκη για απεικόνιση σχημάτων των τριών διαστάσεων σε δισδιάστατες επιφάνειες καλλιεργεί τη χωρική αντίληψη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ενώ μετρήσεις όγκων και επιφανειών έχουν άμεση εφαρμογή σε ανάγκες της καθημερινής ζωής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $1^{ο}$: Εγγεγραμμένα σε κύκλο Σχήματα

1. Εισαγωγή

Τα εγγεγραμμένα σε κύκλο σχήματα-παρουσιάζουν ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

Η σχέση της εγγεγραμμένης γωνίας με την αντίστοιχη επίκεντρη είναι από τις πλέον χρήσιμες και βασικές του κεφαλαίου. Η σχέση αυτή διατυπώνεται και αποδεκνύεται από τον Ευκλείδη με την Πρόταση ΙΙΙ.20 των «Στοιχείων». Σημαντική είναι επίσης και η σχέση της γωνίας που σχηματίζεται από μια χορδή του κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής, με την επίκεντρη γωνία που βαίνει στο τόξο που ορίζει η χορδή.

Ο Ευκλείδης αφιερώνει το τέταρτο βιβλίο των Στοιχείων στα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σχήματα, δίνοντας τους ορισμούς και αποδεικνύοντας τις βασικές προτάσεις. Οι ορισμοί των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων σε κύκλο σχημάτων και αντίστροφα δίνονται στην αρχή του κεφαλαίου *(«Στοιχεία», βιβλίο δ΄, Όροι α΄-ζ΄) [«Λέμε ότι ένα σχήμα είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο όταν κάθε κορυφή του είναι σημείο του κύκλου» «Σχήμα ευθύγραμμον εις κύκλον εγγράφεσθαι λέγεται, όταν εκάστη γωνία του εγγραφομμένου άπτηται της του κύκλου περιφερείας», Στοιχεία IV. Όρος γ΄].* Σημειώνουμε ότι ο όρος είναι παλαιότερος από τον Ευκλείδη και ότι ο ίδιος όρος χρησιμοποιείται και για τα στερεά (π.χ. από τον Αρχιμήδη).

2. Τι περιέχει το κεφάλαιο «Εγγεγραμμένα σε κύκλο Σχήματα» και πως το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Στα περιεχόμενα του πρώτου κεφαλαίου περιλαμβάνονται:

- Η σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας (1 ώρα)
- Η γωνία χορδής και εφαπτομένης και σχετικοί γεωμετρικοί τόποι (3 ώρες)
- Τα εγγεγραμμένα και τα εγγράψιμα πολύγωνα (2 ώρες)
- Τα εγγεγραμμένα και τα εγγράψιμα τετράπλευρα (1 ώρα)
- Τα περιγεγραμμένα και τα περιγράψιμα σε κύκλο πολύγωνα (1 ώρα)

Το περιεχόμενο του κεφαλαίου συνδέεται με προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών:

- Οι γωνίες, τα τρίγωνα, τα τετράπλευρα, ο κύκλος και οι βασικές ιδιότητές τους, οι οποίες σε μεγάλο βαθμό απαιτούνται για τη διδασκαλία του κεφαλαίου έχουν διδαχθεί στην Α τάξη του Λυκείου, ενώ η εγγεγραμμένη γωνία και η σχέση της με την αντίστοιχη επίκεντρη έχουν διδαχθεί ήδη στη Β Γυμνασίου.
- Κατά τη μελέτη των τριγώνων, έχει διαπιστωθεί ότι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών τριγώνου είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου (περίκεντρο), ή του κύκλου στον οποίο είναι εγγεγραμμένο το τρίγωνο. Ως εκ τούτου οι έννοιες εγγεγραμμένο ή περιγεγραμμένο σε κύκλο σχήμα είναι κατά ένα μέρος ήδη γνωστές από τη διδασκαλία τους στην Α τάξη.

Υπάρχει επομένως σημαντικό και επαρκές γνωστικό υπόβαθρο από τις προηγούμενες τάξεις για τη διδασκαλία του κεφαλαίου.

3. Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο;

Το κεφάλαιο είναι σημαντικό διότι:

- Οι κορυφές των εγγεγραμμένων σχημάτων είναι σημεία κύκλου και οι γωνίες τους είναι γωνίες εγγεγραμμένες στον κύκλο. Κατά συνέπεια γίνεται εφικτή η σύνδεση των ιδιοτήτων τριγώνων, πολυγώνων και κύκλου.
- Η πλευρά ενός εγγεγραμμένου σχήματος μπορεί να αντιμετωπίζεται ως χορδή του περιγεγραμμένου κύκλου, ενώ κάθε εγγεγραμμένο πολύγωνο μπορεί να διαμεριστεί σε ισοσκελή τρίγωνα με κορυφή το κέντρο του κύκλου και τις δύο τους πλευρές ίσες με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.
- Όπως αναφέρεται στο Πρόγραμμα Σπουδών, κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου δίνεται η δυνατότητα για γεωμετρικές κατασκευές και για τη χρησιμοποίηση της αναλυτικής-συνθετικής μεθόδου, αφού «οι εγγεγραμμένες γωνίες αποτελούν ένα επιπλέον εργαλείο σύγκρισης γωνιών».
- Είναι πολύ χρήσιμα τα κριτήρια εγγραψιμότητας – περιγραψιμότητας για την αντιμετώπιση προβλημάτων των εγγράψιμων σχημάτων.
- Είναι μεγάλη η χρησιμότητα και η σημασία του γεωμετρικού τόπου των σημείων που «βλέπουν» ένα ευθύγραμμο τμήμα υπό σταθερή γωνία και η εφαρμογή της αναλυτικής-συνθετικής μεθόδου που χρησιμοποιούμε για την εύρεση και την κατασκευή του σχήματος. Γίνεται πλέον εφικτό να ορίζεται ο κύκλος από ένα ευθύγραμμο τμήμα (χορδή) και μια γωνία (εγγεγραμμένη) αντί από ένα σημείο (κέντρο) και ένα ευθύγραμμο τμήμα (ακτίνα).
- Επίσης, η διδασκαλία του κεφαλαίου είναι αναγκαία για τη διδασκαλία των επόμενων κεφαλαίων που αναφέρονται στα κανονικά πολύγωνα και τη μέτρηση του κύκλου.
- Τέλος, η ιδιότητα του κύκλου να «*παρεμβάλλεται*» (*εγκλεισμός* του κύκλου) μεταξύ των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων σε αυτόν πολυγώνων, σε συνδυασμό με τη μέθοδο της εξάντλησης και του ορίου έπαιξε σημαντικό ρόλο στην εξέλιξη και ανάπτυξη των μαθηματικών.

4. Ποιες είναι οι Σημαντικές Ιδέες στο κεφάλαιο «Εγγεγραμμένα σε κύκλο Σχήματα »;

Οι πλέον Σημαντικές Ιδέες του κεφαλαίου είναι:

- Η σχέση επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας: *Η εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο.*
- Η σχέση γωνίας χορδής και εφαπτομένης με την αντίστοιχη επίκεντρη και οι σχετικοί γεωμετρικοί τόποι: *Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής είναι ίση με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής (ή με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης).*
- Η ιδιότητα των ορθογωνίων τριγώνων να εγγράφονται σε ημικύκλια με διάμετρο την υποτείνουσα του τριγώνου: *Ο κύκλος στον οποίο είναι εγγεγραμμένο ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει διάμετρο την υποτείνουσα του τριγώνου*.
- Η σχέση των απέναντι γωνιών εγγεγραμμένου τετραπλεύρου: *Το άθροισμα των απέναντι γωνιών εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με δύο ορθές γωνίες.*
- Η συσχέτιση της έννοιας του κύκλου με την έννοια του πολυγώνου στα εγγράψιμα πολύγωνα, άρα: *Σε κάθε εγγράψιμο πολύγωνο, υπάρχει μοναδικό σημείο του επιπέδου που ισαπέχει από τις κορυφές του (κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου) και κάθε πλευρά του «φαίνεται» από τις απέναντι κορυφές του υπό ίσες γωνίες (εγγεγραμμένες στον περιγεγραμμένο κύκλο).*

5. Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα μπορούν να απαντούν στα ερωτήματα:

- Ποιος είναι ο ορισμός του εγγεγραμμένου σε κύκλο σχήματος;
- Πότε ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο;
- Ποιος είναι ο ορισμός του περιγεγραμμένου σε κύκλο σχήματος;
- Πότε ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο;
- Ποια είναι η σχέση επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας και πώς αποδεικνύεται;
- Ποια είναι η σχέση της γωνίας που σχηματίζεται από χορδή και εφαπτομένη με την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία και πώς αποδεικνύεται;
- Τι συμβαίνει όταν οι απέναντι γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές;

- Τι συμβαίνει όταν μια πλευρά ενός πολυγώνου φαίνεται υπό ίσες γωνίες από όλες τις απέναντι κορυφές του πολυγώνου;
- Τι συμβαίνει όταν οι μεσοκάθετες όλων των πλευρών ενός πολυγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο;
- Τι συμβαίνει όταν οι διχοτόμοι όλων των γωνιών ενός πολυγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο;

6. Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου αναμένουμε να έχουν επιτευχθεί οι στόχοι του προγράμματος Σπουδών και οι μαθητές να είναι σε θέση να:

Στην ενότητα «Σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας»

- Χρησιμοποιούν τη σχέση εγγεγραμμένων και επίκεντρων γωνιών στην επίλυση προβλημάτων. (Στόχος 1.1.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ3)
- Αναγνωρίζουν ως ορθές τις εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε ημικύκλιο και διαπιστώνουν ότι κάθε ορθογώνιο τρίγωνο εγγράφεται σε ημικύκλιο. (Στόχος 1.1.2 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ3)

Στην ενότητα «Γωνία χορδής και εφαπτομένης και σχετικοί γεωμετρικοί τόποι»

- Εφαρμόζουν την Αναλυτική - Συνθετική Μέθοδο στην επίλυση προβλημάτων. (Στόχος 1.2.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ2)
- Εντοπίζουν το γεωμετρικό τόπο των σημείων που βλέπουν υπό συγκεκριμένη γωνία σταθερό ευθύγραμμο τμήμα και αναγνωρίζουν το γεωμετρικό τόπο των σημείων από τα οποία ευθύγραμμο τμήμα φαίνεται υπό ορθή γωνία. (Στόχος 1.2.2 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ2)

Στην ενότητα «Εγγεγραμμένα - εγγράψιμα πολύγωνα»

- Εξηγούν τη διαφορά ανάμεσα στα θεωρήματα για να είναι εγγεγραμμένο ένα πολύγωνο και τα κριτήρια για να είναι εγγράψιμο. (Στόχος 1.3.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ3)

Στην ενότητα «Εγγεγραμμένα - εγγράψιμα τετράπλευρα»

- Διακρίνουν τη διαφορά ανάμεσα στα θεωρήματα που ισχύουν σε ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο και τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο. (Στόχος 1.4.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ4)

Στην ενότητα «Περιγεγραμμένα - Περιγράψιμα σε κύκλο πολύγωνα»

- Πιστοποιούν ότι ο τρόπος που εγγράφεται κύκλος σε πολύγωνο αποτελεί γενίκευση του τρόπου που εγγράφεται κύκλος σε τρίγωνο κατ’ αντιστοιχία με τον περιγεγραμμένο κύκλο τριγώνων-πολυγώνων. (Στόχος 1.5.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ5)

7. Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες Δ1 έως Δ5, που προτείνονται από το Πρόγραμμα Σπουδών και μπορούν να υλοποιηθούν στη σχολική τάξη

Δραστηριότητα Δ1

Με τη δραστηριότητα Δ1, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (1.1.1) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκεται να είναι σε θέση οι μαθητές να χρησιμοποιούν τη σχέση εγγεγραμμένων και επίκεντρων γωνιών στην επίλυση προβλημάτων.

- Να βρείτε τη γωνία δύο τεμνουσών ευθειών κύκλου, συναρτήσει των οριζομένων από αυτές τόξων του κύκλου. (Η δραστηριότητα προτείνεται να υλοποιηθεί σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας.)

Σχόλιο: *Να εξεταστούν οι περιπτώσεις το σημείο τομής των ευθειών να είναι στο εξωτερικό του κύκλου ή να είναι στο εσωτερικό του, ή να είναι σημείο του κύκλου.*

Δραστηριότητα Δ2

Με τη δραστηριότητα Δ2, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (1.2.1. και 1.2.2) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκεται να είναι σε θέση οι μαθητές να εφαρμόζουν την Αναλυτική - Συνθετική Μέθοδο στην επίλυση προβλημάτων και να εντοπίζουν το γεωμετρικό τόπο των σημείων που βλέπουν υπό συγκεκριμένη γωνία σταθερό ευθύγραμμο τμήμα και να αναγνωρίζουν το γεωμετρικό τόπο των σημείων από τα οποία ευθύγραμμο τμήμα φαίνεται υπό ορθή γωνία.

- Από σημείο εκτός κύκλου να κατασκευάσετε, με κανόνα και διαβήτη, την εφαπτομένη προς αυτόν.

Σχόλιο: *Επειδή τα ζητούμενη κατασκευή είναι η πρόταση ΙΙΙ.17 των Στοιχείων του Ευκλείδη, κατά την υλοποίηση της δραστηριότητας μπορεί να γίνει αναφορά στον τρόπο που επιλύει το πρόβλημα ο Ευκλείδης και να γίνει σχετική συζήτηση, σύγκριση και σχολιασμός των δύο διαφορετικών τρόπων.*

Δραστηριότητα Δ3

Με τη δραστηριότητα Δ3, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (1.3.1) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκεται να είναι σε θέση οι μαθητές να εξηγούν τη διαφορά ανάμεσα στα θεωρήματα για να είναι εγγεγραμμένο ένα πολύγωνο και τα κριτήρια για να είναι εγγράψιμο.

Δραστηριότητα Δ4

Με τη δραστηριότητα Δ4, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (1.4.1) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκεται να είναι σε θέση οι μαθητές να διακρίνουν τη διαφορά ανάμεσα στα θεωρήματα που ισχύουν σε ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο και τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο.

Δραστηριότητα Δ5

Με τη δραστηριότητα Δ5, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (1.5.1) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκεται να είναι σε θέση οι μαθητές να πιστοποιούν ότι ο τρόπος που εγγράφεται κύκλος σε πολύγωνο αποτελεί γενίκευση του τρόπου που εγγράφεται κύκλος σε τρίγωνο κατ' αντιστοιχία με τον περιγεγραμμένο κύκλο τριγώνων-πολυγώνων

8. Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Η διδασκαλία του κεφαλαίου και η υλοποίηση των Δραστηριοτήτων θα διεξαχθεί σύμφωνα με τις υποδείξεις και τα σχόλια που περιέχονται στο Πρόγραμμα Σπουδών. Κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου:

- *Στην ενότητα «Σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας»* αποδεικνύεται η σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας και υλοποιείται η δραστηριότητα Δ1. Η πρόταση είναι βασική, όμως είναι γνωστή και οι μαθητές την έχουν διδαχτεί σε προηγούμενες τάξεις. Μπορεί να γίνει αναφορά ότι η πρόταση: «Η εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο γωνία είναι ορθή» αποδίδεται στον Θαλή και να υπάρξει η ανάλογη ιστορική αναφορά. Βεβαίως, επειδή και ο διαθέσιμος χρόνος είναι περιορισμένος, η διδασκαλία θα προσανατολιστεί κυρίως στη διεξαγωγή της δραστηριότητας
- *Στην ενότητα «Γωνία χορδής και εφαπτομένης και σχετικοί γεωμετρικοί τόποι»* γίνεται αναφορά στην Αναλυτική - Συνθετική Μέθοδο. Ιδιαίτερη βαρύτητα, αλλά και προσοχή πρέπει να δοθεί στα βήματα που ακολουθούνται (ανάλυση, σύνθεση, απόδειξη, διερεύνηση), στη σημασία της, στις εν γένει γεωμετρικές αποδείξεις και στους άλλους κλάδους των Μαθηματικών. Η σύνδεση της γωνίας χορδής και εφαπτομένης με την εγγεγραμμένη που «βλέπει» τη χορδή και την

αντίστοιχη επίκεντρη είναι πολύ σημαντική και χρήσιμη, όπως σημαντική είναι και η έννοια του γεωμετρικού τόπου.

- *Στην ενότητα «Εγγεγραμμένα - εγγράψιμα πολύγωνα»,* εκτός από τη διδασκαλία των ιδιοτήτων των εγγεγραμμένων πολυγώνων, διευκρινίζεται και η έννοια του κριτηρίου εγγραψιμότητας. Πέρα από τις σχέσεις μεταξύ των γωνιών των εγγεγραμμένων πολυγώνων, μπορεί να γίνει αναφορά και στις μεσοκαθέτους των πλευρών τους.
- *Στην ενότητα «Εγγεγραμμένα - εγγράψιμα τετράπλευρα»* αποδεικνύεται η πολύ σημαντική πρόταση για τη σχέση μεταξύ των απέναντι εσωτερικών γωνιών, καθώς και η πρόταση για τη σχέση εσωτερικής γωνίας με την απέναντι εξωτερική γωνία. Ο προβλεπόμενος διδακτικός χρόνος οριακά επιτρέπει την υλοποίηση της προτεινόμενης δραστηριότητας Δ4.
- *Στην ενότητα «Περιγεγραμμένα - Περιγράψιμα σε κύκλο πολύγωνα»* γίνεται αναφορά στις διχοτόμους των γωνιών του περιγεγραμμένου σε κύκλο πολυγώνου, καθώς και στην ιδιότητα των πλευρών του περιγεγραμμένου πολυγώνου να είναι εφαπτόμενες του κύκλου. Μέσα στον προβλεπόμενο διδακτικό χρόνο, οι δυνατότητες υλοποίηση της προτεινόμενης δραστηριότητας Δ5 είναι οριακές.

9. Ποια σημεία πρέπει να προσέξει ιδιαίτερα ο διδάσκων;

Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί:

- Στις δυσκολίες των μαθητών κατά την εφαρμογή της Αναλυτικής - Συνθετικής Μεθόδου στην επίλυση προβλημάτων και κυρίως στο να κατανοηθεί η αναγκαιότητα της απόδειξης και της διερεύνησης.
- Στην εμπέδωση από τους μαθητές της έννοιας του γεωμετρικού τόπου.
- Στις ιδιότητες των τετραπλεύρων οι οποίες αποτελούν κριτήρια εγγραψιμότητας ενός τετραπλεύρου

Είναι ανάγκη να διευκρινιστεί στους μαθητές ότι ενώ *όλα τα τρίγωνα είναι εγγράψιμα και περιγράψιμα*, δεν ισχύει το ίδιο για τα πολύγωνα και γι αυτό είναι αναγκαία η αναζήτηση κριτηρίων.

Διευκρινίζεται ότι η εγγραψιμότητα είναι ανεξάρτητη από την περιγραψιμότητα. Έτσι, ένα πολύγωνο μπορεί μα είναι μόνο εγγράψιμο, ή μόνο περιγράψιμο, ή και τα δύο. Μπορεί να γίνει ενδεικτική αναφορά στα παραλληλόγραμμα και τα τραπέζια, για τα οποία ισχύει:

- το τετράγωνο είναι εγγράψιμο και περιγράψιμο σε κύκλο,
- Το ορθογώνιο είναι εγγράψιμο, αλλά όχι περιγράψιμο σε κύκλο
- ο ρόμβος δεν είναι εγγράψιμος, αλλά είναι περιγράψιμος σε κύκλο
- το τραπέζιο άλλοτε είναι και άλλοτε όχι εγγράψιμο ή περιγράψιμο σε κύκλο, ενώ το ισοσκελές τραπέζιο είναι εγγράψιμο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο} : Αναλογίες - Ομοιότητα

1. Εισαγωγή

Λόγοι και Αναλογίες: Η έννοια του λόγου και της αναλογίας

Η έννοια του λόγου και της αναλογίας ήταν γνωστή από την αρχαιότητα, αρκετά πριν από τον Ευκλείδη (Θαλής, Πυθαγόρας, Πλάτωνας, Αριστοτέλης, Εύδοξος κ.α.). Η έννοια του ***λόγου*** αφορούσε σε μια ***σχέση μεταξύ δύο μεγεθών*** και δεν ταυτιζόταν με την έννοια του κλάσματος ή του πηλίκου δύο αριθμών.

Οι Πυθαγόρειοι οδηγήθηκαν στη θεωρία των λόγων μέσα από τη μελέτη της μουσικής. Συσχέτιζαν το λόγο μεγεθών και το λόγο αριθμών και η συσχέτιση αυτή ικανοποιούσε και ήταν συμβατή με την άποψή τους, ότι τα πάντα είναι αριθμοί. Όμως, όταν οι ίδιοι οι Πυθαγόρειοι διαπίστωσαν την ύπαρξη των αρρήτων, η συσχέτιση αυτή έγινε αιτία για τη δημιουργία ενός μεγάλου ρήγματος και μιας αναπόφευκτης κρίσης της πυθαγόρειας θεωρίας, σύμφωνα με την οποία δύο οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα είναι σύμμετρα, δηλαδή έχουν πάντα κάποια κοινή μονάδα μέτρησης. Αυτό όμως, όπως απέδειξαν, δεν είναι εφικτό, όπως π.χ. στο λόγο της διαγωνίου ενός τετραγώνου προς την πλευρά του και τα αποτελέσματα ήταν ολέθρια για τη θεωρία τους.

Ο Ευκλείδης, στο πέμπτο βιβλίο των «Στοιχείων», το περιεχόμενο του οποίου αποδίδεται στον Εύδοξο, εκθέτει τη θεωρία των *λόγων μεγεθών* και των *αναλογιών,* ορίζοντας ότι:

- *«**Λόγος** εστί δυο μεγεθών ομογενών η κατά πηλικότητα ποια σχέσις», («Στοιχεία», βιβλίο ε΄, Όρος γ΄).*
- *«**Εν τω αυτώ λόγω μεγέθη** λέγεται είναι πρώτον προς δεύτερον και τρίτον προς τέταρτον, όταν τα του πρώτου και τρίτου ισάκις πολλαπλάσια των του δευτέρου και τετάρτου ισάκις πολλαπλασίων καθ οποιονούν πολλαπλασιασμόν εκάτερον εκατέρου ή άμα υπερέχει ή άμα ίσα ή άμα ελλείπη ληφθέντα κατάλληλα»* («Στοιχεία», βιβλίο ε΄, Όρος ς΄)
- *«Τα δε τον αυτόν λόγον έχοντα μεγέθη **ανάλογον** καλείσθω»* («Στοιχεία», βιβλίο ε΄, Όρος ς΄)

Οι πέμπτος και έκτος ορισμοί του Ευκλείδη για τα μεγέθη, «που είναι εις τον αυτόν λόγο», υπήρξαν καθοριστικοί για τη θεμελίωση των αναλογιών και βοήθησαν να ξεπεραστούν οι δυσκολίες που προέκυψαν από την ύπαρξη των ασύμμετρων μεγεθών.

Μέσα από τη μελέτη των λόγων και των αναλογιών και τη θεωρία που αναπτύχθηκε, ευνοήθηκε η *γεωμετρική διατύπωση αλγεβρικών σχέσεων* και η *γεωμετρική απόδειξή* τους και μπήκαν οι βάσεις της ***«γεωμετρικής άλγεβρας».***

Ομοιότητα: Η έννοια της «ομοιότητας»

Η έννοια της «*ομοιότητας*» είναι θεμελιώδης έννοια για την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Δεν αναφέρεται σε σχήματα με το ίδιο μέγεθος, αλλά σε σχήματα με την ίδια μορφή και γι αυτό είναι έννοια ευρύτερη από την έννοια της ισότητας. Μπορούμε να πούμε ότι η ομοιότητα υπάρχει στον φυσικό κόσμο και «είναι η πλέον φυσική ιδιότητα που συνδέει τη Γεωμετρία με τον περιβάλλοντα χώρο», στον οποίο παρατηρούμε αντικείμενα που μοιάζουν ως προς την εξωτερική τους εμφάνιση. Η ομοιότητα μπορεί να θεωρηθεί ως «ένα κριτήριο που οδηγεί σε ταξινόμηση μιας κατηγορίας αντικειμένων του περιβάλλοντος χώρου» και η μαθηματική διαπραγμάτευσή της στηρίζεται στη γωνία. (Λάππας, 2009, σελ. 85)

Η ομοιότητα ευθυγράμμων σχημάτων αναπτύσσεται από τον Ευκλείδη στο έκτο βιβλίο των Στοιχείων, όπου δίνεται και ο ορισμός της ομοιότητας:

- *«Όμοια ευθύγραμμα σχήματα είναι όσα έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μία και τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες ανάλογες» ("Ομοια σχήματα ευθύγραμμά εστιν, όσα τας τε γωνίας ίσας έχει κατά μίαν και τας περί τας ίσας γωνίας πλευράς ανάλογον», Στοιχεία, βιβλίο ς΄, Όρος α΄)*

Σημειώνουμε, ότι η έννοια της ομοιότητας έχει νόημα μόνο στην Ευκλείδειο Γεωμετρία, αφού στις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες η έννοια της ομοιότητας συμπίπτει με την έννοια της ισότητας. Έτσι, στην «υπερβολική γεωμετρία» δύο τρίγωνα των οποίων οι γωνίες είναι ίσες είναι ίσα, δηλαδή δύο «όμοια» τρίγωνα είναι δύο «ίσα» τρίγωνα.

2. Τι περιέχει το κεφάλαιο «Αναλογίες-Ομοιότητα» και πως το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Στο κεφάλαιο «Αναλογίες-Ομοιότητα» παρουσιάζονται οι έννοιες του λόγου ευθυγράμμων τμημάτων και των αναλογιών και το Θεώρημα Θαλή και αναδεικνύονται οι εφαρμογές του. Η έννοια της ομοιότητας στηρίζεται στην έννοια του λόγου ευθυγράμμων τμημάτων και στην ισότητα των γωνιών, ενώ δίνεται έμφαση στο Θεώρημα του Θαλή και των Διχοτόμων.

Στα περιεχόμενα του κεφαλαίου περιλαμβάνονται οι ενότητες:

- **Ο λόγος, μέτρο και αναλογία ευθυγράμμων τμημάτων (1 ώρα)**
- **Το Θεώρημα του Θαλή (2 ώρες)**
- **Το Θεώρημα των διχοτόμων τριγώνου (2 ώρες)**
- **Τα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων (2 ώρες)**

Το περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου συνδέεται με τις προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών, αφού:

- Από τη φοίτησή τους στις προηγούμενες σχολικές τάξεις, οι μαθητές γνωρίζουν ήδη τις αριθμητικές αναλογίες και τις ιδιότητές τους. Οι μαθητές έχουν διδαχθεί στο Γυμνάσιο (από την Α τάξη) τα ανάλογα ποσά και τις αναλογίες, καθώς και το λόγο ευθυγράμμων τμημάτων, την ομοιοθεσία και την ομοιότητα τριγώνων και πολυγώνων (στην Γ΄ τάξη).
- Επιπλέον, έχουν εξοικειωθεί με τη χρήση των λόγων κατά τη διδασκαλία των τριγωνομετρικών αριθμών, αρχικά ως λόγο πλευρών ορθογωνίου τριγώνου (στη Β΄ τάξη του Γυμνασίου) και στη συνέχεια ως λόγο των συντεταγμένων σημείου (στη Γ΄ τάξη).
- Η έννοια της ομοιότητας είναι σε μεγάλο βαθμό μια «οπτική» έννοια που συνδέεται με τη μορφή των σχημάτων, την οποία οι μαθητές κατανοούν γενικότερα μέσα από τη σχέση τους με τον πραγματικό κόσμο που τους περιβάλει και από τα αντικείμενα που αναγνωρίζουν και χρησιμοποιούν.

3. Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο;

Το κεφάλαιο είναι σημαντικό διότι:

- Η ομοιότητα, αποτελεί κριτήριο που οδηγεί σε ταξινόμηση των σχημάτων, τα οποία, μέσω της ομοιότητας εντάσσονται, σε κατηγορίες ευρύτερες από εκείνες τις ισότητας (π.χ. όλα τα κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια μεταξύ τους)
- Η ομοιότητα υπάρχει στον φυσικό κόσμο και επιπλέον αξιοποιείται ευρύτατα για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων και σε πλήθος εφαρμογών της καθημερινής ζωής (χάρτες, απεικονίσεις, μοντέλα, κατασκευές κ.λ.π.)
- Μέσα από την ομοιότητα, τις αναλογίες και τους λόγους μπορούμε να κατανοήσουμε και να μελετήσουμε σχέσεις μεταξύ γεωμετρικών αντικειμένων και σχημάτων, πέρα από την ισότητα ή την ανισότητα.

4. Ποιες είναι οι Σημαντικές Ιδέες στο κεφάλαιο;

Οι πλέον σημαντικές έννοιες του κεφαλαίου είναι:

- *Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων*: εκφράζει μία σχέση των τμημάτων που είναι ισοδύναμη με τη σχέση (το λόγο) των μέτρων (των μηκών) των δύο τμημάτων. (ως λόγος μεγεθών και όχι αριθμών)
- *Η έννοια της αναλογίας:* αφορά στη σχέση δύο ζευγών ευθυγράμμων τμημάτων τα οποία έχουν ίσους λόγους
- *Το θεώρημα του Θαλή και το αντίστροφό του:* αν παράλληλες ευθείες τέμνονται από δύο άλλες ευθείες, τότε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν οι παράλληλες στις τέμνουσες είναι ανάλογα
- *Το θεώρημα των Διχοτόμων*: Η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου διαιρεί την απέναντι πλευρά του τριγώνου σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών του τριγώνου.
- *Ο κύκλος του Απολλωνίου:* Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, των οποίων οι αποστάσεις από δύο δοθέντα σημεία Α και Β έχουν γνωστό λόγο μ/ν, μπορεί να κατασκευαστεί και αν μ/ν ≠ 1, τότε είναι κύκλος.
- *Η ομοιότητα των τριγώνων (και γενικότερα η έννοια της ομοιότητας)*: Δύο τρίγωνα είναι όμοια όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία. και Δύο τρίγωνα είναι όμοια όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

5. Σε ποια ερωτήματα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα μπορούν να απαντούν στα ερωτήματα:

- Ποια είναι η έννοια του λόγου δύο ευθυγράμμων τμημάτων και πώς ορίζεται;
- Ποια είναι η έννοια του μέτρου και της μέτρησης ευθυγράμμου τμήματος;
- Τι είναι ο λόγος ομοιότητας και πως προσδιορίζεται;
- Τι μας λέει το θεώρημα του Θαλή και τι το αντίστροφό του;
- Πώς συσχετίζεται το θεώρημα Θαλή με την πρόταση η οποία αφορά στην παραλληλία του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου προς την τρίτη πλευρά
- Τι μας λέει θεωρήματος εσωτερικής - εξωτερικής διχοτόμου και τι το αντίστροφο του;
- Πότε δυο πολύγωνα είναι όμοια;
- Πότε δυο τρίγωνα είναι όμοια;
- Πώς ορίζεται η ομοιότητα τριγώνων μέσω του ορισμού της ομοιότητας πολυγώνων;
- Ποια είναι τα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων;
- Πώς συσχετίζεται η ισότητα με την ομοιότητα τριγώνων και που εντοπίζονται οι διαφορές τους;

6. Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου αναμένουμε οι μαθητές να είναι σε θέση να:

Στην ενότητα «Λόγος, μέτρο και αναλογία ευθυγράμμων τμημάτων»

- Ερμηνεύουν το λόγο δύο ευθυγράμμων τμημάτων ως το λόγο των μέτρων τους. (Στόχος 2.1.1 του Προγράμματος Σπουδών)

Στην ενότητα «Θεώρημα Θαλή»

- Εφαρμόζουν το θεώρημα Θαλή εφόσον συντρέχουν οι προϋποθέσεις ή φέρνοντας κατάλληλες βοηθητικές ευθείες. (Στόχος 2.2.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ6)

Στην ενότητα «Θεώρημα Διχοτόμων τριγώνου»

- Διαπιστώνουν τη δυνατότητα χωρισμού ευθυγράμμου τμήματος στον ίδιο λόγο με σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του ή στην προέκταση του. (Στόχος 2.3.1 του Προγράμματος Σπουδών)

Στην ενότητα «Κριτήρια Ομοιότητας Τριγώνων»

- Πιστοποιούν ότι τα κριτήρια ομοιότητας λειτουργούν όπως και τα κριτήρια ισότητας, δηλαδή, με λιγότερες από τις προϋποθέσεις του ορισμού μπορούμε να αποφανθούμε για το ζητούμενο. (Στόχος 3.4.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ7)
- Συσχετίζουν την ισότητα με την ομοιότητα τριγώνων και εντοπίζουν τις διαφορές. (Στόχος 3.4.2 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ8)

7. Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες Δ6 έως Δ8, προτείνονται από το πρόγραμμα σπουδών και μπορούν να υλοποιηθούν στη σχολική τάξη:

Δραστηριότητα Δ6

Με τη δραστηριότητα Δ6, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (2.2.1) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να εφαρμόζουν το θεώρημα Θαλή, εφόσον συντρέχουν οι προϋποθέσεις ή φέρνοντας κατάλληλες βοηθητικές ευθείες..

Δραστηριότητα Δ7

Με τη δραστηριότητα Δ7, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (2.4.1) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να πιστοποιούν ότι τα κριτήρια ομοιότητας λειτουργούν όπως και τα κριτήρια ισότητας, δηλαδή, με λιγότερες από τις προϋποθέσεις του ορισμού μπορούμε να αποφανθούμε για το ζητούμενο.

Δραστηριότητα Δ8

Με τη δραστηριότητα Δ8, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (2.4.1 και 2.4.2) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να πιστοποιούν ότι τα κριτήρια ομοιότητας λειτουργούν όπως και τα κριτήρια ισότητας, δηλαδή, με λιγότερες από τις προϋποθέσεις του ορισμού μπορούμε να αποφανθούμε για το ζητούμενο και να συσχετίζουν την ισότητα με την ομοιότητα τριγώνων και εντοπίζουν τις διαφορές.

8. Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Η διδασκαλία του κεφαλαίου και η υλοποίηση των Δραστηριοτήτων θα διεξαχθεί σύμφωνα με τις υποδείξεις και τα σχόλια που περιέχονται στο Πρόγραμμα Σπουδών. Κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου:

- *Στην ενότητα «Λόγος, μέτρο και αναλογία ευθυγράμμων τμημάτων»* διατίθεται 1 διδακτική ώρα και γίνεται σύντομη αναφορά στις ιδιότητες των αναλογιών, αναδεικνύεται μέσω παραδειγμάτων ότι ζεύγη ευθυγράμμων τμημάτων διαφορετικών μεγεθών ενδέχεται να έχουν τον ίδιο λόγο, συνδέονται τα σύμμετρα και ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα με τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και γίνεται σύντομη ιστορική αναφορά για τη σημασία των σύμμετρων μεγεθών στην Πυθαγόρεια φιλοσοφία.
- *Στην ενότητα «Θεώρημα Θαλή»* διατίθενται 2 διδακτικές ώρες και οι μαθητές εφαρμόζουν το θεώρημα Θαλή και αναδεικνύουν τις εφαρμογές του σε τρίγωνα και τραπέζια. Συσχετίζουν το θεώρημα Θαλή με την πρόταση η οποία αφορά στην παραλληλία του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου προς την τρίτη πλευρά και το αποδεικνύουν για συγκεκριμένο λόγο (π.χ. 3/4). Αναφέρεται ότι με παρόμοιο τρόπο γενικεύεται για οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς. Γίνεται ιστορική αναφορά στο πέμπτο βιβλίο των Στοιχείων, διερευνώνται το «αντίστροφο» του θεωρήματος Θαλή, η γεωμετρική επίλυση της εξίσωσης πρώτου βαθμού και υλοποιείται η δραστηριότητα Δ6.

- *Στην ενότητα «Θεώρημα Διχοτόμων τριγώνου»* διατίθενται 2 διδακτικές ώρες και επιδιώκουμε οι μαθητές να διαπιστώνουν τη δυνατότητα χωρισμού ευθυγράμμου τμήματος στον ίδιο λόγο με σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του ή στην προέκταση του. Αναφέρεται χωρίς απόδειξη το αντίστροφο του θεωρήματος εσωτερικής - εξωτερικής διχοτόμου και υλοποιούνται οι υποδείξεις του προγράμματος Σπουδών.
- *Στην ενότητα «Κριτήρια Ομοιότητας Τριγώνων»* διατίθενται 2 διδακτικές ώρες και οι μαθητές πιστοποιούν ότι τα κριτήρια ομοιότητας λειτουργούν όπως και τα κριτήρια ισότητας, δηλαδή, με λιγότερες από τις προϋποθέσεις του ορισμού μπορούμε να αποφανθούμε για το ζητούμενο, συσχετίζουν την ισότητα με την ομοιότητα τριγώνων, εντοπίζουν τις διαφορές και υλοποιούνται οι υποδείξεις του προγράμματος Σπουδών.

9. Ποια σημεία πρέπει να προσέξει ιδιαίτερα ο διδάσκων;

Κατά τη διδασκαλία πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή:

- Στην «αλγεβροποίηση» της Γεωμετρίας μέσω των λόγων και των αναλογιών και στη δυνατότητα σύνθεσης της Γεωμετρίας με την Άλγεβρα και στη διευκόλυνση που μας προσφέρει για τη μελέτη και την επίλυση ορισμένων γεωμετρικών προβλημάτων και αντίστροφα.
- Στη συσχέτιση του λόγου μεγεθών με το λόγο των μέτρων τους, η οποία επιτρέπει τη «διαχείριση» των λόγων μεγεθών ως λόγο αριθμών.
- Στο ότι ο λόγος ομοιότητας είναι και ο λόγος των περιμέτρων των ομοίων σχημάτων
- Στο ότι από την ισότητα λόγων καταλήγουμε σε μετρικές σχέσεις.
- Στην μεγάλη χρησιμότητα και τις πολύ σημαντικές εφαρμογές των λόγων και της ομοιότητας σε χάρτες, μακέτες, μοντελισμός κ.λ.π.
- Στις αντίστροφες προτάσεις, οι οποίες δεν είναι πάντα αληθείς. Έτσι για την πρόταση: «Αν δύο σχήματα (π.χ. τρίγωνα) είναι ίσα, τότε είναι όμοια», δεν ισχύει πάντα η αντίστροφη, ενώ για την πρόταση: «Αν δύο σχήματα (π.χ. τρίγωνα) είναι ίσα, τότε είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 1» η αντίστροφη πρόταση «Αν δύο σχήματα (π.χ. τρίγωνα) είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 1, τότε είναι ίσα» αληθεύει και η αντίστροφη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{ο} : Πυθαγόρειο Θεώρημα (και μετρικές σχέσεις)

1. Εισαγωγή

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι διατυπωμένο ως το θεώρημα Ι.47 των Στοιχείων του Ευκλείδη, ως εξής:

- *«Εν τοις ορθογωνίοις τριγώνοις το από την ορθήν γωνίαν υποτεινούσης πλευράς τετράγωνον ίσον εστι τοις από των την ορθήν γωνίαν περιεχουσών πλευρών τετραγώνοις»*

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι ένα «από τα πιο συναρπαστικά και ασφαλώς πιο φημισμένα και χρήσιμα θεωρήματα της στοιχειώδους γεωμετρίας» σημειώνει ο H. Eves (1989, σελ.39). Η πατρότητα της απόδειξης του θεωρήματος ανήκει στον Πυθαγόρα, εξ ου και η ονομασία του, θεωρείται όμως ότι ήταν γνωστή η πρακτική εφαρμογή του και όχι ως θεώρημα, από την εποχή των Βαβυλωνίων και ότι έφθασε στην Ελλάδα μέσω των Αιγυπτίων. Εντυπωσιάζουν, όχι μόνο ο αριθμός των αποδείξεων που έχουν γίνει, αλλά και το πλήθος των εφαρμογών του.

Η απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος από τον Ευκλείδη στηρίζεται στη ισοδυναμία των εμβαδών, ενώ στα σημερινά σχολικά βιβλία η απόδειξη συνήθως στηρίζεται στην ομοιότητα τριγώνων. Ο Ευκλείδης, στην πρόταση Ι.47 των «Στοιχείων» έδωσε μια γενική και ξεκάθαρη απόδειξη του Πυθαγόρειου Θεωρήματος, διατύπωσε και απέδειξε το αντίστροφο θεώρημα (πρόταση Ι.48) και τα γενικευμένα θεωρήματα, χωρίς να εμπλέξει στην απόδειξη αναλογίες και ομοιότητες ευθυγράμμων σχημάτων. Σημειώνουμε ότι ο Ευκλείδης εννοεί γεωμετρικά τετράγωνα και όχι τετράγωνα αριθμών. Είναι χαρακτηριστικό εξάλλου, ότι η προηγούμενη του Πυθαγόρειου Θεωρήματος πρόταση (η Ι.46) αναφέρεται στην κατασκευή τετραγώνου πάνω σε δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα.

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα, εκτός από την πρακτική του αξία στις μετρήσεις, κατέχει κεντρική θέση στα Μαθηματικά, αφού συνδέεται με την ανακάλυψη των άρρητων αριθμών. Ο D. Struik (1982, σελ. 77) σημειώνει ότι η ανακάλυψη των αρρήτων «ανέτρεψε την άνετη αρμονία ανάμεσα στην Αριθμητική και τη Γεωμετρία». Έτσι, με τις πυθαγόρειες τριάδες εμβαδών συνδέονται οι πυθαγόρειες τριάδες αριθμών ($x^2 + y^2 = z^2$), το «Τελευταίο Θεώρημα του Φερμά» (η εξίσωση $x^ν + y^ν = z^ν$ δεν έχει ακέραιες λύσεις για ν>2), και η Θεωρία Αριθμών. Επίσης, με το νόμο των συνημιτόνων και τις προβολές, επιχειρείται η σύνδεση με τη Φυσική (π.χ. έργο δύναμης, κανόνας του παραλληλογράμμου).

2. Τι περιέχει το κεφάλαιο «Πυθαγόρειο Θεώρημα (και μετρικές σχέσεις)» και πως το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Στα περιεχόμενα του κεφαλαίου περιλαμβάνονται:

- **Ορθές προβολές (1 ώρα)**
- **Προτάσεις για τις κάθετες πλευρές και το ύψος στα ορθογώνια τρίγωνα (2 ώρες)**
- **Το Πυθαγόρειο θεώρημα (2 ώρες)**
- **Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα ή Νόμος των Συνημιτόνων (2 ώρες)**

Το περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου συνδέεται με τις προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών, αφού:

- ήδη από τις Β΄ και Γ΄ τάξεις του Γυμνασίου οι μαθητές έχουν διδαχθεί, όλα τα διδακτικά αντικείμενα του κεφαλαίου.

- Στο προηγούμενο κεφάλαιο έχουν διδαχθεί η ομοιότητα και οι αναλογίες που αποτελούν το αναγκαίο γνωστικό υπόβαθρο για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

3. Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο;

Το κεφάλαιο είναι σημαντικό διότι:

- Το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελεί έναν από τους μεγαλύτερους σταθμούς στην Ιστορία της Γεωμετρίας και των Μαθηματικών γενικότερα και επηρέασε καθοριστικά την εξέλιξη και ανάπτυξή τους.
- Η ιστορικές συνέπειες της απόδειξης του Πυθαγορείου Θεωρήματος ήταν τεράστιες, αφού οδήγησε στην διαπίστωση της ύπαρξης των ασύμμετρων μεγεθών και κατ επέκταση των άρρητων αριθμών.
- Στο Πυθαγόρειο θεώρημα στηρίζεται σε πολύ μεγάλο βαθμό η ανάπτυξη των μετρικών σχέσεων στη γεωμετρία.
- Υπάρχει ένα τεράστιο πλήθος εφαρμογών σε όλους τους τομείς των μαθηματικών και των άλλων επιστημών, της τέχνης και της τεχνολογίας. Χαρακτηριστική είναι μέθοδος των τεχνητών να σχηματίζουν ορθές γωνίες εφαρμόζοντας το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος με τη βοήθεια ενός σπάγκου.

4. Ποιες είναι οι Σημαντικές Ιδέες στο κεφάλαιο;

Οι πλέον σημαντικές έννοιες του κεφαλαίου είναι:

- *Το Πυθαγόρειο θεώρημα*: Τα άθροισμα τον τετραγώνων των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας του τριγώνου
- *Το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος*: Αν τα άθροισμα τον τετραγώνων των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι ίσο με το τετράγωνο της τρίτης πλευράς του τριγώνου, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και η Τρίτη πλευρά είναι η υποτείνουσα.
- *Το ασύμμετρο του λόγου της διαγωνίου προς την πλευρά ορθογωνίου τριγώνου:* Ο λόγος της διαγωνίου προς την πλευρά ενός τετραγώνου είναι άρρητος αριθμός
- *Ο Νόμος των Συνημιτόνων ως γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος*: Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $α^2 = β^2 + γ^2 – 2βγ$ συνΑ

5. Σε ποια ερωτήματα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα μπορούν να απαντούν στα ερωτήματα:

- Τι είναι «ορθή προβολή ευθυγράμμου τμήματος σε ευθεία»;
- Πώς κατασκευάζεται η ορθή προβολή ευθυγράμμου τμήματος σε ευθεία
- Πως προκύπτουν οι μετρικές σχέσεις για τις κάθετες πλευρές και το ύψος ορθογωνίου τριγώνου;
- Τι μας λέει το Πυθαγόρειο θεώρημα;
- Πως αποδεικνύεται το Πυθαγόρειο θεώρημα;
- Πώς ερμηνεύετε το ασύμμετρο των μεγεθών: διαγώνιος και πλευρά ορθογωνίου τριγώνου;
- Πώς διατυπώνεται το Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα;
- Πώς συνδέεται ο νόμος των συνημιτόνων με τον κανόνα του παραλληλογράμμου;

6. Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου αναμένουμε οι μαθητές να είναι σε θέση:

Στην ενότητα «Ορθές προβολές»

- Κατασκευάζουν και αναγνωρίζουν ορθές προβολές ευθυγράμμων τμημάτων σε ευθεία. (Στόχος ΄3.1.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ9)
- Συνδέουν την προβολή μιας πλευράς πάνω σε άλλη με το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας. (Στόχος 3.1.2 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ10)

- Χρησιμοποιούν τις προβολές σε επίλυση προβλημάτων Φυσικής. (Στόχος 3.1.3 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ11)

Στην ενότητα «Προτάσεις για τις κάθετες πλευρές και το ύψος στα ορθογώνια τρίγωνα»

- Ερμηνεύουν τις μετρικές σχέσεις για τις κάθετες πλευρές και για το ύψος ως αποτέλεσμα ομοιότητας τριγώνων. (Στόχος 3.2.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ3)
- Χρησιμοποιούν τις μετρικές σχέσεις ορθογωνίων τριγώνων στην επίλυση προβλημάτων και κατασκευών. (Στόχος 3.2.2 του Προγράμματος Σπουδών)

Στην ενότητα «Το Πυθαγόρειο θεώρημα»

- Εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του για την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων. (Στόχος 3.3.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ13)
- Εξηγούν γιατί ο λόγος της διαγωνίου τετραγώνου προς την πλευρά του είναι άρρητος αριθμός. (Στόχος 3.3.2 του Προγράμματος Σπουδών)

Στην ενότητα «Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα ή Νόμος των Συνημιτόνων»

- Χρησιμοποιούν το νόμο των συνημιτόνων για επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων Μαθηματικών και Φυσικής. (Στόχος 3.4.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητες Δ14 και Δ15)
- Συνδέουν το νόμο των συνημιτόνων με τον κανόνα του παραλληλογράμμου. (Στόχος 3.4.2 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητες Δ14 και Δ15)

7. Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες Δ9 έως Δ15, που περιέχονται στο πρόγραμμα σπουδών μπορούν να υλοποιηθούν στη σχολική τάξη

Δραστηριότητα Δ9

Με τη δραστηριότητα Δ9, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (3.1.1) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να κατασκευάζουν και αναγνωρίζουν ορθές προβολές ευθυγράμμων τμημάτων σε ευθεία.

Δραστηριότητα Δ10

Με τη δραστηριότητα Δ10, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (3.1.2) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να συνδέουν την προβολή μιας πλευράς πάνω σε άλλη με το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας.

Δραστηριότητα Δ11

Με τη δραστηριότητα Δ11, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (3.1.3) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να χρησιμοποιούν τις προβολές σε επίλυση προβλημάτων Φυσικής..

Δραστηριότητα Δ12

Με τη δραστηριότητα Δ12, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (3.2.2) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να χρησιμοποιούν τις μετρικές σχέσεις ορθογωνίων τριγώνων στην επίλυση προβλημάτων και κατασκευών.

Δραστηριότητα Δ13

Με τη δραστηριότητα Δ13, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (3.3.1) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του για την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων.

Δραστηριότητα Δ14

Με τη δραστηριότητα Δ14, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (3.4.1 και 3.4.2) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να χρησιμοποιούν το νόμο των συνημιτόνων για επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων Μαθηματικών και Φυσικής και να συνδέουν το νόμο των συνημιτόνων με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Δραστηριότητα Δ15

Με τη δραστηριότητα Δ14, η οποία επίσης αντιστοιχεί στο στόχο (3.4.1 και 3.4.2) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να χρησιμοποιούν το νόμο των συνημιτόνων για επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων Μαθηματικών και Φυσικής και να συνδέουν το νόμο των συνημιτόνων με τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

8. Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Η διδασκαλία του κεφαλαίου και η υλοποίηση των δραστηριοτήτων θα διεξαχθεί σύμφωνα με τις υποδείξεις και τα σχόλια που περιέχονται στο Πρόγραμμα Σπουδών. Κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου:

- *Στην ενότητα «Ορθές προβολές»* διατίθεται 1 διδακτική ώρα και οι μαθητές κατασκευάζουν και αναγνωρίζουν ορθές προβολές ευθυγράμμων τμημάτων σε ευθεία, συνδέουν την προβολή μιας πλευράς πάνω σε άλλη με το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας και χρησιμοποιούν τις προβολές σε επίλυση προβλημάτων Φυσικής, ενώ προτείνονται οι δραστηριότητες Δ9 (ως εισαγωγική), Δ10 και Δ11.
- *Στην ενότητα «Προτάσεις για τις κάθετες πλευρές και το ύψος στα ορθογώνια τρίγωνα»* διατίθενται 2 διδακτικές ώρες και οι μαθητές ερμηνεύουν τις μετρικές σχέσεις για τις κάθετες πλευρές και για το ύψος ως αποτέλεσμα ομοιότητας τριγώνων και χρησιμοποιούν τις μετρικές σχέσεις ορθογωνίων τριγώνων στην επίλυση προβλημάτων και κατασκευών. Γίνονται οι αποδείξεις των προτάσεων οι οποίες σε ορθογώνιο τρίγωνο συνδέουν (α) το τετράγωνο μίας κάθετης πλευράς με την προβολή της στην υποτείνουσα και (β) το τετράγωνο του ύψους με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα, ενώ προτείνεται η δραστηριότητα Δ12.
- *Στην ενότητα «Το Πυθαγόρειο θεώρημα»* διατίθενται 2 διδακτικές ώρες και οι μαθητές εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του για την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων και εξηγούν γιατί ο λόγος της διαγωνίου τετραγώνου προς την πλευρά του είναι άρρητος αριθμός. Με την ευκαιρία της απόδειξης του Πυθαγορείου θεωρήματος που χρησιμοποιεί τις σχέσεις της προηγούμενης παραγράφου, σχολιάζεται η διαφορά φιλοσοφίας με την αντίστοιχη απόδειξη του Ευκλείδη που εμπλέκει εμβαδά. παρατίθεται ιστορικό σχόλιο που πραγματεύεται την ανακάλυψη των αρρήτων και τη σχέση του Πυθαγορείου θεωρήματος με τους τρόπους με τους οποίους Βαβυλώνιοι και Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν τα ορθογώνια τρίγωνα σε πρακτικές εφαρμογές, ενώ προτείνεται η υλοποίηση της δραστηριότητας Δ13.
- *Στην ενότητα «Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα ή Νόμος των Συνημιτόνων»* διατίθενται 2 διδακτικές ώρες και οι μαθητές χρησιμοποιούν το νόμο των συνημιτόνων για επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων Μαθηματικών και Φυσικής και συνδέουν το νόμο των συνημιτόνων με τον κανόνα του παραλληλογράμμου και αποδεικνύουν το νόμο των συνημιτόνων, ενώ υλοποιούνται οι δραστηριότητες Δ14 και Δ15.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο} : Εμβαδά ευθυγράμμων σχημάτων

1. Εισαγωγή

Η έννοια του εμβαδού είναι μια βασική έννοια της Γεωμετρίας. Η ίδια η λέξη «γεωμετρία» παραπέμπει σε μέτρηση της γης, και αυτό αφορά κυρίως σε μέτρηση μήκους, εμβαδού και όγκου. Επομένως, ενώ η χρήση της έννοιας του εμβαδού παραπέμπει στις ιστορικές αρχές της γεωμετρίας, στους Βαβυλώνιους και τους Αιγύπτιους, οι οποίοι χρησιμοποιούσαν τα στοιχειώδη μαθηματικά που γνώριζαν (και την έννοια του εμβαδού οπωσδήποτε) για να μετρήσουν τη γη που καλλιεργούσαν, παραπέμπει επίσης και σε εφαρμογές της σημερινής καθημερινής ζωής.

Η έννοια του εμβαδού γεωμετρικού σχήματος προϋποθέτει την έννοια της κλειστής γραμμής και του κλειστού γεωμετρικού χωρίου, ενώ η έννοια της μέτρησης προϋποθέτει τη δυνατότητα σύγκρισης με ένα μοναδιαίο χωρίο.

Όμως, ο ορισμός της έννοιας του εμβαδού, όπως και οι περισσότεροι ορισμοί, παρουσιάζει δυσκολίες για τους μαθητές, γι αυτό και πρέπει να εισάγεται με περιγραφικό τρόπο και να αξιοποιείται το ανάλογο της έννοιας του μήκους.

2. Τι περιέχει το κεφάλαιο «Εμβαδά ευθυγράμμων σχημάτων» και πως το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Στα περιεχόμενα του δεύτερου κεφαλαίου περιλαμβάνονται:

- *Η έννοια του εμβαδού (1 ώρα)*
- *Εμβαδά: ορθογωνίου, παραλληλογράμμου, τριγώνου, τραπεζίου (2 ώρες)*
- *Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου (2 ώρες)*
- *Εμβαδόν και ομοιότητα (2 ώρες)*
- *Τετραγωνισμός ευθυγράμμων σχημάτων (1 ώρα)*

Το περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου συνδέεται με τις προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών, αφού:

- Οι μαθητές έχουν διδαχθεί στις τάξεις του Γυμνασίου, αλλά και στο Δημοτικό την έννοια του εμβαδού και τον υπολογισμό του εμβαδού των βασικών γεωμετρικών σχημάτων.
- Επιπλέον, από την καθημερινή τους ζωή, έχουν εξοικειωθεί με την έννοια, αλλά και με τις μονάδες μέτρησης και τις εφαρμογές της.

3. Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο;

Το κεφάλαιο είναι σημαντικό διότι:

- Η έννοια του εμβαδού, στενά συνδεδεμένη με τη μέτρηση, βρίσκει πλήθος εφαρμογών και στην καθημερινότητα. Στο κεφάλαιο αυτό το γινόμενο δύο ευθυγράμμων τμημάτων αποκτά αναπαραστατική υπόσταση ως εμβαδόν παραλληλογράμμου.
- Από την άλλη μεριά, η έκφραση εμβαδών ως γινομένου ευθυγράμμων τμημάτων προσφέρει τη δυνατότητα να αναχθούν συγκρίσεις εμβαδών σε συγκρίσεις ευθυγράμμων τμημάτων.
- Στην έννοια του εμβαδού στηρίζεται η έννοια της ισοδυναμίας και των ισοεμβαδικών γεωμετρικών σχημάτων.

4. Ποιες είναι οι Σημαντικές Ιδέες στο κεφάλαιο;

Οι πλέον σημαντικές έννοιες του κεφαλαίου είναι:

- Ο διαμερισμός ενός σχήματος
- Η έννοια της ισότητας γεωμετρικών σχημάτων

- Η έννοια της ισοδυναμίας γεωμετρικών σχημάτων
- Ο υπολογισμός του εμβαδού διαφόρων σχημάτων μέσω μετασχηματισμών σε σχήματα γνωστού εμβαδού.
- Η σχέση του λόγου ομοιότητας δυο ομοίων σχημάτων με:
  (α) το λόγο των περιμέτρων τους και

  (β) το λόγο των εμβαδών τους.

- Ο μετασχηματισμός πολυγώνων σε ισοδύναμα με λιγότερες πλευρές.

5. Σε ποια ερωτήματα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα μπορούν να απαντούν στα ερωτήματα:

- Τι ανάγκες εξυπηρετεί ο διαμερισμός ενός σχήματος;
- Ποια είναι η διαφορά των εννοιών «ίσα σχήματα» και «ισοδύναμα σχήματα»;
- Πώς προκύπτουν οι τύποι των εμβαδών ορθογωνίου, παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου;
- Πώς αποδεικνύονται οι τύποι: $\mathbf{E = \tau \cdot \rho}$, $\mathbf{E = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma / 4 \cdot R}$, $\mathbf{E = (1/2) \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A}$;
- Ποια είναι η σχέση του λόγου ομοιότητας δυο ομοίων σχημάτων με:
  (α) το λόγο των περιμέτρων τους και

  (β) το λόγο των εμβαδών τους;

- Πώς αποδεικνύεται το θεώρημα το οποίο αναφέρεται στο λόγο των εμβαδών δυο τριγώνων, στα οποία μια γωνία του ενός είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία του άλλου;
- Πώς μετασχηματίζονται πολύγωνα σε ισοδύναμα με λιγότερες πλευρές;

6. Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου αναμένουμε οι μαθητές να είναι σε θέση να:

Στην ενότητα «Η έννοια του εμβαδού»

- Εξηγούν την ανάγκη της διαδικασίας του διαμερισμού σχήματος. (Στόχος 4.1.1 του Προγράμματος Σπουδών)
- Διακρίνουν τα ισοδύναμα σχήματα από τα ίσα σχήματα. (Στόχος 4.1.2 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ16)

Στην ενότητα «Εμβαδά: ορθογωνίου, παραλληλογράμμου, τριγώνου, τραπεζίου»

- Υπολογίζουν μέσω μετασχηματισμών σε σχήματα γνωστού εμβαδού, τα εμβαδά διαφόρων σχημάτων. (Στόχος 4.2.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ17)

Στην ενότητα «Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου»

- Χρησιμοποιούν τους τύπους των εμβαδών για την επίλυση ασκήσεων-προβλημάτων υπολογισμού επιπέδων χωρίων και ακτίνων εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου. (Στόχος 4.3.1 του Προγράμματος Σπουδών)

Στην ενότητα «Εμβαδόν και ομοιότητα»

- Συσχετίζουν το λόγο ομοιότητας δυο ομοίων σχημάτων με:
  (α) το λόγο των περιμέτρων τους και

  (β) το λόγο των εμβαδών τους. (Στόχος 4.4.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητες Δ18, Δ19 και Δ20)

Στην ενότητα «Τετραγωνισμός ευθυγράμμων σχημάτων»

- Μετασχηματίζουν πολύγωνα σε ισοδύναμα με λιγότερες πλευρές. (Στόχος 4.5.1 του Προγράμματος Σπουδών, Δραστηριότητα Δ21)

7. Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες Δ16 έως Δ21, που προτείνονται από το πρόγραμμα σπουδών και μπορούν να υλοποιηθούν στη σχολική τάξη

Δραστηριότητα Δ16

Με τη δραστηριότητα Δ16, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (4.1.2) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε να διακρίνουν τα ισοδύναμα σχήματα από τα ίσα σχήματα.

Δραστηριότητα Δ17

Με τη δραστηριότητα Δ16, η οποία αντιστοιχεί στους στόχους (4.1.2) και (4.2.1) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε να διακρίνουν τα ισοδύναμα σχήματα από τα ίσα σχήματα και να υπολογίζουν μέσω μετασχηματισμών σε σχήματα γνωστού εμβαδού, τα εμβαδά διαφόρων σχημάτων.

Δραστηριότητα Δ18

Με τη δραστηριότητα Δ18, η οποία αντιστοιχεί στους στόχους (4.2.1) και (4.4.1) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε να υπολογίζουν μέσω μετασχηματισμών σε σχήματα γνωστού εμβαδού, τα εμβαδά διαφόρων σχημάτων και να συσχετίζουν το λόγο ομοιότητας δυο ομοίων σχημάτων με: (α) το λόγο των περιμέτρων τους και (β) το λόγο των εμβαδών τους.

Δραστηριότητα Δ19

Με τη δραστηριότητα Δ19, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (4.4.1) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε να συσχετίζουν το λόγο ομοιότητας δυο ομοίων σχημάτων με: (α) το λόγο των περιμέτρων τους και (β) το λόγο των εμβαδών τους.

Δραστηριότητα Δ20

(Αντιστοιχεί στο στόχο 4.4.2) *Με τη δραστηριότητα Δ20, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (4.4.2) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε να….*

Δραστηριότητα Δ21

Με τη δραστηριότητα Δ16 , η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (4.5.1) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε να μετασχηματίζουν πολύγωνα σε ισοδύναμα με λιγότερες πλευρές.

8. Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Η διδασκαλία του κεφαλαίου και η υλοποίηση των Δραστηριοτήτων θα διεξαχθεί σύμφωνα με τις υποδείξεις και τα σχόλια που περιέχονται στο Πρόγραμμα Σπουδών. Κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου:

- *Στην ενότητα «Η έννοια του εμβαδού»* διατίθεται 1 διδακτική ώρα και οι μαθητές **ε**ξηγούν την ανάγκη της διαδικασίας του διαμερισμού σχήματος και διακρίνουν τα ισοδύναμα σχήματα από τα ίσα σχήματα. Επίσης αναφέρεται ότι η μέτρηση των εμβαδών είναι μία διαδικασία ανάλογη με την μέτρηση των ευθυγράμμων τμημάτων και γίνεται συνοπτική αναφορά στις διαισθητικές ιδιότητες (που επέχουν θέση αξιωμάτων) και διέπουν τα εμβαδά, ενώ υλοποιείται η δραστηριότητα Δ16.

- *Στην ενότητα «Εμβαδά: ορθογωνίου, παραλληλογράμμου, τριγώνου, τραπεζίου»* διατίθενται 2 διδακτικές ώρες και οι μαθητές *υπολογίζουν μέσω μετασχηματισμών σε σχήματα γνωστού εμβαδού, τα εμβαδά διαφόρων σχημάτων,* αποδεικνύουν τους τύπους των εμβαδών ορθογωνίου, παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου και υλοποιείται η δραστηριότητα Δ17.
- *Στην ενότητα «Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου»* διατίθεται 1 διδακτική ώρα και οι μαθητές *χρησιμοποιούν τους τύπους των εμβαδών για την επίλυση ασκήσεων-προβλημάτων υπολογισμού επιπέδων χωρίων και ακτίνων εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου,* αποδεικνύουν τους τύπους :
  $E = \tau \cdot \rho$, $E = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma / 4 \cdot R$, $E = (1/2) \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A$.

  Ο τύπος του Ήρωνα δίνεται χωρίς απόδειξη, η οποία όμως περιέχεται σε σχετικό ιστορικό σημείωμα ενώ η ενασχόληση με τους τύπους της ενότητας 4.3 να είναι περιορισμένη.

- *Στην ενότητα «Εμβαδόν και ομοιότητα»* διατίθενται 2 διδακτικές ώρες και οι μαθητές *συσχετίζουν το λόγο ομοιότητας δυο ομοίων σχημάτων με το λόγο των περιμέτρων τους και το λόγο των εμβαδών τους,* αποδεικνύεται το θεώρημα το οποίο αναφέρεται στο λόγο των εμβαδών δυο τριγώνων, στα οποία μια γωνία του ενός είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία του άλλου και υλοποιούνται οι δραστηριότητες Δ18, Δ19 και Δ20.
- *Στην ενότητα «Τετραγωνισμός ευθυγράμμων σχημάτων»* διατίθεται 1 διδακτική ώρα και οι μαθητές *μετασχηματίζουν πολύγωνα σε ισοδύναμα με λιγότερες πλευρές, ενώ* υλοποιείται η δραστηριότητα Δ21.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $5^{ο}$: Κανονικά Πολύγωνα

1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια των κανονικών πολυγώνων και των ιδιοτήτων τους και έτσι προετοιμάζεται η μέτρηση του κύκλου.

2. Τι περιέχει το κεφάλαιο «Κανονικά Πολύγωνα» και πως το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Στα περιεχόμενα του κεφαλαίου περιλαμβάνονται:

- Ορισμός και στοιχεία κανονικού πολυγώνου (2 ώρες)
- Εγγραφή κανονικών πολυγώνων σε κύκλο (3 ώρες)

Το περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου συνδέεται με τις προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών, αφού:

- Οι μαθητές έχουν ήδη διδαχθεί στη Β Γυμνασίου έχουν διδαχτεί τον ορισμό και την ονομασία των κανονικών πολυγώνων, καθώς και την κατασκευή τους.
- Επιπλέον, έχουν εξοικειωθεί με κανονικά πολύγωνα, όπως αυτά εμφανίζονται στη φύση, στην τέχνη ή σε κατασκευές τεχνιτών αντικειμένων (π.χ. πλακοστρώσεις, εργαλεία, βίδες κ.α.)…

3. Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο;

Το κεφάλαιο είναι σημαντικό διότι:

- Οι ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων (η ομοιότητα, η σχέση των γωνιών, το άθροισμα των γωνιών, των κεντρικών γωνιών, των εξωτερικών γωνιών) παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη Γεωμετρία και τη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων.
- Οι γεωμετρικές ιδιότητες των κανονικών πολυγώνων προετοιμάζουν το έδαφος για το θεωρητικό πρόβλημα της μέτρησης του κύκλου.
- Η μελέτη τους έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς αυτά χρησιμοποιούνται όχι μόνο σε κατασκευές με αισθητική αξία (πλακοστρώσεις, ζωγραφική κ.λπ.), αλλά εμφανίζονται και στη φύση (κυψέλες μελισσών, φολίδες φιδιών κ.ά.)

4. Ποιες είναι οι Σημαντικές Ιδέες στο κεφάλαιο;

Οι πλέον σημαντικές έννοιες του κεφαλαίου είναι:

- Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε ένα κύκλο και περιγράφεται σε έναν άλλο
- Η σχέση της γωνίας και της κεντρικής γωνίας με τον αριθμό των πλευρών σε ένα κανονικό πολύγωνο: Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι: $\boldsymbol{\phi_\nu = 180^0 - 360^0/\nu}$, ενώ η κεντρική γωνία του είναι: $\boldsymbol{\omega_\nu = 360^0/\nu}$
- Η ομοιότητα: Όλα τα κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια
- Ο διαμερισμός: Τα κανονικά πολύγωνα διαμερίζονται σε ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα
- Το άθροισμα των γωνιών, των κεντρικών γωνιών και των εξωτερικών γωνιών σε ένα κανονικό (ή σε ένα οποιοδήποτε) πολύγωνο είναι ίσο με 360 μοίρες (4 ορθές)

5. Σε ποια ερωτήματα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα μπορούν να απαντούν στα ερωτήματα:

- Ποια πολύγωνα ονομάζονται κανονικά;
- Ποια είναι η γωνία και ποια η κεντρική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου;
- Ποια είναι η σχέση της γωνίας και της κεντρικής γωνίας με τον αριθμό των πλευρών σε ένα κανονικό πολύγωνο;

- Ποια είναι η σχέση της γωνίας με την κεντρική γωνία σε ένα κανονικό πολύγωνο;
- Πάς υπολογίζουμε τις γωνίες ενός κανονικού πολυγώνου από τον αριθμό των πλευρών του;
- Ποιο είναι το άθροισμα των γωνιών, των κεντρικών γωνιών και των εξωτερικών γωνιών σε ένα κανονικό (ή σε ένα οποιοδήποτε) πολύγωνο;
- Γιατί όλα τα κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια;
- Πώς εγγράφονται και πώς περιγράφονται σε κύκλο

  Α) ένα τετράγωνο;

  Β) ένα κανονικό εξάγωνο;

  Γ) ένα ισόπλευρο τρίγωνο;

- Γιατί ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι;

6. Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου αναμένουμε οι μαθητές να είναι σε θέση να:

Στην ενότητα «Ορισμός και στοιχεία κανονικού πολυγώνου»

- Αναγνωρίζουν ως κανονικά τα πολύγωνα τα οποία έχουν και τις πλευρές ίσες και τις γωνίες ίσες. (Στόχος 5.1.1 του Προγράμματος Σπουδών)
- Διαφοροποιούν τη γωνία από την κεντρική γωνία κανονικού ν-γωνου και αποδεικνύουν τη μεταξύ τους σχέση. (Στόχος 5.1.2 του Προγράμματος Σπουδών)
- Μπορούν να υπολογίζουν στοιχεία κανονικών πολυγώνων. (Στόχος 5.1.3 του Προγράμματος Σπουδών)

Στην ενότητα «Εγγραφή κανονικών πολυγώνων σε κύκλο»

- Εγγράφουν σε κύκλο:

  (α) τετράγωνο

  (β) κανονικό εξάγωνο

  (γ) ισόπλευρο τρίγωνο. (Στόχος 5.2.1 του Προγράμματος Σπουδών)

- Διερευνούν ένα κανονικό πολύγωνο ως προς τις συμμετρίες που παρουσιάζει. (Στόχος 5.2.2 του Προγράμματος Σπουδών)
- Αξιοποιούν ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων στην επίλυση προβλημάτων. (Στόχος 5.2.3 του Προγράμματος Σπουδών)

7. Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες Δ22 έως Δ26, που προτείνονται από το πρόγραμμα σπουδών και μπορούν να υλοποιηθούν στη σχολική τάξη

Δραστηριότητα Δ22

Με τη δραστηριότητα Δ22, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (5.1.1) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να αναγνωρίζουν ως κανονικά τα πολύγωνα τα οποία έχουν και τις πλευρές ίσες και τις γωνίες ίσες.

Δραστηριότητα Δ23

Με τη δραστηριότητα Δ23, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (5.2.1) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να εγγράφουν σε κύκλο: (α) τετράγωνο, (β) κανονικό εξάγωνο, (γ) ισόπλευρο τρίγωνο.

Δραστηριότητα Δ24

Με τη δραστηριότητα Δ24, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (5.2.2) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να διερευνούν ένα κανονικό πολύγωνο ως προς τις συμμετρίες που παρουσιάζει.

Δραστηριότητα Δ25

Με τη δραστηριότητα Δ25, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (5.2.3) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να αξιοποιούν ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων στην επίλυση προβλημάτων.

Δραστηριότητα Δ26

Με τη δραστηριότητα Δ26, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (5.2.3) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να αξιοποιούν ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων στην επίλυση προβλημάτων.

8. Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Η διδασκαλία του κεφαλαίου και η υλοποίηση των Δραστηριοτήτων θα διεξαχθεί σύμφωνα με τις υποδείξεις και τα σχόλια που περιέχονται στο Πρόγραμμα Σπουδών. Κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου:

- *Για τη διδασκαλία της ενότητας «Ορισμός και στοιχεία κανονικού πολυγώνου»* διατίθενται 2 διδακτικές ώρες και οι μαθητές αποδεικνύουν την εγγραφή και περιγραφή κανονικού ν-γωνου σε κύκλο για μια συγκεκριμένη περιπτώση (π.χ., εξάγωνο ή οκτάγωνο), ενώ τονίζεται η γενίκευση της διαδικασίας. Για την επίτευξη του στόχου 5.1.3, δεν δίνονται οι γενικοί τύποι, υπολογισμού πλευράς, αποστήματος, περιμέτρου και εμβαδού κανονικού πολυγώνου ως συνάρτηση της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου, ώστε οι μαθητές να τους υπολογίζουν κατά περίπτωση.
  Αποδεικνύεται ότι δυο κανονικά πολύγωνα με ίσο αριθμό πλευρών είναι όμοια και στη συνέχεια ότι ο λόγος ομοιότητας ισούται με το λόγο των αποστημάτων τους και το λόγο των ακτίνων τους και προτείνεται η δραστηριότητα Δ22.

- *Για τη διδασκαλία της ενότητας «Εγγραφή κανονικών πολυγώνων σε κύκλο»* διατίθενται 3 διδακτικές ώρες, οι μαθητές πραγματοποιούν το σχεδιασμό κανονικών πολυγώνων διαιρώντας τον κύκλο σε ίσα τόξα, δεν γίνονται όλες οι διαιρέσεις με κανόνα και διαβήτη. Δίνεται ιστορικό σχόλιο (α) για τη σύνδεση της κατασκευής κανονικού πενταγώνου και δεκαγώνου με τη «χρυσή τομή» και (β)για τις προσπάθειες που έγιναν κατά τον 18ο και 19ο αιώνα να διαιρεθεί κύκλος σε ίσα τόξα. Αναδεικνύεται η αξία των κανονικών πολυγώνων στην κάλυψη επιφανειών (π.χ. κάλυψη με τρίγωνα, τετράγωνα και κανονικά εξάγωνα) και υλοποιούνται οι δραστηριότητες Δ23, Δ24, Δ25 και Δ26

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $6^{ο}$: Μέτρηση Κύκλου

1. Εισαγωγή

Η μέτρηση του κύκλου είναι από τα πιο σημαντικά ζητήματα που απασχολούσαν τους μαθηματικούς από την αρχαιότητα. Η δυσκολία του προβλήματος κυρίως οφείλεται στο γεγονός ότι ο λόγος του μήκους του κύκλου προς τη διάμετρό του είναι ο άρρητος (και υπερβατικός) αριθμός π. Στην πραγματεία «*Κύκλου μέτρησις*» του Αρχιμήδη προσδιορίζονται οι περίμετροι των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων με 96 πλευρές και συμπεραίνει ότι το μήκος (η περίμετρος) του κύκλου είναι μικρότερη από 3 1/8 και μεγαλύτερη από 3 10/71 της διάμετρο. Ο Αρχιμήδης, προσπάθησε να υπολογίσει τα εμβαδά διαφόρων επιφανειών και τους όγκους στερεών σωμάτων και έφτασε ουσιαστικά σε μεθόδους του ολοκληρωτικού λογισμού. Υπολόγισε το π, με αρκετά καλή προσέγγιση, αλλά και με αξιοποίηση της μεθόδου της εξάντλησης.

2. Τι περιέχει το κεφάλαιο «Μέτρηση Κύκλου» και πως το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Στα περιεχόμενα του κεφαλαίου περιλαμβάνονται δύο διδακτικές ενότητες:

- Μήκος κύκλου (3 ώρες)
- Εμβαδόν κυκλικού δίσκου (3 ώρες)

Το περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου συνδέεται με τις προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών, αφού:

- Οι μαθητές έχουν διδαχθεί τον κύκλο σε προηγούμενες τάξεις, στο Γυμνάσιο, αλλά και στο Δημοτικό.
- Από τη φοίτησή τους στις προηγούμενες σχολικές τάξεις, οι μαθητές έχουν ήδη διδαχθεί τρόπους υπολογισμού του μήκους και του εμβαδού του κύκλου.
- Επιπλέον, έχουν εξοικειωθεί με τον κύκλο μέσα από τη διαισθητική και εποπτική προσέγγιση της έννοιας στην καθημερινή ζωή.

3. Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο;

Το κεφάλαιο είναι σημαντικό διότι:

- Λόγω των ιδιοτήτων του είναι ένα από τα βασικά γεωμετρικά σχήματα.
- Τα σημεία του κύκλου, εκτός από την ιδιότητα που προκύπτει από τον ορισμό του (να απέχουν από το κέντρο του κύκλου την ίδια σταθερή απόσταση) έχουν και άλλες ενδιαφέρουσες ιδιότητες (π.χ.; να «βλέπουν ένα συγκεκριμένο τόξο του κύκλου με την ίδια γωνία)
- Μελετώντας τη σχέση του κύκλου με εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σε αυτόν κανονικά πολύγωνα, ερχόμαστε σε μια πρώτη επαφή με διαδικασίες ορίου και γνωριμία με τη μέθοδο της προσέγγισης που είναι μια από τις κεντρικές ιδέες των Μαθηματικών.
- Τα κυκλικά σχήματα είναι από τα σημαντικότερα σχήματα που συναντώνται στη φύση, στην τέχνη, στην τεχνολογία και τις τεχνικές, στις επιστήμες και γενικότερα στον φυσικό και τον τεχνικό κόσμο.

4. Ποιες είναι οι Σημαντικές Ιδέες στο κεφάλαιο;

Οι πλέον σημαντικές έννοιες του κεφαλαίου σχετίζονται με τον ορισμό και τις ιδιότητες του κύκλου και είναι:

- Ο λόγος του μήκους του κύκλου προς τη διάμετρό του είναι ο αριθμός π, ο οποίος είναι άρρητος (και υπερβατικός).
- Όλα τα κανονικά πολύγωνα εγγράφονται και περιγράφονται σε κύκλο.
- Ο κύκλος προσεγγίζεται οριακά από εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα.

5. Σε ποια ερωτήματα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα μπορούν να απαντούν στα ερωτήματα:

- Πώς μπορούμε να προσεγγίσουμε το μήκος του κύκλου;
- Ποια είναι η διαφορά της έννοιας του «ίσον» από την έννοια του «τείνει σε»;
- Πώς βρίσκουμε το μήκος τόξου ως συνάρτηση της ακτίνας;
- Πώς μπορούμε να προσεγγίσουμε το εμβαδόν του κύκλου;
- Πώς υπολογίζουμε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα;
- Τι γνωρίζετε για τη μέθοδο της εξάντλησης;
- Τι γνωρίζετε για τον τετραγωνισμό του κύκλου και τη συμβολή του Αρχιμήδη;
- Τι γνωρίζετε για τους μηνίσκους του Ιπποκράτη;
- Τι γνωρίζετε για τον αριθμό π;

6. Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου αναμένουμε οι μαθητές να είναι σε θέση να:

Στην ενότητα «Μήκος κύκλου»

- Περιγράφουν και ερμηνεύουν τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζεται το μήκος του κύκλου. (Στόχος 6.1.1 του Προγράμματος Σπουδών)
- Διακρίνουν την έννοια του «ίσον» από την έννοια του «τείνει σε». (Στόχος 6.1.2 του Προγράμματος Σπουδών)
- Βρίσκουν το μήκος τόξου ως συνάρτηση της ακτίνας. (Στόχος 6.1.3 του Προγράμματος Σπουδών)
- Εφαρμόζουν τους τύπους στην επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων με μεικτόγραμμα σχήματα. (Στόχος 6.1.4 του Προγράμματος Σπουδών)

Στην ενότητα «Εμβαδόν κυκλικού δίσκου»

- Ερμηνεύουν και περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζεται το εμβαδόν του κύκλου. (Στόχος 6.2.1 του Προγράμματος Σπουδών)
- Υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού τομέα. (Στόχος 6.2.2 του Προγράμματος Σπουδών)
- Εφαρμόζουν τους τύπους στην επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων με μεικτόγραμμα χωρία(Στόχος 6.2.3 του Προγράμματος Σπουδών)

7. Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες Δ27 έως Δ29, που προτείνονται από το πρόγραμμα σπουδών και μπορούν να υλοποιηθούν στη σχολική τάξη

Δραστηριότητα Δ27

Με τη δραστηριότητα Δ1, η οποία αντιστοιχεί στους στόχους (6.1.1) και (6.1.2) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε να περιγράφουν και ερμηνεύουν τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζεται το μήκος του κύκλου και να διακρίνουν την έννοια του «ίσον» από την έννοια του «τείνει σε».

Δραστηριότητα Δ28 :

Με τη δραστηριότητα Δ28, η οποία αντιστοιχεί στους στόχους (6.2.1) και (6.2.2) του Προγράμματος Σπουδών, η δραστηριότητα Δ28 επιδιώκουμε οι μαθητές να ερμηνεύουν και περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζεται το εμβαδόν του κύκλου και να υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού τομέα

Δραστηριότητα Δ29

Με τη δραστηριότητα Δ29, η οποία αντιστοιχεί στους στόχους (6.2.1) και (6.2.2) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να ερμηνεύουν και περιγράφουν τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζεται το εμβαδόν του κύκλου και να υπολογίζουν το εμβαδόν κυκλικού τομέα

8. Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Η διδασκαλία του κεφαλαίου και η υλοποίηση των Δραστηριοτήτων θα διεξαχθεί σύμφωνα με τις υποδείξεις και τα σχόλια που περιέχονται στο Πρόγραμμα Σπουδών. Κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου:

Για τη διδασκαλία της ενότητας «Μήκος κύκλου» διατίθενται 3 διδακτικές ώρες και θα αναφερθεί ότι η μέθοδος της εξάντλησης η οποία χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του μήκους κύκλου παράγει ορθά και ακριβή αποτελέσματα και είναι μία από τις κεντρικές ιδέες των Μαθηματικών, ενώ προτείνεται η υλοποίηση της δραστηριότητας Δ27

Για τη διδασκαλία της ενότητας «Εμβαδόν κυκλικού δίσκου» διατίθενται 3 διδακτικές ώρες και θα γίνει ιστορική αναφορά για τον τετραγωνισμό του κύκλου η οποία θα:

(α) αναδεικνύει τη συμβολή του Αρχιμήδη (287 - 212 π.Χ.), και τη σύνδεσή της με τα σημερινά Μαθηματικά.

(β) αναφέρεται στους μηνίσκους του Ιπποκράτη (τέλος $5^{ου}$ αι. π.Χ.) και

(γ) αναφέρεται στη φύση του αριθμού π.

Για υλοποίηση προτείνονται οι δραστηριότητες Δ28 και Δ29.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^{ο}: Στερεά Σχήματα-Μέτρηση Στερεών

1. Εισαγωγή

Η αίσθηση του χώρου αποτελεί το κοινό υπόβαθρο της ανθρώπινης εμπειρίας. Όπως αναφέρεται στο Πρόγραμμα Σπουδών, η ανάγκη για απεικόνιση σχημάτων των τριών διαστάσεων σε δισδιάστατες επιφάνειες καλλιεργεί τη χωρική αντίληψη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ενώ οι μετρήσεις όγκων και επιφανειών έχουν άμεση εφαρμογή σε ανάγκες της καθημερινής ζωής. Η ανάπτυξη και θεμελίωση της Γεωμετρίας του Χώρου είχε ξεκινήσει πριν από τον Ευκλείδη, ενώ έφτασε στην κορύφωσή της κατά την αρχαιότητα από τον Αρχιμήδη, ο οποίος ανέπτυξε μεθόδους πρόδρομους του Απειροστικού Λογισμού.

Στα βιβλία XI., XII. Και XII. των «Στοιχείων» ο Ευκλείδης διαπραγματεύεται τη Γεωμετρία του Χώρου, τον όγκο των στερεών και τη μέθοδο της εξάντλησης και τα κανονικά στερεά και δίνει τους ορισμούς: «*Στερεόν εστι το μήκος και πλάτος και βάθος έχον*» και «*Στερεού δε πέρας επιφάνεια*», βιβλίο ια΄, Όροι α΄ και β΄).

2. Τι περιέχει το κεφάλαιο «Στερεά Σχήματα-Μέτρηση Στερεών» και πως το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Στα περιεχόμενα του κεφαλαίου περιλαμβάνονται οι ενότητες:

- Γενικά περί πολυέδρων (2 ώρες)
- Πρίσμα, παραλληλεπίπεδο, κύβος (3 ώρες)
- Πυραμίδα (1 ώρα)
- Στερεά εκ περιστροφής: κύλινδρος, κώνος, σφαίρα (3 ώρες)

Το περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου συνδέεται με τις προγενέστερες σχετικές γνώσεις των μαθητών, αφού:

- Οι μαθητές έχουν διδαχθεί στη Β Γυμνασίου για τα γεωμετρικά στερεά και τη μέτρησή τους (πρίσμα, κύλινδρος, πυραμίδα, κώνος, σφαίρα), ενώ στην Α Λυκείου έχουν διδαχθεί για τις ευθείες και τα επίπεδα στο χώρο.
- Επιπλέον, από την καθημερινή τους ζωή και από τη χρήση των στερεών, αλλά και από την εποπτεία έχουν εξοικειωθεί με την έννοια του τρισδιάστατου χώρου και των στερεών σχημάτων.

3. Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο;

Το κεφάλαιο είναι σημαντικό διότι:

- Η μελέτη του χώρου, των στερεών γεωμετρικών σχημάτων και των ιδιοτήτων τους παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και είναι καθοριστική για την ανάπτυξη και την καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης των μαθητών.
- Η πρακτική χρησιμότητα των γνώσεων που θα αποκτηθεί από η διδασκαλία του τρόπου υπολογισμού του εμβαδού της επιφανείας και του όγκου των γεωμετρικών στερεών, αλλά και με τις μονάδες μέτρησης και τις εφαρμογές της.
- Το γεγονός ότι ζούμε στο χώρο των τριών διαστάσεων καθιστά την ανάγκη γνωριμίας και κατανόησης του χώρου εξαιρετικά σημαντική.

4. Ποιες είναι οι Σημαντικές Ιδέες στο κεφάλαιο;

Οι πλέον σημαντικές έννοιες του κεφαλαίου είναι:

- Τα γεωμετρικά στερεά και οι ιδιότητες τους
- Η έννοια της γενέτειρας της πρισματικής επιφάνειας
- Η σχέση μεταξύ των στοιχείων των γεωμετρικών στερεών

- Ο σχηματισμός στερεών εκ περιστροφής
- Ο ορισμός και οι ιδιότητες του όγκου των στερεών
- Ο διαμερισμός ενός στερεού σχήματος και η διατήρηση του όγκου
- Η έννοια της ισοδυναμίας των όγκων των στερεών γεωμετρικών σχημάτων
- Η σχέση του λόγου ομοιότητας δυο ομοίων στερεών σχημάτων με το λόγο των όγκων τους
- Οι ιδιότητες των κανονικών στερεών

5. Σε ποια ερωτήματα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου οι μαθητές θα μπορούν να απαντούν στα ερωτήματα:

- Ποια είναι τα βασικά γεωμετρικά στερεά;
- Ποια είναι τα χαρακτηριστικά των βασικών γεωμετρικών στερεών;
- Ποια είναι τα αναπτύγματα των βασικών γεωμετρικών στερεών;
- Ποιοι είναι οι τύποι και πως υπολογίζεται το εμβαδόν της επιφανείας των βασικών γεωμετρικών στερεών;
- Ποιοι είναι οι τύποι και πως υπολογίζεται ο όγκος των βασικών γεωμετρικών στερεών;
- Ποια είναι τα Πλατωνικά Στερεά και ποιες είναι οι χαρακτηριστικές τους ιδιότητες;

6. Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου αναμένουμε οι μαθητές να είναι σε θέση να:

Στην ενότητα «Γενικά περί πολυέδρων»

- Αναγνωρίζουν τα βασικά γεωμετρικά στερεά. (Στόχος 7.1.1 του Προγράμματος Σπουδών)
- Αναγνωρίζουν τα αναπτύγματα πρισμάτων, πυραμίδων, κώνων και κυλίνδρου. (Στόχος 7.1.2 του Προγράμματος Σπουδών)

Στην ενότητα «Πρίσμα, παραλληλεπίπεδο, κύβος»

- Υπολογίζουν μήκη και γωνίες στα πρίσματα. (Στόχος 7.2.1 του Προγράμματος Σπουδών)
- Υπολογίζουν το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο πρισμάτων. (Στόχος 7.2.2 του Προγράμματος Σπουδών)

Στην ενότητα «Πυραμίδα»

- Εφαρμόζουν τους τύπους για την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων. (Στόχος 7.3.1 του Προγράμματος Σπουδών)

Στην ενότητα «Στερεά εκ περιστροφής: κύλινδρος, κώνος, σφαίρα»

- Εφαρμόζουν τους τύπους για την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων. (Στόχος 7.4.1 του Προγράμματος Σπουδών)

7. Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες Δ30 έως Δ33, προτείνονται από το πρόγραμμα σπουδών και μπορούν να υλοποιηθούν στη σχολική τάξη

Δραστηριότητα Δ30

Με τη δραστηριότητα Δ30, η οποία αντιστοιχεί στους στόχους (7.1.1) και (7.1.2) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε να αναγνωρίζουν οι μαθητές τα βασικά γεωμετρικά στερεά και να αναγνωρίζουν τα αναπτύγματα πρισμάτων, πυραμίδων, κώνων και κυλίνδρου.

Δραστηριότητα Δ31

Με τη δραστηριότητα Δ31, η οποία αντιστοιχεί στους στόχους (7.1.1) και (7.1.2) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να αναγνωρίζουν τα βασικά γεωμετρικά στερεά και να αναγνωρίζουν τα αναπτύγματα πρισμάτων, πυραμίδων, κώνων και κυλίνδρου.

Δραστηριότητα Δ32

Με τη δραστηριότητα Δ32, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (7.3.1) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε να εφαρμόζουν οι μαθητές τους τύπους για την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων.

Δραστηριότητα Δ33

Με τη δραστηριότητα Δ33, η οποία αντιστοιχεί στο στόχο (7.4.1) του Προγράμματος Σπουδών, επιδιώκουμε οι μαθητές να εφαρμόζουν τους τύπους για την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων.

8. Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Η διδασκαλία του κεφαλαίου και η υλοποίηση των Δραστηριοτήτων θα διεξαχθεί σύμφωνα με τις υποδείξεις και τα σχόλια που περιέχονται στο Πρόγραμμα Σπουδών. Κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου:

- *Για τη διδασκαλία της ενότητας «Γενικά περί πολυέδρων»* διατίθενται 2 διδακτικές ώρες και οι μαθητές θα αναγνωρίσουν τα βασικά γεωμετρικά στερεά, καθώς και τα αναπτύγματα πρισμάτων, πυραμίδων, κώνων και κυλίνδρου. Θα αναφερθούν οι έννοιες γενέτειρα, πρισματική επιφάνεια, επίπεδη τομή, έδρα, ακμή, κορυφή, θα γίνει σύντομη αναφορά στην στερεά γωνία και θα υλοποιηθούν οι δραστηριότητες Δ30 και Δ31.
- *Για τη διδασκαλία της ενότητας «Πρίσμα, παραλληλεπίπεδο, κύβος»* διατίθενται 3 διδακτικές ώρες, ώστε οι μαθητές να υπολογίζουν μήκη και γωνίες στα πρίσματα, καθώς και το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο πρισμάτων. Κατά τη διδασκαλία θα γίνει αναφορά στο ορθό και το πλάγιο πρίσμα, θα αναδειχθεί ότι το παραλληλεπίπεδο είναι ειδική περίπτωση πρίσματος και ο κύβος ειδική περίπτωση παραλληλεπιπέδου, κατά αντιστοιχία με τετράπλευρα, παραλληλόγραμμα, ρόμβους, και τετράγωνα και με αφορμή τις στερεές γωνίες ενός πρίσματος θα γίνει αναφορά στις τρισορθογώνιες του ορθού πρίσματος. Επίσης, θα αποδειχτεί ότι: (α) Οι απέναντι έδρες κάθε παραλληλεπιπέδου είναι ίσες και παράλληλες και (β) Η διαγώνιος δ κάθε ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ακμές α, β, γ δίνεται από τον τύπο $δ^2 = α^2 + β^2 + γ^2$. Επιπλέον, θα υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας πρίσματος μόνο για την περίπτωση του ορθού, θα παρουσιαστεί, με αναφορά σε συγκεκριμένο παράδειγμα, ο τύπος του όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, θα δοθεί χωρίς απόδειξη ότι ο όγκος παραλληλεπιπέδου και γενικότερα κάθε πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης επί το ύψος του και θα γίνει ιστορική αναφορά στο πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου
- *Για τη διδασκαλία της ενότητας «Πυραμίδα»* διατίθεται 1 διδακτική ώρα ώστε οι μαθητές να εφαρμόζουν τους τύπους για την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων και να γίνει αναφορά στο τετράεδρο, να δοθεί ο τύπος του όγκου της πυραμίδας χωρίς απόδειξη, αλλά να υπάρχει εμπειρική ερμηνεία και να υλοποιηθεί η δραστηριότητα Δ32.
- *Για τη διδασκαλία της ενότητας «Στερεά εκ περιστροφής: κύλινδρος, κώνος, σφαίρα»* διατίθενται 3 διδακτικές ώρες, ώστε οι μαθητές να *εφαρμόζουν τους τύπους για την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων και να* μελετηθούν οι ορθοί κύλινδροι και κώνοι. Θα αναφερθούν οι κωνικές τομές, χωρίς τύπους ή ιδιότητες, καθώς και οι μέγιστοι κύκλοι σφαίρας, θα δοθούν χωρίς απόδειξη οι τύποι υπολογισμού του εμβαδού της επιφάνειας και του όγκου κυλίνδρου, θα περιγραφεί η διαδικασία υπολογισμού τους με τον συνεχή διπλασιασμό των πλευρών της βάσης κανονικού πρίσματος που είναι εγγεγραμμένο ή περιγεγραμμένο σε αυτόν και θα σημειωθεί η αντιστοιχία της διαδικασίας με εκείνη του υπολογισμού εμβαδού κύκλου. Επίσης, θα δοθούν χωρίς απόδειξη οι τύποι υπολογισμού του εμβαδού της επιφάνειας και του όγκου κανονικής πυραμίδας, θα περιγραφεί η διαδικασία υπολογισμού τους με τον συνεχή διπλασιασμό των πλευρών της βάσης κανονικής πυραμίδας που είναι εγγεγραμμένη ή περιγεγραμμένη σε αυτήν, θα δοθούν χωρίς απόδειξη οι τύποι για το εμβαδόν και τον όγκο σφαίρας, θα γίνει ιστορική αναφορά στα Πλατωνικά στερεά και θα υλοποιηθεί η δραστηριότητα Δ33.

Βιβλιογραφία

20. Αναπολιτάνος Δ., Καρασμάνης Β. (1993). Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας, εκδ. τροχαλία
21. Bunt L., Jones P., Bedient J. (1981). Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών, εκδ. Πνευματικού
22. Davis D. (1996). Η φύση και η δύναμη των Μαθηματικών, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
23. Davis-Hersh, (1980). Η μαθηματική εμπειρία, Τροχαλία
24. Εξαρχάκος Γ. (επιστ. υπεύθυνος). (2001) Ευκλείδη «Στοιχεία», τόμοι Ι., ΙΙ., ΙΙΙ., Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., Αθήνα
25. Hilbert D., (1995). Τα θεμέλια της γεωμετρίας, Τροχαλία
26. Θωμαίδης Γ., Πούλος Α. (2000). Διδακτική της ευκλείδειας γεωμετρίας, εκδ. Ζήτη
27. Κολέζα, Ε., (2000). Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών, Leader Books
28. Λάππας, Δ. (2010). Αναλυτικά Προγράμματα με αναφορά στη Σχολική Γεωμετρία, στο ΕΠΕΔΙΜ, Η Γεωμετρία και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση, εκδ. Ζήτη
29. Λάππας, Δ. (2009). Θεμελιώδεις Γεωμετρικές Έννοιες (Μία γενετική προσέγγιση), στο ΕΠΕΔΙΜ, Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Ναθηματικών, εκδ. Ζήτη
30. Levi, B. (2014). Διαβάζοντας τον Ευκλείδη, εκδ. Πατάκης,
31. Mlodinow , L. (2007). Το παράθυρο του Ευκλείδη, εκδ. Κάτοπτρο.
32. Μαρουσάκης Π., (1980). Η αξιωματική του Hilbert και η μέση παιδεία, στο Επιστήμη και Εκπαίδευση 2, Ελληνική Μαθηματικά Εταιρεία, Αθήνα.
33. Waerden, B.L.Van. (2000). Η αφύπνιση της επιστήμης, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης
34. Σταμάτης, Ε., (1975). Ευκλείδου Γεωμετρία Στοιχεία, τομ. 1, ΟΕΔΒ,
35. Σταμάτης, Ε., (1957). Ευκλείδου Στερεομετρία Στοιχείων Βιβλία ΧΙ., ΧΙΙ., ΧΙΙΙ., τομ. 4, ΟΕΔΒ, Αθήνα
36. Struik, D. (1982). Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών, εκδ. «Ι. Ζαχαρόπουλος»
37. Szabo, A. (1973). Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών εκδ Τ.Ε.Ε,
38. Χασάπης Δ. (επιμ.) (2003). Το επιχείρημα και η απόδειξη στα σχολικά μαθηματικά, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, θεσσαλονίκη

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο : Διανύσματα

Εισαγωγή

Ο διανυσματικός λογισμός αποτελεί μια μαθηματική θεωρία, η οποία εξελίχθηκε δεχόμενη σημαντικές επιδράσεις από τη Φυσική. Ο γνωστός «κανόνας του παραλληλογράμμου», σύμφωνα με τον οποίο το μέτρο και η κατεύθυνση της συνισταμένης δύο δυνάμεων, που ασκούνται σε ένα σώμα, εκφράζεται από τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν, ήταν γνωστός και εμφανίζεται με διάφορες μορφές σε έργα του Αριστοτέλη, του Αρχιμήδη και του Ήρωνα. Ο συγκεκριμένος κανόνας, που δημιουργεί την ιδέα μιας γεωμετρικής πρόσθεσης, διαφορετικής από την κοινή πρόσθεση των ευθυγράμμων τμημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, χρησιμοποιήθηκε πολλούς αιώνες για το γεωμετρικό προσδιορισμό της συνισταμένης, χωρίς όμως αυτό να οδηγήσει στην αναγνώριση μιας τέτοιας πρόσθεσης.

Στη διάρκεια του 17ου αιώνα, η ιδιαίτερη έμφαση που δόθηκε στη μελέτη φυσικών ποσοτήτων όπως η ταχύτητα, η δύναμη, η ορμή και η επιτάχυνση, οι οποίες χαρακτηρίζονται τόσο από το μέγεθος όσο και από τη διεύθυνση τους, καθώς και η συστηματική χρήση των αρνητικών αριθμών, έφεραν στο προσκήνιο τις έννοιες του *προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος* και της προσανατολισμένης κίνησης. Οι ιδέες αυτές, δηλαδή η ανάπτυξη ενός νέου λογισμού με προσανατολισμένα μεγέθη, άρχισαν να αναπτύσσονται στα Μαθηματικά προς τα τέλη του 18ου αιώνα, σε στενή σχέση με το ζήτημα της γεωμετρικής ερμηνείας των μιγαδικών αριθμών. Η πρώτη σημαντική εργασία πάνω σ' αυτό το θέμα οφείλεται στον χαρτογράφο G. Wessel και δημοσιεύτηκε το1799, με τον χαρακτηριστικό τίτλο «Πραγματεία για την αναλυτική παράσταση της διεύθυνσης».

Σ' αυτήν την εργασία γίνεται μια απόπειρα επέκτασης, από την απλή περίπτωση των ευθύγραμμων τμημάτων που έχουν την ίδια ή αντίθετες διευθύνσεις (και εκφράζονται αναλυτικά με τη βοήθεια των θετικών ή αρνητικών αριθμών) στη γενικότερη περίπτωση τμημάτων του επιπέδου με τυχαίες διευθύνσεις. Ο Wessel ορίζει αρχικά την **πρόσθεση** των προσανατολισμένων τμημάτων, και στη συνέχεια περιγράφει τη διαδικασία **πολλαπλασιασμού** δυο τμημάτων. «Δυο ευθύγραμμα τμήματα μπορούν να προστεθούν, αν τα ενώσουμε με τέτοιο τρόπο, ώστε το δεύτερο να αρχίζει εκεί που τελειώνει το πρώτο και φέρουμε κατόπιν ένα ευθύγραμμο τμήμα από το αρχικό ως το τελικό σημείο των ενωμένων τμημάτων. Αυτό το τμήμα είναι το άθροισμά τους».

Το 1843, ο W.R. Hamilton δημιούργησε τη Θεωρία των κβατερνίων (quaternions), ενώ το 1844, ο H. Grassmann, παρουσίασε τη **«Θεωρία της επέκτασης»** (Ausdehnungslehre). Ο Hamilton χρησιμοποίησε συστηματικά τους όρους κλιμακωτό ή βαθμωτό (scalar) για κάθε μέγεθος, «το οποίο μπορεί να πάρει όλες τις τιμές της αριθμητικής κλίμακας (scale) από το αρνητικό ως το θετικό άπειρο», και διάνυσμα (**vector**) για κάθε ευθύγραμμο τμήμα «με ορισμένο μήκος και ορισμένη

Εικόνα 1: Sir William R. Hamilton (1805-1865)

διεύθυνση στο χώρο». Ο όρος vector, κατά μια εκδοχή, προέρχεται από το λατινικό ρήμα vehere, που σημαίνει μεταφέρω. Ο Grassmann επίσης χρησιμοποίησε τους όρους «εσωτερικό» και «εξωτερικό» γινόμενο.

Η παραπέρα εξέλιξη τον διανυσματικού λογισμού, που οδήγησε στην καθιερωμένη σήμερα μορφή του, επηρεάστηκε αποφασιστικά από τις εξελίξεις στη Φυσική κατά το δεύτερο μισό τον 19ου αιώνα. Η χρήση π.χ. της θεωρίας των κβατερνίων από τον J.C. Maxwell, στο βιβλίο του «Πραγματεία πάνω στον Ηλεκτρισμό και Μαγνητισμό» (1874), οδήγησε σε ορισμένες τροποποιήσεις, με βάση τις οποίες οι φυσικοί J.W. Gibbs και O. Heaviside, δημιούργησαν στις αρχές της δεκαετίας του 1880 τη σύγχρονη θεωρία τον διανυσματικού λογισμού. Τέλος, το 1888, ο G. Peano, με βάση τη Θεωρία της επέκτασης του Grassmann, θεμελίωσε αξιωματικά την έννοια του διανυσματικού χώρου.

VECTOR ANALYSIS

Εικόνα 2: Josiah Willard Gibbs (1839-1903). Με την έκδοση του εγχειριδίου «Vector Analysis», το 1901, από τους Αμερικάνους Gibbs και Wilson, άρχισε να καθιερώνεται ο μαθηματικός αυτός κλάδος, διεθνώς.

Τι περιέχει το κεφάλαιο των Διανυσμάτων και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Οι μαθητές έχουν έλθει για πρώτη σε επαφή με την έννοια του διανύσματος στη Β΄ Γυμνασίου. Οι γνώσεις που έχουν περιορίζονται στα χαρακτηριστικά στοιχεία του διανύσματος και στην αναγνώριση της διαφοράς ανάμεσα στο ευθύγραμμο τμήμα και στο διάνυσμα. Επιπλέον, έχουν μάθει να αναγνωρίζουν τα ίσα και τα αντίθετα διανύσματα. Στην τάξη αυτή οι μαθητές θα εμβαθύνουν στον λογισμό των διανυσμάτων. Ποιο συγκεκριμένα θα γίνει αναφορά:

- Στον ορισμό του διανύσματος, τα χαρακτηριστικά του και στη σχέση μεταξύ διανυσμάτων (παράλληλα, ίσα, αντίθετα, γωνία διανυσμάτων).
- Στον ορισμό των πράξεων της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα (βαθμωτός πολλαπλασιασμός).
- Στο γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων.
- Στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.
- Στην παράσταση διανύσματος σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Τα παραπάνω αποτελούν απαραίτητες γνώσεις προκειμένου να γίνει κατανοητή η θεμελίωση της Αναλυτικής Γεωμετρίας του επιπέδου που ακολουθεί, καθώς και η αντιμετώπιση πολλών καταστάσεων της πραγματικής ζωής και προβλημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Εστίαση σε σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο των διανυσμάτων

- Το διάνυσμα αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα έννοιας που δομήθηκε από τη στενή αλληλεπίδραση Μαθηματικών και Φυσικής.
- Ένα διάνυσμα μπορεί να αναπαρίσταται με διαφορετικούς τρόπους. Ως προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα (γεωμετρική αναπαράσταση) και ως αλγεβρικό αντικείμενο με τη βοήθεια συντεταγμένων.
- Προτάσεις και θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αποδεικνύονται με χρήση των διανυσμάτων. Η έννοια των διανυσμάτων είναι σημαντική στη γεωμετρία εάν αναλογιστεί κανείς ότι η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών οδηγεί στην «αλγεβροποίηση» της Γεωμετρίας, δηλαδή στη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων με αλγεβρικές μεθόδους.

Σε ποια ερωτήματα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

- Ποια είναι τα στοιχεία ενός δοθέντος διανύσματος;
- Πώς βρίσκουμε το άθροισμα και τη διαφορά δύο διανυσμάτων με τον κανόνα του παραλληλογράμμου;
- Ποια είναι η τριγωνική ανισότητα που συνδέει τα μέτρα διανυσμάτων και πότε ισχύουν οι ισότητες;
- Πώς αποδεικνύουμε ότι δύο διανύσματα είναι συγγραμμικά;
- Πώς αποδεικνύουμε ότι τρία σημεία είναι συνευθειακά;
- Πώς υπολογίζουμε στο καρτεσιανό επίπεδο τις συντεταγμένες: του γραμμικού συνδυασμού δύο διανυσμάτων, του διανύσματος που δίνονται οι συντεταγμένες των άκρων και τις συντεταγμένες του μέσου ευθυγράμμου τμήματος, όταν δίνονται οι συντεταγμένες των άκρων του;
- Πώς ορίζεται το μέτρο ενός διανύσματος;

- Με ποιον τρόπο εξετάζουμε αν δύο διανύσματα του επιπέδου είναι παράλληλα;
- Ποιος είναι ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων;
- Πώς υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων από τις συντεταγμένες τους;
- Ποιος είναι ορισμός της προβολής ενός διανύσματος σε άξονα ή σε άλλο διάνυσμα;
- Πώς αναλύουμε ένα διάνυσμα σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία είναι παράλληλη προς δοθέν διάνυσμα;

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Μετά το τέλος της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου οι μαθητές θα είναι ικανοί να:

(Α. Γεωμετρική και αλγεβρική αναπαράσταση διανύσματος)

- **Μ1.** Αναγνωρίζουν τη διαφορά μεταξύ μονόμετρου και διανυσματικού μεγέθους. Αναγνωρίζουν ένα διάνυσμα ως μια ποσότητα που έχει και τα δύο χαρακτηριστικά, μέτρο και κατεύθυνση και προσδιορίζουν, συγκεντρώνουν και ερμηνεύουν πληροφορίες σχετικές με τις εφαρμογές των διανυσμάτων στον πραγματικό κόσμο. Διακρίνουν την έννοια της μετατόπισης από την έννοια της απόστασης.
- **Μ2.** Αναπαριστούν ένα διάνυσμα στο επίπεδο γεωμετρικά, ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα και αναγνωρίζουν ένα διάνυσμα μέσα από τους διαφορετικούς συμβολισμούς που χρησιμοποιούμε για την αναπαράστασή του.
- **Μ3.** Αναπαριστούν ένα διάνυσμα αλγεβρικά με τη βοήθεια καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, και αναγνωρίζουν διανύσματα με το ίδιο μέτρο και κατεύθυνση αλλά σε διαφορετικές θέσεις, ως ίσα διανύσματα.

(Β. Πράξεις με διανύσματα)

- **Μ4.** Εκτελούν τις πράξεις της πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα (βαθμωτός πολλαπλασιασμός-scalar product), με τα διανύσματα ως προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα και ως διανύσματα στο καρτεσιανό επίπεδο.
- **Μ5.** Εφαρμόζουν σε ποικίλα πλαίσια τις ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης, αφαίρεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού διανυσμάτων, όπως η αντιμεταθετική, προσεταιριστική και επιμεριστική ιδιότητα.
- **Μ6.** Λύνουν προβλήματα που αφορούν την πρόσθεση, αφαίρεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό διανυσμάτων, συμπεριλαμβανομένων προβλημάτων με εφαρμογές από τον πραγματικό κόσμο.
- **Μ7.** Εκτελούν την πράξη του εσωτερικού γινομένου (dot product) δύο διανυσμάτων, αναπαριστώντας τα διανύσματα με προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα και στην καρτεσιανή μορφή τους, και περιγράφουν εφαρμογές του εσωτερικού γινομένου όπως ο υπολογισμός της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων και ο υπολογισμός της προβολής του ενός διανύσματος πάνω στο άλλο.
- **Μ8.** Περιγράφουν, μέσα από εξερεύνηση, τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου (π.χ. διερευνούν αν η συγκεκριμένη πράξη είναι αντιμεταθετική, προσεταιριστική ή επιμεριστική).
- **Μ9.** Εκφράζουν τις συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας διανυσμάτων με διαφορετικούς τρόπους (διανυσματικά, με συντεταγμένες και με συντελεστή διεύθυνσης). Αναλύουν ένα διάνυσμα σε συνιστώσες.

Δραστηριότητες

Ας δούμε τώρα μερικές δραστηριότητες που μπορούμε να υλοποιήσουμε στην τάξη με τους μαθητές μας, προκειμένου να διαπιστώσουμε, τι μπορούν να κάνουν με αναφορά στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Η πρώτη δραστηριότητα αποτελεί τροποποίηση της αντίστοιχης δραστηριότητας του Π.Σ και συνδέει τα Μαθηματικά με τη Φυσική. Η δεύτερη δραστηριότητα δίνει τη δυνατότητα στο μαθητή να συνδέει, διατυπώνει και αποδεικνύει προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με το διανυσματικό λογισμό, αλλά να ακολουθεί και την αντίστροφη πορεία. Τέλος, η τρίτη δραστηριότητα[7] αναφέρεται σε ένα πρόβλημα από τον πραγματικό κόσμο, όπου οι μαθητές μοντελοποιούν το πρόβλημα με χρήση των διανυσμάτων και απαντούν στο τέλος με τη φυσική γλώσσα. Αν και είναι αυτονόητο, επισημαίνεται ότι αν ένα πρόβλημα απαιτεί τύπους ή σχέσεις από άλλο επιστημονικό πεδίο, αυτά δίνονται στους μαθητές.

Δραστηριότητα 1 (Μ1, Μ2, Μ6)

Η δύναμη του διαγράμματος έχει μέτρο $\mathrm{F_p} = 20\mathrm{N}$ και σχηματίζει γωνία θ^{o} με το οριζόντιο έδαφος. Το βαγονάκι σύρεται 100m κατά μήκος του εδάφους.

α) Να υπολογίστε το έργο της δύναμης όταν η γωνία είναι 30^{o}.

β) Επιλέξτε δύο άλλες τιμές για τη γωνία θ^{o} και υπολογίστε το έργο σε κάθε περίπτωση. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα μπορείτε να διατυπώσετε κάποια εικασία;

ΣΧΟΛΙΟ

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα στοχεύει να συνδέσει τα μαθηματικά με τη φυσική και εφαρμογές του πραγματικού κόσμου. Εστιάζει στο γεγονός ότι το έργο δεν είναι τίποτα άλλο, παρά το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσματικών μεγεθών. Της δύναμης και της μετατόπισης.

Δραστηριότητα 2 (Μ4, Μ7)

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2$.

i) Να εξετάσετε αν η συγκεκριμένη σχέση ικανοποιείται για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου ή μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις.

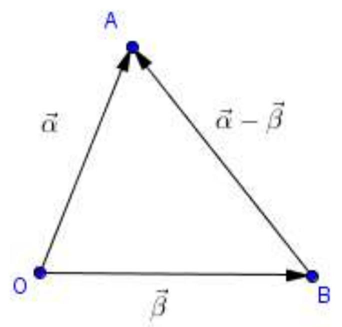
ii) Προσπαθήστε να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το προηγούμενο συμπέρασμά σας.

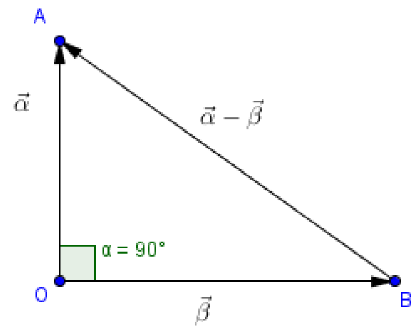
Ενδεικτική λύση

[7] Η συγκεκριμένη δραστηριότητα έχει αλιευθεί από το βιβλίο: *THOMAS Απειροστικός λογισμός, Τόμος ΙΙ των Finney, Weir & Giordano*, σελ. 697, ΠΕΚ, Ηράκλειο 2011.

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα συνδέει το διανυσματικό λογισμό με την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Στο πρώτο ερώτημα αναμένεται, οι μαθητές να εφαρμόσουν τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και εργαζόμενοι, κυρίως αλγεβρικά, να καταλήξουν ότι η συγκεκριμένη σχέση ισχύει αν και μόνο αν τα διανύσματα είναι κάθετα.

Με το δεύτερο ερώτημα επιχειρούμε να οπτικοποιήσουν οι μαθητές τη δοθείσα σχέση. Έτσι, με σημείο αναφοράς το O θα κατασκευάζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, οπότε θα είναι $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$, όπως φαίνεται και στο σχήμα.





Οι μαθητές, στη συνέχεια, αναμένεται να ερμηνεύσουν τα μέτρα των διανυσμάτων ως μήκη ευθυγράμμων τμημάτων, οπότε τη σχέση $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2$ θα την γράψουν στη μορφή:

$(AB)^2=(OA)^2+(OB)^2$, για να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι ισχύει, αν και μόνο αν το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο, δηλαδή αν και μόνο αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

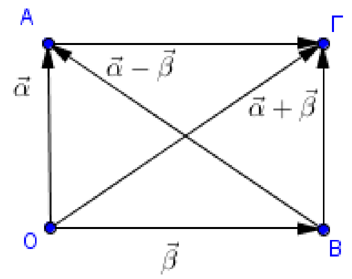
Επέκταση της δραστηριότητας

Στο ίδιο πνεύμα μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να ερμηνεύσουν γεωμετρικά τις σχέσεις:

i) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

ii) $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}| \Leftrightarrow (\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta})$

Σύμφωνα με τον κανόνα του παραλληλογράμμου τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ παριστάνουν τις διαγώνιες του παραλληλογράμμου, που σχηματίζεται με πλευρές τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Έτσι, η ισότητα $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$ δηλώνει ότι τα μήκη των διαγωνίων του παραλληλογράμμου είναι ίσα, που συμβαίνει, αν και μόνο αν το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο, δηλαδή, αν και μόνο αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.



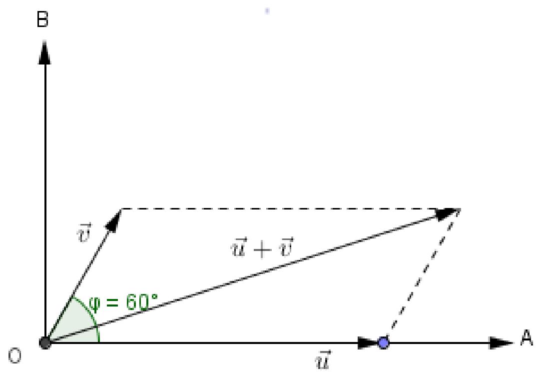
Επιπλέον, η δεύτερη σχέση ισχύει, αν και μόνο αν, το παραλληλόγραμμο έχει ίσες δύο διαδοχικές πλευρές, δηλαδή αν και μόνο αν είναι ρόμβος που συμβαίνει, αν και μόνο αν οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα, δηλαδή, αν και μόνο αν $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$.

Δραστηριότητα 3 (Μ1, Μ2, Μ3, Μ4, Μ6)

Ένα αεροσκάφος που πετά προς ανατολάς με ταχύτητα 500 km/h απουσία ανέμου, συναντά άνεμο ταχύτητας 70 km/h, που πνέει σε κατεύθυνση 60^0 ανατολική-βορειονατολική (οι κατευθύνσεις ορίζουν γωνία η οποία μετριέται από την πρώτη κατεύθυνση δηλ. την ανατολική, προς τη δεύτερη κατεύθυνση, δηλ τη βορειοανατολική). Το αεροπλάνο διατηρεί τον προσανατολισμό του προς ανατολάς, ωστόσο λόγω του ανέμου, η ταχύτητα του ως προς το έδαφος αποκτά νέο μέτρο και κατεύθυνση. Βρείτε τη νέα κατεύθυνση του αεροσκάφους.

Ενδεικτική λύση

Έστω $\vec{u}$ η ταχύτητα του αεροσκάφους πριν την επίδραση του ανέμου και $\vec{v}$ η ταχύτητα του ανέμου. Τότε έχουμε: $|\vec{u}|=500$ και $|\vec{v}|=70$. Ζητείται το μέτρο και η φορά της συνισταμένης $\vec{u}+\vec{v}$. Υποθέτουμε ότι ο θετικός ημιάξονας των x δείχνει προς την Ανατολή και ο θετικός ημιάξονας των y προς τον Βορρά. Στο σύστημα αυτό το διάνυσμα $\vec{u}=(500,\ 0)$ και το



$\vec{v}=\left(70\sigma\upsilon\nu 60^0,\ 70\eta\mu 60^0\right)=\left(35,\ 35\sqrt{3}\right)$. Επομένως, $\vec{u}+\vec{v}=\left(535,\ 35\sqrt{3}\right)$ και συνεπώς

$|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{535^2+\left(35\sqrt{3}\right)^2}\approx 538,4$.

Επιπλέον, για τη γωνία θ που σχηματίζει η κατεύθυνση του αεροσκάφους με την ανατολική κατεύθυνση ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{35\sqrt{3}}{535}$$

Ερμηνεία: Η νέα ταχύτητα του αεροσκάφους θα είναι περίπου 538,4 km/h, ενώ η νέα πορεία του είναι περίπου $6,5^0$ ανατολική-βορειοανατολική.

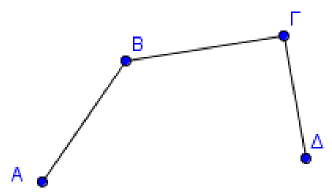
Β΄ τρόπος

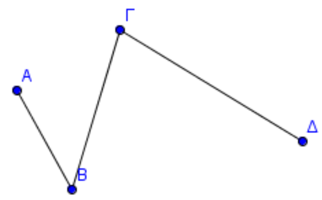
Μπορούμε να υπολογίσουμε το $|\vec{u}+\vec{v}|$ με χρήση του εσωτερικού τετραγώνου και τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{u}+\vec{v}$ με χρήση του εσωτερικού γινομένου.

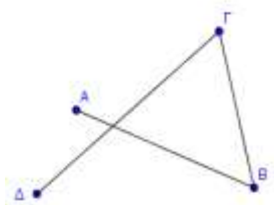
Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Α. Σημαντικά ερωτήματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά τη διδασκαλία

- **Ποια είναι η ανάγκη εισαγωγής των διανυσμάτων;**
  Είναι ένα ερώτημα που πρέπει να μας απασχολεί κάθε φορά που εισάγουμε μία καινούργια έννοια. Μία ερώτηση που θα μπορούσε να παρακινήσει τους μαθητές είναι η εξής: *αν περπατήσεις 2 χιλιόμετρα Βόρεια και μετά 2 χιλιόμετρα Νότια, πόσο μακριά έχεις πάει*. Ο εκπαιδευτικός ενθαρρύνει το διάλογο για εναλλακτικές απαντήσεις. Οι απαντήσεις που αναμένονται είναι 4 χιλιόμετρα ή καθόλου. Έτσι, αναδεικνύεται το γεγονός ότι η απόσταση από μόνη της δεν είναι αρκετή να περιγράψει το φαινόμενο και πρέπει να λάβουμε υπόψη την κατεύθυνση της κίνησης.
- **Ποια είναι η διαφορά μεταξύ απόστασης και μετατόπισης;**
  Αφού έχουμε εισαγάγει την έννοια του διανύσματος καθοδηγούμε τους μαθητές να διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ απόστασης (συνολική διαδρομή) και μετατόπισης. Μπορούμε να αναφερθούμε στο προηγούμενο παράδειγμα και να αναμένουμε από τους μαθητές να διαπιστώσουν ότι η διαδρομή που έχει διανύσει κάποιος είναι 4km, ενώ η μετατόπιση σε σχέση με την αρχική θέση είναι μηδενική. Με άλλα λόγια, οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ότι η μετατόπιση είναι διάνυσμα. Μπορεί να δοθεί και το παρακάτω παράδειγμα:







Αν ένα αυτοκίνητο ξεκινά από το σημείο Α και καταλήγει στο σημείο Δ, να σχεδιάσετε το διάνυσμα της μετατόπισης σε κάθε περίπτωση.

- **Πώς ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα; Ποιες ιδιότητες ισχύουν σε κάθε περίπτωση;**
  Με χρήση των δραστηριοτήτων που αναφέρονται στην παράγραφο 1.2 του Π.Σ., αλλά και με κατάλληλα παραδείγματα δικής μας επινόησης, μπορούμε να υποστηρίξουμε τους στόχους που περιγράφονται στην εν λόγω παράγραφο.
- **Μπορεί ένα διάνυσμα να εκφρασθεί με τη βοήθεια δύο άλλων διανυσμάτων του επιπέδου;**

Ο γραμμικός συνδυασμός ενός διανύσματος ως συνάρτηση άλλων διανυσμάτων έρχεται ως αποτέλεσμα των πράξεων μεταξύ διανυσμάτων. Επιπλέον, να τονίσουμε ότι στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ένα διάνυσμα γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως συνάρτηση των μοναδιαίων διανυσμάτων των αξόνων.

- **Πως μπορούμε να υπολογίσουμε μια απόσταση μεταξύ απομακρυσμένων σημείων ή το έργο που απαιτείται για τη μετακίνηση ενός βαγονιού προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση;**
  Η απάντηση στο ερώτημα αυτό οδηγεί στην εισαγωγή του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη δραστηριότητα 1.
- **Μια βασική έννοια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι η παραλληλία. Μπορούμε να βρούμε ένα τρόπο να εκφράσουμε την παραλληλία με τη βοήθεια διανυσμάτων;**
  Για να βοηθήσουμε τους μαθητές, θα μπορούσαμε να επαναφέρουμε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα, $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$, και να εστιάσουμε στο γεγονός ότι η σχέση αυτή οδηγεί στην παραλληλία των φορέων των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Στη συνέχεια, με χρήση της αναλυτικής έκφρασης των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1,\ y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2,\ y_2)$ και την σχέση $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$, οι μαθητές καταλήγουν στην ισοδυναμία: $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = 0$
- **Ποιες εφαρμογές θα μπορούσε να έχει το εσωτερικό γινόμενο σε άλλες περιοχές των μαθηματικών;**
  Η εφαρμογή της δραστηριότητας Δ16 και η παράγραφος 1.6.1 του Π.Σ. απαντούν σε αυτό το ερώτημα.

Β. Σημεία που χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής

Κάθε φορά που διδάσκουμε μια μαθηματική έννοια, πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη μας τις πιθανές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην πορεία για την κατανόησή της. Από την επισκόπηση των διαφόρων ερευνών (Δημητριάδου -Τζανάκης, 2003- Harell, 1998-) προκύπτει ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του διανύσματος, οι οποίες εξαρτώνται από το εκάστοτε πλαίσιο αναφοράς. Πιο συγκεκριμένα:

- **Αλγεβρικό πλαίσιο.** Οι μαθητές αντιμετωπίζουν το διάνυσμα ως αριθμητική οντότητα. Έτσι, οδηγούνται σε μια ιδιόμορφη λειτουργία των συμβόλων και των πράξεων, που είναι στενά συνδεδεμένη με εκείνη που ισχύει για τους αριθμούς.
- **Γεωμετρικό πλαίσιο.** Το διάνυσμα εκφράζει συμβολικά το απλό μοντέλο του ευθυγράμμου τμήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.
- **Φυσικό πλαίσιο.** Οι μαθητές, επηρεασμένοι από όρους, σύμβολα και έννοιες που διδάχθηκαν στη Φυσική, προσπαθούν να τα μεταφέρουν στην αφηρημένη έννοια του διανύσματος.
- **Βιωματικό πλαίσιο.** Πρόκειται για καταστάσεις που βασίζονται στην εμπειρία, τον «κοινό νου» και μεταφέρονται στο μαθηματικό αντικείμενο. για παράδειγμα, οι έννοιες κατεύθυνση, διεύθυνση, φορά πολλές φορές ταυτίζονται στην καθημερινή εμπειρία.

Δυσκολίες και πιθανά λάθη

1. Πολλοί μαθητές δεν αναγνωρίζουν τη φορά ως κύριο χαρακτηριστικό του διανύσματος. Έτσι, δεν αντιλαμβάνονται τη διαφορά μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BA}$, θεωρώντας ότι εκφράζουν την ίδια κατάσταση.

2. Η μετατόπιση και η απόσταση αποτελούν πηγή δυσκολιών για τους μαθητές και πρέπει να δοθεί έμφαση στο τι εκφράζει καθεμία από αυτές.

3. Πολλές φορές οι μαθητές μεταφέρουν τις ιδιότητες των πράξεων των αριθμών στις αντίστοιχες πράξεις των διανυσμάτων. Πρέπει λοιπόν να δώσουμε ιδιαίτερη έμφαση στο σημείο αυτό και να τονίσουμε ότι εργαζόμαστε στο σύνολο των διανυσμάτων.

4. Η γωνία που σχηματίζουν δύο διανύσματα μεταξύ τους, σε σχέση με τη γωνία που σχηματίζει ένα διάνυσμα με τον άξονα $x'x$, αποτελεί άλλο ένα σημείο που δημιουργεί παρανοήσεις στους μαθητές.

5. Οι πράξεις της πρόσθεσης, αφαίρεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού διανυσμάτων παράγουν διανύσματα, ενώ το εσωτερικό γινόμενο παράγει αριθμό. Μια ιδιαιτερότητα που πρέπει να επισημανθεί στους μαθητές μας.

6. Ένα άλλο συνηθισμένο λάθος πηγάζει από το γεγονός ότι αρκετοί μαθητές θεωρούν το άθροισμα διανυσμάτων ως άθροισμα μηκών . Η παρανόηση που γίνεται είναι ότι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ σε κάθε περίπτωση. Αξίζει να εμπλέξουμε τους μαθητές μας στη διερεύνηση για το πότε ισχύει η ισότητα και πότε όχι.

Βιβλιογραφία

Finney, R., Weir, M., & Giordano, F. (2011). *Απειροστικός λογισμός,τόμος ΙΙ.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Epp, S., (2004). *Διακριτά Μαθηματικά με εφαρμογές* (3η έκδοση). Αθήνα: Κλειδάριθμος.

Αδαμόπουλος, Λ., Βισκαδουράκης, Β., Γαβαλάς, Δ., Πολύζος, Γ. & Σβέρκος, Α. (2012). *Μαθηματικά Β΄ τάξη γενικού λυκείου Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση.* Αθήνα: ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Χρυσάκης, Θ. (2013). *Γραμμική Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία.* Αθήνα: Αυτοέκδοση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $2^{ο}$ - Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Εισαγωγή

Με την παρακμή του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού, παρατηρείται και μια ανάλογη πτώση της μαθηματικής δραστηριότητας στον ελληνικό και δυτικό κόσμο. Αντίθετα, σημειώνεται μια εξαιρετική άνθιση της Αριθμητικής και κατόπιν της Άλγεβρας στους ανατολικούς λαούς και κυρίως στους Άραβες. Η Γεωμετρία ξαναβρίσκει τη θέση της όταν αρχίζει και πάλι η συστηματική μελέτη της Μηχανικής, της Ουράνιας Μηχανικής και της Αστρονομίας.

Η ένωση της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία αποτέλεσε μια εξέλιξη, η οποία σημαδεύτηκε αναμφισβήτητα από τις ιδέες του Καρτέσιου (Rene Descartes, 1596-1650) και άλλαξε την εικόνα των Μαθηματικών. Η ένωση αυτή, που σήμερα ονομάζουμε Αναλυτική Γεωμετρία, έδωσε το απαραίτητο εργαλείο που χρειάζονταν οι επιστήμονες του $17^{ου}$ αιώνα για να ποσοτικοποιήσουν τις εργασίες τους και έθεσε τα θεμέλια για εκπληκτικές προόδους στα Μαθηματικά, τη Φυσική, την Αστρονομία και τη Βιολογία (Thomas, 1995).

Η ιδέα του συσχετισμού της Αριθμητικής (Άλγεβρας) με τη Γεωμετρία δεν ήταν νέα. Η ιδέα ενυπάρχει στην Πυθαγόρεια διδασκαλία (έστω και σε νεφελώδη μορφή) και στο έργο του Πάππου. Όμως, η επανεμφάνισή της τώρα επέτρεψε τη συστηματική σύνδεση της Γεωμετρίας με την ισχυρή αλγεβρική μεθοδολογία που είχε εν τω μεταξύ αναπτυχθεί (Βασιλείου, 2003). Εκτός από τον Καρτέσιο, στην ανάπτυξη της Αναλυτικής Γεωμετρίας συνέβαλαν και άλλοι μεγάλοι μαθηματικοί όπως ο Fermat, ο Desargues και ο Pascal, με αποτέλεσμα να γίνει ένα πολύ δυνατό εργαλείο, που σε συνδυασμό με τη Μηχανική του Νεύτωνα (Isaac Newton, 1642-1727) άνοιξε νέους ορίζοντες στη μελέτη του σύμπαντος.

Ο ιδρυτής της Αναλυτικής Γεωμετρίας, ο Καρτέσιος, υπήρξε και ένας από τους μεγάλους συστηματικούς φιλοσόφους του $17^{ου}$ αιώνα. Το καρτεσιανό φιλοσοφικό σύστημα δημιουργήθηκε υπακούοντας σε δύο φαινομενικά αντίθετες επιταγές. Η πρώτη έχει να κάνει με την επανεξέταση όλης της προηγούμενης φιλοσοφικής παράδοσης και την απαλλαγή από τη μεσαιωνική σκέψη. Η δεύτερη, αναφέρεται στη δημιουργία ενός φιλοσοφικού συστήματος, το οποίο παρά τις νέες ιδέες του, θα συνεχίσει να πορεύεται στο ίδιο περίπου πλαίσιο (Αναπολιτάνος, 2005). Το ερώτημα που επανειλημμένα διατυπώνεται στο έργο του αναφέρεται στην ύπαρξη ή μη της βεβαιότητας που θα πρέπει να συνοδεύει τη γνώση. Τέτοια ερωτήματα ο Καρτέσιος τα αντιμετωπίζει με ορθολογικό σκεπτικισμό ο οποίος επιγραμματικά διατυπώνεται στην περίφημη φράση: «Σκέφτομαι, άρα υπάρχω» (cogito ergo sum).

René Descartes ***(1596 - 1650)***

Το 1637, όταν ο Καρτέσιος ήταν 41 ετών, πείσθηκε από τους φίλους του και τον καρδινάλιο Ρισελιέ να δημοσιεύσει το μεγάλο έργο του «Πραγματεία πάνω στη Μέθοδο της Ορθής Χρήσης του Λόγου και της Έρευνας της Αλήθειας στην Επιστήμη. Επιπλέον, η Διοπτρική, οι Μετεωρίτες και η Γεωμετρία, Δοκίμια σ' αυτή τη Μέθοδο». Αυτή η εργασία πέρασε στην ιστορία ως η «Μέθοδος». Το έτος, λοιπόν, αυτό η Αναλυτική Γεωμετρία δόθηκε στον κόσμο. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες, η εξίσωση και η γραφική παράσταση μιας οποιασδήποτε καμπύλης και η χρήση της Άλγεβρας για την ανακάλυψη και διερεύνηση γεωμετρικών προβλημάτων επεξέτειναν τους ορίζοντες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Thomas, 1995).

Η Αναλυτική Γεωμετρία ξεκινά με τον καθορισμό αριθμητικών συντεταγμένων για όλα τα σημεία ενός επιπέδου. Οι συντεταγμένες επιτρέπουν τη γραφική παράσταση αλγεβρικών εξισώσεων δύο μεταβλητών με ευθείες ή καμπύλες. Επίσης, μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε γωνίες, αποστάσεις και να γράφουμε εξισώσεις για την περιγραφή των τροχιών διαφόρων αντικειμένων. Όλα αυτά θα ήταν αρκετά για προσδιορίσουν την αξία της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Όμως συμβαίνει κάτι ακόμη πιο ενδιαφέρον και σπουδαίο. Αφού το μεγαλύτερο μέρος του Απειροστικού Λογισμού μπορεί να παρουσιαστεί γεωμετρικά και αφού οι εφαρμογές του Απειροστικού Λογισμού αναφέρονται κυρίως στην κίνηση και τη μεταβολή, το επίπεδο των συντεταγμένων είναι ο φυσικός χώρος για την ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού και των εφαρμογών του (Thomas, 1995)

Τι περιέχει το κεφάλαιο της Ευθείας και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Κατά τη φοίτηση τους στο Γυμνάσιο, οι μαθητές έχουν έλθει ήδη σε επαφή με έννοιες της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Πιο συγκεκριμένα: έχουν μάθει να κατασκευάζουν ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και να αναπαριστούν ένα σημείο του επιπέδου με ένα ζεύγος αριθμών, αλλά και το αντίστροφο. Επιπλέον, γνωρίζουν ότι οι αριθμοί αυτοί αποτελούν τις συντεταγμένες του σημείου και έχουν μάθει να αναγνωρίζουν τους άξονες των τετμημένων και των τεταγμένων. Στην Γ΄ Γυμνασίου, οι μαθητές έχουν μάθει τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους και πώς επιλύεται γραφικά.

Στην Β΄ Λυκείου σκοπεύουμε σε περαιτέρω εμβάθυνση θεμελιωδών ζητημάτων της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Τα θέματα που σχετίζονται με την ευθεία παρουσιάζονται συστηματικότερα και με μεγαλύτερη πληρότητα και ακρίβεια. Τονίζεται η σημασία του συντελεστή διεύθυνσης (κλίσης) μιας ευθείας, με τη βοήθεια του οποίου διατυπώνονται οι συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας δύο ευθειών. Επιπλέον, προσδιορίζονται οι διάφορες μορφές της εξίσωσης της ευθείας, η γενική της μορφή, καθώς και το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από ένα σημείο. Με τη διδασκαλία αυτής της ενότητας επιδιώκεται οι μαθητές να εξοικειωθούν με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας, καθώς και να κατανοήσουν τις δυνατότητες που παρέχει ως μαθηματικό εργαλείο στη διερεύνηση και απόδειξη προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και σε περιοχές άλλων επιστημών.

Εστίαση σε σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο της Ευθείας

- Ένα σημείο του επιπέδου μπορεί να παρασταθεί με ένα ζεύγος αριθμών. Αυτό επιτρέπει την «αλγεβροποίηση» της Ευκλείδειας Γεωμετρίας .
- Η σύνδεση της έννοιας της ευθείας με την έννοια του διανύσματος.
- Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι στην ουσία ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος από το οποίο παράγεται η ευθεία.
- Η έννοια του συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας είναι σημαντική, όχι μόνο για τον προσδιορισμό της εξίσωσής της, αλλά και για το ότι συνιστά βασική έννοια του διαφορικού λογισμού.
- Οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο είναι ο γεωμετρικός τρόπος αναπαράστασης του γραμμικού συστήματος 2χ2.

Σε ποια ερωτήματα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

- Πώς ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης ευθείας;
- Ποια είναι η συσχέτιση του συντελεστή διεύθυνσης ευθείας με το συντελεστή διεύθυνσης των παραλλήλων προς αυτήν διανυσμάτων;
- Πώς συσχετίζονται οι συντελεστές διεύθυνσης δύο ευθειών όταν είναι παράλληλες και πώς όταν είναι κάθετες;
- Πώς βρίσκουμε την εξίσωση ευθείας όταν δίνονται οι συντεταγμένες ενός σημείου της και ο συντελεστής διεύθυνσης, όταν είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και δίνονται οι συντεταγμένες ενός σημείου της και πώς όταν δίνονται οι συντεταγμένες δύο σημείων της;
- Πώς αποδεικνύουμε ότι ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία και πώς ότι τρία σημεία είναι συνευθειακά;
- Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από ένα σημείο $M_0(x_0, y_0)$ και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (\mathrm{A}, \mathrm{B})$;
- Πώς αποδεικνύουμε ότι τρεις ή περισσότερες ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο;
- Πώς εξετάζουμε τη σχετική θέση δύο ευθειών όταν δίνονται οι εξισώσεις τους;

Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μετά το τέλος της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου οι μαθητές θα είναι ικανοί να:

- **Μ1.** Ορίζουν τον συντελεστή διεύθυνσης ευθείας που σχηματίζει γωνία ω με τον άξονα $x'x$ και περιγράφουν τη σχέση που συνδέει τον συντελεστή διεύθυνσης ευθείας με το συντελεστή διεύθυνσης διανύσματος που είναι παράλληλο προς την ευθεία (Στόχος: 2.1.1).
- **Μ2.** Σχεδιάζουν σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων ευθεία, όταν δίνεται ένα σημείο της με τις συντεταγμένες του και ο συντελεστής διεύθυνσης αυτής ή ένα σημείο της και ένα διάνυσμα που είναι παράλληλο προς αυτή (Στόχοι: 2.1.1 και 2.1.2).
- **Μ3.** Εξετάζουν με χρήση των συντελεστών διεύθυνσης, αν δύο ευθείες είναι παράλληλες ή κάθετες (Στόχος: 2.1.3).
- **Μ4.** Προσδιορίζουν την εξίσωση ευθείας που: διέρχεται από γνωστό σημείο και έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης ή είναι παράλληλη στον $x'x$, γνωρίζουν δύο σημεία της, γνωρίζουν ένα σημείο της και είναι παράλληλη σε γνωστό διάνυσμα (Στόχοι: 2.2.1, 2.2.2).
- **Μ5.** Περιγράφουν τη σχέση των συντεταγμένων ενός σημείου της ευθείας με τις μεταβλητές της εξίσωσής της και ελέγχουν αν τρία ή περισσότερα σημεία είναι συνευθειακά (Στόχος: 2.2.3).
- **Μ6.** Εξηγούν ότι η εξίσωση $Ax + By = \Gamma,\ \mu\varepsilon\ \ A \neq 0\ \ \acute{\eta}\ B \neq 0$ παριστάνει ευθεία στο επίπεδο και προσδιορίζουν διανύσματα που είναι κάθετα ή παράλληλα προς την ευθεία, με χρήση των συντελεστών της εξίσωσης και προσδιορίζουν εξίσωση ευθείας που διέρχεται από γνωστό σημείο και είναι κάθετη σε γνωστό διάνυσμα (Στόχοι: 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4).
- **Μ7.** Εξηγούν ότι το ζεύγος λύσεων ενός συστήματος από δύο γραμμικές εξισώσεις δύο μεταβλητών, καθορίζει το σημείο τομής δύο ευθειών, αν οι ευθείες δεν ταυτίζονται ή δεν είναι παράλληλες και περιγράφουν τι συμβαίνει όταν ταυτίζονται ή είναι παράλληλες και εξετάζουν τη σχετική θέση δύο ευθειών στο επίπεδο με χρήση της μεθόδου των οριζουσών για την επίλυση γραμμικού συστήματος 2x2. (Στόχος: 2.4.1).
- **Μ8.** Αποδεικνύουν ότι τρεις ή περισσότερες ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο, γενικεύουν με την οικογένεια ευθειών και ελέγχουν αν μια ευθεία ανήκει στην οικογένεια (Στόχος: 2.3.5).

- **Μ9.** Λύνουν προβλήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ή προβλήματα του πραγματικού κόσμου με χρήση κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων και αντιλαμβάνονται ότι τα συστήματα αυτά δεν είναι στατικά, αλλά δυναμικά.

Δραστηριότητες

Ας δούμε τώρα μερικές δραστηριότητες που μπορούμε να υλοποιήσουμε στην τάξη με τους μαθητές μας, με αναφορά στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα.

Δραστηριότητα 1 (Μ1)

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα αντιστοιχεί στη δραστηριότητα Δ8 του Π.Σ. , της οποίας η υλοποίηση στηρίζεται σε Τ.Π.Ε. Επειδή η ένταξη των Τ.Π.Ε στην καθημερινή διδασκαλία δεν είναι πάντα εύκολη, ενδεικτικά θα μπορούσε να δοθεί στην παρακάτω μορφή, οπότε δεν απαιτείται η χρήση υπολογιστών.

		Κλίση ευθείας	**Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος**	$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
Γωνία ευθείας με τον άξονα $x'x$	$\omega=30^0$			
	$\omega=60^0$			
	$\omega=150^0$			
Διάνυσμα παράλληλο προς την ευθεία	$\vec{\delta}=\left(3,\sqrt{3}\right)$			
	$\vec{\delta}=\left(-1,-\sqrt{3}\right)$			
	$\vec{\delta}=\left(-3,\sqrt{3}\right)$			
Σημεία της ευθείας	$(0,1)$ **και** $\left(\sqrt{3},2\right)$			
	$\left(1,\sqrt{3}-1\right)$ **και** $\left(\sqrt{3},2\right)$			
	$(0,2)$ **και** $\left(-\sqrt{3},3\right)$			

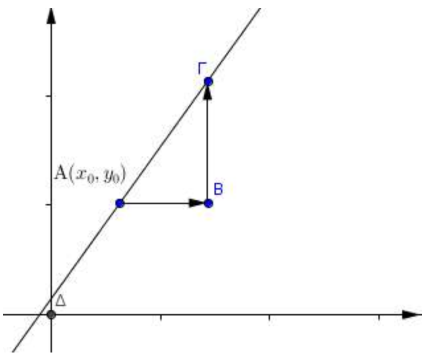
Οι μαθητές καλούνται να συμπληρώσουν τα κενά και να συνδέσουν έτσι την κλίση της ευθείας, το συντελεστή διεύθυνσης του παράλληλου διανύσματος και το πηλίκο διαφορών $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$**.** Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι οι τιμές των τριών μεγεθών ταυτίζονται και κατά συνέπεια εκφράζουν την ίδια μαθηματική έννοια.

Δραστηριότητα 2 (Μ2)

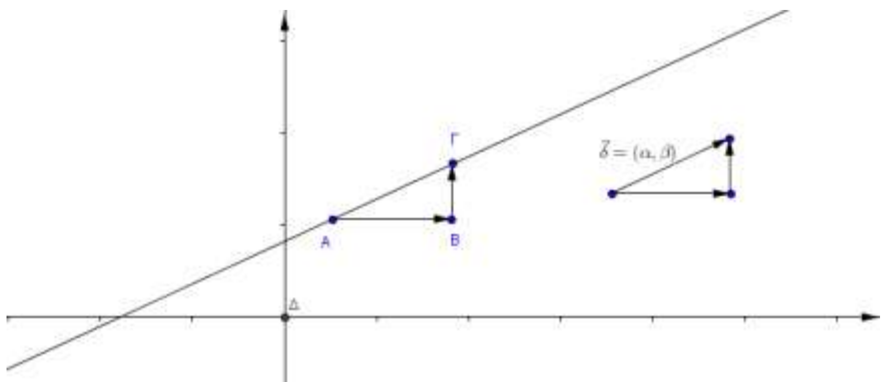
Μέσα από τη συγκεκριμένη δραστηριότητα προσπαθούμε να συνδέσουμε την έννοια του σημείου, του διανύσματος θέσης και του ελεύθερου διανύσματος προκειμένου να χαράξουμε μια ευθεία σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Καλούμε λοιπόν τους μαθητές να απαντήσουν στο ερώτημα: πως μπορούμε να χαράξουμε μια ευθεία όταν διέρχεται από γνωστό σημείο $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ;

Ενδεικτική λύση

Οι μαθητές γνωρίζουν ότι για να χαράξουμε μια ευθεία χρειαζόμαστε δύο σημεία. Το ένα σημείο είναι προφανώς το $\mathrm{A}(x_0, y_0)$. Το ερώτημα λοιπόν είναι πώς να βρούμε ένα σημείο ακόμη. Για το λόγο αυτό δημιουργούμε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (1, \lambda)$. Με αφετηρία το σημείο $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ μετατοπιζόμαστε οριζόντια και προς τα δεξιά κατά 1 μονάδα. Στην πραγματικότητα, η μετατόπιση αυτή αντιστοιχεί στο μοναδιαίο διάνυσμα, δηλ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{i}$. Στη συνέχεια, από το σημείο B μετατοπιζόμαστε κατακόρυφα κατά λ μονάδες (πάνω ή κάτω ανάλογα με το πρόσημο του λ), οπότε $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = (0, \lambda)$. Το σημείο Γ είναι το ζητούμενο σημείο, αφού η ευθεία $\mathrm{A\Gamma}$ διέρχεται από το $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.



Ας δούμε τώρα την περίπτωση που η ευθεία διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (\alpha, \beta)$. Εκκινώντας και πάλι από το $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ μετατοπιζόμαστε οριζόντια κατά α μονάδες (αριστερά ή δεξιά) και β μονάδες κατακόρυφα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Προσδιορίζουμε έτσι το σημείο Γ και χαράσσουμε την ευθεία $\mathrm{A}\Gamma$, η οποία διέρχεται από το $\mathrm{A}\left(x_0, y_0\right)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(\alpha, \beta)$ αφού $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}=\vec{\delta}$. Προτείνεται να δοθούν διαφορετικά παραδείγματα σε σχέση με τη θέση της ευθείας ως προς τους άξονες, ώστε οι μαθητές να έχουν ολοκληρωμένη αντίληψη για τη χάραξη της ευθείας.

Δραστηριότητα 3 (Μ6)

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2,\ 3)$ και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\nu}=(4,2)$. Να σχεδιάσετε την ευθεία και να συμπεριλάβετε το διάνυσμα $\vec{\nu}=(4,2)$ στο σχήμα, τοποθετώντας την αρχή του, στην αρχή των αξόνων.

Δραστηριότητα 4 (Μ4, Μ6, Μ8)

Θεωρούμε τις ευθείες με εξισώσεις:

$$\left(1-\sqrt{3}\right)x+\left(1+\sqrt{3}\right)y=8 \quad (\varepsilon_1)$$
$$x+\sqrt{3}y=1 \quad (\varepsilon_2)$$

α) Να προσδιορίσετε δύο διανύσματα $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ που να είναι κάθετα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα και να βρείτε τα μέτρα τους.

β) Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες μεταξύ τους.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών.

Ενδεικτική λύση

α) Στην ευθεία ε_1 είναι κάθετο το διάνυσμα $\vec{u}_1=\left(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}\right)$ και στην ευθεία ε_2 κάθετο είναι το διάνυσμα $\vec{u}_2=\left(1,\ \sqrt{3}\right)$. Όσον αφορά τα μέτρα εύκολα βρίσκουμε ότι: $\left|\vec{u}_1\right|=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ και $\left|\vec{u}_2\right|=\sqrt{1+\sqrt{3}^2}=2$

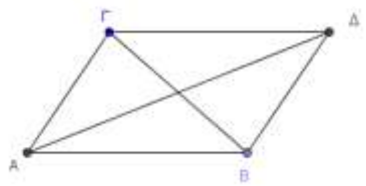
β) Η γωνία που σχηματίζουν τα κάθετα διανύσματα μεταξύ τους είναι:

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2}{\left|\vec{u}_1\right|\cdot\left|\vec{u}_2\right|}=\frac{1+\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως, $\theta = 45^0$ που είναι και η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι δύο ευθείες.

γ) Επιλύοντας το σύστημα με οποιοδήποτε τρόπο, βρίσκουμε τη λύση του $\left(\frac{1-7\sqrt{3}}{4}, \frac{7+\sqrt{3}}{4}\right)$. Οι μαθητές τώρα πρέπει να συνδέσουν τη μοναδική λύση του συστήματος με το σημείο τομής των ευθειών, εστιάζοντας την αντιστοιχία μεταξύ αλγεβρικής και γεωμετρικής αναπαράστασης.

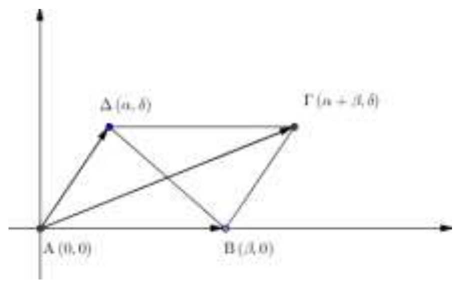
Δραστηριότητα 5 (Μ9)



Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.

Ενδεικτική λύση

Το ζητούμενο αποτελεί μία από τις βασικές ιδιότητες των παραλληλογράμμων. Αυτό που θέλουμε όμως τώρα, είναι να την αποδείξουμε με χρήση της άλγεβρας. Επιλέγουμε λοιπόν ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων. Η καταλληλότητα έχει να κάνει με τη χρήση όσο το δυνατόν λιγότερων αγνώστων. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να έχουμε το διπλανό σχήμα με τους άξονες. Θεωρώντας το σημείο $\mathrm{A}(0,0)$ ως αρχή των αξόνων, το σημείο $\mathrm{B}(\beta,0)$ και το σημείο $\Delta(\alpha,\delta)$. Τότε $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma} = (\alpha+\beta, \delta)$, οπότε το σημείο Γ έχει τις ίδιες συντεταγμένες. Άμεσα προκύπτει ότι οι συντεταγμένες του μέσου του τμήματος ΑΓ είναι $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$ όπως ακριβώς συμβαίνει και με τις συντεταγμένες του μέσου του ΒΔ. Επομένως, οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται.



Δραστηριότητα 6 (Μ9)

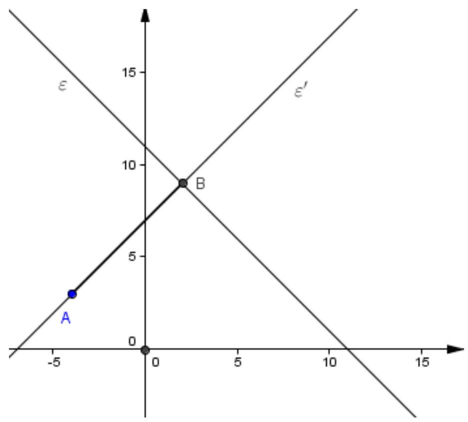
Να βρείτε το έργο που εκτελεί μία δύναμη $\vec{F} = 5\cdot\vec{i}$ κατά τη μετατόπιση ενός σώματος πάνω στην ευθύγραμμη διαδρομή από την αρχή των αξόνων έως το σημείο $P(2, 3)$.

Δραστηριότητα 7 (Μ3, Μ4, Μ9)

Θα περιγράψουμε τώρα μια διαδικασία στην οποία θα στηριχτούμε για να υπολογίσουμε την απόσταση ενός σημείου από μία ευθεία. Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $y=-x+11$ και το σημείο $\mathrm{A}(-4,3)$. Ζητούμε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε.

Ενδεικτική λύση

Βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας ε' που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ε.



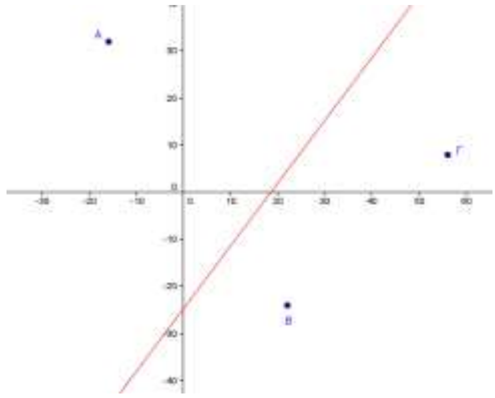
Επειδή οι δύο ευθείες είναι κάθετες έχουμε $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{\varepsilon'} = -1$ και αφού $\lambda_\varepsilon = -1$ προκύπτει ότι $\lambda_{\varepsilon'} = 1$. Επομένως, η εξίσωση της ε' είναι: $y - 3 = x - (-4) \Leftrightarrow y = x + 7$.

Το σημείο τομής Β των ευθειών ε και ε' έχει συντεταγμένες τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = -x + 11 \\ y = x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 9 \end{cases} \quad \delta\eta\lambda.\ \mathrm{B}(2, 9)$$

Επομένως, η απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε' ταυτίζεται με την απόσταση των σημείων Α και Β οπότε:

$$(\mathrm{AB}) = \sqrt{(2+4)^2 + (9-3)^2} = 6\sqrt{2}.$$



Επέκταση της δραστηριότητας

Την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να την εφαρμόσουμε στο παρακάτω πραγματικό πρόβλημα.

Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Α, Β και Γ

αντιστοιχούν σε τρία σπίτια, τα οποία είναι κτισμένα σε περιοχή από την οποία διέρχεται ο αγωγός φυσικού αερίου κατά μήκος της ευθείας που βλέπουμε. Στο σύστημα συντεταγμένων που έχουμε επιλέξει, οι συντεταγμένες των σημείων είναι $\mathrm{A}(-16, 32)$, $\mathrm{B}(22, -24)$ και $\Gamma(56, 8)$ και η εξίσωση της ευθείας είναι $4x - 3y = 74$.

Αν κάθε σπίτι συνδέεται με τον κεντρικό αγωγό με έναν άλλο που είναι κάθετος σε αυτόν, να υπολογίσετε το μήκος του αγωγού που η εταιρεία φυσικού αερίου χρειάζεται, προκειμένου να συνδέσει τα τρία σπίτια με τον κεντρικό αγωγό.

Δραστηριότητα 8 (Μ7, Μ8)

Δίνεται η παρακάτω γραμμική εξίσωση

$$\left(\lambda^2 - \lambda\right)Xx - \lambda Xy = \lambda^2 - 3\lambda \quad (1)$$

α) Ας υποθέσουμε ότι $\lambda \in \{1, 2\}$. Γράψτε τις εξισώσεις που προκύπτουν για τις συγκεκριμένες τιμές του λ. Τι παριστάνουν στο επίπεδο οι συγκεκριμένες εξισώσεις; Ποιο είναι το σημείο τομής τους;

β) Δώστε μια άλλη τιμή για το $\lambda \neq 0$ στην (1). Τι παριστάνει η γραμμική εξίσωση που προκύπτει; Διέρχεται από το σημείο τομής που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα;

γ) Με βάση τα προηγούμενα μπορείτε να γενικεύσετε τι συμβαίνει αν ο λ είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός εκτός από το 0; Προσπαθήστε να αποδείξετε αλγεβρικά την εικασία σας.

δ) Τι συμπεραίνετε στην περίπτωση που $\lambda = 0$;

ε) Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,2)$ ανήκει στην οικογένεια; (Δοκιμάστε την $x=1$).

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Α. Σημαντικά Ερωτήματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά τη διδασκαλία

Στη συνέχεια παραθέτουμε ενδεικτικές ερωτήσεις που μπορούν να βοηθήσουν στην ανάπτυξη της διδασκαλίας του κεφαλαίου.

- **Γιατί χρειαζόμαστε τα αλγεβρικά εργαλεία στη μελέτη της Γεωμετρίας;**
  Η αναφορά στην ιστορική πορεία που οδήγησε στην ανακάλυψη της Αναλυτικής Γεωμετρίας, μπορεί να αποτελέσει το έναυσμα για την ανάπτυξη διαλόγου μέσα στην τάξη, από τον οποίο περιμένουμε να αναδειχθεί η αναγκαιότητα της επινόησης της Α.Γ., αλλά και να τονίσουμε στους μαθητές μας ότι για άλλη μια φορά η γέννηση νέων μαθηματικών ιδεών αποτελεί ένα πολιτισμικό επίτευγμα. Τα ιστορικά στοιχεία που αναφέρονται στην εισαγωγή είναι αρκετά για να στηριχθεί η παραπάνω διαδικασία.
- **Με ποιον τρόπο συνδέεται η κλίση της ευθείας, ο λόγος μεταβολής μεταξύ δύο σημείων της και ο συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος παράλληλου προς αυτήν;**
  Η δραστηριότητα 1 του Π.Σ. είναι κατάλληλη, προκειμένου να αντιληφθούν οι μαθητές τη σύνδεση ανάμεσα στις διαφορετικές μορφές που μπορεί να έχει ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.
- **Πώς ελέγχουμε αν δύο ευθείες είναι παράλληλες ή κάθετες με χρήση των συντελεστών διεύθυνσης;**
- **Πώς βρίσκουμε την εξίσωση ευθείας όταν: α) διέρχεται από γνωστό σημείο και έχει γνωστό συντελεστή διεύθυνσης ή είναι παράλληλη στον $x'x$, β) δίνονται δύο σημεία της, γ) δίνεται ένα σημείο της και είναι παράλληλη σε γνωστό διάνυσμα;**
- **Πώς αποδεικνύουμε ότι ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία και ότι τρία σημεία είναι συνευθειακά;**
  Είναι σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές ότι ένα σημείο ανήκει στην ευθεία αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της.

- **Ποια είναι η γενική μορφή εξίσωσης ευθείας και με ποιο τρόπο προσδιορίζουμε ένα διάνυσμα κάθετο και ένα διάνυσμα παράλληλο με βάση τη γενική μορφή της εξίσωσης;**
  Προτείνεται η γενική μορφή να αποτυπωθεί με την εξίσωση $\mathrm{A}\cdot x+\mathrm{B}\cdot y=\Gamma \;\; \mu\varepsilon\, \mathrm{A}\neq 0 \;\acute{\eta}\; \mathrm{B}\neq 0$, οπότε το κάθετο διάνυσμα είναι το $\vec{\eta}=(\mathrm{A},\mathrm{B})$ και το παράλληλο το $\vec{\delta}=(\mathrm{B},-\mathrm{A})$ ή το $\vec{\delta}=(-\mathrm{B},\mathrm{A})$

- **Ποιες είναι οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο, πώς διερευνάται αλγεβρικά το συγκεκριμένο ερώτημα με χρήση των οριζουσών;**
  Η χρήση των οριζουσών είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, όταν οι εξισώσεις των ευθειών εκφράζονται παραμετρικά.

  <u>Παράδειγμα</u>: Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις $\varepsilon_1 : (\mu-2)x+5y=5$ *και* $\varepsilon_2 : x+(\mu+2)y=5$. *Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου* $\mu \in \mathbb{R}$ *. Με τη συγκεκριμένη εφαρμογή επιδιώκεται η σύνδεση της αλγεβρικής με τη γεωμετρική αναπαράσταση.*

Β. Σημεία που χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής

Παρά το γεγονός ότι η ευθεία είναι η πιο απλή και κατανοητή γραμμή, ωστόσο υπάρχουν ζητήματα τα οποία δυσκολεύουν τους μαθητές.

1. Η κλίση της ευθείας αποτελεί μια συνηθισμένη πηγή παρανοήσεων. Αρκετοί μαθητές έχουν την εντύπωση ότι όλες οι ευθείες έχουν κλίση. Έτσι, στην περίπτωση που η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, αντί να απαντήσουν ότι η ευθεία δεν έχει κλίση, επινοούν διάφορες απαντήσεις όπως για παράδειγμα ότι η κλίση είναι 0 ή ότι είναι 90^0, ταυτίζοντας την κλίση της ευθείας με τη γωνία.

2. Δυσκολία έχει παρατηρηθεί και στη σύνδεση των διαφορετικών μορφών με τις οποίες εκφράζεται η κλίση της ευθείας. Πρέπει λοιπόν να δώσουμε αρκετά παραδείγματα στους μαθητές, από τα οποία να προκύπτει ότι η κλίση μιας ευθείας εκφράζεται με:
   - ✓ Την $\varepsilon\varphi\omega$, όπου ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$
   - ✓ Το λόγο $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, όπου (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι δύο σημεία της ευθείας.
   - ✓ Το συντελεστή διεύθυνσης ενός διανύσματος που είναι παράλληλο στην ευθεία.

3. Ένα άλλο σημείο παρανόησης έχει να κάνει με τις ευθείες που διέρχονται από ένα δεδομένο σημείο $\mathrm{A}(x_0, y_0)$. Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές θεωρούν ότι από το σημείο αυτό διέρχεται η ευθεία $y-y_0=\lambda(x-x_0)$. Δεν λαμβάνουν υπόψη ότι από το σημείο αυτό διέρχεται και η ευθεία $x=x_0$, η οποία δεν περιγράφεται από την εξίσωση $y-y_0=\lambda(x-x_0)$, μιας και δεν ορίζεται κλίση γι αυτήν.

4. Η παραμετρική εξίσωση ευθείας δημιουργεί αρκετές δυσκολίες στους μαθητές, οι οποίες οφείλονται κυρίως στο γεγονός ότι η έννοια της παραμέτρου δεν έχει εξηγηθεί με σαφήνεια στους μαθητές. Θα ήταν καλό να δώσουμε στους μαθητές για διαπραγμάτευση αρχικά μια παραμετρική, όπου η παράμετρος να παίρνει συγκεκριμένες τιμές και μετά να γενικεύσουμε για κάθε τιμή της παραμέτρου.

Βιβλιογραφία

Finney, R., Weir, M., & Giordano, F. (2011). *Απειροστικός λογισμός,τόμος ΙΙ.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Epp, S., (2004). *Διακριτά Μαθηματικά με εφαρμογές* ($3^η$ έκδοση). Αθήνα: Κλειδάριθμος.

Αδαμόπουλος, Λ., Βισκαδουράκης, Β., Γαβαλάς, Δ., Πολύζος, Γ. & Σβέρκος, Α. (2012). *Μαθηματικά Β΄ τάξη γενικού λυκείου Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση.* Αθήνα: ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Χρυσάκης, Θ. (2013). *Γραμμική Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία.* Αθήνα: Αυτοέκδοση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο} : Ακολουθίες και όρια ακολουθιών

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μία από τις σημαντικές εργασίες των μαθηματικών είναι να ανακαλύπτουν και να περιγράφουν μοτίβα (κανονικότητες). Η μαθηματική δομή που χρησιμοποιείται κυρίως για τη μελέτη επαναλαμβανόμενων διαδικασιών είναι η ακολουθία. Το βασικό μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιείται για την επιβεβαίωση εικασιών που αφορούν μοτίβα ή κανονικότητες, που σχετίζονται με τον τρόπο διευθέτησης των όρων ακολουθιών, είναι η μαθηματική επαγωγή. Είναι μια απλή αλλά ισχυρή μέθοδος απόδειξης προτάσεων που αφορούν άμεσα ή έμμεσα ακεραίους. Η εφαρμογή της συναντάται σε όλο το εύρος των μαθητικών κλάδων όπως στην Άλγεβρα, Γεωμετρία, Τριγωνομετρία και στην Συνδυαστική.

Στα μαθηματικά, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι μια μαθηματική κατάσταση είναι αληθής επειδή στηρίζεται στα πειράματα και τις παρατηρήσεις. Για παράδειγμα, ο Fermat (1601-1665) ισχυρίστηκε ότι αν ο ν είναι ακέραιος μεγαλύτερος του 2, τότε η εξίσωση $x^\nu + y^\nu = z^\nu$ δεν έχει λύση για μη μηδενικούς ακεραίους x, y, z. Στην πράξη, οι μαθηματικοί χρειάσθηκαν πάνω από τρεις αιώνες να βρουν τη λύση, η οποία τελικά συμπληρώθηκε από τον Άγγλο μαθηματικό Andrew Wiles το 1994. Επίσης, με πειραματικές διαδικασίες δεν μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι μια μαθηματική σχέση αληθεύει σε κάθε περίπτωση. Η ισότητα $1+3+...+(2\nu-1)=\nu^2$ μπορεί να ελεγχθεί ως προς την ορθότητα της για κάποιες πρώτες τιμές του ν. Αυτό όμως δεν είναι αρκετό για να διαπιστώσουμε ότι είναι αληθής. Είναι πιθανό, η ισότητα αυτή, για κάποια επόμενη τιμή του ν, να μην ισχύει. Ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο που μας δίνει τη δυνατότητα για ασφαλή συμπεράσματα σε τέτοιες περιπτώσεις είναι η αρχή της μαθηματικής επαγωγής.

Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής εμφανίζεται σε πρώιμο στάδιο από την αρχαιότητα. Η πρώτη χρήση επαγωγικού συλλογισμού εμφανίζεται στον Πλάτωνα. Εμφανίζεται όμως και σε μαθηματικά κείμενα, όπως στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Η απόδειξη της πρότασης 31 του βιβλίου VII, όπου αποδεικνύεται ότι κάθε φυσικός αριθμός είτε είναι πρώτος, είτε διαιρείται από κάποιον πρώτο, αποτελεί μια πρώιμη εκδοχή της μαθηματικής επαγωγής. Να τονίσουμε σε αυτό το σημείο, ότι ο επαγωγικός συλλογισμός χρησιμοποιείται στις κοινωνικές και άλλες επιστήμες αλλά δεν αποτελεί μαθηματική απόδειξη. Μας οδηγεί στην εικασία. Η μαθηματική επαγωγή ή τέλεια επαγωγή αποτελεί αποδεικτική διαδικασία. Η πρώτη σαφής διατύπωση της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής έγινε από τον Ελληνικής καταγωγής μαθηματικό Francesco Maurolico, ο οποίος απέδειξε το 1557 ότι:

«Το άθροισμα ενός πλήθους περιττών σε διαδοχική σειρά, με αφετηρία τη μονάδα, δίνει το τετράγωνο του πλήθους των περιττών». Δηλαδή, σε σύγχρονο συμβολισμό απέδειξε ότι $1+3+5+...+(2\nu-1)=\nu^2$. Αναφορά, σε πρώιμο στάδιο της μαθηματικής επαγωγής, έγινε και από τον Pascal, έως ότου οι φυσικοί αριθμοί θεμελιώθηκαν αξιωματικά από τον Giuseppe Peano (1858-1932). Ένα από τα αξιώματα του είναι διατυπωμένο κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να εμπεριέχει τη μαθηματική επαγωγή ως αποδεικτικό εργαλείο[8].

Τι περιέχει το κεφάλαιο των ακολουθιών και πώς το περιεχόμενο του συνδέεται με προγενέστερο σχετικό

[8] http://www.mathher.gr/s/attachments/099_epagogi_lambrou.pdf

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται καταρχάς, η μέθοδος της τέλειας ή μαθηματικής επαγωγής, προκειμένου οι μαθητές να γνωρίσουν και μία άλλη διαδικασία απόδειξης, που υποστηρίζει την επαγωγική σκέψη. Έως τώρα, οι μαθητές έχουν μάθει να αποδεικνύουν προτάσεις ή θεωρήματα και να λύνουν ασκήσεις χρησιμοποιώντας κυρίως τον παραγωγικό συλλογισμό.

Στη συνέχεια, αναπτύσσεται η έννοια της ακολουθίας και η έννοια του ορίου ακολουθίας. Οι μαθητές, στη διάρκεια της φοίτησή τους έως και την Α΄ Λυκείου, έχουν διδαχθεί την γενικότερη έννοια της συνάρτησης. Η έννοια της ακολουθίας συνδέεται με την έννοια της συνάρτησης, αφού η ακολουθία είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο ¥* των θετικών ακεραίων. Επιπλέον, οι μαθητές έχουν έλθει σε επαφή με άπειρες διαδικασίες. Ο υπολογισμός του εμβαδού του κύκλου μέσω του εμβαδού κανονικών πολυγώνων περιγεγραμμένων και εγγεγραμμένων στον κύκλο, αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα. Η περιοδική αναπαράσταση ενός ρητού αριθμού αποτελεί επίσης μια άπειρη διαδικασία, που είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα στην περίπτωση που η περίοδος είναι 9, όπως συμβαίνει με τον αριθμό $0,999...$ που είναι ίσος με 1. Ακόμη όμως και στη Γεωμετρία οι μαθητές μαθαίνουν ότι μια ευθεία προεκτείνεται όσο θέλουμε και προς τα δύο μέρη, έως το άπειρο.

Η έννοια του ορίου της ακολουθίας που περιέχεται σε αυτό το κεφάλαιο, αντιμετωπίζει με αυστηρό πλέον τρόπο προβλήματα τα οποία στηρίζονται σε άπειρες διαδικασίες. Οι μαθητές εμπλέκονται σε δραστηριότητες μέσω των οποίων γίνεται προσπάθεια να οικοδομηθεί η αντίληψη του τι σημαίνει ότι μια ακολουθία έχει όριο πραγματικό αριθμό και τι σημαίνει όταν το όριο είναι $+\infty$ ή $-\infty$. Οι αντιλήψεις και εικόνες για το όριο της ακολουθίας, θα αποτελέσουν τη βάση για την οικοδόμηση της έννοιας του ορίου της συνάρτησης στην επόμενη τάξη.

Τέλος, το κεφάλαιο περιέχει βασικές ιδιότητες του ορίου ακολουθίας και τα όρια βασικών ακολουθιών. Με βάση αυτά οι μαθητές μαθαίνουν να υπολογίζουν τα όρια ακολουθιών απλής μορφής. Η διδασκαλία περιορίζεται στον υπολογισμό του ορίου πολυωνυμικών, ρητών και με απλά ριζικά ακολουθιών.

Εστίαση σε σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο των ακολουθιών

- Στη μαθηματική επαγωγή μεταβαίνουμε από το μέρος στο όλον ενώ στον παραγωγικό συλλογισμό από το όλον στο μέρος.
- Η μελέτη των άπειρων διαδικασιών που περιγράφουν μοτίβα ή κανονικότητες οδηγεί στην ανάπτυξη εικασιών για τη γενική μορφή τους, η οποία επιβεβαιώνεται με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.
- Η ακολουθία είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών.
- Η σύγκλιση ακολουθίας είναι αποτέλεσμα της προσπάθειας προσδιορισμού ενός μεγέθους που δεν γνωρίζουμε, μέσω της μελέτης γνωστών μεγεθών.
- Το όριο μιας ακολουθίας α_ν είναι ο πραγματικός αριθμός l, όταν όλοι οι όροι της, εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος, απέχουν από l απόσταση μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό και αν επιλέξουμε.
- Το όριο μιας ακολουθίας α_ν είναι $+\infty$, όταν οι όροι της ακολουθίας, εκτός από πεπερασμένο πλήθος, είναι μεγαλύτεροι από οποιονδήποτε θετικό αριθμό και αν επιλέξουμε, ενώ είναι $-\infty$,

όταν οι όροι της ακολουθίας, εκτός από πεπερασμένο πλήθος, είναι μικρότεροι από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό και αν επιλέξουμε.

- Το $+\infty$ και το $-\infty$ δεν είναι πραγματικοί αριθμοί.

Σε ποια ερωτήματα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

- Πώς διατυπώνεται η αρχή της μαθηματικής επαγωγής;
- Πώς ορίζεται η ακολουθία;
- Πώς προσδιορίζω έναν όρο μιας ακολουθίας από τον γενικό ή τον αναδρομικό τύπο;
- Γιατί η γραφική παράσταση μιας ακολουθίας αποτελείται από μεμονωμένα σημεία;
- Γιατί είναι αναγκαία η μελέτη της σύγκλισης μιας ακολουθίας;
- Πότε λέμε ότι μια ακολουθία έχει όριο πραγματικό αριθμό;
- Πότε λέμε ότι μια ακολουθία έχει όριο $+\infty$ ή $-\infty$;
- Μια ακολουθία συγκλίνει πάντα;
- Ποιες πράξεις είναι «επιτρεπτές» κατά τον υπολογισμό ορίων μεταξύ των πραγματικών αριθμών και του $\pm\infty$;
- Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες των ορίων;
- Ποια είναι τα όρια των ακολουθιών $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\nu^{\kappa}}$ και $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\nu^{\kappa}$, αν $\kappa\in\mathrm{N}^{*}$;
- Ποια είναι τα όρια των ακολουθιών $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\alpha^{\nu}$, αν $|\alpha|<1$και $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\alpha^{\nu}$, αν $\alpha>1$;
- Πώς υπολογίζουμε το άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, όπου $|\lambda|<1$

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου οι μαθητές πρέπει να είναι ικανοί να:

Μ1. Εξηγούν τη δομή της μαθηματικής επαγωγής

Μ2. Εφαρμόζουν την αρχή της μαθηματικής επαγωγής για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων που αναφέρονται σε άπειρες διαδικασίες, στις οποίες η μεταβλητή είναι φυσικός αριθμός (στόχος 3.1.1, 3.1.2).

Μ3. Υπολογίζουν όρους ακολουθίας, όταν δίνεται ο γενικός ή ο αναδρομικός τύπος και εξηγούν γιατί η γραφική παράσταση μιας ακολουθίας αποτελείται από μεμονωμένα σημεία (στόχος 3.2.1).

Μ4. Προσδιορίζουν το γενικό όρο (ν-οστό όρο) μιας ακολουθίας, όταν αυτή δίνεται υπό μορφή κανονικότητας (στόχος: 3.2.2).

Μ5. Εξηγούν με τη βοήθεια παραδειγμάτων τι σημαίνει ότι μια ακολουθία έχει όριο πραγματικό αριθμό και τι σημαίνει ότι το όριό της είναι μη πεπερασμένο ή δεν υπάρχει (στόχοι: 3.3.1, 3.3.2).

Μ6. Περιγράφουν ποιες πράξεις είναι επιτρεπτές στη διαδικασία υπολογισμού των ορίων ακολουθιών και ποιες όχι.

Μ7. Υπολογίζουν όρια πολυωνυμικών, ρητών και με απλά ριζικά ακολουθιών, χρησιμοποιώντας τις βασικές ιδιότητες των πράξεων των ορίων (στόχοι: 3.4.1, 3.4.2).

Μ8. Χρησιμοποιούν τα όρια $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\alpha^{\nu}$, αν $|\alpha|<1$ και $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\alpha^{\nu}$, αν $\alpha>1$ και τις ιδιότητες των ορίων των ακολουθιών για να επιλύουν προβλήματα που περιγράφονται από αυτές τις ακολουθίες (στόχος: 3.5.1).

Μ9. Συνδέουν τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς με την κλασματική τους αναπαράσταση (στόχος: 3.5.2).

Μ10. Υπολογίζουν το άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, όταν $|\lambda|<1$ και χρησιμοποιούν την αντίστοιχη διαδικασία στην επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου (στόχοι: 3.5.3, 3.5.4).

Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες που προτείνονται αντιστοιχούν σε συγκεκριμένα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα, όπως τα περιγράψαμε στην αντίστοιχη ενότητα.

Δραστηριότητα 1. (Μ1)

Α. Για κάθε θετικό ακέραιο ν, έστω η $P(\nu)$ ο τύπος $1^3+2^3+3^3+\cdots+\nu^3=\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2$.

Γράψτε την $P(1)$ και εξετάστε αν είναι αληθής.

Γράψτε την $P(\kappa)$ και την $P(\kappa+1)$.

Σε μια απόδειξη με μαθηματική επαγωγή του τύπου $P(\nu)$ για όλους τους ακεραίους $\nu\geq 1$, τι πρέπει να δειχθεί στο επαγωγικό βήμα;

Β. Για να αποδείξει με μαθηματική επαγωγή τον ισχυρισμό «Για κάθε ακέραιο $\nu\geq 1$ ισχύει $1^2+2^2+3^2+\cdots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$» ένας μαθητής έγραψε την παρακάτω απόδειξη:

«Ο ισχυρισμός είναι αληθής για $\nu=1$, αφού $1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}\Leftrightarrow 1=1$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο ακέραιο $\kappa\geq 1$ ισχύει $\kappa^2=\frac{\kappa(\kappa+1)(2\kappa+1)}{6}$ και πρέπει να δείξουμε ότι

$(\kappa+1)^2=\dfrac{(\kappa+1)(\kappa+2)(2\kappa+3)}{6}$ …». Υπάρχει σφάλμα σε αυτά που γράφει ο μαθητής; Αν ναι, πώς έπρεπε να διατυπώσει το επαγωγικό βήμα;

Δραστηριότητα 2. (Μ1, Μ2)

Ο John Wallis (1616-1703), στο περίφημο έργο του Arithmetica Infinitorum (1656), μετά από εξέταση των παρακάτω σχέσεων

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6},\qquad \frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$
$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18},\qquad \frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$$
$$\frac{0+1+4+9+16+25}{25+25+25+25+25+25}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30},\qquad \frac{0+1+4+9+16+25+36}{36+36+36+36+36+36+36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{36}$$

ισχυρίστηκε ότι ακολουθούν κάποιο γενικό κανόνα.

Α. Μπορείτε να εικάσετε τη γενική μορφή του κανόνα αυτού;

Β. Ο John Wallis υπέστη ισχυρή κριτική από τους σύγχρονους του μαθηματικούς επειδή ισχυρίστηκε χωρίς επιχειρήματα, ότι ο γενικός κανόνας που βρήκε έπεται από την επαγωγή. Εσείς τι λέτε είχε δίκιο ο Wallis;

Ενδεικτική λύση

Α. Οι μαθητές παρατηρούν ότι στον αριθμητή εμφανίζονται τα τετράγωνα των αριθμών $1,2,3,4,5$. Στον παρονομαστή εμφανίζεται ένα άθροισμα που όλοι οι όροι του είναι ίσοι με το τελευταίο τετράγωνο του αριθμητή και το πλήθος των όρων είναι ίσο με εκείνο του αριθμητή. Στο δεύτερο μέλος, ο πρώτος όρος του αθροίσματος είναι πάντα $\frac{1}{3}$, ενώ ο παρονομαστής του δευτέρου όρου είναι πολλαπλάσιο του 6. Μετά από αυτές τις παρατηρήσεις αναμένουμε οι μαθητές να καταλήξουν στον γενικό τύπο $\dfrac{0^2+1^2+2^2+\cdots+\nu^2}{\nu^2+\nu^2+\nu^2+\cdots+\nu^2}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6\nu}$. Αν οι μαθητές δυσκολεύονται, τα προηγούμενα μπορούν να χωριστούν σε διαδοχικά βήματα υπό μορφή ερωτημάτων.

Β. Με απαλοιφή των παρονομαστών καταλήγουμε στην ισότητα:

$$1^2+2^2+\cdots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$

Στη συνέχεια ο διδάσκων ζητεί από τους μαθητές να αποδείξουν την ισχύ της συγκεκριμένης ισότητας με μαθηματική επαγωγή.

Δραστηριότητα 3. (Μ1, Μ2)

Επιλέξτε ν σημεία σε ένα κύκλο, όπου το ν ισούται διαδοχικά με $1,2,3,4,5,\cdots$ και σχεδιάστε σε χωριστά διαγράμματα όλες τις χορδές που τα συνδέουν, έτσι ώστε ανά τρεις χορδές να μην διέρχονται από το ίδιο σημείο.

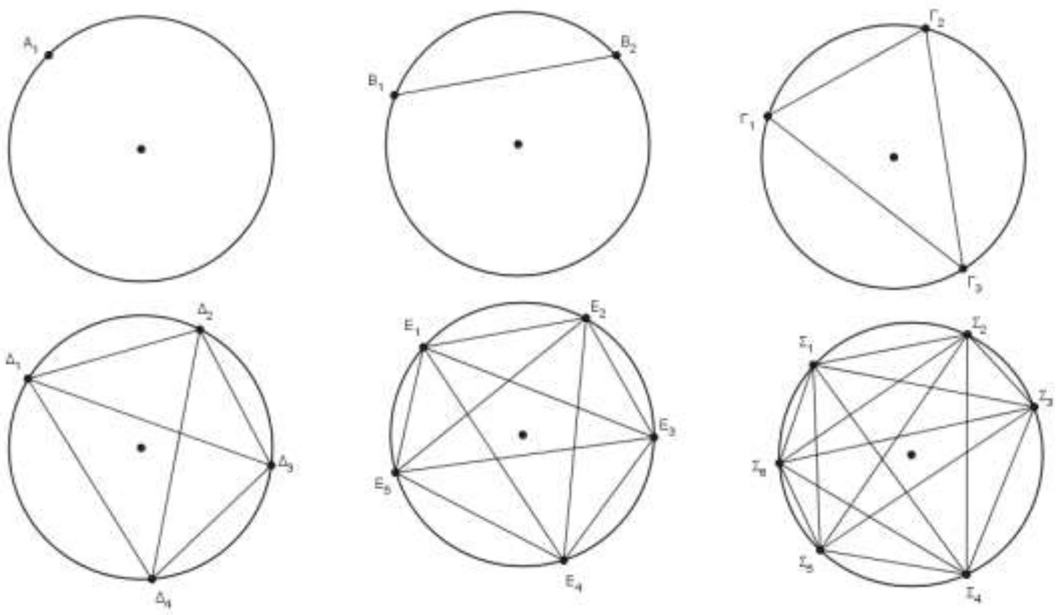
Α. Μετρήστε το πλήθος των περιοχών που διαμερίζεται ο κύκλος από τις χορδές και διαπιστώστε ότι το πλήθος αυτό είναι διαδοχικά $1,2,4,8,16,\cdots$

Β. Ποιος κανόνας φαίνεται να ακολουθείται; Με βάση τον κανόνα αυτό, ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος των περιοχών όταν τα σημεία είναι 6 ;

Γ. Κατασκευάστε ένα κύκλο, επιλέξτε 6 σημεία σε αυτόν και μετρήστε το πλήθος των περιοχών όπως κάνατε στο πρώτο ερώτημα. Συμφωνείτε με το αποτέλεσμα που βρήκατε στο (β) ερώτημα;

Ενδεικτική λύση

Η δραστηριότητα στοχεύει να δείξει στους μαθητές ότι μια κανονικότητα που παρατηρείται για ένα μικρό αριθμό περιπτώσεων, δεν σημαίνει ότι μπορεί μα γενικευτεί. Οι κατασκευές που θα κάνουν οι μαθητές φαίνονται στα επόμενα σχήματα.



Ενώ λοιπόν αναμένεται ο αριθμός των περιοχών στην τελευταία περίπτωση να είναι 32, στην πραγματικότητα είναι 31. Αυτό μπορούν να το διαπιστώσουν οι μαθητές με τη μέτρηση των αντίστοιχων περιοχών στην τελευταία κατασκευή με τα έξι σημεία.

Δραστηριότητα 4. (Μ3)

Α. Γράψτε τους τέσσερεις πρώτους όρους των παρακάτω ακολουθιών:

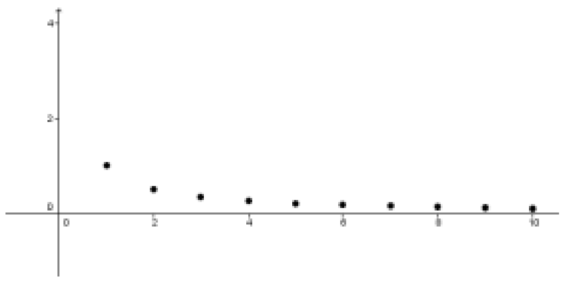
$\alpha_\nu = 2\nu + 1$ $\qquad \alpha_\nu = \dfrac{\nu^2 - 1}{\nu + 1}$ $\qquad \alpha_\nu = \left(-\dfrac{1}{10}\right)^{\nu - 1}$ $\qquad \alpha_\nu = |3 - \nu|$

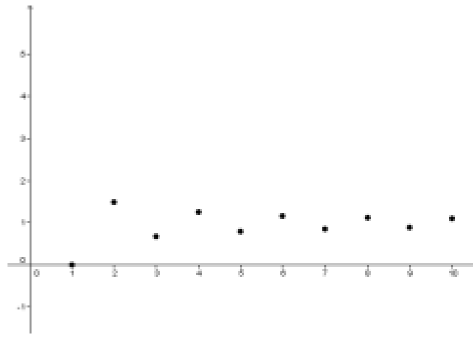
A. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\nu}, & \alpha\nu \quad \nu = 2\kappa \\ \dfrac{1}{2}, & \alpha\nu \quad \nu = 2\kappa + 1 \end{cases}$

Βρείτε τον $10^{\text{ο}}$ όρο της και τον όρο τάξεως 2015.

Δραστηριότητα 5. (Μ3)

(Α)

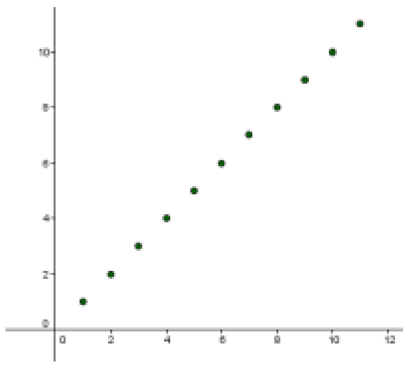


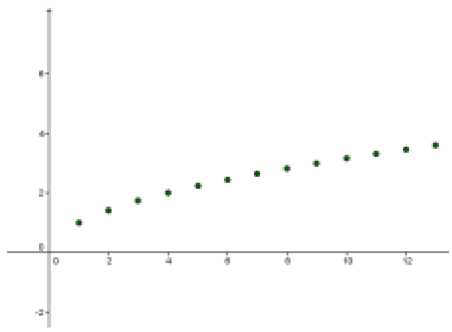


(Β)

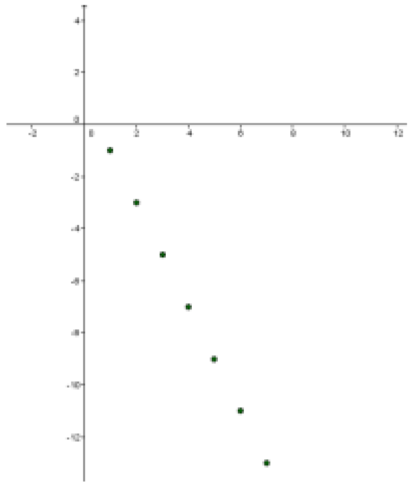
(Γ)

(Δ)





(Ε)



Αντιστοιχίστε τις γραφικές παραστάσεις με τους τύπους των παρακάτω ακολουθιών:

1. $\alpha_\nu = \nu$ 2. $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$ 3. $\alpha_\nu = \sqrt{\nu}$

4. $\alpha_\nu = -2\nu + 1$ 5. $\alpha_\nu = 1 + \dfrac{(-1)^\nu}{\nu}$

Σε όποιες περιπτώσεις είναι δυνατόν, ορίστε την αντίστοιχη συνάρτηση (τύπο και σύνολο ορισμού).

Δραστηριότητα 6. (Μ7)

Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

1. $\dfrac{1}{\nu^5}$ 2. $5\nu^3 - 2\nu + 1$ 3. $\dfrac{\nu^4 - 5\nu^3 + 2\nu - 1}{\nu^3 - 3\nu + 2}$ 4. $\dfrac{2\nu^3 + \nu - 1}{4\nu^3 - \nu^2 + 2}$

5. $\dfrac{\nu + 2}{\nu^3 + \nu + 3}$ 6. $\dfrac{1 - \dfrac{1}{\nu}}{1 - \dfrac{1}{\nu^2}}$ 7. $\dfrac{3 - \sqrt{\nu}}{9 - \nu}$ 8. $\dfrac{1 - \sqrt{1 - \nu^2}}{\nu^2}$

9. $\sqrt{4\nu^2 - 2\nu + 3}$ 10. $\sqrt{\nu^2 + 1} - \nu$

Δραστηριότητα 7. (Μ8, Μ9, Μ10)

Α. Να εκφράσετε τον δεκαδικό αριθμό 5,232323…ως λόγο δύο θετικών ακεραίων.

Β. Γενίκευση της δραστηριότητας Δ17 του Π.Σ. Έστω ότι από ύψος α μέτρων πάνω από το έδαφος αφήνουμε ένα μπαλάκι να πέσει. Κάθε φορά που προσκρούει στο έδαφος μετά από πτώση από ύψος h, αναπηδά σε ύψος ρh, όπου $0 < \rho < 1$. Να βρείτε το συνολικό κατακόρυφο διάστημα που διανύει το μπαλάκι.

Ενδεικτική λύση

Α. Διαδοχικά έχουμε:

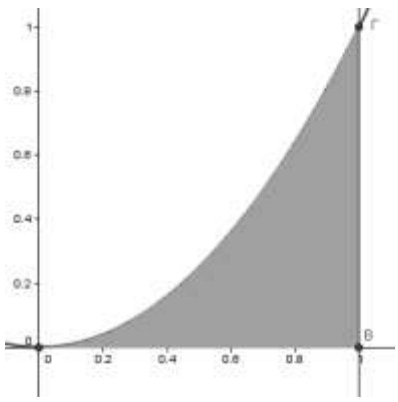
$$
\begin{aligned}
5{,}232323\ldots &= 5+\frac{23}{100}+\frac{23}{(100)^2}+\frac{23}{(100)^3}+\ldots \\
&= 5+\frac{23}{100}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{100}+\left(\frac{1}{100}\right)^2+\ldots\right)}_{\substack{\text{άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής} \\ \text{προόδου με πρώτο όρο } 1 \text{ και λόγο } \frac{1}{100}}} \\
&= 5+\frac{23}{100}\cdot\frac{100}{99}=5+\frac{23}{99}=\frac{518}{99}
\end{aligned}
$$

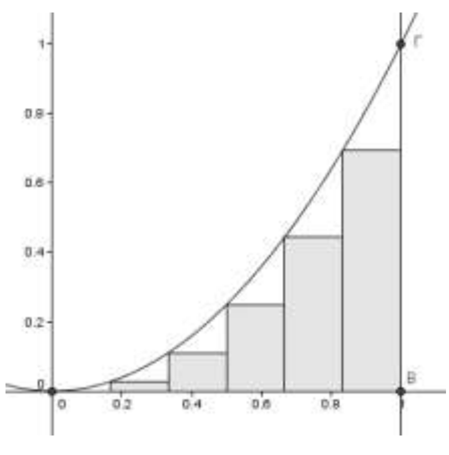
Β. Την πρώτη φορά που το μπαλάκι ακουμπάει στο έδαφος έχει διανύσει α μέτρα. Μετά αναπηδά και φτάνει σε ύψος $\rho\alpha$ και μέχρι να ακουμπήσει και πάλι στο έδαφος διανύει διάστημα πάλι $\rho\alpha$. Δηλαδή από την πρώτη αναπήδηση μέχρι τη δεύτερη έχει διανύσει $2\rho\alpha$ μέτρα. Ομοίως σκεφτόμενοι προκύπτει ότι το συνολικό διάστημα που διανύει το μπαλάκι είναι:

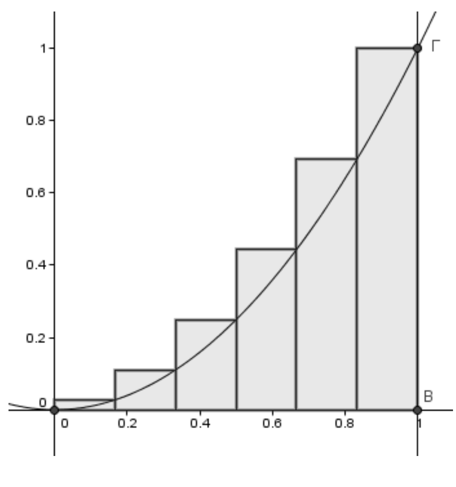
$$s=\alpha+2\alpha\rho+2\alpha\rho^2+2\alpha\rho^3+\ldots=\alpha+\frac{2\alpha\rho}{1-\rho}=\alpha\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)$$

Δραστηριότητα 8. (Μ3, Μ7, Μ8)

Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$, που αντιστοιχεί στο γραμμοσκιασμένο χωρίο του διπλανού σχήματος. Επειδή δεν γνωρίζουμε κάποιον τύπο για απευθείας υπολογισμό του εμβαδού, μπορούμε να το προσεγγίσουμε μέσω ορθογωνίων, των οποίων το άθροισμα των εμβαδών θα είναι μικρότερο ή θα υπερβαίνει το ζητούμενο. Κάθε ορθογώνιο έχει βάση ίση με $\frac{1}{\nu}$, όπου το ν είναι ο αριθμός των ίσων διαστημάτων στα οποία χωρίζεται το διάστημα $[0, 1]$. Ένα στιγμιότυπο της κατάστασης αυτής φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί, όπου το διάστημα $[0, 1]$ έχει διαιρεθεί σε 6 διαστήματα.





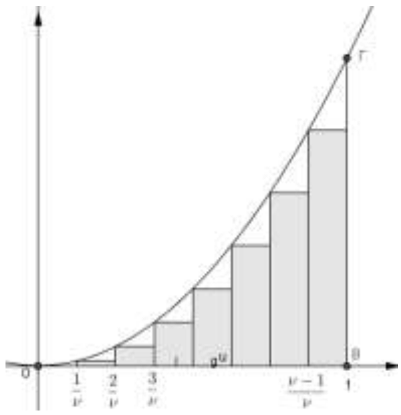


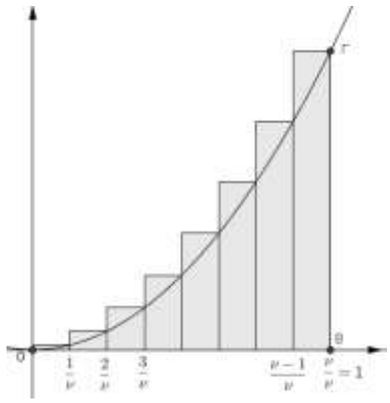
Α. Υποθέτουμε ότι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που βρίσκονται κάτω από την καμπύλη συμβολίζεται με ε_ν και το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που βρίσκονται πάνω από την καμπύλη συμβολίζεται με E_ν. Με χρήση λογισμικού (π. χ. geogebra) μεταβάλλετε τον αριθμό των ορθογωνίων και συμπληρώστε τον επόμενο πίνακα.

	$\nu=4$	$\nu=5$	$\nu=8$	$\nu=16$	$\nu=32$	$\nu=64$	$\nu=\ldots$
ε_ν							
E_ν							
$\mathrm{E}_\nu-\varepsilon_\nu$							

Αφού συμπληρώσετε τον πίνακα, καταγράψτε τα μεγέθη που μεταβάλλονται και το είδος της μεταβολής τους. Κάντε μια εκτίμηση για το διάστημα εντός του οποίου μπορεί να βρίσκεται το ζητούμενο εμβαδό.

Β. Αν χωρίσουμε το διάστημα $[0,1]$ σε ν ίσα υποδιαστήματα, έχουμε την παρακάτω εικόνα:





Γράψτε τώρα στη γενική περίπτωση την ακολουθία ε_ν και την ακολουθία E_ν. Υπολογίστε τα όρια των δύο ακολουθιών. Τι παρατηρείτε; Ποια εικασία μπορείτε να κάνετε για το εμβαδόν του χωρίου που θέλουμε να υπολογίσουμε;

Ενδεικτική λύση

Α. Καταρχάς, με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα αναδεικνύουμε μια συνήθη διαδικασία των μαθηματικών. Την προσπάθεια να προσεγγίσουμε το άγνωστο μέγεθος, μέσω της μελέτης γνωστών μεγεθών. Μετά τη συμπλήρωση του πίνακα αναμένουμε από τους μαθητές να αντιληφθούν ότι, καθώς το πλήθος των ορθογωνίων αυξάνεται, η τιμή του ε_ν αυξάνεται, ενώ του E_ν μειώνεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μειώνεται αντίστοιχα και η τιμή της διαφοράς $\mathrm{E}_\nu - \varepsilon_\nu$. Οι μαθητές είναι πλέον σε θέση να εικάσουν ότι το εμβαδόν E του χωρίου που θέλουμε να υπολογίσουμε βρίσκεται μεταξύ των τιμών ε_ν και E_ν, δηλαδή $\varepsilon_\nu \le \mathrm{E} \le \mathrm{E}_\nu$.

Β. Οι μαθητές αφού γράψουν τους τύπους των αντίστοιχων ακολουθιών, υπολογίζουν τα όριά τους. Παρατηρούν λοιπόν ότι οι ακολουθίες ε_ν και E_ν έχουν το ίδιο όριο. Αυτό μπορεί να τους οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι, αφού το ζητούμενο εμβαδόν βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων που έχουν κοινό όριο, άρα και αυτό πρέπει να έχει την ίδια τιμή. Στη κρίση του διδάσκοντα επαφίεται να πληροφορήσει τους μαθητές ότι αυτή η διαδικασία είναι το κριτήριο της παρεμβολής. Επιπλέον, η δραστηριότητα αυτή αποτελεί και μια εισαγωγή στην έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος που πρόκειται να διδαχθούν οι μαθητές στην επόμενη τάξη.

Σχόλιο

Η παραπάνω δραστηριότητα να υλοποιηθεί μόνο αν το επιτρέπει το επίπεδο της τάξης και λαμβάνοντας υπόψη ότι αναφέρεται μεν σε σύγκλιση ακολουθιών, αλλά παράλληλα θίγει και έννοιες που δεν συμπεριλαμβάνονται στο πρόγραμμα σπουδών της Β΄ τάξης.

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Α. Σημαντικά Ερωτήματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά τη διδασκαλία

- **Πώς μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι μια κανονικότητα που περιγράφεται από φυσικούς αριθμούς ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό;**
  Με την ερώτηση αυτή στοχεύουμε να αναδείξουμε, χρησιμοποιώντας και κάποιες από τις προτεινόμενες δραστηριότητες, την ανάγκη της μαθηματικής απόδειξης μέσω της μαθηματικής επαγωγής, προκειμένου να είμαστε βέβαιοι για την καθολική ισχύ της.

- **Ποια είναι η διατύπωση της αρχής της μαθηματικής επαγωγής;**
  Οι μαθητές πρέπει όχι μόνο να διατυπώνουν τη συγκεκριμένη αρχή, αλλά και να είναι σε θέση να εξηγούν τη δομή των δύο βημάτων της.

- **Πώς ορίζεται μια ακολουθία;**
- **Γιατί η γραφική παράσταση μιας ακολουθίας αποτελείται από μεμονωμένα σημεία;**
  Προτείνεται, οι μαθητές να σχεδιάσουν γραφικές παραστάσεις απλών ακολουθιών και στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των αντίστοιχων συναρτήσεων, ώστε να έχουν τη δυνατότητα της σύγκρισης.

- **Γιατί αποτελεί αναγκαιότητα η εισαγωγή της έννοιας της σύγκλισης μιας ακολουθίας;**
  Με την ερώτηση αυτή αναδεικνύουμε μια σημαντική ιδέα των μαθηματικών. Την ιδέα της προσέγγισης – υπολογισμού μιας άγνωστης ποσότητας, μέσω της προσέγγισής της οσοδήποτε κοντά από γνωστές ποσότητες. Εκτός από την περίπτωση υπολογισμού του εμβαδού του κύκλου, μπορούμε να αναφερθούμε και στον υπολογισμό του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της παραβολής $y = x^2$ και του άξονα $x'x$, όταν $x \in [0, 1]$.

- **Τι σημαίνει για μια ακολουθία ότι το όριο της είναι ο πραγματικό αριθμός l ;**
  Αυτό που ζητάμε είναι να περιγράψουν λεκτικά οι μαθητές ότι: για να είναι το όριο μιας ακολουθίας ο πραγματικός αριθμός l, πρέπει και αρκεί όλοι οι όροι της ακολουθίας, εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος, να απέχουν από το l απόσταση μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό και αν επιλέξουμε. Δεν επιθυμούμε να εμπλακεί ο μαθητής στον αυστηρό μαθηματικό ορισμό του ορίου.

- **Τι σημαίνει για μια ακολουθία ότι το όριο της είναι το $+\infty$ ή το $-\infty$;**
  Όπως και προηγουμένως, ζητάμε από τους μαθητές την αντίστοιχη λεκτική διατύπωση όταν το όριο της ακολουθίας είναι το $+\infty$ ή το $-\infty$.

- **Υπάρχει πάντα το όριο (πεπερασμένο ή όχι) μιας ακολουθίας;**
  Προτείνεται να δοθούν αρκετά παραδείγματα ακολουθιών που δεν συγκλίνουν, ώστε να μην δημιουργηθεί η αντίληψη στους μαθητές ότι κάθε ακολουθία συγκλίνει.

- **Ποιες βασικές ιδιότητες των ορίων γνωρίζετε;**
- **Ποιες πράξεις είναι επιτρεπτές και ποιες όχι στην περίπτωση υπολογισμού ορίων ακολουθίας;**
- **Ποιο είναι το όριο των ακολουθιών** $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha^\nu$, αν $|\alpha|<1$ και $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha^\nu$, αν $\alpha>1$;
- **Πώς μπορούμε να γράψουμε ένα περιοδικό δεκαδικό αριθμό υπό μορφή κλάσματος;**
- **Ποιο είναι το** $\lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ **;** Ο διδάσκων να αναφέρει ότι το συγκεκριμένο όριο είναι ο αριθμός e.

Β. Σημεία που χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής

- Πρέπει να τονιστεί στους μαθητές ότι η αποδεικτική μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής χρησιμοποιείται, όταν η μεταβλητή είναι φυσικός αριθμός.

- Να τονίσουμε, επίσης, στους μαθητές ότι το πρώτο βήμα στη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής είναι απαραίτητο. Διαφορετικά είναι πολύ πιθανό να καταλήξουμε σε λανθασμένα συμπεράσματα ως προς την καθολικότητα της πρότασης.
- Ο επαγωγικός συλλογισμός δεν οδηγεί σε μαθηματική απόδειξη αλλά σε εικασία και προκειμένου η εικασία να αποκτήσει μαθηματική νομιμοποίηση απαιτείται η απόδειξη της.

- Καλό είναι να τονιστεί στους μαθητές η διάκριση μεταξύ παραγωγικού και επαγωγικού συλλογισμού.

- Με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής δεν αποδεικνύουμε μόνο ισότητες. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η απόδειξη της ανισότητας Bernoulli.

- Το πεδίο ορισμού μιας ακολουθίας είναι συνήθως το σύνολο των θετικών ακεραίων. Ωστόσο, σε αρκετές περιπτώσεις επιθυμούμε ή επιβάλλεται, το πεδίο ορισμού μιας ακολουθίας να ξεκινά ή από το 0 ή από κάποιον άλλο θετικό ακέραιο. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να ορίσουμε μια ακολουθία πολυγώνων με πλήθος πλευρών ν, θα πάρουμε $\nu \geq 3$

- Η γραφική παράσταση μιας ακολουθίας αποτελείται από διακριτά σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο, τα οποία ανήκουν στη γραφική παράσταση της αντίστοιχης συνάρτησης.
- Μια συνηθισμένη παρανόηση από τους μαθητές είναι ότι το όριο είναι ένας αριθμός που δεν τον ξεπερνάμε ή δεν τον «πιάνουμε». Πρέπει λοιπόν, με κατάλληλα παραδείγματα να δείξουμε στους

μαθητές ότι οι τιμές της ακολουθίας μπορεί να είναι μικρότερες αλλά και μεγαλύτερες από το όριο, όταν αυτό είναι πραγματικός αριθμός.

- Να τονισθεί ιδιαίτερα ότι αυτό που μας ενδιαφέρει, είναι πώς συμπεριφέρονται οι όροι της ακολουθίας, όταν η μεταβλητή ν παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί ένα μεγάλο πλήθος όρων της ακολουθίας, αλλά πεπερασμένο, να συμπεριφέρεται με διαφορετικό τρόπο.
- Συνήθως οι μαθητές καλούνται να λύσουν ασκήσεις υπολογισμού ορίων. Αυτό δημιουργεί την παρανόηση στους μαθητές ότι κάθε ακολουθία συγκλίνει. Για να αποφύγουμε τέτοιες παρανοήσεις πρέπει να δοθούν αρκετά παραδείγματα ακολουθιών που δεν συγκλίνουν.
- Πολλές φορές οι μαθητές χρησιμοποιούν τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$ ως να είναι πραγματικοί αριθμοί . Πρέπει λοιπόν να τονίσουμε στους μαθητές ότι δεν είναι πραγματικοί αριθμοί, παρά το γεγονός ότι στις πράξεις σε αρκετές περιπτώσεις συμπεριφέρονται ως αριθμοί. Εξάλλου, από το γεγονός ότι δεν είναι πραγματικοί προκύπτουν και οι απροσδιόριστες μορφές.
- Να τονισθεί στους μαθητές ότι αν υπάρχει το όριο του αθροίσματος, του γινομένου ή του πηλίκου δύο ακολουθιών, δεν σημαίνει ότι υπάρχει το όριο καθεμιάς εξ αυτών.

Βιβλιογραφία

Epp, S., (2004). *Διακριτά Μαθηματικά με εφαρμογές* ($3^η$ έκδοση). Αθήνα: Κλειδάριθμος.

Finney, R., Weir, M., & Giordano, F. (2011). *Απειροστικός λογισμός,τόμος ΙΙ.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Maor, E. (2005). *e: Η ιστορία ενός αριθμού*. Αθήνα: Κάτοπτρο.

Αδαμόπουλος, Λ., Βισκαδουράκης, Β., Γαβαλάς, Δ., Πολύζος, Γ. & Σβέρκος, Α. (2012). *Μαθηματικά Β΄ τάξη γενικού λυκείου Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση.* Αθήνα: ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ. & Σβέρκος, Α. (2013). *ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ*. Αθήνα: ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., & Πολύζος, Γ. (2014). *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ Γενικού Λυκείου Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση.* Αθήνα: ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Λάμπρου, Μ., (2006). *Μαθηματική επαγωγή.* Ανακτήθηκε από: http://www.mathher.gr

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά για Θετικές και Τεχνολογικές Σπουδές

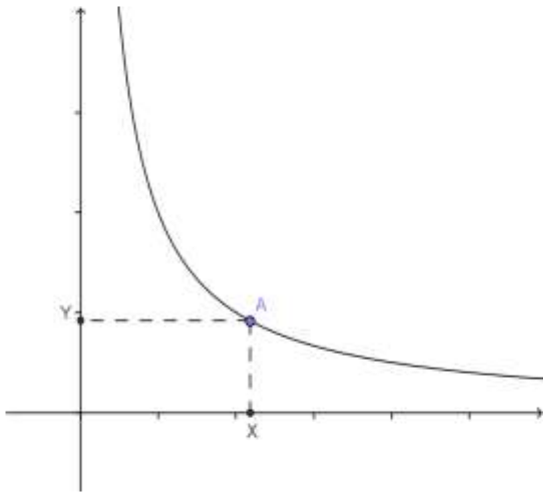
Α΄ μέρος (Ανάλυση)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

Εισαγωγή

Κατά τις αρχές του 17ου αιώνα, στην ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης διαδραμάτισε αποφασιστικό ρόλο η Συμβολική Άλγεβρα (χρήση γραμμάτων και ειδικών συμβόλων για την αναπαράσταση αγνώστων, μαθηματικών πράξεων, σχέσεων, κλπ) και η Αναλυτική Γεωμετρία (χρήση αλγεβρικών συμβολισμών σε προβλήματα Γεωμετρίας).

Όμως, η έννοια της συνάρτησης εμφανίζεται με ένα υπονοούμενο τρόπο από την αρχαιότητα, αφού ανάγεται στην ανάγκη του ανθρώπου να κάνει συσχετίσεις μεταξύ των μεγεθών (Γαγάτσης & Σπύρου, 2008). Κατά την μετέπειτα εξελικτική της πορεία η οποία διαρκεί μέχρι τα μέσα του 20ου αι. διαμορφώνεται από τους μαθηματικούς της εκάστοτε εποχής σύμφωνα με τις ανάγκες των ερευνών τους.



Εικόνα 1

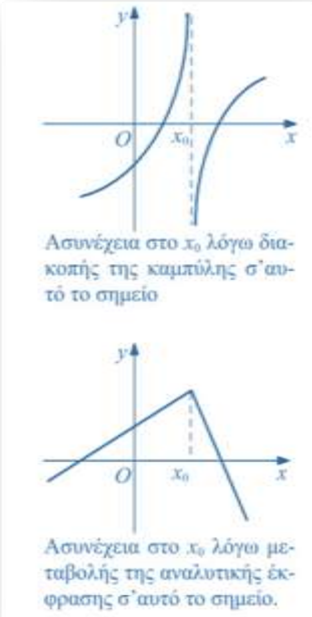
Ο Descartes (1596-1950) σχεδίαζε καμπύλες από σημεία των οποίων τη θέση προσδιόριζε από τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών των ευθυγράμμων τμημάτων (εικ.1). Ο Leibniz (1646-1716), επίσης, για πρώτη φορά το 1673 αναφέρεται στον όρο "συνάρτηση[9]" σε χειρόγραφό του με τίτλο "Η αντίστροφη μέθοδος των εφαπτομένων ή περί συναρτήσεων[10]", κατά τον υπολογισμό των τεταγμένων των σημείων μιας καμπύλης από ιδιότητα των αντίστοιχων εφαπτομένων.

Ταυτόχρονα, όμως, με την πορεία της εξέλιξης της έννοιας της συνάρτησης αναπτύσσονταν κατά τον 17ο αι. και ο απειροστικός λογισμός (Ανάλυση) από τους Newton (1642-1727) και Leibniz, παράλληλα και ανεξάρτητα του ενός από τον άλλον (Bell, 2000). Κατά τον 18ο αιώνα, ο J. Bernoulli (1667-1748) το 1718 καταλήγει σε ένα γενικό ορισμό για τη συνάρτηση και ο Euler (1707-1783) το 1748 στο έργο του "Εισαγωγή στην Απειροστική Ανάλυση[11]", δίνει τον ορισμό της συνάρτησης ως αλγεβρικής έκφρασης (αναλυτική έκφραση) υπονοώντας ότι αναλυτική έκφραση είναι ο αλγεβρικός τύπος (Kleiner, 1989). Επίσης, ο Euler, αντίθετα με μαθηματικούς της εποχής του, θεωρούσε ως συναρτήσεις όχι μόνο αυτές που δίνονταν από ένα μόνο αλγεβρικό τύπο, αλλά και τις πολύκλαδες και αυτές των οποίων η γραφική παράσταση ήταν αυθαίρετα σχεδιασμένη (O'Connor & Robertson, 2005).

[9] Προέρχεται από το λατινικό ρήμα fungor, το οποίο ελληνιστή αποδίδεται με τα ρήματα "εκτελώ", " λειτουργώ".
[10] Τίτλος πρωτότυπου : Methodus tangentium inversa, seu de functionibus.
[11]Τίτλος πρωτότυπου : Introductio in analysin infinitorum

Η πορεία της διαμόρφωσης της έννοιας της συνάρτησης συνεχίστηκε και τον 19ο αι. με το πρόβλημα του Fourier (1758-1830) για τη θεωρία της διάδοσης της θερμότητας το οποίο έθετε ως ερώτημα τι θεωρούμε ότι πρέπει να περιλαμβάνει η έννοια της συνάρτησης (Davis & Hersch,1981). Ο Dirichlet (1805-1859) έδωσε νέο ορισμό για τη συνάρτηση "*Η μεταβλητή y είναι συνάρτηση της μεταβλητής x, ορισμένης σε ένα διάστημα πραγματικών, αν σε κάθε τιμή της μεταβλητής x στο διάστημα αυτό αντιστοιχεί μία συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής y",* εισάγοντας στον ορισμό το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και το μονοσήμαντο της τιμής του *y* χωρίς να θεωρείται αναγκαίος ο προσδιορισμός του τρόπου με τον οποίο εγκαθίσταται αυτή η αντιστοιχία (Kleiner, 1989). Αξιοσημείωτο είναι ότι, το μονοσήμαντο της τιμής, διαχώρισε την αναπαράσταση μιας καμπύλης, η οποία προέρχεται από εξίσωση, από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

Ο Cauchy (1789-1857) το 1821 στο έργο του "Αλγεβρική Ανάλυση[12]" , καταθέτει ορισμό της συνάρτησης και αποπειράται για πρώτη φορά να μελετήσει την έννοια της συνέχειας της συνάρτησης με αυστηρότητα (Χρυσανθόπουλος, 2009; Boyer, 1959). Η ανάπτυξη της τοπολογίας των μετρικών χώρων λειτούργησε καταλυτικά ως προς τη διαπίστωση ότι η συνάρτηση εξαρτάται και από τη δομή του συνόλου στο οποίο ορίζεται, οδηγώντας με αυτό τον τρόπο στο πεδίο ορισμού και στο σύνολο τιμών της συνάρτησης, ενώ η ανάπτυξη της θεωρίας συνόλων τον 20ο αι. διαμόρφωσε περαιτέρω την έννοια της συνάρτησης και εν γένει την έννοια της πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής όπως την έχουμε γνωρίσει και σε προηγούμενη τάξη του λυκείου.



Δάνειο από (Ανδρεαδάκης κ.α., 2014)

Η έμφαση που έδιναν οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί στη "θεωρητική και αξιωματική προσπέλαση της Γεωμετρίας" κυριαρχούσε στο χώρο των μαθηματικών μέχρι των χρόνων της Αναγέννησης, αλλά οι πρωτοπόροι μαθηματικοί του 16ου, 17ου και 18ου αι. βασίζονταν και στην διαίσθηση πέραν της επαγωγικής συλλογιστικής (Apostol, 1962, σ. 10). Η διαίσθηση όμως κρύβει παγίδες και τα μαθηματικά δεν είναι ο μόνος τομέας στον οποίο κάτι που φαίνεται "διαισθητικά" προφανές, να αποδεικνύεται ότι είναι εν τέλει λάθος (Goldstein, 2006, σ. 120-124). Η προσπάθεια που είχε γίνει από πολλούς μαθηματικούς να "μαθηματικοποιήσουν" την καθημερινή αντίληψη (Χρυσανθόπουλος, 2009), οδήγησαν σε εργασίες που αποδείχτηκαν άκαρπες, αλλά και σε ένα μεγάλο αριθμό αυτών που οδήγησαν σε σπουδαίες ανακαλύψεις "χάρη στην εξαιρετική δεξιοτεχνία και την αγχίνοια των πρωτοπόρων αυτών ερευνητών" (Apostol, 1962, σ. 10). Ερμηνεύεται, λοιπόν, η μακροσκελής και με διακυμάνσεις πορεία εξέλιξης της έννοιας της συνάρτησης, εφόσον αφενός η διαίσθηση ασκεί πολύ ισχυρή επίδραση αλλά και αφετέρου, διότι, μετά την αυστηρή θεμελίωση της έννοιας επανέρχεται και συγκρούεται μαζί της (Χρυσανθόπουλος, 2009, σ.171). Κατά τη διάρκεια του 16ου, 17ου και 18ου αι., από διακυμάνσεις χαρακτηρίστηκε και η έννοια της συνέχειας και του ορίου.

Στην προσπάθεια διαμόρφωσης του ορισμού της συνάρτησης, το έργο του Fourier για τη διάδοση της θερμότητας συνετέλεσε και στο διαχωρισμό των συνεχών και ασυνεχών συναρτήσεων όπως τις γνωρίζουμε σήμερα (Apostol, 1962). Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αυτής της εποχής διακατέχονταν από δύο αντιλήψεις καθόσον μέχρι τότε και η έννοια της συνάρτησης προσδιορίζονταν ως αναλυτική έκφραση. Αυτής κατά την οποία η συνάρτηση δεν παρουσιάζει διακοπές και της άλλης που εκφράζει ότι ένα φαινόμενο ακολουθεί τον ίδιο κανόνα της φυσικής (Ανδρεαδάκης κ.α., 2014; Edwards, 1979).

[12] Τίτλος πρωτότυπου : Cours d' Analyse

Ο δρόμος όμως μέχρι να φτάσουμε στον ορισμό του ορίου όπως τον γνωρίζουμε σήμερα, ήταν και εδώ μακρύς. Η μέθοδος της εξάντλησης του Εύδοξου εισήγαγε για πρώτη φορά στην ιστορία των Μαθηματικών την ιδέα του ορίου, η οποία μέχρι και την εποχή του Newton δεν μπορούσε να αποδοθεί με τη λογική αυστηρότητα των Μαθηματικών αλλά παρέμενε βασισμένη στη λογική διαίσθηση και ενόραση.

Ο Cauchy έδωσε τον πρώτο ορισμό του ορίου συνάρτησης στο προαναφερθέν έργο του "Αλγεβρική Ανάλυση" σε αυστηρά μαθηματική μορφή δίνοντας ώθηση στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού (Ανάλυσης), αλλά με εκφράσεις που απαιτούσαν περαιτέρω διαλεύκανση, και εν τέλει, ο Weierstrass (1815-1897) έδωσε τους ορισμούς για το όριο στη σύγχρονη μορφή τους, ενώ ο αυστηρά μαθηματικός ορισμός του ορίου καθόρισε και τον ορισμό της συνέχειας συνάρτησης (Χρυσανθόπουλος, 2009).

Τι περιέχει το κεφάλαιο 1 και πώς αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό.

Στο κεφάλαιο αυτό επαναλαμβάνονται συνοπτικά οι πραγματικοί αριθμοί, οι ιδιότητες των πράξεων, της διάταξης, της απόλυτης τιμής και των ριζών. Όλες αυτές οι έννοιες είναι γνωστές από τις προηγούμενες τάξεις, είναι όμως βασικές για όλα τα επόμενα.

Ακολουθεί ο ορισμός της πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής (πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, εξαρτημένη και ανεξάρτητη μεταβλητή, γραφική παράσταση). Επαναλαμβάνονται οι γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων: $y=\alpha x+\beta$, $y=\dfrac{\alpha}{x}$, $y=\alpha x^2$, απαραίτητο προαπαιτούμενο για τα επόμενα.

Ορίζονται: η ισότητα συναρτήσεων, ο περιορισμός συνάρτησης σε υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, οι πράξεις με συναρτήσεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση, σύνθεση).

Εξετάζεται πώς από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=\mathrm{f}(x)$, $x\in A$, μπορούμε να πάρουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$y=\mathrm{f}(x)\pm c,\ c>0,\ y=\mathrm{f}(x\pm c)\ \ c>0,\ y=\mathrm{f}(cx),\ 0<c<1 \text{ ή } c>1.$$

Κεντρική έννοια του κεφαλαίου είναι η έννοια του ορίου, πανταχού παρούσα σε ότι ακολουθήσει.

Το όριο είναι ένας αριθμός, στον οποίο μπορούν να πλησιάζουν οι τιμές μιας συνάρτησης όσο κοντά θέλουμε. Το όριο μπορεί να μην είναι πεπερασμένος αριθμός, μπορεί να είναι άπειρο, μπορεί ακόμα και να μην υπάρχει!

Μετά από μια διαισθητική παρουσίαση της έννοιας του πεπερασμένου ορίου στο x_0 (χρήση πινάκων τιμών και -κυρίως- γραφικών παραστάσεων με ΤΠΕ) παρουσιάζονται οι ιδιότητες του ορίου (όριο και διάταξη, όριο και πράξεις, όριο σύνθετης συνάρτησης). Ακολουθεί η διαισθητική παρουσίαση του μη πεπερασμένου ορίου στο x_0, οι ιδιότητες του μη πεπερασμένου ορίου (όριο και διάταξη, όριο και πράξεις) και η έννοια της κατακόρυφης ασύμπτωτης.

Αφήνοντας κατά μέρος προχωρημένες περιπτώσεις (συνάρτηση Dirichlet, συνάρτηση Riemann, συνάρτηση Weierstrass κλπ) καθώς και τις συναρτήσεις που ορίζονται σε μεμονωμένα σημεία, για την μετά το Λύκειο εκπαίδευση περνάμε στη βασική έννοια της συνέχειας. Συνεχής είναι μια συνάρτηση που σε κάθε διάστημα του πεδίου ορισμού της μπορεί να σχεδιαστεί «μονοκοντυλιά». Έτσι, μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της (εσωτερικό σημείο ή άκρο διαστήματος) αν και μόνο αν: $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Όλες οι πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων δίνουν συνεχή συνάρτηση.

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο R.

Οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους που είναι το R εκτός των ριζών του πολυωνύμου που είναι στον παρανομαστή, όπου δεν ορίζονται. Την συνέχεια των τριγωνομετρικών των εκθετικών και λογαριθμικών θα την εξετάσουμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται τέλος, η συμπεριφορά συναρτήσεων κοντά στο $+\infty$ (όριο στο $+\infty$) ή κοντά στο $-\infty$ (όριο στο $-\infty$) και οι έννοιες της οριζόντιας και της πλάγιας ασύμπτωτης.

Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες και έννοιες του κεφαλαίου 1.

Πραγματικός αριθμός

Σχόλιο: Κάθε πραγματικός αριθμός έχει μια δεκαδική αναπαράσταση. Η δεκαδική αναπαράσταση μπορεί να έχει τρεις μορφές:

Να είναι τερματιζόμενη, πχ: 1,25

Να είναι άπειρη, αλλά περιοδική, πχ: 0,272727… , 1,99999…

Να είναι άπειρη και μη περιοδική, πχ: 0,123456789101112… , π=3,14159…

Οι ρητοί αριθμοί έχουν τερματιζόμενη ή περιοδική αναπαράσταση. Οι άρρητοι έχουν άπειρη, μη περιοδική αναπαράσταση. Πάντα μπορούμε να προσεγγίσουμε έναν άρρητο με μια ακολουθία ρητών αριθμών, με όση ακρίβεια θέλουμε. Για ποιο λόγο λοιπόν ασχολούμαστε με τους άρρητους; Οι άρρητοι έχουν μεγάλο θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον και είναι αναγκαίοι για να καλύψουν τα κενά που αφήνουν στην ευθεία των αριθμών τα ρητά σημεία. Έτσι το σύνολο των πραγματικών αριθμών γίνεται πλήρες. Γίνεται ένα αριθμητικό συνεχές.

- Το 1737 ο Euler απέδειξε ότι οι αριθμοί e και e^2 είναι άρρητοι.
- Το 1768 ο Γερμανοελβετός μαθηματικός Johann Heinrich Lambert απέδειξε ότι ο π είναι άρρητος.

Απόλυτη τιμή

Μέσω αυτής της έννοιας εκφράζεται αλγεβρικά η απόσταση δυο σημείων του άξονα των πραγματικών αριθμών.

Συνάρτηση

«Η συνειδητοποίηση της έννοιας της συνάρτησης εξελίχθηκε με μεγάλη βραδύτητα και ήλθε από πολλές κατευθύνσεις. Μια τέτοια κατεύθυνση ήταν η ανάγκη διαχωρισμού γνωστών παραμέτρων και άγνωστων μεταβλητών σε μια αλγεβρική εξίσωση. Η συστηματοποίηση αυτού του διαχωρισμού έγινε από τον François Viète (1540-1603) και συνέβαλε σημαντικά στη μετάβαση που έγινε κατά τον 17^{o} αιώνα από την μελέτη ειδικών προβλημάτων και καταστάσεων στη διερεύνηση γενικών μεθόδων. Ο René Descartes (1596-1650) αντιστοίχιζε γεωμετρικά προβλήματα σε αλγεβρικές εξισώσεις τις οποίες προσπαθούσε να επιλύσει. Αντίστροφα ο Pierre de Fermat (1601-1665) ξεκινούσε από μια αλγεβρική εξίσωση και απεδείκνυε τις γεωμετρικές ιδιότητες της καμπύλης που αντιστοιχούσε σε αυτήν. Έτσι η αναλυτική γεωμετρία των δύο αυτών ανδρών είχε ως αποτέλεσμα την κατανόηση της σημασίας της **μεταβλητής**, βασικού συστατικού της έννοιας της συνάρτησης και την αύξηση των γεωμετρικών καμπύλων που έγιναν τόσες όσες και οι αλγεβρικές εξισώσεις. Η έννοια της συνάρτησης που δημιουργείται από τους Descartes, Fermat, Viète είναι η υπολογιστική, στενή μορφή της, αυτή δηλαδή που δίνεται με ένα συγκεκριμένο τύπο ή με έναν αλγόριθμο υπολογισμού της. Η κίνηση ενός σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου και παρόμοιες έννοιες κινητικής ή φυσικής μεταβολής, καθώς και η ανάπτυξη της Ανάλυσης κατέληξαν στη γενική γεωμετρική έννοια της συνάρτησης. Αργότερα ο Euler φτάνει σε έναν ευρύτερο ορισμό της συνάρτησης (δηλαδή αν το x συμβολίζει μια μεταβλητή ποσότητα, τότε όλες οι ποσότητες που με οποιονδήποτε τρόπο καθορίζονται από αυτήν, λέγονται συναρτήσεις του x). Η μελέτη των λύσεων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους δίνει ως λύσεις συναρτήσεις που δεν δίνονταν από έναν αναλυτικό τύπο. Ο Joseph Fourier (1768-1830) στη μελέτη αναπαράστασης γενικών συναρτήσεων με τριγωνομετρικές σειρές, κατέληξε στην ανάγκη διεύρυνσης της έννοιας της συνάρτησης «… Η συνάρτηση $\mathrm{f}(x)$ παριστά μία διαδοχή τιμών που δίνονται από την τετμημένη x, και για τις οποίες υπάρχει ένας ίσος αριθμός τεταγμένων $\mathrm{f}(x)$… Δεν υποθέτουμε ότι οι τεταγμένες υπόκεινται σε έναν κοινό κανόνα. Ακολουθούν η μία την άλλη, με οποιονδήποτε τρόπο και η κάθε μία ορίζεται ως να ήταν μοναδική ποσότητα. Συγκεκριμένες ανάγκες οδήγησαν στη δημιουργία της έννοιας της συνάρτησης στη σημερινή της μορφή» (Σ. Νεγρεπόντης, Σ Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, Απειροστικός Λογισμός, τ. Ι, σελ 123επ.)

Όριο συνάρτησης

Τονίζουμε ότι η έννοια του ορίου είναι έννοια τοπική! Αυτό σημαίνει ότι, για να έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου στο $x_0 \in R$ είναι απαραίτητο και αρκεί να ορίζεται η συνάρτηση όσο θέλουμε κοντά στο $x_0 \in R$ για παράδειγμα στο σύνολο $\left(x_0 - 10^{-100}, x_0\right) \cup \left(x_o, x_0 + 10^{-100}\right)$ ή μόνο αριστερά ή μόνο δεξιά του x_0. Το αν ορίζεται ή όχι στο x_0 δεν ενδιαφέρει. Για την αναζήτηση του ορίου στο $+\infty$ είναι απαραίτητο να ορίζεται η συνάρτηση σε διάστημα της μορφής $\left(\alpha, +\infty\right)$. Όμοια για το $-\infty$

Συνέχεια

«Η συνάρτηση είναι μια γενική έννοια. Ορισμένες όμως συνθήκες κανονικότητας και ομαλότητας ορίζουν κλάσεις συναρτήσεων με ιδιότητες ιδιαίτερα χρήσιμες και επιθυμητές για την ανάπτυξη της Ανάλυσης» (Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, Απειροστικός Λογισμός 1987, τ. Ι, σελ 138επ.)

Σημαντικότατη τέτοια συνθήκη είναι η συνέχεια. Μια καμπύλη είναι συνεχής αν τη διατρέχουμε με το χέρι μας πάνω σε ένα χαρτί χωρίς να σηκώσουμε το χέρι μας. Η έννοια της συνέχειας σε σημείο του πεδίου ορισμού είναι τοπική. Έτσι μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε θετικό αριθμό ε μπορούμε να βρούμε έναν άλλο θετικό αριθμό δ (που εξαρτάται από το x_0 και από την επιλογή του ε) ώστε να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < ε$ για κάθε $x \in A$ και $|x - x_0| < δ$.

Ποιες δραστηριότητες ή ερωτήσεις οδηγούν στην κατανόηση των βασικών εννοιών και των διαδικασιών του κεφαλαίου 1; Ποια είναι τα βασικά ερωτήματα που θα πρέπει να απαντούν οι μαθητές;

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1) Ποιοί είναι οι θετικοί ακέραιοι;

2) Ποιοί είναι οι ακέραιοι;

3) Ποιοί αριθμοί λέγονται ρητοί;

4) Πότε ένας ρητός γράφεται ως δεκαδικός και πότε ως περιοδικός δεκαδικός αριθμός;

5) Είναι το άθροισμα και το γινόμενο ρητών πάντα ρητός;

6) Ποιός είναι ο ελάχιστος θετικός ρητός; Μεταξύ δύο οποιοδήποτε ρητών μπορούμε να βρούμε και άλλο ρητό. Μπορείτε να δώσετε μια απόδειξη;

7) Υπάρχουν αριθμοί που δεν είναι ρητοί; Πως λέγονται; Αποδείξτε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Κατασκευάστε τον $\sqrt{2}$ με κανόνα και διαβήτη και τοποθετήστε τον στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Ποιους άλλους άρρητους μπορείτε να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη;

8) Ποιός είναι ο άρρητος π και ποιος είναι ο άρρητος e ; Κατασκευάζονται αυτοί οι άρρητοι με κανόνα και διαβήτη;

9) Ποιες βασικές πράξεις ορίζουμε στο R και ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες των πράξεων; Πώς ορίζεται η διάταξη στο R και ποιες είναι οι ιδιότητες της διάταξης;

10) Πώς ορίζεται η δύναμη με βάση τον πραγματικό αριθμό α και εκθέτη α) τον θετικό ακέραιο ν; β) τον ακέραιο ν; γ) τον ρητό ρ; Ποιες είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων;

11) Πώς συμβολίζουμε την απόσταση ενός πραγματικού αριθμού x από το 0; Ποιες είναι οι ιδιότητες της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού;

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1) Ένα κινητό ξεκινάει από την αρχή του άξονα και κινείται προς τα αριστερά με σταθερή ταχύτητα μέτρου 30m/sec για 5 sec.

α) Να εκφράσετε την ταχύτητα v του κινητού ως συνάρτηση του χρόνου t. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών της συνάρτησης; Να κάνετε την γραφική παράσταση.

β) Να εκφράσετε τη θέση x(t) του κινητού ως συνάρτηση του χρόνου t. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών; Να κάνετε γραφική παράσταση.

2) Δώστε τον ορισμό της πραγματικής συνάρτησης με μια πραγματική μεταβλητή.

Αν $f:A\to R\left(A\subseteq R\right)$ είναι μια συνάρτηση πως λέγεται το σύνολο A ; Πως ορίζεται το σύνολο τιμών της f και πως συμβολίζεται; Τι λέγεται γραφική παράσταση της συνάρτησης f; Ποια είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποια η εξαρτημένη;

3) Σε κάθε μία από τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις, f και g είναι ίσες και αν δεν είναι ίσες να βρείτε το μέγιστο δυνατό υποσύνολο του R, στο οποίο αυτές είναι ίσες.

α) $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+1}$ και $g\left(x\right)=\sqrt{x+1}-1$

β) $f\left(x\right)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$ και $g\left(x\right)=\sqrt{x^2-x}$

γ) $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x^2-x-2}$ και $g\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$

4) Ποιες συναρτήσεις λέγονται πολυωνυμικές και ποιες ρητές;

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1) Αν $f:A\to R$ και $g:B\to R$ είναι δύο συναρτήσεις με $A\cap B\neq\varnothing$. Πως ορίζονται οι συναρτήσεις $f+g, fg, f-g, \lambda f$ με $\lambda\in R$, f^{ν} με ν θετικό ακέραιο; Πώς και πότε ορίζεται η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$;

2) Αν $f\left(x\right)=x^2, x\in\left[0,2\right]$ και $g\left(x\right)=x+1, x\in R$ βρείτε τη συνάρτηση $f\circ g$ και σχεδιάστε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $f\circ g$ και g. Δικαιολογείστε γιατί η γραφική παράσταση της $f\circ g$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση κατά ένα προς τα αριστερά της γραφικής παράστασης της f. Ποιο γενικότερο συμπέρασμα βγαίνει για τις γραφικές παραστάσεις f και h με $h\left(x\right)=f\left(x+c\right)$, $c>0$;

3) Λύστε τη παραπάνω άσκηση παίρνοντας α) $g(x)=x-1, x\in R$ β) $g(x)=2x, x\in R$ γ) $g(x)=2x+1, x\in R$

4) Πως μετασχηματίζεται η γραφική παράσταση της $y = f(x), x\in A$ στις παρακάτω περιπτώσεις

α) $y=f(x)+c, c>0$ β) $y=f(x)-c, c>0$ γ) $y=-f(x), x\in A$ δ) $y=|f(x)|, x\in A$.

ΟΡΙΟ ΣΤΟ *x_0*

1) Αν $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}, x\neq 1$

α) Συμπληρώστε τους παρακάτω πίνακες τιμών.

x	0,8	0,9	0,99	0,999	0,9999	…	$x\to 1^-$
$f(x)$							$f(x)\to$

x	1,2	1,1	1,01	1,001	1,0001	…	$x\to 1^+$
$f(x)$							$f(x)\to$

β) Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να επιβεβαιώσετε τα προηγούμενα συμπεράσματα.

γ) Μπορούμε να κάνουμε την απόσταση των αριθμών $f(x)$ και 2 όσο θέλουμε μικρή και για ποια x από το πεδίο ορισμού της μπορεί να γίνει αυτό;

Για παράδειγμα αν η απόσταση των αριθμών $f(x)$ και 2 θέλουμε να είναι μικρότερη του 10^{-3}, έχουμε:

$$|f(x)-2|<10^{-3} \Leftrightarrow |x-1|<10^{-3} \text{ και } x\neq 1 \Leftrightarrow x\in(0{,}999,1)\cup(1,1{,}001)$$

Επαναλάβατε την ίδια διαδικασία για $|f(x)-2|<10^{-4}$, κλπ.

<u>Συμπέρασμα:</u>

Θα λέμε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ αν για κάθε ε>0 μπορούμε να βρούμε δ>0 ώστε να ισχύει $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ για κάθε $x\neq x_0$ και $|x-x_0|<\delta$.

<u>Σχόλιο:</u> Ανάλογες δραστηριότητες μπορούν να εισάγουν τους μαθητές μας στο μη πεπερασμένο όριο στο x_0 και στο όριο στο άπειρο. Αναμφισβήτητα η χρήση Τ.Π.Ε για τις γραφικές παραστάσεις διευκολύνει την διαδικασία.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΤΟ x_0

Για τις παρακάτω συναρτήσεις να υπολογιστούν:

1) $f(x)=\begin{cases} x-1 & , x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & , x>0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x), f(0)$

2) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & , x\ne 0 \\ 2 & , x=0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x), f(0)$

3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & , x\ne 0 \\ 1 & , x=0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to 0-} f(x)\ , f(0)$

Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; Είναι οι προηγούμενες συναρτήσεις συνεχείς στο x_0 =0; Κατασκευάστε δυο δίκλαδες συναρτήσεις συνεχείς στο x_0 =0.

Οι πολυωνυμικές και οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

Ποια είναι τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα μετά από την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου 1;

Μετά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου 1 οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί:

Μ1. Να κάνουν χρήση της έννοιας του πραγματικού αριθμού, των βασικών ιδιοτήτων των πράξεων, της διάταξης, της απόλυτης τιμής.

Μ2. Να κάνουν χρήση της έννοιας της συνάρτησης και των βασικών χαρακτηριστικών της (μονοτονία, ακρότατα κ.λπ.) στην επίλυση προβλημάτων, όπως:

1) Οι ανθρωπολόγοι εκτιμούν ότι το ύψος του ανθρώπου δίνεται από τις συναρτήσεις:

Α(x) = 2,89x + 70,64 (για τους άνδρες) και Γ(x) = 2,75x + 71,48 (για τις γυναίκες) όπου x σε εκατοστά, το μήκος του βραχίονα. Σε μία ανασκαφή βρέθηκε ένα οστό από βραχίονα μήκους 0,45 m.

α) Αν προέρχεται από άνδρα ποιο ήταν το ύψος του; β) Αν προέρχεται από γυναίκα ποιο ήταν το ύψος της;

2) Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = 1, ΑΓ = 3 και ΓΔ =2. Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε(x) του χωρίου ΑΝΜ ως συνάρτηση του x = AM, όταν το Μ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ, να κάνετε τη γραφική παράσταση της Ε(x), να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα.

3) Δ1 και Δ2 του Π.Σ.

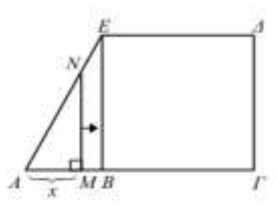
Μ3. Να ελέγχουν αν δύο δεδομένες συναρτήσεις είναι ίσες ή μια από αυτές περιορισμός της άλλης όπως:

1) $f(x)=\frac{x}{x^3}$, $g(x)=\frac{x^2}{x^4}$ 2) $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x(x-1)}$

3) Δ3 του Π.Σ.

Μ4. Να εκτελούν πράξεις μεταξύ συναρτήσεων όπως:

Αν $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, $g(x)=\sqrt{x}$ να υπολογίσετε τις $f\circ g$ και $g\circ f$



Μ5. Να αναλύουν μια σύνθετη συνάρτηση σε απλές όπως:

Αν $F(x)=\left(\frac{x^2+x+1}{x-1}\right)^3$ τότε $F(x)=\ldots$ όπου $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x-1}$ και $g(x)=x^3$

Μ6. Να περιγράφουν τη σχέση μεταξύ γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων που προκύπτουν από γνωστούς μετασχηματισμούς καθώς και το είδος του μετασχηματισμού όπως:

1) Η γραφική παράσταση της $g(x)=(x-2)^2+2$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^2$ κατά 2 δεξιά και μετά κατά 2 πάνω.

2) Δ4 του Π.Σ.

Μ7. Να υπολογίζουν όρια πολυωνυμικών και ρητών συναρτήσεων όπως:

1) Αν $f(x)=x^3-5x+7$, να υπολογιστούν τα: $\lim\limits_{x\to 1} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

2) Αν $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$, να υπολογιστούν τα: $\lim\limits_{x\to 1} f(x), \lim\limits_{x\to 3} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x), \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

Μ8. Να αποδεικνύουν την μη ύπαρξη ορίου όπως:

1) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^3}$ στο 2 2) f(x)=$\dfrac{|x-2|}{x-2}$ στο 2 3) Δ5 του Π.Σ.

Μ9. Να υπολογίζουν όρια σύνθετων συναρτήσεων όπως:

Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=6$ να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x-2)}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x-3)}{x^2-9}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(4x)}{x}$.

Μ10. Να υπολογίζουν όρια συναρτήσεων στην περίπτωση που η άμεση εφαρμογή των ιδιοτήτων των ορίων καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή όπως:

1) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-3)$; Εξηγήστε με βάση την τοπικότητα της έννοιας του ορίου.

2) Ισχύει $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+3x-2}+2x\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-x(\sqrt[3]{\left|\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right|}-2)\right)$; Εξηγήστε με βάση την τοπικότητα της έννοιας του ορίου.

Μ11. Να υπολογίζουν τις οριζόντιες, πλάγιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης όπως: 1) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$, $f(x)=\dfrac{x-|x+2|}{x-1}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$, $f(x)=\dfrac{x^2+5x-2}{x-1}$, $f(x)=\sqrt{x^2-6x+5}$

2) Δ6 και Δ8 του Π.Σ.

Μ12. Να εντοπίζουν τα πιθανά σημεία ασυνέχειας μιας δεδομένης συνάρτησης και να αποδεικνύουν τους ισχυρισμούς τους όπως:

1) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3, x\le 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, x>1 \end{cases}$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x+7}-3} & , x>2 \\ x^3+4 & , x\le 2 \end{cases}$

2) Δ7 του Π.Σ.

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Οι μαθητές πολλές φορές θεωρούν ότι ισχύουν και τα αντίστροφα των θεωρημάτων ή ότι η άρνηση της υπόθεσης ενός θεωρήματος συνεπάγεται την άρνηση του συμπεράσματος. Για το λόγο αυτό πρέπει να επιστήσουμε την προσοχή τους στην πιστή και προσεκτική εφαρμογή των θεωρημάτων. Κατά περίπτωση, για να αντιπαρατεθούν με ενδεχόμενες πλάνες τους, πρέπει να χρησιμοποιούμε αντιπαραδείγματα

Ποια σημεία του κεφαλαίου 1 χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής;

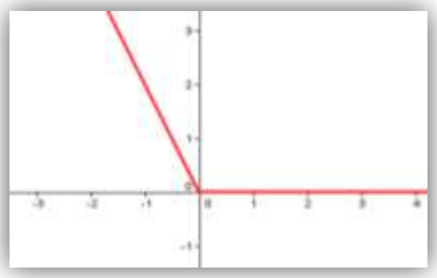
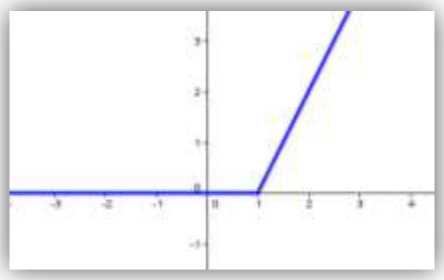
Ακολουθούν κάποιες συνήθεις παρανοήσεις των μαθητών και προτείνεται ως ένας τρόπος αντιμετώπισής τους η χρήση αντιπαραδειγμάτων. Με τα παρακάτω αντιπαραδείγματα επιδιώκουμε να αποτρέψουμε τους μαθητές μας από του να παρανοήσουν τη σημασία των θεωρημάτων και του πλαισίου εφαρμογών τους. Αφετέρου τους προτρέπουμε να φτιάξουν δικά τους αντιπαραδείγματα, να συνεργαστούν μεταξύ τους, ώστε η τέρψη της ανακάλυψης και η λογική αυστηρότητα που διέπουν τα Μαθηματικά να κυριαρχήσουν στις αντιλήψεις τους. Αυτή την τακτική ακολουθούμε και σε όλα τα επόμενα κεφάλαια.

1) Οι μαθητές μεταφέρουν την ιδιότητα του γινομένου δυο πραγματικών αριθμών $\alpha\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ *ή* $\beta=0$ στις συναρτήσεις, θεωρώντας ότι η ισότητα $f(x)g(x)=0$ συνεπάγεται ότι μια τουλάχιστον από τις συναρτήσεις είναι η μηδενική συνάρτηση. Αν $\mathrm{f(x)\,g(x)} = 0$ για κάθε $x \in R$, τότε $\mathrm{f}(x)=0$ για κάθε $\mathrm{x} \in R$ ή $\mathrm{g(x)}=0$ για κάθε $x \in R$

<u>Αντιπαράδειγμα</u>

Αν $f(x)=|x|-x=\begin{cases} -2x, & \text{αν } x<0 \\ 0, & \text{αν } x\ge 0 \end{cases}$ και $g(x)=|x-1|+x-1=\begin{cases} 0, & \text{αν } x<1 \\ 2x-2, & \text{αν } x\ge 1 \end{cases}$, τότε

$\mathrm{f(x)\,g(x)}=0$ για κάθε $x \in R$, ενώ δεν ισχύει $f(\mathrm{x})=0$ για κάθε x στο R, ούτε $g(\mathrm{x})=0$ για κάθε x στο R.

2) Οι μαθητές μεταφέρουν τη λύση της εξίσωσης $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ *ή* $x = -1$ στο R στις συναρτήσεις, γράφοντας ότι $f^2(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1$ *ή* $f(x) = -1$

Αν $f^2(x) = 1$ για κάθε $x \in R$, τότε $f(x) = 1$ για κάθε $x \in R$ ή $f(x) = -1$ για κάθε $x \in R$

Αντιπαράδειγμα

Αν $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, τότε $f^2(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, ενώ **δεν** ισχύει $f(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, ούτε $f(x) = -1$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$

3) Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$, τότε θα ισχύει $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) < \lim\limits_{x \to \infty} g(x)$

Αντιπαράδειγμα

Αν $f(x) = -\frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$, $g(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$ τότε $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ενώ ισχύει:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

4) Αν δεν υπάρχουν τα όρια των f και g στο x_0, τότε δεν υπάρχει και το όριο της συνάρτησης $f + g$, ούτε και το όριο της συνάρτησης $f \cdot g$ στο x_0.

Αντιπαράδειγμα

Αν $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ και $g(x) = -f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$, τότε:

$(f + g)(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$ και $(f \cdot g)(x) = -1$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, οπότε:

$\lim\limits_{x \to 0}(f + g)(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to 0}(f \cdot g)(x) = -1$

5) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και δεν υπάρχει το όριο της g στο x_0 , τότε δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης $\mathrm{f}+g$ στο x_0 .

<u>Αντιπαράδειγμα</u>

Αν $\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0$ και $\mathrm{g}(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, τότε

$\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{f}(x)=+\infty$

δεν υπάρχει το όριο της g στο 0, ενώ:

$$h(x)=(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}$$

Οπότε: $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{h}(\mathrm{x})=+\infty$

<u>Προσοχή</u>: Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\mathrm{f}(\mathrm{x})=l\ (l\in R)$, τότε πράγματι δεν υπάρχει το όριο της $\mathrm{f}+g$ στο x_0, γιατί,

αν υπήρχε θα ήταν m, $+\infty$ ή $-\infty$ οπότε $\lim\limits_{x\to x_0} g(\mathrm{x})=\lim\limits_{x\to x_0}[(\mathrm{f}(\mathrm{x})+g(\mathrm{x}))-\mathrm{f}(\mathrm{x})]=\begin{cases} m-l\in R \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$

6) Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και δεν υπάρχει το όριο της g στο x_0, τότε δεν υπάρχει το όριο της $\mathrm{f}g$ στο x_0.

<u>Αντιπαράδειγμα 1ο</u>

$\mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{x},\mathrm{x}\in R$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$

$g(\mathrm{x})=\frac{|\mathrm{x}|}{\mathrm{x}},\mathrm{x}\neq 0$ Δεν υπάρχει το όριο της g στο 0.

$(\mathrm{f}\,g)(\mathrm{x})=|\mathrm{x}|,\mathrm{x}\neq 0$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{f}\,g)(\mathrm{x})=0$

7) Αν $|\mathrm{f}(\mathrm{x})|$ συνεχής στο R, τότε $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ συνεχής στο R.

<u>Αντιπαράδειγμα</u>

$\mathrm{f}(x)=\begin{cases} -1 & ,x\leq 0 \\ 1 & ,x>0 \end{cases}$ Δεν είναι συνεχής στο R γιατί δεν είναι συνεχής στο 0

$|f(x)| = 1, x \in R$, είναι συνεχής στο R.

8) Αν f, g δεν είναι συνεχείς στο x_0 τότε και η συνάρτηση $f + g$ δεν είναι συνεχής στο x_0.

Αντιπαράδειγμα

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x = 2 \\ -\dfrac{1}{x-2} & , x \neq 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & , x = 2 \\ x + \dfrac{1}{x-2} & , x \neq 2 \end{cases}$$

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x, x \in R$ (συνεχής)

9) Αν f, g δεν είναι συνεχείς στο x_0, τότε και η συνάρτηση fg δεν είναι συνεχής στο x_0.

Αντιπαράδειγμα

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 , & x < 0 \\ x + 2 , & x \geq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x + 2 , & x < 0 \\ x - 2 , & x \geq 0 \end{cases}$$

$(f\, g)(x) = x^2 - 4, x \in R$

Σημείωση: Τα παραδείγματα 10 και 11 να γίνουν στο κεφάλαιο 4

10) Αν η ευθεία $y = l$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, τότε η ευθεία αυτή και η γραφική παράσταση δεν έχουν κοινά σημεία.

Αντιπαράδειγμα

$f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}, x \neq 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in Z$$

11) Αν η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, τότε η ευθεία αυτή και η γραφική παράσταση δεν έχουν κοινά σημεία.

Αντιπαράδειγμα

$$f(x)=\begin{cases}\ln x & , x>0\\ x^2+1 & , x\le 0\end{cases}$$

Η ευθεία $x=0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f και παρουσιάζει με αυτήν κοινό σημείο, το $(0,1)$.

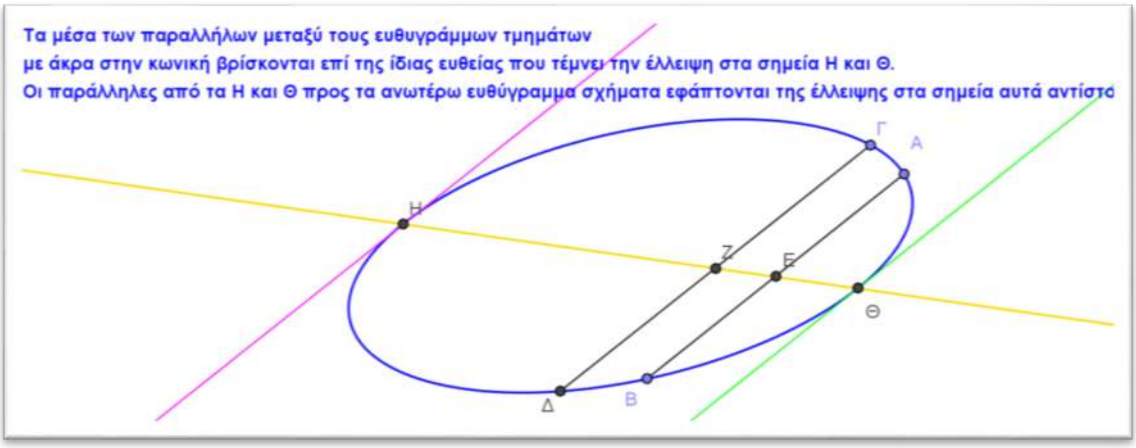
12) Αν $g(x_0)=0$, τότε η ρητή συνάρτηση $R(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=x_0$.

Αντιπαράδειγμα

$$R(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

Εισαγωγή

Από την έννοια της παραγώγου αναδεικνύεται η κεντρική ιδέα του διαφορικού λογισμού (Apostol, 1962, σ. 113), ο οποίος μαζί με τον ολοκληρωτικό λογισμό αποτελούν δύο κύριους κλάδους της ανάλυσης και θεωρείται ότι συνθέτουν μαζί το πιο ισχυρό μέχρι σήμερα εργαλείο για την εξερεύνηση του φυσικού κόσμου (Bell, 2000, τ. Ι σ. 48). Οι ρίζες της έννοιας της παραγώγου εντοπίζονται στην αναζήτηση της λύσης ενός γεωμετρικού προβλήματος, αυτού της χάραξης της εφαπτομένης σε σημείο μιας καμπύλης. Αν είναι γνωστή η διεύθυνση της εφαπτόμενης σε ένα σημείο μιας καμπύλης τότε μπορεί να κατασκευασθεί η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό.



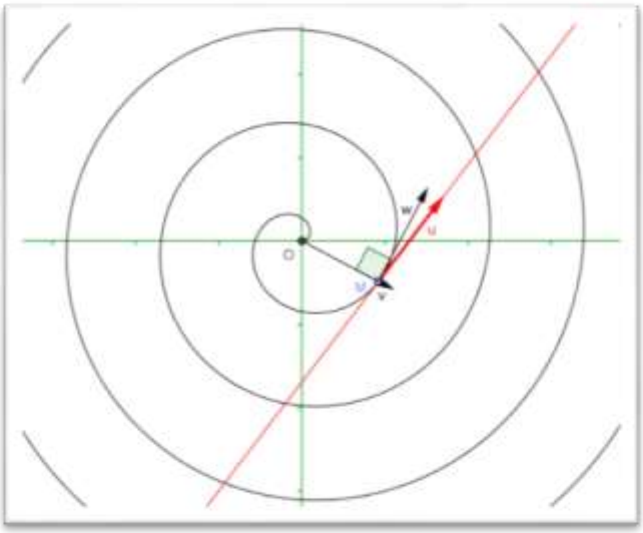
Εικόνα 2: Εφαπτόμενες της έλλειψης

Ο Αρχιμήδης στη πραγματεία του "Περί Ελίκων" έδωσε με μεθόδους μηχανικής τον ορισμό της "έλικας", επί των ημερών μας της "γραμμικής σπείρας", και παράθεσε τρόπο προσδιορισμού της εφαπτομένης της έλικας σε τυχαίο σημείο της, τον οποίο απέδειξε γεωμετρικά (Heath, 2001, τ. ΙΙ, σ.83-94). Επίσης, τρόπος κατασκευής της εφαπτομένης κωνικών τομών σε σημείο τους περιγράφεται από τον Απολλώνιο στα "Κωνικά" (Heath, 2001 ; Clawson, 2008) σύμφωνα με τις αρχές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (εικ. 6).

Και ενώ η εξέλιξη των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα είχε συνδεθεί κυρίως με φιλοσοφικά και θεωρητικά κίνητρα προς αναζήτηση της εσωτερικής αρμονίας. Αντίθετα, τα κίνητρα για την εξέλιξη των μαθηματικών από τον 17ο αιώνα και εντεύθεν, προσανατολίζονταν στην διάνοιξη οδών προς την ανάπτυξη της τεχνολογίας, με αποτέλεσμα οι μέθοδοι της Ευκλείδειας Γεωμετρίας να μήν επαρκούν για τη μελέτη των καμπυλών. Το γεγονός αυτό οδήγησε στην ανάγκη αναζήτησης νέων ορισμών, όπως αυτού της εφαπτομένης σε σημείο καμπύλης, δηλαδή την ανάγκη γενίκευσης του ορισμού της εφαπτομένης του κύκλου σε τυχούσα πλέον καμπύλη.

Ο Descartes (1596-1650), εξελληνισμένα Καρτέσιος, ανακάλυψε την Αναλυτική (Καρτεσιανή) Γεωμετρία[13], την οποία έδωσε στη δημοσιότητα το 1637 με το έργο του "Μέθοδος", ενώ ανεξάρτητα από τον Καρτέσιο, ο Fermat (1601-1665), επίσης επινόησε τη μέθοδο της Αναλυτικής (Καρτεσιανής) Γεωμετρίας, καθενός το έργο, προφανώς με διαφοροποιήσεις του ενός από το άλλο, κατάλληλο εργαλείο γεωμετρικής απόδειξης (Bell, 2000, τ. Ι σ. 7-9). Ο Καρτέσιος, για την εύρεση της εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο της, χρησιμοποίησε την Αναλυτική Γεωμετρία όμως ,ο Fermat, προχωρώντας παραπέρα για τον υπολογισμό των σημείων ειδικών καμπυλών των οποίων οι τεταγμένες λαμβάνουν τοπικά μέγιστες ή ελάχιστες τιμές, παρατήρησε ότι στα σημεία αυτά οι εφαπτόμενες είναι οριζόντιες. Το πρόβλημα της αναζήτησης των σημείων στα οποία μια καμπύλη παρουσιάζει τοπικά ακρότατα έδειχνε να έχει άμεση σχέση με την εύρεση των οριζόντιων εφαπτομένων της καμπύλης ή γενικότερα με τον προσδιορισμό της εφαπτομένης σε τυχαίο σημείο μιας καμπύλης, γεγονός που τον οδήγησε στην ανακάλυψη κάποιων βασικών ιδεών για τη σύλληψη της έννοιας της παραγώγου (Apostol, 1962, σ. 113-114).

Παράλληλα, ο Barrow (1630-1677), από τις έδρες των Αρχαίων Ελληνικών και της Γεωμετρίας, το 1660 στο Cambridge, είχε αναπτύξει το πρόβλημα της εφαπτομένης με το δικό του τρόπο χρησιμοποιώντας γνώσεις Μαθηματικών έως και την εποχή του και κάνοντας τις δικές του παραδοχές, οι οποίες ναι μεν λειτουργούσαν, αλλά χωρίς να έχει αποδείξει ότι μπορούν να λειτουργούν (Clawson, 2008, σ. 364). Το πρόβλημα της εφαπτομένης σε σημείο καμπύλης έλυσε ο Νεύτων (1642-1727) το 1665 αφού είχε αναπτύξει αρκετά τις αρχές του απειροστικού λογισμού (Ανάλυσης) και ανακαλύψει το γενικευμένο διωνυμικό θεώρημα, όντας φοιτητής του Barrow από το 1661 (Bell, 2000, τ. Ι σ. 152). Όπως αναφέρει σε σημείωσή του ο ίδιος ο Νεύτων, και την οποία ανακάλυψε ο Louis Trenchard Moore, ανέπτυξε το διαφορικό λογισμό με βάση τη μέθοδο του Fermat για τον σχεδιασμό των εφαπτομένων. Παράλληλα με τον Νεύτωνα, και εργαζόμενος ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, ο Leibniz (1646-1716) ανέπτυξε, επίσης, τη θεωρία του διαφορικού λογισμού με συμβολισμούς διαφορετικούς αυτών του Νεύτωνα.



Εικόνα 7: Η ταχύτητα u κινητού στην έλικα του Αρχιμήδη ως σύνθεση 2 κινήσεων

Επί των ημερών μας, ακολουθούμε τις θεωρίες των Νεύτωνα και Leibniz ενώ, έχουν υιοθετηθεί από την ευρύτερη επιστημονική κοινότητα παρεμφερείς συμβολισμοί με αυτούς του Leibniz, είτε γιατί η

[13] Αξιοσημείωτο είναι ότι ο Απολλώνιος στα "Κωνικά" ανακάλυψε θεμελιώδεις γεωμετρικές ιδιότητες, ισοδύναμες με εξισώσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες (Heath, 2001, τ. ΙΙ, σ.179-180).

δημοσίευσή του προηγήθηκε, είτε γιατί είναι περισσότερο εύχρηστοι, αυτών του Νεύτωνα (Bell, 2000, τ. Ι). Ειδικότερα, στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς του Lagrange (1736-1813) τους οποίους εισήγαγε πολύ αργότερα, στα τέλη του 18ου αιώνα, παριστώντας την παράγωγο μιας συνάρτησης f με f' και την τιμή της στο σημείο x_0 με $f'(x_0)$, τη δεύτερη παράγωγο με f'', ... την νιοστή παράγωγο με $f^{(\nu)}$ και αντίστοιχα συμβολίζοντας τις τιμές τους.

Γεωμετρικά διατυπωμένο, το βασικό πρόβλημα του διαφορικού λογισμού αποτελεί η εύρεση της διεύθυνσης της εφαπτομένης σε ένα σημείο μιας καμπύλης. Δικαιώνοντας, όμως, τον Αρχιμήδη ο οποίος σύμφωνα με τον Heath (2001) ανάφερε ότι «πρώτα γίνονται σαφή σε μένα μέσω μιας μηχανικής μεθόδου, παρότι έπειτα πρέπει να παρουσιασθούν μέσω της Γεωμετρίας….»(σ. 39) και πράγματι συνδύασε κινηματικές μεθόδους (εικ. 7) για την εφαπτομένη σε σημείο της έλικας[14], μολονότι η έννοια της παραγώγου αρχικά συνδέθηκε με την εύρεση της εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο της, απεδείχθη τελικά ότι προσφέρεται επίσης και για τον υπολογισμό της στιγμιαίας ταχύτητας και εν γένει του συντελεστή μεταβολής μιας συνάρτησης σε σημείο του πεδίου ορισμού της.

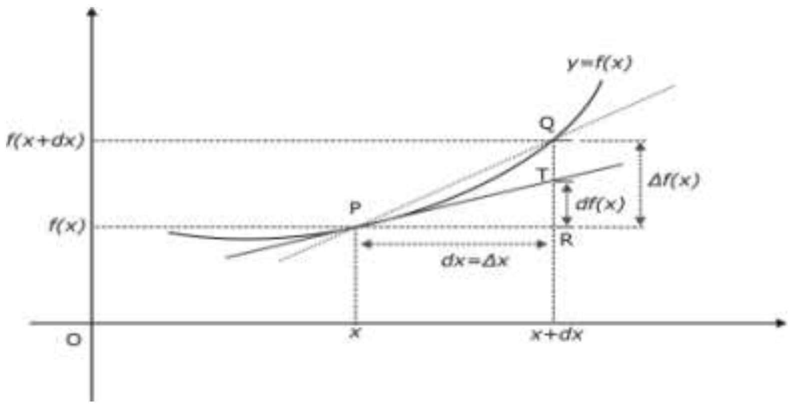
Τι περιέχει το κεφάλαιο 2 και πώς αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό.

Στο κεφάλαιο αυτό, δίνουμε απάντηση σε ένα φαινομενικά απλό ερώτημα, του οποίου η απάντηση, συνδέθηκε στενά με κάθε ανάπτυξη στην επιστήμη και στα Μαθηματικά από το 1600μΧ, ως και σήμερα. Το ερώτημα είναι: «τι είναι στιγμιαία ταχύτητα και πώς μπορούμε να την υπολογίσουμε;». Αμέσως μετά δίνουμε απάντηση στο «ισοδύναμο» ερώτημα «ποια είναι η κλίση της γραμμής $y=\mathrm{f}(x)$, $x\in A\subseteq R$, στο σημείο της $\mathrm{P}(x_0,\mathrm{f}(x_0))$;» Οδηγούμαστε έτσι στον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης $y=\mathrm{f}(x)$, $x\in A$ στο $x=x_0$ και στην εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $y=\mathrm{f}(x)$, $x\in A$ στο σημείο της $\mathrm{P}(x_0,\mathrm{f}(x_0))$. Αποδεικνύουμε μετά, ότι το να έχει η γραμμή $y=\mathrm{f}(x)$, $x\in A$ εφαπτομένη στο $\mathrm{P}(x_0,\mathrm{f}(x_0))$ συνεπάγεται ότι είναι και συνεχής στο $\mathrm{P}(x_0,\mathrm{f}(x_0))$. Αν όμως το $\mathrm{P}(x_0,\mathrm{f}(x_0))$ είναι «ένα αιχμηρό σημείο» της γραμμής $y=\mathrm{f}(x)$, $x\in A$, τότε η γραμμή έχει κατακόρυφη εφαπτομένη ή δεν έχει εφαπτομένη σε αυτό. Αρχίζουμε πάντα με τις απλές ιδέες, κοιτάζουμε τα πράγματα όπως οι μαθηματικοί του 17[ου] αιώνα και ενισχύουμε όσο είναι δυνατό τη διαίσθηση με τη λογική, χωρίς να ξεχνούμε ότι η αυστηρότητα και η ακρίβεια είναι βασικά χαρακτηριστικά των Μαθηματικών. Ορίζουμε την παράγωγο συνάρτηση f′ ή $\frac{d\mathrm{f}}{dx}$ μιας συνάρτησης f και υπολογίζουμε παραγώγους βασικών συναρτήσεων.

Ακολουθούν οι κανόνες παραγώγισης (αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου, σύνθετης συνάρτησης). Τέλος, λύνουμε προβλήματα ρυθμού μεταβολής.

---

[14] Ο Αρχιμήδης έδωσε για πρώτη φορά τον αυστηρό ορισμό της γραμμικής σπείρας, την οποία αυτός ονόμαζε έλικα, ως εξής: «Αν μια ημιευθεία, η αρχή της οποίας παραμένει σταθερή, αναγκαστεί να περιστραφεί με σταθερή γωνιακή ταχύτητα σε ένα επίπεδο έως ότου επιστρέψει στην θέση από την οποία άρχισε η περιστροφή και αν συγχρόνως, καθώς η ημιευθεία περιστρέφεται, ένα σημείο κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος της, αρχίζοντας από την αρχή της, το σημείο θα διαγράψει στο επίπεδο μια έλικα». Στο βιβλίο του «Περί ελίκων» γίνεται μια μεθοδική μελέτη των ιδιοτήτων αυτής (HEATH, 2001).



Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες και έννοιες του κεφαλαίου 2.

- **Η εύρεση της κλίσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης σε ένα σημείο της.**
  Ιστορικό σχόλιο: Σημαντικό κίνητρο για τη δημιουργία νέων μαθηματικών μεθόδων είναι η ύπαρξη προβλημάτων που δεν μπορούν να λυθούν με ήδη γνωστές τεχνικές και ιδέες. Το τρίγωνο PRT είναι το χαρακτηριστικό τρίγωνο του Leibniz. Ο λόγος $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ *είναι η κλίση της τέμνουσας PQ και ο λόγος* $\frac{df(x)}{dx}$ *δηλώνει την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο P. O Leibniz ισχυρίστηκε ότι όταν τα* $df(x)$ *και* dx *γίνουν αρκετά μικρά, η εφαπτομένη ευθεία θα ταυτιστεί σχεδόν με την καμπύλη, δηλαδή το καμπύλο τμήμα PQ θα ταυτιστεί με το PT. Άρα η εφαπτομένη ευθεία συμπίπτει σχεδόν με την καμπύλη κοντά στο P. Οι δύο γραμμές όμως θα ταυτίζονταν μόνο αν συνέπιπταν τα σημεία P και T, δηλαδή όταν το χαρακτηριστικό τρίγωνο συρρικνωνόταν σε σημείο. Στην περίπτωση όμως αυτή, ο λόγος* $\frac{df(x)}{dx}$ *θα έπαιρνε την απροσδιόριστη μορφή* $\frac{0}{0}$*. Με την έννοια του ορίου λύνεται ο γόρδιος δεσμός του* $\frac{0}{0}$ *και το σύμβολο του Leibniz* $\frac{df(x)}{dx}$ *που ο ίδιος θεωρούσε σαν πηλίκο δύο πολύ μικρών αυξήσεων ορίζεται αυστηρά ως εξής:* $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. (αναλυτικότερα, Ε. Maor, Η ιστορία ενός αριθμού, 2005)

- **Ρυθμός Μεταβολής.**
  *Ιστορικό σχόλιο: Η επινόηση της παραγώγου πρέπει να μοιραστεί ανάμεσα στον **Leibniz** και στον διαπρεπή Άγγλο μαθηματικό και φυσικό **Isaac Newton** (1643-1727). Ο Νεύτων επινόησε το λογισμό των ροών (fluxional calculus), όπως ο ίδιος τον ονόμασε. Θεώρησε μια καμπύλη να παράγεται από τη συνεχή κίνηση ενός σημείου. Έτσι αν M(x,y) είναι το σημείο που παράγει την καμπύλη οι συντεταγμένες του x και y μεταβάλλονται κατά συνεχή τρόπο με το χρόνο (είναι οι ρέουσες κατά τον Νεύτωνα). Θα δούμε τώρα με ένα παράδειγμα πως υπολόγισε τις ροές τους:*

  Ας πάρουμε το σημείο M(x,y) να κινείται στην καμπύλη $y= x^2$*. Συμβόλισε* $\dot{x}$ *και* $\dot{y}$ *τις ροές τους (τους ρυθμούς μεταβολής τους). Σε ένα ελάχιστο χρονικό διάστημα Δt (ο Νεύτων χρησιμοποίησε το σύμβολο O), η μεταβολή του x είναι* $\dot{x}\,\Delta t + x$ *και η μεταβολή του y είναι* $\dot{y}\,\Delta t + y$*, οπότε θα έχουμε:*

$\dot{y}$ Δt + y= ($\dot{x}$ Δt +x)^2** ή **$\dot{y}$ Δt + y= $\dot{x}^2$ Δt^2+ 2 $\dot{x}$ Δt x + x^2** ή **$\dot{y}$ Δt= $\dot{x}^2$ Δt^2+ 2 $\dot{x}$ Δt x.** Κατόπιν διαιρεί με **Δt,** οπότε προκύπτει **$\dot{y}$= $\dot{x}^2$ Δt + 2 $\dot{x}$ x.** Τελικά θέτει Δt=0, οπότε **$\dot{y}$= 2 $\dot{x}$ x.

*Η παραπάνω μέθοδος είναι γενική και μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιεσδήποτε δύο ρέουσες που συνδέονται με κάποια εξίσωση. Με τον τρόπο αυτό, υπολογίζουμε τη σχέση των ροών (ρυθμών μεταβολής) δύο μεταβλητών που συνδέονται με μία εξίσωση. Περαιτέρω, αν διαιρέσουμε τη ροή του **y** με τη ροή του **x,** προκύπτει $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=2x$, δηλαδή η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης y= x^2, στο σημείο της M(x,y).* (αναλυτικότερα, E. Maor, Η ιστορία ενός αριθμού, 2005)

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να απαντούν οι μαθητές;

1) Ένα κινητό κινείται σε άξονα και $\mathrm{x}=\mathrm{x}(t)$ είναι η συνάρτηση της θέσης του την χρονική στιγμή t.

α) Πώς υπολογίζουμε τη μέση ταχύτητα του κινητού το χρονικό διάστημα $[t,t+\Delta t]$;

β) Τι ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t ;

2) Αν $y=\mathrm{f}(x)$, $x\in A$ είναι μια συνάρτηση και $\mathrm{P}(x_0,\mathrm{f}(x_0))$, $\mathrm{M}(x_0+h,\mathrm{f}(x_0+h))$ είναι μια συνάρτηση της γραφικής παράστασης της f.

α) Πώς υπολογίζουμε την κλίση (συντελεστή διεύθυνσης) της ΑΜ ;

β) Μπορούμε να κάνουμε χρήση της έννοιας του ορίου και να υπολογίσουμε την κλίση της γραφικής παράστασης της f στο P ;

γ) Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο P ;

3) Αν $y=\mathrm{f}(x)$, $x\in A$ είναι μια συνάρτηση

α) Πότε η f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0\in \mathrm{A}$;

β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in \mathrm{A}$ τότε είναι και συνεχής σ' αυτό; Ισχύει το αντίστροφο;

4) Αν $y=\mathrm{f}(x)$, $x\in A$ είναι μια συνάρτηση

α) Πότε η f λέγεται παραγωγίσιμη στο A ;

β) Πώς ορίζεται η πρώτη παράγωγος συνάρτηση f' της f ;

γ) Πώς ορίζονται οι παράγωγοι ανώτερης τάξης $\mathrm{f}'', \mathrm{f}''', ..., \mathrm{f}^{(\nu)}$ της f ;

Ποια είναι τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα μετά από την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου 2;

Μετά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου 2 οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί:

Μ1. Να ορίζουν τη μέση ταχύτητα κινητού που κινείται σε άξονα, το χρονικό διάστημα $\left[t, t+\Delta t\right]$ και η θέση του την χρονική t δίνεται από τη συνάρτηση x=x(t) ως: $\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

Μ2. Να ορίζουν τη στιγμιαία ταχύτητα ως: $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=x'(t)$.

Μ3. Να αναγνωρίζουν την κλίση της τέμνουσας PM της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *y*=f(*x*), $x \in A$ με P(x,f(x)) και M(x+h,f(x+h)) ως : $\dfrac{\mathrm{f}(x+h)-\mathrm{f}(x)}{h}$

Μ4. Να ορίζουν ως κλίση της καμπύλης *y*=f(*x*), $x \in A$ στο σημείο της P(*x*,f(*x*)) το όριο: $\lim\limits_{h \to 0}\dfrac{\mathrm{f}(x+h)-\mathrm{f}(x)}{h}$

.

Μ5. Να συσχετίζουν τα Μ1,Μ2,Μ3,Μ4.

Μ6. Να ορίζουν τη παράγωγο της συνάρτησης *y*=f(*x*), $x \in A$ στη θέση x=α και να κάνουν χρήση των συμβολισμών: $\mathrm{f}'(a)=\dfrac{d\,\mathrm{f}(a)}{dx}=\lim\limits_{h \to 0}\dfrac{\mathrm{f}(a+h)-\mathrm{f}(a)}{h}=\lim\limits_{x \to a}\dfrac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(a)}{x-a}=\lim\limits_{z \to a}\dfrac{\mathrm{f}(z)-\mathrm{f}(a)}{z-a}$.

Μ7. Να ορίζουν την παράγωγο f' ή $\dfrac{d\,\mathrm{f}}{dx}$ της συνάρτησης y=f(x), $x \in A$ καθώς και τις παραγώγους ανώτερης τάξης.

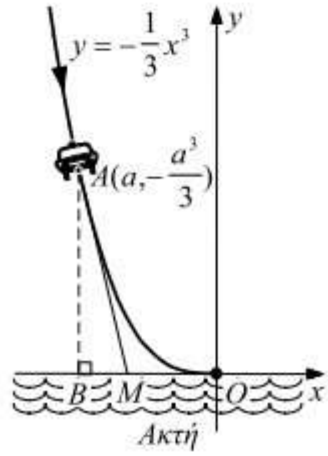
Μ8. Να αποδεικνύουν ότι κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση σε σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και συνεχής σε αυτό, να κάνουν χρήση της αντιθετοαντίστροφης πρότασης και να δίνουν αντιπαραδείγματα για την αντίστροφη πρόταση.

Μ9. Να υπολογίζουν παραγώγους βασικών συναρτήσεων με χρήση του ορισμού.

M10. Να κάνουν χρήση των κανόνων παραγώγισης (αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου, σύνθετης συνάρτησης) στον υπολογισμό παραγώγων συναρτήσεων.

M11. Να υπολογίζουν την εξίσωση της εφαπτομένης μιας καμπύλης σε ένα σημείο της όπως 1)Δ9 του Π.Σ. 2)Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ στο $x_0=0$

M12. Να ερμηνεύουν την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ ως ρυθμό μεταβολής του μεγέθους y ως προς x και να επιλύουν προβλήματα όπως:



1) Η θέση ενός κινητού που κινείται σε άξονα δίνεται κάθε χρονική στιγμή t από τη συνάρτηση θέσης: $x(t)=t^3-6t^2+9t-4$ $t\in[0,5]$

α. Να βρεθεί η θέση του κινητού τη χρονική στιγμή □=0.

β. Να βρεθεί η ταχύτητα του για κάθε χρονική στιγμή, καθώς και η επιτάχυνσή του.

γ. Να βρεθούν οι χρονικές στιγμές μηδενισμού της ταχύτητας.

δ. Ποια χρονικά διαστήματα το κινητό κινείται προς τα δεξιά και ποια προς τα αριστερά;

ε. Να βρεθεί το συνολικό διάστημα.

στ. Να βρεθεί η μέση ταχύτητα του κινητού.

2) Ένα κινητό σημείο Μ ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\frac{1}{4}x^2,\ x\geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

3) Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=-\frac{1}{3}x^3,\ x\leq 0$, πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (σχήμα). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο

$\alpha'(t)=-\alpha(t)$

να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη – 3.

4)Δ10 του Π.Σ.

5)Δ11 του Π.Σ.

6)Δ12 του Π.Σ.

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Προτεινόμενη δραστηριότητα για εισαγωγή στις έννοιες :

Η θέση ενός υλικού σημείου που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση εκφράζεται με τη συνάρτηση $x(t)=t^2+t$ όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα.

α) Να βρεθεί η μέση ταχύτητα στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

(i) [0,2]   (ii) [0,1]   (iii) [0, 0,5]   (iv) [0, 0,1]

β) Να βρεθεί η ταχύτητα όταν t = 0 .

γ) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x=x(t)$.

δ) Να σχεδιαστούν οι τέμνουσες από το O (0,0) της γραφικής παράστασης με συντελεστή διεύθυνσης τις μέσες ταχύτητες του ερωτήματος (α).

Επίσης, να βρεθεί και να σχεδιαστεί η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης $x=x(t)$ στο σημείο της με t=0 .

Ποια σημεία του κεφαλαίου 2 χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής;

Ακολουθούν κάποιες συνήθεις παρανοήσεις των μαθητών και προτείνεται ως ένας τρόπος αντιμετώπισής τους η χρήση αντιπαραδειγμάτων.

1) Αν για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f , g ισχύει: f(x)>g(x) για κάθε $x\in A$ τότε $f'(x)>g'(x)$ για κάθε $x\in A$

<u>Αντιπαράδειγμα:</u>

Αν $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$ και $g(x)=-\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$, τότε

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$ και $g'(x)=\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$, οπότε

$f(x) > g(x),\quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$, ενώ $f'(x) < g'(x),\quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$

2) Αν οι συναρτήσεις f ,g δεν είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε και το άθροισμα f+g και το γινόμενο fg δεν είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο x_0.

<u>Αντιπαράδειγμα:</u>

Οι συναρτήσεις $f(x)=|x|$ και $g(x)=-|x|$ <u>δεν</u> είναι παραγωγίσιμες στο 0, ενώ το άθροισμά τους και το γινόμενό τους είναι παραγωγίσιμες στο 0, αφού $(f+g)(x)=0$ και $(f\cdot g)(x)=-x^2$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

4) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ τότε η σύνθεση $f\circ g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

<u>Αντιπαράδειγμα:</u>

Η συνάρτηση $g(x)=x^2$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, η $f(x)=|x|$ <u>δεν</u> είναι παραγωγίσιμη στο $g(0)=0$, ενώ η σύνθεσή τους, $(f\circ g)(x)=x^2$, είναι παραγωγίσιμη στο 0.

5) Αν η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ τότε η σύνθεση $f\circ g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

<u>Αντιπαράδειγμα:</u>

Η συνάρτηση $g(x)=|x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, η $f(x)=x^2$ είναι παραγωγίσιμη στο $g(0)=0$, ενώ η σύνθεσή τους, $(f\circ g)(x)=x^2$, είναι παραγωγίσιμη στο 0.

6) Αν η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ τότε η σύνθεση $f\circ g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

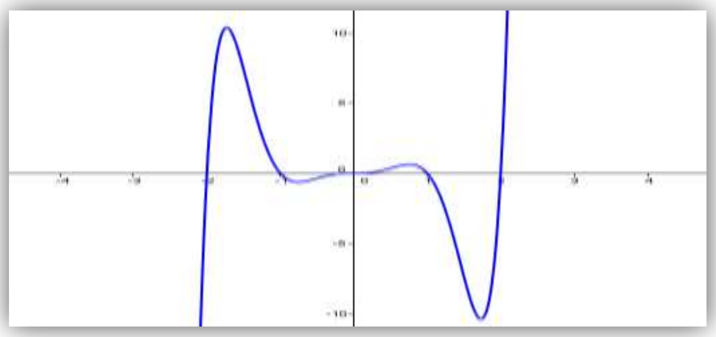
<u>Αντιπαράδειγμα:</u>

Η συνάρτηση $g(x)=x-|x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 και η $f(x)=x+|x|$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $g(0)=0$, ενώ η $f(g(x))=0$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

7) Αν η ευθεία ε είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f τότε η ε δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f, εκτός από το σημείο επαφής.

<u>Αντιπαράδειγμα:</u>

Η ευθεία $y=0$ που είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^3\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)^2$ στο Ο(0,0) και διαπερνά τη γραφική παράσταση της f και έχει με αυτή, εκτός του Ο(0,0), και άλλα κοινά σημεία τα Α(1,0), Β(2,0), Α'(-1,0) και Β'(-2,0).



Αξιοποίηση της Τεχνολογίας στην διδασκαλία του κεφαλαίου.

Ορισμένες μαθηματικές έννοιες από τη φύση τους φαίνεται ότι δημιουργούν προβλήματα στη διδασκαλία και στη μάθηση τους, επειδή είναι δύσκολο να οπτικοποιηθούν με τα παραδοσιακά διδακτικά μέσα. Στην Ανάλυση είναι εντονότατη η ανάγκη χρήσης Τ.Π.Ε. Στο προηγούμενο κεφάλαιο προτείναμε τη χρήση Τ.Π.Ε. για την παρουσίαση της έννοιας του ορίου. Σε αυτό το κεφάλαιο τονίζουμε ότι η παρουσίαση της παραγώγου ως συνάρτησης μπορεί να γίνει με τις δραστηριότητες των ιστότοπων που προτείνει το Πρόγραμμα Σπουδών:

http://webspace.ship.edu/msrenault/GeoGebraCalculus/derivative_as_a_function.html

http://webspace.ship.edu/msrenault/GeoGebraCalculus/derivative_at_a_point.html

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{o} : Μελέτη συνάρτησης

Εισαγωγή

Οι μαθηματικοί του 16ου αι. εξελάμβαναν τον άρρητο λόγο ως αριθμό και τον αντιμετώπιζαν γεωμετρικά (Boyger, 1959) με αποτέλεσμα να επικρατεί σύγχυση στη κατανόηση της έννοιας της συνέχειας αφού το συνεχές της ευθείας των πραγματικών συνδέεται άμεσα με τη συνέχεια της συνάρτησης (Χρυσανθόπουλος, 2009).

Bolzano, πηγή: Wikipedia

Στα τέλη του 18ου αι. οι ζυμώσεις μέχρι τότε στο χώρο της ανάλυσης είχαν πλέον αναδείξει ότι η διαίσθηση μπορεί πολλές φορές να επιλύει προβλήματα, αλλά συνήθως δημιουργεί σύγχυση. Ο Bolzano (1781-1848), υπέρμαχος της μαθηματικής αυστηρότητας και θεμελίωσης, στην προσπάθειά του να αποκόψει τις έννοιες του χρόνου και της κίνησης από τον ορισμό μαθηματικών εννοιών οι οποίες οδηγούσαν σε διαισθητική και ενορατική αντίληψη του χώρου (Boyger, 1959), έδωσε το δικό του ορισμό για τις συνεχείς συναρτήσεις το 1817: "... *η έκφραση ότι μια συνάρτηση* $f(x)$ *μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο της συνέχειας για όλες τις τιμές του* x *μέσα ή έξω από κάποια δοσμένα όρια, δε σημαίνει τίποτα άλλο παρά ότι: αν το* x *είναι κάποια τέτοια τιμή, η διαφορά* $f(x+\omega)-f(x)$ *μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε δοσμένη ποσότητα, με την προϋπόθεση να πάρουμε το* ω *οσοδήποτε μικρό θέλουμε*" (Russ, 1980). Επιπλέον απέδειξε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών για συνεχείς συναρτήσεις.

Στο συνονθύλευμα επαγωγικής συλλογιστικής, διαίσθησης, εικασιών και εν μέρει μυστικισμού που επικρατούσε στο χώρο της ανάλυσης ακόμη και τον 18ο αι. (Apostol, 1962), ο Cauchy (1789-1857) έδωσε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης ορισμένης σε διάστημα το 1821. Ο Cauchy δεν αναφέρονταν σε απειροελάχιστα μικρές σταθερές ποσότητες, αλλά απέδιδε την έννοια της συνέχειας με βάση το όριο και όχι το αντίστροφο, όπως και ο Bolzano (Boyger, 1959). Ο Weierstrass (1815-1897), απέδωσε, στη συνέχεια, τον ορισμό με μεγαλύτερη σαφήνεια και ακρίβεια. ενώ η κατασκευή των πραγματικών αριθμών εδραίωσε την έννοια του συνεχούς και του απείρου (Χρυσανθόπουλος, 2009).

Αξιοσημείωτο, ότι ο Fermat (1601-1665) προέβλεψε σε κάποιο βαθμό, την εποχή που επικρατούσε η διαίσθηση στα μαθηματικά, την εξέλιξη του λογισμού , ανεκτίμητη προσφορά στον Νεύτωνα και Leibniz αργότερα, και ανέπτυξε μια μέθοδο για τον προσδιορισμό των τοπικών μεγίστων και ελαχίστων και των εφαπτομένων καμπυλών, ουσιαστικά ισοδύναμη με την παραγωγισιμότητα.

Τι περιέχει το κεφάλαιο 3 και πώς αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό.

Το κεφάλαιο αυτό αρχίζει με τη διατύπωση του θεωρήματος του Bolzano και τη γεωμετρική ερμηνεία του. Στη συνέχεια αποδεικνύεται το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών και τα βασικά συμπεράσματά του: 1) κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ που δεν μηδενίζεται στο Δ, διατηρεί το ίδιο πρόσημο στο Δ, 2) κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ, διατηρεί το πρόσημό της σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το διάστημα Δ. Ακολουθούν και ερμηνεύονται διαισθητικά οι προτάσεις με τις οποίες βρίσκουμε το σύνολο τιμών μιας συνεχούς και γνησίως μονότονης συνάρτησης f σε διάστημα Δ. (Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,\beta]$, τότε $f\left((\alpha,\beta]\right)=\left(\lim\limits_{x\to\alpha^{+}} f(x), f(\beta)\right]$, κλπ)

Στη συνέχεια, τονίζεται ότι, σε διάστημα Δ, μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα αν και μόνο αν κάθε τέμνουσα της γραφικής της παράστασης έχει θετική κλίση και γνησίως φθίνουσα αν και μόνο αν κάθε τέμνουσα της γραφικής της παράστασης έχει αρνητική κλίση. Με την βοήθεια αυτών των παρατηρήσεων και την χρήση ΤΠΕ διατυπώνονται τα κριτήρια της μονοτονίας συνάρτησης και το κριτήριο σταθερότητας μιας συνάρτησης. Δίνονται οι ορισμοί των ολικών και τοπικών ακρότατων μιας συνάρτησης, διατυπώνονται και αποδεικνύονται το θεώρημα του Fermat και το κριτήριο της $1^{ης}$ παραγώγου. Η μορφή μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης σε διάστημα Δ, συνδέεται άμεσα με τη μονοτονία της πρώτης παραγώγου της: στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) αν και μόνο αν η πρώτη παράγωγος είναι γνησίως αύξουσα και τα κοίλα κάτω (κοίλη) αν και μόνο αν η πρώτη παράγωγος είναι γνησίως φθίνουσα. Έτσι για δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις, εύκολα βγάζουμε συμπέρασμα αν είναι κυρτές ή κοίλες μελετώνται το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου. Τα σημεία μηδενισμού της δεύτερης παραγώγου εκατέρωθεν των οποίων αλλάζει πρόσημο είναι τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης. Γίνεται μελέτη και χάραξη γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων.

Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες και έννοιες του κεφαλαίου 3.

- **Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής**

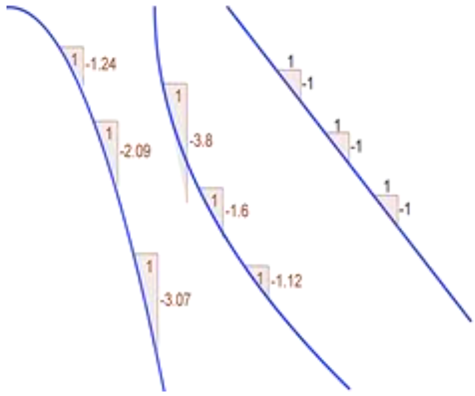
Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής εκφράζει κάτι που είναι γεωμετρικά και διαισθητικά σαφές και απλό. «Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παίρνει δύο τιμές f(γ), f(δ) με f(γ) ≠ f(δ), τότε θα παίρνει και κάθε τιμή ανάμεσά τους». « Ο Γάλλος μαθηματικός Louis Arbogast σε μια εργασία του το 1791, η οποία βραβεύτηκε σε ένα διαγωνισμό της Ακαδημίας της Αγίας Πετρούπολης, καθόρισε ως νόμο της συνέχειας για συναρτήσεις, αυτόν σύμφωνα με τον οποίο, **μια ποσότητα δεν είναι δυνατόν να περάσει από μια κατάσταση σε μια άλλη χωρίς να περάσει από όλες τις ενδιάμεσες καταστάσεις»**. «Η διαισθητική και γεωμετρική περιγραφή της συνέχειας ως καμπύλης που μπορούμε να τη διατρέχουμε πάνω στο χαρτί μας, χωρίς να σηκώσουμε το χέρι μας πρέπει να γίνει ακριβής και αναλυτική, ώστε να είναι δυνατόν να ενταχθεί στη λογική αυστηρότητα της μαθηματικής μεθοδολογίας». Ο Bolzano έδωσε μια αναλυτική και γεωμετρική απόδειξη στο θεώρημα ενδιάμεσης τιμής και όρισε την έννοια της συνέχειας με ακριβή τρόπο. Αργότερα, ο Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) στο σύγγραμμά του με τίτλο «Cours d’ Analyse» στα 1821 αναπαράγει τον ορισμό της συνέχειας του Bolzano:

Έστω f συνάρτηση που ορίζεται σε διάστημα Δ. Αν $x \in \Delta$ και Δx είναι μια πολύ μικρή μεταβολή του x τότε η συνάρτηση θα μεταβληθεί κατά τη διαφορά $\mathrm{f}(x+\Delta x)-\mathrm{f}(x)$. Έτσι η f είναι συνεχής στο x, αν μια πολύ μικρή μεταβολή του x (Δx απείρως μικρό), δίνει απείρως μικρή μεταβολή στις τιμές της συνάρτησης. Τελικό στάδιο της εξέλιξης προς την αυστηρή διατύπωση της έννοιας της συνέχειας σε σημείο του πεδίου ορισμού της (ε-δ ορισμός), δόθηκε από τους Γερμανούς μαθηματικούς Karl Weirstrass (1815-1879) και Edward Heine (1821-1881). Πρέπει να τονίσουμε ότι, η απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής, όπως και κάθε άλλου σημαντικού θεωρήματος της Ανάλυσης, βασίζεται κατά τρόπο ουσιαστικό στην πληρότητα των πραγματικών αριθμών. (αναλυτικότερα, Σ. Νεγρεπόντης, Σ Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, Απειροστικός Λογισμός, τ. Ι, σελ171 επ.)

- **Τα κριτήρια μονοτονίας συνάρτησης**

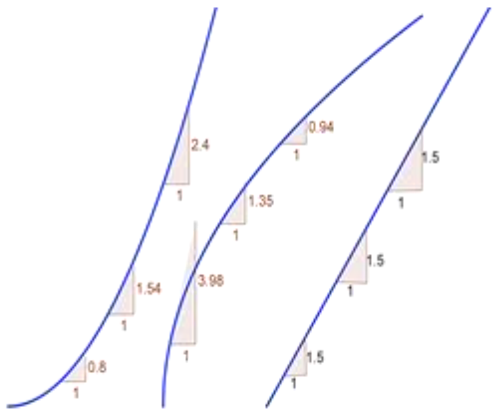
Στο προηγούμενο κεφάλαιο, αποδείξαμε ότι αν μια συνάρτηση είναι σταθερή, τότε η παράγωγός της είναι μηδέν, κάτι και διαισθητικά προφανές, αφού η κλίση σε κάθε σημείο της καμπύλης y=c είναι μηδέν. Το ερώτημα είναι αν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή, αν f’(x)=0 σε ένα διάστημα Δ, τότε απαραίτητα η f είναι σταθερή στο Δ; Η απάντηση είναι προφανής, αν καταφύγουμε στη φυσική ερμηνεία της παραγώγου. Πράγματι, αν η ταχύτητα x’(t) ενός σώματος είναι μηδέν τότε το σώμα θα παραμένει αναγκαστικά ακίνητο, δηλαδή x(t)=c. Συμπεραίνουμε ότι μόνο οι σταθερές συναρτήσεις ικανοποιούν την f’(x)=0 για κάθε σημείο x ενός διαστήματος Δ. Αν τώρα η κλίση μιας καμπύλης σε κάθε σημείο της είναι θετική (Σχήμα 2), τότε η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Ενώ, αν είναι αρνητική (Σχήμα 1), τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Σημαντική ιδέα αυτού του κεφαλαίου είναι η αποκάλυψη σημαντικών ιδιοτήτων της συνάρτησης f από πληροφορίες που αντλούμε (π.χ πρόσημο) από την f’.



• **Ακρότατα συνάρτησης- Το κριτήριο της $1^{ης}$ παραγώγου**

Κατά τον $17^{ο}$ αιώνα, τα προβλήματα της διαφόρισης, εμφανίζονται υπό τρεις διαφορετικές μορφές:

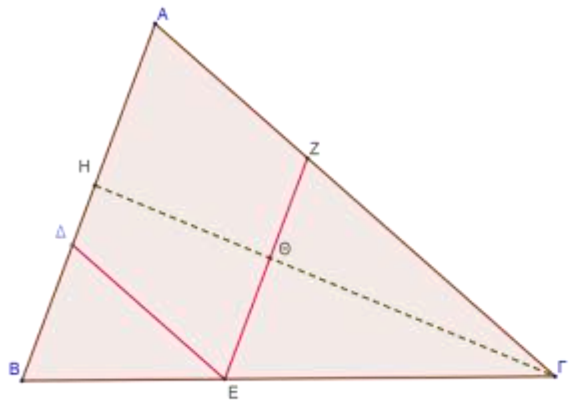


Σχήμα 2: Γνησίως αύξουσες συναρτήσεις

ταχύτητες, εφαπτόμενες, μέγιστα και ελάχιστα. Μερικά από τα προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων, τέθηκαν πριν από πολύ καιρό, ακόμα και πριν από πολλούς αιώνες. Μεταξύ αυτών που τα διερεύνησαν συγκαταλέγονται ορισμένοι από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς του παρελθόντος- Ευκλείδης, Αρχιμήδης, Kepler, Fermat, Euler, Bernoulli, Leibniz, Newton…-. Οι διερευνήσεις τους, ακολούθησαν διαφορετικές διαδρομές, και οι στόχοι τους πραγματώθηκαν μετά από μακρές περιόδους ατελέσφορων πελαγοδρομήσεων. Είναι άραγε δυνατόν να βρεθεί μια μέθοδος που να μας επιτρέπει να επιλύουμε όλα τα προβλήματα ακρότατων με έναν «απλό» τρόπο; Η απάντηση είναι ότι μια τέτοια μέθοδος πράγματι υπάρχει. Και υπάρχει χάρη στο κατ' εξοχήν υπολογιστικό εργαλείο των Μαθηματικών, που είναι η Ανάλυση- ο Λογισμός (calculus). Τα προβλήματα των ακρότατων, που αναφύονται στα Μαθηματικά, τις φυσικές επιστήμες ή σε άλλες πρακτικές δραστηριότητες, διατυπώνονται αρχικά στην ορολογία του πεδίου που εμφανίζονται. Το πρώτο πράγμα που χρειάζεται εμείς να πετύχουμε είναι η μετάφραση της διατύπωσης του προβλήματος από την ιδιαίτερη γλώσσα που τέθηκε αρχικά στη γλώσσα των Μαθηματικών. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως τυποποίηση ή μοντελοποίηση. Για παράδειγμα παίρνουμε το *πρόβλημα του Ευκλείδη*:

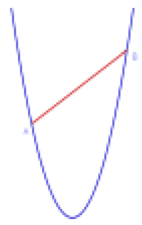
Σε δεδομένο τρίγωνο ΑΒΓ, να εγγραφεί παραλληλόγραμμο ΑΔΕΖ με ΔΕ παράλληλη στην ΑΓ και ΕΖ παράλληλη στην ΑΒ, με μέγιστο εμβαδόν.

Ενδεικτική λύση:



Θέτω ΑΔ=x, 0≤x≤ΑΒ=γ, ΓΗ=υ. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΓΖΕ και ΓΑΒ έχω:

$\frac{x}{\gamma}=\frac{\Gamma\Theta}{\upsilon}$, οπότε ΓΘ=$\frac{\upsilon x}{\gamma}$ και ΘΗ= υ-$\frac{\upsilon x}{\gamma}$. Θεωρώ την συνάρτηση f(x)=x (υ-$\frac{\upsilon x}{\gamma}$), που παριστάνει το εμβαδόν του ορθογωνίου. Παραγωγίζω, οπότε f΄(x)=υ (1-$\frac{2x}{\gamma}$). Βρίσκω τη ρίζα και το πρόσημο της f΄ και εφαρμόζοντας τα κριτήριο της πρώτης παραγώγου, βρίσκω μέγιστο στη θέση χ= $\frac{\gamma}{2}$, που σημαίνει ότι το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν Δ,Ε,Ζ μέσα των πλευρών ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ του τριγώνου αντίστοιχα. (αναλυτικότερα, V.M Tikhomirov, Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα, 1999)



• Κυρτές- κοίλες συναρτήσεις

Οι κυρτές συναρτήσεις διαδραματίζουν εξαιρετικά σημαντικό ρόλο στα προβλήματα των ακρότατων. Ένα σχήμα λέγεται κυρτό αν περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο οποιαδήποτε σημεία του. Μια συνάρτηση $y=f(x), x\in A$, λέγεται κυρτή αν για κάθε χορδή που συνδέει δύο σημεία της γραφικής της παράστασης, το τμήμα της γραφικής παράστασης που αντιστοιχεί στα ενδιάμεσα σημεία βρίσκεται κάτω από τη χορδή (Σχήμα 3)

Υπάρχουν και άλλοι ισοδύναμοι ορισμοί για την κυρτότητα. Και το κυριότερο, δεν είναι όλες οι κυρτές συναρτήσεις παντού παραγωγίσιμες. Στο πλαίσιο, της Ανάλυσης της Γ΄Λυκείου, θα ασχοληθούμε με παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Έτσι, αν μια κυρτή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, η πρώτη παράγωγος της είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

• **Μελέτη Συνάρτησης**

Η μελέτη συνάρτησης θα μας προσφέρει όλες τις αναγκαίες πληροφορίες για να σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση. Είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης πλησιάζει κάποια ευθεία ε. Αν η απόσταση ενός μεταβλητού σημείου Μ της γραφικής παράστασης από την ε τείνει στο 0, καθώς το σημείο Μ πλησιάζει στο άπειρο, κινούμενο κατά μήκος της καμπύλης, τότε η ευθεία ε θα λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Τις ασύμπτωτες συναντήσαμε στο κεφάλαιο 1. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε τη μεγάλη χρησιμότητα που έχουν για το σχεδιασμό της γραφικής παράστασης.

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να απαντούν οι μαθητές;

1) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha\ ,\ \beta]$ και $f(\alpha)f(\beta)<0$ τότε η γραφική παράσταση της f έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$; Να χαράξετε τη γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τον ισχυρισμό σας.

2) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

3) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha\ ,\ \beta]$, $f(\alpha)\neq f(\beta)$ και η, είναι ένας πραγματικός αριθμός ανάμεσα στους $f(\alpha)$ και $f(\beta)$,αποδείξτε ότι για την συνάρτηση $h(x)=f(x)-\eta$ στο $[\alpha\ ,\ \beta]$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Bolzano. Κατασκευάστε και ένα σχήμα για να επιβεβαιώσετε και γραφικά το συμπέρασμά σας.

4) Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.

5) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:R\rightarrow R$ για τις οποίες $f^2(x)=x^2$.

6) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη αποδείξτε ότι έχει το πολύ μία ρίζα.

7) Αν η συνάρτηση $f:\Delta \to R$ όπου Δ διάστημα είναι γνησίως μονότονη αποδείξτε την ισοδυναμία:

$x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

8) Αν η συνάρτηση $f:\Delta \to R$ όπου Δ διάστημα είναι γνησίως αύξουσα αποδείξτε την ισοδυναμία: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

9) Αν η συνάρτηση $f:\Delta \to R$ όπου Δ διάστημα είναι γνησίως φθίνουσα αποδείξτε την ισοδυναμία:

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

10) Αν η συνάρτηση $f:\Delta \to R$ με Δ= $[\alpha\ ,+\infty)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα: $f([\alpha\ ,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ ,\ f(\alpha)\right]$. Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία. Διατυπώστε ανάλογες προτάσεις για όλους τους γνωστούς τύπους διαστημάτων .Διατυπώστε αντίστοιχες προτάσεις στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

11) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ. Πώς εξηγείτε το γεγονός ό,τι η $f(x)=\begin{cases}3 & ,\ x>0\\ -2 & ,\ x<0\end{cases}$ δεν είναι σταθερή αλλά ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της;

12) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ και $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. Πώς εξηγείτε το γεγονός ότι η $f(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο R αλλά $f'(0)=0$; Πώς εξηγείτε το γεγονός ότι για την $f(x)=-\frac{1}{x}$ ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$ αλλά η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της;

13) Αν το x_0 είναι ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ, και μια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε να ερμηνευτεί γεωμετρικά και μετά να αποδειχτεί ότι $f'(x_0)=0$. Πώς εξηγείτε το γεγονός ότι για την $f(x)=x^3$ ισχύει $f'(0)=0$ αλλά η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=0$;

14) Η συνάρτηση $f(x)=|x-3|$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=3$ δεν είναι όμως παραγωγίσιμη στο $x_0=3$.Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$ το οποίο είναι άκρο κλειστού διαστήματος .Ποιές είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακρότατων μιας συνεχούς συνάρτησης f .

15) Ποια είναι η σχετική θέση της εφαπτομένης και της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με βάση την κυρτότητα της συνάρτησης f ;

16) Ποια είναι η σχετική θέση της εφαπτομένης στο σημείο καμπής $A(x_0\ ,f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της γραφικής παράστασης της f ; (η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη).

Ποια είναι τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα μετά από την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου 3;

Μετά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου 3 οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί:

Μ1. Να διατυπώνουν και να ερμηνεύουν γεωμετρικά το θεώρημα του Bolzano.

Μ2. Να διατυπώνουν , να ερμηνεύουν γεωμετρικά και να αποδεικνύουν το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής.

Μ3. Να αποδεικνύουν και να κάνουν χρήση της πρότασης: «κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα η οποία δεν μηδενίζεται διατηρεί το πρόσημό της», όπως: 1)Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύουν: $f(0)=1$ και $\left(f(x)+x\right)^2=x^2+1$ για κάθε $x\in R$. 2) Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις $f:R\to R$ για τις οποίες ισχύει: $f^2(x)=x^2$ για κάθε $x\in R$.

Μ4. Να κάνουν χρήση του κριτηρίου μονοτονίας και του κριτηρίου σταθερότητας συνάρτησης.

Μ5. Να κάνουν χρήση του κριτηρίου της πρώτης παραγώγου και να υπολογίζουν τα ακρότατα συνάρτησης.

Μ6. Να υπολογίζουν το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών συνάρτησης, όπως: 1) Να βρείτε το σύνολο τιμών , το πλήθος και το πρόσημο των ριζών της συνάρτησης $f(x)=x^3-3x+1$ 2) Δ14 του Π.Σ.

Μ7. Να εντοπίζουν τα διαστήματα στα οποία μια δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη και να υπολογίζουν τα σημεία καμπής.

Μ8. Να υπολογίζουν τις ασύμπτωτες γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων.

Μ9. Να κάνουν μελέτη και χάραξη γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων όπως: 1)Δ17 του Π.Σ.2) $\mathrm{f}(x)=x+1+\frac{1}{x+1}$.

Μ10. Να μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις και να υπολογίζουν μέγιστες και ελάχιστες τιμές ενός μεγέθους, ποσότητας, όπως: 1) Να αποδείξετε ότι από όλα τα ισοσκελή τρίγωνα που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας R , το ισόπλευρο έχει το μέγιστο εμβαδό. 2) Πρόκειται να κατασκευάσουμε ένα δοχείο που έχει σχήμα ορθού κυλίνδρου και χωρητικότητα V .Τι διαστάσεις πρέπει να έχει το δοχείο ώστε το κόστος κατασκευής του να είναι ελάχιστο; (το δοχείο δεν έχει καπάκι)

3)Δύο ηλεκτρικά φορτία $q_1=q>0$ και $q_2=4q$ βρίσκονται στα σημεία Α , Β αντιστοίχως. Αν η απόσταση των Α , Β είναι d σε ποιό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ το δυναμικό είναι ελάχιστο; (Αν Μ σημείο του ΑΒ που απέχει x από το Α έχουμε $V_{\mathrm{M}}=k\frac{q}{x}+k\frac{4q}{d-x}$ $0<x<d$ $(k=9\cdot 10^9\frac{Nm}{C^2})$ 4)Δ15 του Π.Σ. 5)Δ16 του Π.Σ.

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Α) Προτείνεται η δραστηριότητα Δ13 του Προγράμματος Σπουδών για εισαγωγή στο θεώρημα Bolzano.

Β) Θα πρέπει να τονισθεί ακόμα μια φορά ότι τα συνήθη λάθη των μαθητών οφείλονται, κυρίως, στο γεγονός ότι οι περισσότεροι μαθητές θεωρούν ότι η αντίστροφη και η αντίθετη μιας πρότασης, που διατυπώνεται υπό μορφή συνεπαγωγής, είναι κατ' ανάγκη αληθείς προτάσεις. Για το λόγο αυτό ο διδάσκων θα πρέπει να χρησιμοποιεί και παραδείγματα από την καθημερινή ζωή ή από άλλους κλάδους των μαθηματικών, με σκοπό οι μαθητές να κατανοήσουν ότι, όταν αληθεύει μια πρόταση της μορφής $p\Rightarrow q$, τότε:

α) <u>Αληθεύει</u> και η αντιθετοαντίστροφη αυτής, δηλαδή η $\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$.

β) <u>Δεν αληθεύει κατ' ανάγκη</u> και η αντίστροφη αυτής, δηλαδή η $q\Rightarrow p$

γ) <u>Δεν αληθεύει κατ' ανάγκη</u> και η αντίθετη αυτής, δηλαδή η $\overline{p}\Rightarrow\overline{q}$, που είναι ισοδύναμη της αντίστροφης.

Έτσι, όταν αποδειχθεί, για παράδειγμα, το θεώρημα του Fermat, δηλαδή η πρόταση:

«Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbf{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in A$. Αν:

i) *Η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ακρότατο και*

ii) *Το σημείο x_0 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της,*

τότε θα ισχύει $f'(x_0) = 0$ »,

θα πρέπει να γίνει χρήση των παραπάνω σχολίων, ώστε οι μαθητές να συμπεράνουν ότι:

α) <u>Αληθεύει</u> και η αντιθετοαντίστροφη της δοθείσης πρότασης, δηλαδή η πρόταση:

«Αν $f'(x_0) \neq 0$, τότε μία τουλάχιστον από τις συνθήκες i) και ii) δεν ισχύει».

β) *<u>Δεν αληθεύει κατ' ανάγκη</u>* και αντίστροφη της δοθείσης πρότασης, δηλαδή η πρόταση:

«Αν $f'(x_0) = 0$, τότε θα ισχύουν και οι δύο συνθήκες i) και ii)»

και να δοθεί ένα εύκολο αντιπαράδειγμα.

γ) *<u>Δεν αληθεύει κατ' ανάγκη</u>* και η αντίθετη της δοθείσης πρότασης, δηλαδή η πρόταση:

«Αν δεν ισχύουν και οι δύο συνθήκες i) και ii), τότε δεν θα ισχύει $f'(x_0) = 0$ »

και να δοθεί ένα εύκολο αντιπαράδειγμα.

Ποια σημεία του κεφαλαίου 3 χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής;

Ακολουθούν κάποιες συνήθεις παρανοήσεις των μαθητών και προτείνεται ως ένας τρόπος αντιμετώπισής τους η χρήση αντιπαραδειγμάτων.

1) Αν μια συνάρτηση έχει θετική παράγωγο σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

<u>Αντιπαράδειγμα</u>

Η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{x}, x \neq 0$ έχει παράγωγο θετική $f'(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$, είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0), (0, +\infty)$, όχι όμως στο πεδίο ορισμού της, αφού -1<1 και $f(-1) > f(1)$...

2) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και για εσωτερικό σημείο x_0 του Δ ισχύει $f''(x_0) = 0$ τότε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f.

<u>Αντιπαράδειγμα</u>

Για την $f(x) = x^4$ έχω $f''(0) = 0$ ...

Σημείωση: το παράδειγμα 3 αναφέρεται στο κεφάλαιο 4

3) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα, τότε στα άκρα του έχει τοπικά ακρότατα.

Αντιπαράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x} & ,x\in\left(0,\frac{1}{\pi}\right] \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{1}{\pi}\right]$ όμως το $f(0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο, γιατί υπάρχει δ>0 οσοδήποτε μικρό, ώστε στο διάστημα (0,δ) η f να παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές. Π.χ. Αν $\delta=10^{-4}$, τότε $f\left(\frac{1}{2\pi10^4+\frac{\pi}{2}}\right)>0$ και $f\left(\frac{1}{2\pi10^4+\frac{3\pi}{2}}\right)<0$.

4) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

Αντιπαράδειγμα

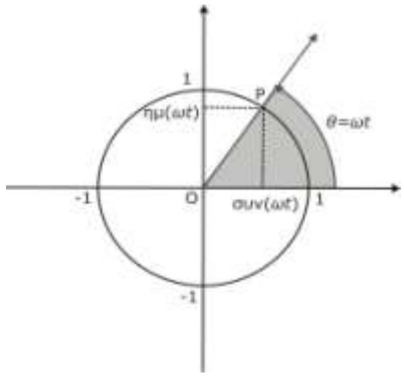
$f(x)=x^3$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο : Τριγωνομετρικές, εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις

Εισαγωγή

«Εκείνο που είναι παράξενο, είναι όταν διαπιστώνουμε ότι ένας μικρός αριθμός ειδικών συναρτήσεων κυβερνάει ένα τόσο μεγάλο πλήθος από διαφορετικά είδη φυσικών φαινομένων» (T. Apostol, Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός, 1962, τ.Ι)

Τι περιέχει το κεφάλαιο 4 και πώς αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό



Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις καθώς και συναρτήσεις οι οποίες κατασκευάζονται από αυτές με τις στοιχειώδεις αλγεβρικές πράξεις και συνθέσεις μεταξύ αυτών.

«Υποθέτουμε ότι ένα κινητό P κινείται ομαλά πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο κατά τη θετική φορά και ακόμα ότι τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στο σημείο A(1,0). Ενδιαφερόμαστε για τη κίνηση της προβολής του P, στον άξονα x΄x. Αφού η κίνηση είναι ομαλή θα ισχύει $\vartheta(t)=\omega t$, όπου ω μια σταθερά που ονομάζεται γωνιακή ταχύτητα και τη μετράμε σε ακτίνια ανά δευτερόλεπτο. Η θέση της προβολής του P στον άξονα x΄x, δίνεται από τη συνάρτηση $x(t)=\text{συν}\left[\vartheta(t)\right]=\text{συν}(\omega t)$. Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα της προβολής του P στον άξονα x΄x την χρονική στιγμή t, ($x'(t)=\dfrac{dx}{dt}$) πρέπει να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης συνημίτονο». (πρβλ, Σ.Κ Πηχωρίδης, Απειροστικός Λογισμός Ι, 1996, σελ.80 επ.)

Οι μαθητές έχουν ήδη μελετήσει τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις στις προηγούμενες τάξεις. Σε αυτό το κεφάλαιο θα υπολογιστούν οι παράγωγοί τους, θα μελετηθούν πλήρως και θα παρασταθούν γραφικά. Κυρίως όμως θα λυθούν προβλήματα μέσα από τα οποία θα φανεί πόσο εξαιρετικά χρήσιμες είναι γιατί μπορούν να απεικονίσουν πολλά φυσικά φαινόμενα. Τα παραδείγματα της χρήσης των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με τα οποία μπορούμε να μοντελοποιήσουμε πραγματικές φυσικές καταστάσεις είναι άφθονα. Πολλά από αυτά τα φαινόμενα έχουν μελετηθεί στο μάθημα της Φυσικής (ταλαντώσεις, κύματα κ.λπ.) χωρίς όμως να χρησιμοποιούν το ισχυρό εργαλείο της παραγώγου.

«Ας δούμε, για παράδειγμα, ένα μοντέλο πληθυσμιακής εξέλιξης: ας γράψουμε f(t) για τον πληθυσμό ενός συνόλου οργανισμών όπου η μεταβλητή t παριστάνει χρόνο. Παρ’ όλο που η συνάρτηση f πρέπει να παίρνει μόνο ακέραιες τιμές, στο θεωρητικό μοντέλο που θα δώσουμε θα τη θεωρήσουμε μια πραγματική συνάρτηση για την οποία μάλιστα θα υποθέσουμε ότι είναι παραγωγίσιμη. Θα υποθέσουμε ακόμα ότι τη χρονική στιγμή t=0 ο πληθυσμός είναι γνωστός, έστω α, δηλαδή f(0)=α. Η εξέλιξη του πληθυσμού εξαρτάται φυσικά απ’ τον αριθμό των γεννήσεων και τον αριθμό των θανάτων που συμβαίνουν στον πληθυσμό. Μια εύλογη παραδοχή είναι ότι η διαφορά του αριθμού των γεννήσεων από τον αριθμό των θανάτων είναι για κάθε t ανάλογη με τον πληθυσμό f(t). Η παραδοχή αυτή μεταφρασμένη σε μαθηματικούς όρους μας οδηγεί στην εξίσωση: f΄(t)=kf(t), όπου k μια σταθερά που εξαρτάται από τα βιολογικά χαρακτηριστικά του πληθυσμού και του περιβάλλοντος στο οποίο αναπτύσσεται. Η συνάρτηση λοιπόν f που θέλουμε να βρούμε πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις: f΄(t)=kf(t) και f(0)=α»(Σ.Κ Πηχωρίδης, Απειροστικός Λογισμός Ι, 1996, σελ.297 επ). Θα αποδείξουμε σ’ αυτό το κεφάλαιο ότι η μοναδική συνάρτηση που ικανοποιεί αυτές τις σχέσεις είναι η $y=\alpha e^{kt}$.

Τις εκθετικές συναρτήσεις καθώς και τη χρησιμότητά τους στη μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων έχουν διδαχθεί οι μαθητές μας στη Β' τάξη. Στο παρόν κεφάλαιο υπολογίζουμε τις παραγώγους των εκθετικών συναρτήσεων $y=e^x$ και $y=\alpha^x$, $0<\alpha\neq1$, μελετούμε και σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις τους. Στη συνέχεια, ορίζουμε την λογαριθμική συνάρτηση $y=\ln x$, $x>0$ και αποδεικνύουμε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $y=e^x$ ως προς την ευθεία $y=x$, αποδεικνύουμε ότι $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $x>0$ την μελετούμε και χαράζουμε την γραφική της παράσταση. Αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι επίσης η μελέτη των συναρτήσεων της μορφής $y=x^\alpha$, όταν $a\in R-Z$ στις περιπτώσεις: 1. $\alpha>1$ 2. $0<\alpha<1$ 3. $\alpha<0$.

Στην αρχή αυτού του κεφαλαίου διατυπώνονται και ερμηνεύονται διαισθητικά τα κριτήρια σύγκρισης για τα όρια. Τα κριτήρια αυτά είναι απαραίτητα εργαλεία για τους υπολογισμούς των παραγώγων των τριγωνομετρικών, εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων καθώς και ορίων συναρτήσεων που είναι αποτέλεσμα πράξεων ή και συνθέσεων βασικών στοιχειωδών συναρτήσεων. Στο τέλος του κεφαλαίου διατυπώνονται οι κανόνες του De L' Hospital και γίνονται εφαρμογές τους στον υπολογισμό ορίων.

Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες και έννοιες του κεφαλαίου 4.

• Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Η Τριγωνομετρία είναι η μελέτη των σχέσεων ανάμεσα σε γωνίες και αποστάσεις. Προέκυψε κυρίως από την ανάγκη του υπολογισμού απροσίτων αποστάσεων μέσω προσιτών αποστάσεων και γωνιών. Οι αρχαίοι χρησιμοποίησαν το ύψος του ήλιου πάνω από τον ορίζοντα ως το πρώτο χρονόμετρο για να υπολογίζουν την ώρα. Βασικό πρόβλημα που έπρεπε να λύσουν ήταν ο υπολογισμός του ύψους του ήλιου ως προς τον ορίζοντα σε κάθε δεδομένη χρονική στιγμή. Από τότε ξεκίνησε η ιδέα της γωνίας. Ίσως η συνηθισμένη μονάδα μέτρησης των γωνιών, η μοίρα, προέρχεται από τους Βαβυλωνίους. Ο χωρισμός του κύκλου σε 360 ίσα μέρη, μάλλον οφείλεται στη μικρή διαφορά που παρουσιάζει ο αριθμός 360 από τη διάρκεια του χρόνου που είναι 365 ημέρες. (Ας μην ξεχνάμε ότι και σήμερα ακόμα, παρά την επικράτηση του δεκαδικού συστήματος, οι υποδιαιρέσεις, ώρα, λεπτά, δευτερόλεπτα, βασίζονται στο 60). Άλλωστε τα ουράνια σώματα, μετακινούνται σε γωνιακή απόσταση μικρότερη από μία μοίρα (360/365 του κύκλου) από τη μια νύχτα στην επόμενη.

Πολύ αργότερα, καθιερώθηκε ως μονάδα μέτρησης γωνιών το ακτίνιο. Ένα ακτίνιο είναι η επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί σε τόξο με μήκος ίσο με μία ακτίνα του κύκλου. Έτσι το μήκος s ενός τόξου κύκλου ακτίνας R που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία ϑ ακτινίων είναι $s=\vartheta R$ και το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ϑ ακτινίων, είναι $\varepsilon=\frac{R^2\vartheta}{2}$. Όταν, μάλιστα, η γωνία ϑ ακτινίων, είναι αρκετά μικρή τείνει να ταυτιστεί με το ημίτονό της, δηλαδή $\eta\mu\vartheta \approx \vartheta$, αφού $\lim\limits_{\vartheta\to0}\frac{\eta\mu\vartheta}{\vartheta}=1$. Ο όρος ακτίνιο, που απλουστεύει τόσο πολύ τους τύπους μας και τους υπολογισμούς μας επινοήθηκε το 1871 από τον James Thomson(E. Maor, Τριγωνομετρικά λουκούμια, 2002).

Από τις αρχές του $17^{ου}$ αιώνα, ο ρόλος των μαθηματικών στην περιγραφή του φυσικού κόσμου διαρκώς ενισχύεται. Και ενώ οι δημιουργοί της κλασικής τριγωνομετρίας ενδιαφέρονταν κυρίως να την εφαρμόσουν στον ουρανό (προβάδισμα σφαιρικής τριγωνομετρίας έναντι της επίπεδης), η νέα εποχή έχει στρέψει το ενδιαφέρον της κυρίως, στο μηχανικό κόσμο της καθημερινής ζωής. Η ανακάλυψη του Γαλιλαίου, ότι κάθε κίνηση μπορεί να αναλυθεί σε δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταξύ τους κινήσεις, κατέστησε αυτόματα την τριγωνομετρία απαραίτητη για τη μελέτη της κίνησης. Η «επιστήμη της βλητικής» τότε είχε ως κύριο αντικείμενο τον προσδιορισμό του βεληνεκούς ενός βλήματος που βάλλεται από κανόνι. Στην περίπτωση που u_0 είναι η ταχύτητα με την οποία εξέρχεται το βλήμα από το κανόνι, ϑ η γωνία βολής ως προς το έδαφος, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και η αντίσταση του αέρα αμελητέα, τότε το βεληνεκές υπολογίζεται από τον τύπο $R = \frac{u_0^2 \eta\mu 2\vartheta}{g}$. Από τον τύπο αυτό προκύπτει, ότι το βεληνεκές γίνεται μέγιστο όταν $\vartheta = 45^\circ$. Τα μεγάλα θαλασσινά ταξίδια εκείνης της εποχής, απαιτούσαν όλο και ακριβέστερες τεχνικές πλοήγησης, και αυτές με τη σειρά τους εξαρτιόνταν από την ύπαρξη ρολογιών μεγάλης ακριβείας. Τούτο οδήγησε τους επιστήμονες να μελετήσουν τις ταλαντώσεις διαφόρων ειδών ελατηρίων και εκκρεμών. Επίσης, οι εξελισσόμενες σε τεχνογνωσία τεχνικές κατασκευής μουσικών οργάνων, ώθησαν τους επιστήμονες να μελετήσουν τις παλμικές κινήσεις των μέσων που προκαλούν ήχους, όπως οι χορδές, οι μεμβράνες, οι καμπάνες και οι αεραγωγοί. Όλα αυτά ανέδειξαν το ρόλο της τριγωνομετρίας, στην περιγραφή, περιοδικών φαινομένων, και είχαν σαν αποτέλεσμα τη μεταστροφή του ενδιαφέροντος από τη «λογιστική» τριγωνομετρία (τη σύνταξη πινάκων) στις σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Στις 30 Μαρτίου του 1739 ο Leonhard Euler ανακοινώνει στην Ακαδημία Επιστημών της Αγίας Πετρούπολης μία εργασία, στην οποία εμφανίζεται για πρώτη φορά η μελέτη του λογισμού των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Τότε, ο Euler συνειδητοποίησε ότι η ημιτονοειδής και συνημιτονοειδής συνάρτηση προέκυπταν φυσικά ως λύσεις διαφορικών εξισώσεων που προέρχονταν από τη θεωρία των ταλαντώσεων. Από τα μεγαλύτερα άλλωστε, επιτεύγματα της Ανάλυσης του 19^{ου} αιώνα, είναι η θεωρία του Fourier που δείχνει ναι μεν ότι το ημίτονο και το συνημίτονο παίζουν ουσιαστικό ρόλο στη μελέτη όλων των περιοδικών φαινομένων, κάτι που ήταν γνωστό από προηγούμενους αιώνες, αλλά επιπλέον ότι είναι σημαντική και για πολλά μη περιοδικά φαινόμενα (Σ.Νεγρεπόντης, Απειροστικός Λογισμός τ. Ι, 1987)

• Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις

Η συνάρτηση e^x είναι η μόνη συνάρτηση που είναι ίση με την παράγωγό της. Πιο συγκεκριμένα, οι συναρτήσεις f που ικανοποιούν την εξίσωση $\mathrm{f'(x)=f(x)}$ έχουν τη μορφή $\mathrm{f(x)=ce^x}$. Ο σημαντικός ρόλος της συνάρτησης e^x στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες, είναι άμεση συνέπεια αυτού του γεγονότος. Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

1) Ο ρυθμός μείωσης της μάζας ενός ραδιενεργού υλικού λόγω διάσπασής του και η ραδιενέργεια που εκπέμπει είναι κάθε στιγμή ανάλογος της μάζας του m. Δηλαδή, $\mathrm{m'(t)=-am(t)}$. Οπότε, $\mathrm{m(t)=m_0e^{-at}}$, όπου $\mathrm{m_0}$ η μάζα τη χρονική στιγμή 0.

2) Αν ένα θερμό αντικείμενο, θερμοκρασίας $\mathrm{T_0}$ τοποθετηθεί σε περιβάλλον σταθερής θερμοκρασίας $\mathrm{T_1}$ τότε αυτό θα ψύχεται και θα ισχύει $\frac{dT}{dt} = -a(T - T_1)$, όπου Τ η θερμοκρασία του αντικειμένου την χρονική στιγμή t. Οπότε έχουμε $T=T_1+(T_0-T_1)e^{-\alpha t}$.

3) Όταν ένα επίπεδο κύμα, διαδίδεται σε ένα «απορροφητικό» μέσο, η έντασή του μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dx}} = -\alpha \mathrm{I}$ (1), όπου το x δηλώνει την απόσταση που διήνυσε το κύμα από κάποιο αρχικό σημείο (x=0) , όπου η έντασή του ήταν $\mathrm{I_0}$. Από τη λύση της (1) προκύπτει ότι: $\mathrm{I}=\mathrm{I_0}e^{-\alpha t}$

Υπάρχουν και άλλα πολλά φυσικά, βιολογικά, οικολογικά και οικονομικά φαινόμενα στα οποία κάποιο μεταβλητό μέγεθος αυξάνεται ή ελαττώνεται με ρυθμό που είναι ανάλογος του μεταβλητού εκείνου μεγέθους. Αυτά περιγράφονται από τις λογαριθμικές και εκθετικές συναρτήσεις, οι οποίες αποτελούν ένα ζωντανό κομμάτι τη φύσης και της μαθηματικής ανάλυσης (αναλυτικότερα, E.Maor, Η ιστορία ενός αριθμού, 2005)

• Κανόνες του De L' Hospital

Με τους κανόνες του L' Hospital επιτυγχάνεται ο υπολογισμός ορισμένων απροσδιορίστων μορφών με μεθόδους του διαφορικού λογισμού. Εξετάζονται οι απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{\infty}{\infty}$ και στη συνέχεια, $0\cdot\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}. Στο κεφάλαιο 1 μάθαμε ότι, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2$, με $l_2\neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l_1}{l_2}$. Το ερώτημα που τίθεται είναι τι συμβαίνει στην περίπτωση που $l_1=0$ και $l_2=0$. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το όριο του πηλίκου $\frac{f}{g}$ είναι μια απροσδιόριστη μορφή. Αυτό σημαίνει ότι το όριο ενδέχεται να υπάρχει, ενδέχεται όμως και να μην υπάρχει. Οι ειδικές μέθοδοι υπολογισμού τέτοιων ορίων είναι γνωστές ως *κανόνες του L' Hospital.* Τονίζουμε ότι δεν βρίσκουμε την τιμή $\frac{0}{0}$, ή οποιαδήποτε άλλη από τις απροσδιόριστες μορφές, αλλά βρίσκουμε όρια συναρτήσεων που έχουν αυτές τις μορφές αν πάρουμε χωριστά τα όρια.

Ποιες δραστηριότητες ή ερωτήσεις οδηγούν στη κατανόηση των βασικών εννοιών και των διαδικασιών του κεφαλαίου 4; Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να απαντούν οι μαθητές;

1) Αν $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ κοντά στο x_0 όπου $x_0\in R\cup\{+\infty,-\infty\}$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=m\in R$ τότε υπάρχει το όριο της f στο x_0; Είναι και αυτό ίσο με m; Σχεδιάστε ένα σχήμα και δικαιολογήστε τον ισχυρισμό σας.

2) Αν $g(x)\leq f(x)$ κοντά στο x_0 όπου $x_0\in R\cup\{+\infty,-\infty\}$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ τότε υπάρχει το όριο της f στο x_0; Είναι και αυτό $+\infty$; Σχεδιάστε ένα σχήμα και δικαιολογήστε τον ισχυρισμό σας.

3) Αν $f(x)\leq h(x)$ κοντά στο x_0 όπου $x_0\in R\cup\{+\infty,-\infty\}$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=-\infty$ τότε υπάρχει το όριο της f στο x_0; Είναι και αυτό $-\infty$; Σχεδιάστε ένα σχήμα και δικαιολογήστε τον ισχυρισμό σας.

4) Κατασκευάστε ένα τριγωνομετρικό κύκλο, τους άξονες των ημιτόνων, των συνημιτόνων, των εφαπτομένων και των συνεφαπτομένων . Αν Μ είναι ένα σημείο του κύκλου και το τόξο AM έχει μέτρο x ακτίνια , δώστε τους ορισμούς των αριθμών ημx , συνx, εφx , σφx.

5) Να αναφέρετε για κάθε τριγωνομετρική συνάρτηση το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, την περίοδο.

6) Εξηγήστε την ανισότητα: για κάθε $x\in R$ ισχύει $|\eta\mu x|\leq|x|$

7) Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x=0$.Κοντά στο 0 είναι $\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{1-\eta\mu^2 x}$ άρα $\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu x=1$.Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{h\to 0}\eta\mu\left(x+h\right)=\eta\mu x$.Αποδείξτε ότι και οι συναρτήσεις $y=\sigma\upsilon\nu x\,,y=\varepsilon\varphi x\,,y=\sigma\varphi x$ είναι συνεχείς.

8) Κάνοντας χρήση του ορίου $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$, αποδείξτε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$,

$\left(\eta\mu x\right)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\eta\mu\left(x+h\right)-\eta\mu x}{h}=\sigma\upsilon\nu x\,,\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'=\left(\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)'=-\eta\mu x\,,\left(\varepsilon\varphi x\right)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$,

$\left(\sigma\varphi x\right)'=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

9) Δικαιολογήστε την ανισότητα: για κάθε $x\in R$ ισχύει $e^x\geq x+1$. Αν θέσουμε όπου x το –x, η ανισότητα γίνεται: $e^{-x}\geq -x+1$ οπότε για $x<1$ έχουμε: $1+x\leq e^x\leq\dfrac{1}{1-x}$. Με τη βοήθεια αυτής της διπλής ανισότητας, αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ και στη συνέχεια, ότι: $\left(e^x\right)'=\lim\limits_{h\to o}\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x$.

10) Στην ανισότητα $e^x\geq x+1$ αν θέσουμε όπου x το $\ln x, x>0$, γίνεται: $\ln x\leq x-1$ και αν σε αυτή θέσουμε όπου x το $\dfrac{1}{x}$ έχουμε $\ln x\geq 1-\dfrac{1}{x}$. Τελικά:

$1-\dfrac{1}{x}\leq \ln x\leq x-1$. Με τη βοήθεια αυτής της διπλής ανισότητας να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$ και $\left(\ln x\right)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln\left(x+h\right)-\ln x}{h}=\dfrac{1}{x}$.

12) Να αποδείξετε ότι: $\left(\alpha^x\right)'=\alpha^x\ln\alpha$,$(0<\alpha\neq 1) x\in R$

13) Να αποδείξετε ότι: $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$,$\left(\alpha\in R-\square\right) x>0$

Ποια είναι τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα μετά από την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου 4;

Μετά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου 4 οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί:

Μ1. Να κάνουν χρήση του κριτηρίου παρεμβολής στον υπολογισμό του ορίου όπως: 1) Αν ισχύει $\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\leq\left|x-y\right|$ για κάθε $x,y\in R$ να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$. 2) Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f\left(x\right)\right|=0$ να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=0$

Μ2. Να ερμηνεύουν και να κάνουν χρήση του κριτηρίου: αν $x_0 \in R \cup \{+\infty, -\infty\}$, $\mathrm{g}(x) \le \mathrm{f}(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{g}(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{f}(x) = +\infty$

Μ3. Να ερμηνεύουν και να κάνουν χρήση του κριτηρίου: : αν $x_0 \in R \cup \{+\infty, -\infty\}$, $\mathrm{f}(x) \le \mathrm{g}(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{g}(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{f}(x) = -\infty$

Μ4. Να αποδεικνύουν ότι οι συναρτήσεις $y = \text{ημ}x$, $y = \text{συν}x$, $y = \text{εφ}x$, $y = \text{σφ}x$ είναι συνεχείς.

Μ5. Να αποδεικνύουν ότι: $(\text{ημ}x)' = \text{συν}x, (\text{συν}x)' = -\text{ημ}x, (\text{εφ}x)' = \dfrac{1}{\text{συν}^2 x}, (\text{σφ}x)' = -\dfrac{1}{\text{ημ}^2 x}$

Μ6. Να υπολογίζουν την περίοδο, την μονοτονία, τα ακρότατα (αν υπάρχουν), τις ασύμπτωτες (αν υπάρχουν), την κυρτότητα και να σχεδιάζουν τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $y = \eta\mu x$, $y = \sigma\upsilon\nu x$, $y = \varepsilon\varphi x$ και $y = \sigma\varphi x$.

Μ7. Να μετασχηματίζουν συναρτήσεις της μορφής $\mathrm{f}(t) = \alpha\eta\mu(\omega t + \varphi) + \beta$ σε κατάλληλη μορφή και να σχεδιάζουν τις γραφικές παραστάσεις τους όπως:1)Από την πρίζα του σπιτιού μας παίρνουμε εναλλασσόμενη τάση $V = 325\eta\mu 100\pi t$ αυτό σημαίνει ότι α=V_0 =325Volt , ω=100πrad/sec, $\varphi = 0$ άρα η περίοδος της τάσης είναι $\dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{100\pi} = 0{,}02\sec$. 2)Αν $\mathrm{f}(x) = 2\eta\mu\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ τότε η γραφική της παράσταση προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\mathrm{g}(x) = 2\eta\mu 2x$ κατά $\dfrac{\pi}{6}$ προς τα αριστερά 3) Δ19 του Π.Σ.

Μ8. Να υπολογίζουν όρια συναρτήσεων που προκύπτουν ως αποτέλεσμα πράξεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων με άλλες βασικές συναρτήσεις, όπως:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{ημ}x}{x}, \quad \lim_{x \to 0}\left(x\text{ημ}\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad \lim_{x \to 0}\left(\text{ημ}x\text{συν}\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad \lim_{x \to 0} \frac{\text{ημ}3x\text{ημ}^2 x}{x^3}, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\text{συν}x}$$

Μ9. Να μελετούν ως προς τη συνέχεια και να υπολογίζουν παραγώγους συναρτήσεων που είναι αποτέλεσμα πράξεων ή και συνθέσεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων με άλλες συναρτήσεις.

Μ10. Να δικαιολογούν διαισθητικά την ανισότητα: $e^x \ge x + 1$,να αποδεικνύουν ότι αν $\mathrm{f}(x) = e^x$ τότε $\mathrm{f}'(0) = 1$ και $\mathrm{f}'(x) = \left(e^x\right)' = e^x$

Μ11. Να αποδεικνύουν ότι: $\left(\alpha^x\right)' = \left(e^{x\ln\alpha}\right)' = \alpha^x \ln\alpha, x \in R, 0 < \alpha \ne 1$

Μ12. Να σχεδιάζουν τις γραφικές παραστάσεις εκθετικών συναρτήσεων και να αναφέρουν τις βασικές ιδιότητές τους (μονοτονία , ασύμπτωτη , ιδιότητες δυνάμεων).

Μ13. Να ορίζουν την λογαριθμική συνάρτηση $\mathrm{g}(x) = \ln x, x > 0$ και να αποδεικνύουν ότι: οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\mathrm{f}(x) = e^x, x \in R$ και $\mathrm{g}(x) = \ln x, x > 0$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

M14. Να αποδεικνύουν ότι: 1) $\ln x \le x-1\,,\ x>0$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$, 3) $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}\ ,\ x>0$.

M15. Να σχεδιάζουν την γραφική παράσταση της $y=\ln x, x>0$ και να αναφέρουν τις βασικές ιδιότητές της (μονοτονία, ασύμπτωτη, ιδιότητες λογαρίθμων).

M16. Επιλύουν απλές εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις και ανισώσεις.

M17. Υπολογίζουν όρια και παραγώγους συναρτήσεων που είναι αποτέλεσμα πράξεων ή και συνθέσεων της λογαριθμικής ή της εκθετικής με άλλες συναρτήσεις.

M18. Μελετούν και σχεδιάζουν τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που είναι αποτέλεσμα πράξεων ή και συνθέσεων της λογαριθμικής ή της εκθετικής με άλλες συναρτήσεις.

M19. Αποδεικνύουν και εφαρμόζουν στη λύση προβλημάτων την πρόταση: « $f'\left(x\right)=kf\left(x\right)$ για κάθε $x\in\Delta$ (Δ διάστημα) αν και μόνο αν $f\left(x\right)=ce^{kx}$ » .

M20. Λύνουν προβλήματα εκθετικής μεταβολής όπως: 1)ο πληθυσμός $P(t)$ σε εκατομμύρια μιας κοινωνίας βακτηριδίων αυξάνεται με ρυθμό $P'(t)=\dfrac{1}{10}e^{\frac{t}{20}}$ ανά λεπτό. Να βρείτε την αύξηση του πληθυσμού στα πρώτα 60 λεπτά. 2)Το μήκος ενός ψαριού την χρονική στιγμή t αυξάνεται με ρυθμό ανάλογο του $M-y$ όπου M είναι το μέγιστο δυνατό μήκος του είδους και y το μήκος του ψαριού τη στιγμή της μέτρησης δηλαδή $y'\left(t\right)=k\left(M-y\right)$, να υπολογιστεί ο χρόνος στον οποίο το ψάρι θα έχει μήκος 20cm αν την χρονική στιγμή t_0 είναι $y(t_0)=10$ cm Δίνονται $M=60cm$ και $k=0{,}05$ 3)Δ20 του Π.Σ.

M21. Υπολογίζουν την παράγωγο της συνάρτησης $f\left(x\right)=x^{\alpha}, x>0(\alpha\in R-\square)$ και χαράσσουν τη γραφική της παράσταση 1) όταν α>1 2)όταν 0<α<1 3) όταν α<0.

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Ποια σημεία του κεφαλαίου 4 χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής;

Ακολουθούν κάποιες συνήθεις παρανοήσεις των μαθητών και προτείνεται ως ένας τρόπος αντιμετώπισής τους η χρήση αντιπαραδειγμάτων.

1) Αν μια συνάρτηση είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα $\left[\alpha\,,\,\beta\right]$ και η γραφική της παράσταση δεν περιέχει οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα τότε δεν μπορεί να παίρνει ολικό ακρότατο σε άπειρα σημεία του $\left[\alpha\,,\,\beta\right]$.

<u>Αντιπαράδειγμα</u>

Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \eta\mu\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ έχει ολικό μέγιστο το 1 σε άπειρα σημεία του κλειστού διαστήματος $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

2) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η παράγωγος f' της f είναι συνεχής στο x_0.

Αντιπαράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{\chi} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, όμως η πρώτη της παράγωγος

$f'(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$.

3) Αν $g(x_0)=0$ τότε η συνάρτηση $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=x_0$.

Αντιπαράδειγμα

$f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=x$, $g(0)=0$ όμως $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$ άρα η ευθεία $x=0$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $F(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$

4) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο (α,β) και έχει ένα τοπικό μέγιστο στο x_0, τότε υπάρχει $\delta>0$, ώστε στο διάστημα $(-\delta,x_0)$ η f να είναι γνησίως αύξουσα και στο (x_0,δ) η f να είναι γνησίως φθίνουσα.

Αντιπαράδειγμα

$$f(x)=\begin{cases} 2-x^2\left(2+\eta\mu\frac{1}{x}\right) & ,x\neq 0 \\ 2 & ,x=0 \end{cases}$$

5) Δ18 του Π.Σ. – Ενδεικτική απάντηση

1) Αν $f(x)=\begin{cases} x^2\left(\etaμ\frac{1}{x}+2\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, $g(x)=x^2$, $h(x)=3x^2$

Τότε έχουμε :

$$-1\le \etaμ\left(\frac{1}{x}\right)\le 1 \Leftrightarrow 1\le 2+\etaμ\left(\frac{1}{x}\right)\le 3 \Leftrightarrow x^2\le x^2\left(2+\etaμ\left(\frac{1}{x}\right)\right)\le 3x^2 \Leftrightarrow g(x)\le f(x)\le h(x)$$

Άρα η γραφική παράσταση της f είναι ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις των g και h.

2) Είναι $g(0)=h(0)=0$ και $g'(0)=h'(0)=0$ άρα οι γραφικές παραστάσεις των g και h έχουν ως εφαπτομένη στο σημείο O(0,0) τον άξονα $x'x$.

3) Για $x>0$ έχουμε: $\frac{g(x)}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{h(x)}{x}$ και κάνοντας χρήση του κριτηρίου παρεμβολής βρίσκουμε: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0$, όμοια για $x<0$,άρα $f'(0)=0$,επομένως η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο O(0,0) είναι ο άξονας $x'x$.Οι γραφικές παραστάσεις των f και g καθώς και των f και h έχουν άπειρα κοινά σημεία και αυτό προκύπτει από την επίλυση των εξισώσεων: $f(x)=g(x)$

και $f(x)=h(x)$. Πράγματι για $x\neq 0$ έχω:

$$f(x)=h(x)\Leftrightarrow x^2\left(\etaμ\left(\frac{1}{x}\right)+2\right)=3x^2\Leftrightarrow\frac{1}{x}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$$ όπου k ακέραιος.

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2\left(\etaμ\left(\frac{1}{x}\right)+2\right)=x^2\Leftrightarrow\frac{1}{x}=2k\pi-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2k\pi-\frac{\pi}{2}}$$ όπου k ακέραιος.

4) $f'(x)=\begin{cases} 2x\left(\etaμ\left(\frac{1}{x}\right)+2\right)-\sigmaυν\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ η f' δεν είναι συνεχής στο 0. «αφού όταν οι τιμές $x=\frac{1}{2\nu\pi},\nu=1,2,3,\ldots$ πλησιάζουν το 0 τότε οι τιμές $f'(x)=f'(\frac{1}{2\nu\pi}),\nu=1,2,3,\ldots$ πλησιάζουν τον αριθμό

-1 και όταν οι τιμές $x=\dfrac{1}{2\nu\pi+\dfrac{\pi}{2}}, \nu=1,2,3,\ldots$ επίσης πλησιάζουν το 0 τότε οι τιμές $f'(x)=f'(\dfrac{1}{2\nu\pi+\dfrac{\pi}{2}}), \nu=1,2,3,\ldots$ πλησιάζουν το 0».

<u>Σημείωση</u>: Οι μαθητές καλό είναι να δουν τη γραφική παράσταση των f και f′ με τη βοήθεια κάποιου εκπαιδευτικού λογισμικού, ώστε να κατανοήσουν τη συμπεριφορά των συναρτήσεων αυτών σε περιοχή του μηδενός.

6) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Τότε δεν υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

<u>Αντιπαράδειγμα</u>

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=1$, Όμως το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+\eta\mu x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\sigma\upsilon\nu x)$ δεν υπάρχει (η μη ύπαρξη αυτού του ορίου να γίνει διαισθητικά με σχεδιασμό της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=1+\sigma\upsilon\nu x$.

7) Δ21 και Δ22 του Π.Σ.

Ενδεικτική απάντηση στην Δ22 του Π.Σ.

1) Αν $T(t)$ είναι η θερμοκρασία t ώρες μετά την διάπραξη του φόνου τότε: $\dfrac{dT}{dt}=k\big(T(t)-20\big)$ ή $T'(t)=k\big(T(t)-20\big)$ οπότε και $\big(T(t)-20\big)'=k\big(T(t)-20\big)$ πολλαπλασιάζοντας με e^{-kt} έχουμε: $\Big(e^{-kt}\big(T(t)-20\big)\Big)'=0$ άρα $e^{-kt}\big(T(t)-20\big)$ =c όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι $T(0)=37$ άρα c=17 και $T(t)=17e^{kt}+20$. Είναι $T(2)=35$ άρα $k=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{15}{17}$ και $T(t)=17\left(\dfrac{15}{17}\right)^{\frac{t}{2}}+20$.

3) $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)=20$

4) $T(t)=30 \Leftrightarrow 17\left(\dfrac{15}{17}\right)^{\frac{t}{2}}=10 \Leftrightarrow t=2\dfrac{\ln\dfrac{10}{17}}{\ln\dfrac{15}{17}}$ και $t\approx 8$ άρα πριν οκτώ ώρες στις 12μμ.

8) Αν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=l\in R$, τότε η γραφική παράσταση της f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

<u>Αντιπαράδειγμα</u>

Αν $f(x)=x+\eta\mu x$, τότε είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ και το $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\eta\mu x$ δεν υπάρχει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{ο}: Ολοκληρωτικός Λογισμός

Εισαγωγή

Ο Αριστοτέλης για τη κατασκευή ενός μαθηματικού συστήματος προϋπέθετε την ύπαρξη κοινών εννοιών ως "υπόβαθρο κάθε παραγωγικού συλλογισμού", και διάκρινε δύο είδη εννοιών, τις θεμελιώδεις, οι οποίες δεν μπορούν να ορισθούν και αυτές που παράγονται από τις θεμελιώδεις (Bunt, Jones & Bedient, 1981, σ. 160-161). Οι αρχαίοι Έλληνες, όσον αφορά το μήκος και το εμβαδόν, χρησιμοποιούσαν καθαρά γεωμετρικούς όρους για την έκφρασή τους παρά αριθμητικές τιμές (Davis, 2007, σ. 25). Παρότι, όμως στους ορισμούς του Ευκλείδη ορίζεται σαφώς η έννοια της επιφάνειας (θεμελιώδης έννοια), δεν γίνεται άμεσα αναφορά στο εμβαδόν, ούτε στους ορισμούς ούτε τα αιτήματα/αξιώματα (Bunt κ.α. , 1981, σ. 160-166). O Apostol (1962) πιθανολογεί ότι, ο Αρχιμήδης ίσως θεωρούσε την έννοια του εμβαδού ως μη οριζόμενη και τις ιδιότητες του εμβαδού ως αξιώματα◦ όμως, το έργο του για τον υπολογισμό του εμβαδού παραβολικού χωρίου με τη μέθοδο της εξάντλησης υποδεικνύει ένα "λογικοφανή δρόμο προς τον ορισμό της εννοίας του εμβαδού" και "υποβάλλει ένα τρόπο ορισμού μιας πολύ γενικότερης έννοιας", της έννοιας του ολοκληρώματος, το οποίο "μας οδηγεί με τη σειρά του στον ορισμό και τον υπολογισμό ... και άλλων εννοιών, όπως είναι το μήκος τόξου, ο όγκος, το έργο κλπ" (Apostol, 1962, σ. 11). Οι ιδέες του Αρχιμήδη, σε αναφορά του Heath (2001) για τον Chasles "γέννησαν τον απειροστικό λογισμό (Ανάλυση), που έγινε κατανοητός και τελειοποιήθηκε διαδοχικά από τους Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz και Νεύτωνα" (σ. 37). Εν γένει, η έννοια του ολοκληρώματος αποτελεί το απαύγασμα προσπαθειών δεκάδων αιώνων φωτισμένων μυαλών Εύδοξου, Αρχιμήδη, Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz, Νεύτωνα, Cauchy, Riemann Lebesgue και πολλών περισσότερων.

Τι περιέχει το κεφάλαιο 5 και πώς αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό

Σ’ αυτό το κεφάλαιο δίνουμε απάντηση σε δύο καίρια ερωτήματα τα οποία φαίνεται να μην σχετίζονται, τελικά όμως μέσω του θεμελιώδους θεωρήματος της Ανάλυσης συνενώνονται σε ένα ενιαίο πεδίο. Το πρώτο ερώτημα αφορά στην εύρεση μιας συνάρτησης μόνο από την πληροφορία για το ρυθμό μεταβολής της. Οδηγούμεθα έτσι στην έννοια της παράγουσας μιας συνάρτησης, στον υπολογισμό των παραγουσών των βασικών συναρτήσεων και των ιδιοτήτων τους. Το δεύτερο ερώτημα αφορά στην εύρεση του εμβαδού του χωρίου που βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης.

Ξεκινάμε με την εύρεση του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = 0$ και $y = 0$. Χωρίζουμε το χωρίο αυτό σε ορθογώνιες λωρίδες και έπειτα αυξάνουμε τον αριθμό τους απεριόριστα. Προσθέτοντας όλα αυτά τα εμβαδά των λωρίδων, παίρνουμε το ζητούμενο εμβαδόν. Η ιδέα για τον υπολογισμό του εμβαδού δεδομένου σχήματος, θεωρώντας το ως άθροισμα πολλών μικρών σχημάτων, οφείλεται στους αρχαίους Έλληνες (Δημόκριτος, Εύδοξος, Αρχιμήδης). Επεκτείνοντας την παραπάνω ιδέα καταλήγουμε στην έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f σε κλειστό διάστημα $\left[\alpha, \beta\right]$ και στις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

Στη συνέχεια, πραγματευόμαστε το θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης, με τη βοήθεια των δραστηριοτήτων Δ24 και Δ25 που περιέχονται στο Πρόγραμμα Σπουδών. Μετά από αυτές τις δραστηριότητες διατυπώνουμε την πρόταση: «Αν $f:\Delta\to R$, όπου Δ διάστημα είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε για κάθε $\alpha\in\Delta$, η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ x\in\Delta$ είναι μια παράγουσα της f». Η εισαγωγή της πρότασης αυτής γίνεται για ένα μόνο σκοπό: να αποδειχθεί το θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης και να αναδειχθεί η σύνδεση του διαφορικού με τον ολοκληρωτικό λογισμό. **Για τον λόγο αυτό δεν θα διδαχθούν ασκήσεις που αναφέρονται στην παραγώγιση της συνάρτησης** $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ και γενικότερα της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt$. Τέλος γίνονται εφαρμογές του ολοκληρώματος στον υπολογισμό του εμβαδού επιπέδων χωρίων και στον υπολογισμό του όγκου των στερεών που προκύπτουν από περιστροφή ως προς τον άξονα x'x.

Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες και έννοιες του κεφαλαίου 5.

- **Εμβαδά και όγκοι**

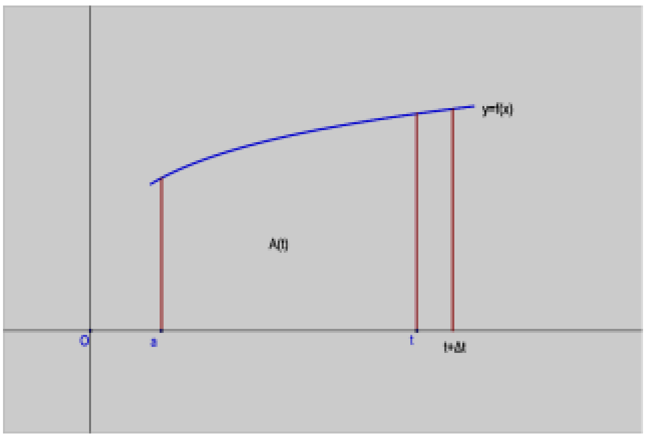
Οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν να υπολογίζουν σωστά το εμβαδόν του ορθογωνίου, του ορθογωνίου τριγώνου και του τραπεζίου με μια πλευρά κάθετη προς τις παράλληλες βάσεις. Επίσης, υπολόγιζαν σωστά τους όγκους των πρισμάτων και των κυλίνδρων πολλαπλασιάζοντας το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος. Όσον αφορά το εμβαδόν του μοναδιαίου κύκλου, αρκούνταν στην χονδροειδή προσέγγιση π=3.

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι υπολόγιζαν εμβαδά και όγκους διαφόρων σχημάτων βασιζόμενοι σε κανόνες άλλοι από τους οποίους ήταν σωστοί και άλλοι όχι. Τα πιο αξιόλογα αποτελέσματα είναι ο υπολογισμός του όγκου μιας κόλουρης πυραμίδας με τετραγωνική βάση και μια παράπλευρη ακμή κάθετη στη βάση και ο υπολογισμός του εμβαδού του μοναδιαίου κύκλου με βάση έναν κανόνα που οδηγεί στην τιμή π 3,16. (Ιστορία των επιστημών και της τεχνολογίας, ΟΕΔΒ, 1999)

«Ούτε οι Βαβυλώνιοι, ούτε οι Αιγύπτιοι έφθασαν στην μαθηματική αφαίρεση, στην αυστηρή διατύπωση υποθέσεων και συμπερασμάτων, στην αποδεικτική διαδικασία. Δεν φαίνεται πουθενά ο σαφής διαχωρισμός του προσεγγιστικού από τον ακριβή υπολογισμό. Όλα αυτά είναι από τα λαμπρότερα δημιουργήματα του ελληνικού πολιτισμού» (Σ. Νεγρεπόντης, ο.π, σελ. 186) Ειδικότερα οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί μέσα από την Γεωμετρία, επινόησαν και έφθασαν σε υψηλή τελειότητα τη **μέθοδο της εξάντλησης**. Η μέθοδος της εξάντλησης προέβλεπε το γέμισμα μιας επιφάνειας που ορίζεται από μία καμπύλη με ένα ή περισσότερα πολύγωνα που άφηναν κάποιο μικρό μέρος της επιφάνειας ακάλυπτο. Στη συνέχεια ο αριθμός των πολυγώνων αυξανόταν, ώστε να ελαττώνεται το μέγεθος της ακάλυπτης επιφάνειας. Με αυτόν τον τρόπο μπορούσαν να υπολογίσουν πολλά εμβαδά με οποιοδήποτε βαθμό ακρίβειας ήθελαν. Στον Εύδοξο τον Κνίδιο (περίπου 408-355π.Χ.) οφείλεται η επινόηση της μεθόδου της εξάντλησης και αν δεν αναφερθούμε σε ειδικά τεχνάσματα, είναι παρόμοια με τα «αθροίσματα Riemann». Το δωδέκατο βιβλίο των Στοιχείων αναφέρεται στους υπολογισμούς των εμβαδών και των όγκων με τη μέθοδο της εξάντλησης του Ευδόξου. Ένα από τα χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου της εξάντλησης είναι ο υπολογισμός του εμβαδού του παραβολικού χωρίου από τον Αρχιμήδη στην εργασία του «Τετραγωνισμός Παραβολής». Σε σύγχρονη διατύπωση, ο Αρχιμήδης υπολογίζει το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^2dx$. Στην εργασία του Αρχιμήδη «Κύκλου Μέτρησις», ο Συρακούσιος μαθηματικός, ίσως ο μεγαλύτερος της αρχαιότητας, ασχολείται με τον υπολογισμό του αριθμού π, δηλαδή του ολοκληρώματος $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$, το οποίο δεν είναι δυνατό να υπολογιστεί ακριβώς. « Οι

Άραβες μετέφρασαν τα σημαντικότερα έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών, κυρίως του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη, του Απολλώνιου και του Πτολεμαίου κατά τον 8^o και 9^o μ.Χ. αιώνα και τους μελέτησαν σοβαρά. Ο Άραβας μαθηματικός Al-Haitham (965-1039μ.Χ.) μεταξύ άλλων, υπολόγισε τον όγκο στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του χωρίου $0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le 1$ γύρω από τον οριζόντιο άξονα x'x, με σημερινό συμβολισμό, υπολόγισε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \pi(1-x^2)^2 dx = \frac{8\pi}{15}$.»[1.Σελ.194]. « Η πρώτη έκδοση των έργων του Αρχιμήδη σε λατινική μετάφραση , και με τα ελληνικά πρωτότυπα έγινε το 1544 στη Βασιλεία (Ελβετία) και είχε τεράστια και καθοριστική επίδραση στη μαθηματική εξέλιξη της Ευρώπης.»[1. Σελ.202]. Σε πρώτο στάδιο προκάλεσε το ενδιαφέρον των Μαθηματικών της εποχής στη μελέτη των προβλημάτων ολοκλήρωσης, υπολογισμού εμβαδών και όγκου και κέντρου βάρους. Από τη μετάφραση αυτή και ειδικότερα του «Κύκλου Μέτρησις» εμπνεύστηκε το 1579 ο Γάλλος μαθηματικός François Viète για να καταλήξει στον εντυπωσιακό τύπο $\frac{2}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \ldots$ Η επινόηση αυτού του άπειρου γινομένου αποτέλεσε σταθμό στην ιστορία των μαθηματικών, γιατί για πρώτη φορά μια άπειρη διαδικασία έπαιρνε τη μορφή μαθηματικού τύπου. Ο 17^{ος} αιώνας γνώρισε μια πρωτοφανή άνθιση της μαθηματικής επιστήμης και κυρίως της ανάλυσης. Πολλοί μαθηματικοί μεταφράζουν και σχολιάζουν τον Αρχιμήδη.

Στον Johannes Kepler (1571-1630), οφείλουμε την ανακάλυψη των τριών νόμων της κίνησης των πλανητών. Ο δεύτερος νόμος, ο νόμος των εμβαδών αναφέρει ότι *«το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει έναν πλανήτη με τον ήλιο (η επιβατική ακτίνα) διαγράφει σε ίσους χρόνους ίσα εμβαδά»,* άρα το πρόβλημα της εύρεσης του εμβαδού ενός ελλειπτικού τμήματος και γενικότερα κάθε κωνικής τομής , αποκτά αποφασιστική σημασία. Οι αρχαίοι Έλληνες επηρεασμένοι και από τα παράδοξα του Ζήνωνα, είχαν απορρίψει κάθε άπειρη διαδικασία και έννοια ορίου, τουλάχιστον, στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων τους. Πολύ αργότερα, ο Kepler και οι σύγχρονοί του, χρησιμοποίησαν την έννοια του απείρου και την αξιοποίησαν για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων. Αποτέλεσμα ήταν η ***μέθοδος των αδιαιρέτων.*** Σύμφωνα με αυτήν, αν θεωρήσουμε ότι ένα επίπεδο σχήμα αποτελείται από άπειρο πλήθος στενών λωρίδων, των ονομαζόμενων *αδιαιρέτων*, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το εμβαδόν της επιφάνειας του σχήματος. Ένα αδιαίρετο, εκλαμβάνεται ως μια απείρως μικρή ποσότητα (ουσιαστικά ως ποσότητα μηδενικού μεγέθους) οπότε, αν προσθέσουμε οποιοδήποτε αριθμό από αυτές τις ποσότητες το αποτέλεσμα θα είναι πάλι μηδέν (διακρίνουμε εδώ την απροσδιοριστία $\infty \cdot 0$). Η μέθοδος, όταν εφαρμόζεται απαιτεί ο μελετητής να εφευρίσκει κατάλληλο είδος αδιαιρέτων για κάθε πρόβλημα. Παρά πολυπλοκότητά της, η μέθοδος, σε αρκετές περιπτώσεις, παρήγε αποτελέσματα. Ο Kepler ήταν από τους πρώτους που εφάρμοσε τη μέθοδο, για να υπολογίσει τον όγκο ενός πλήθους στερεών εκ περιστροφής επεκτείνοντάς την στις τρείς διαστάσεις (θεώρησε το στερεό, σαν σύνολο άπειρων λεπτών φετών και στη συνέχεια πρόσθετε τους επιμέρους όγκους). Ο Kepler και οι σύγχρονοι του, εφαρμόζοντας αυτές τις ιδέες έφτασαν ένα βήμα πριν από το σύγχρονο ολοκληρωτικό λογισμό (αναλυτικότερα Σ. Νεγρεπόντης, ο.π, 1987, E.Maor, H ιστορία ενός αριθμού 2005)



• Θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης

Στα μέσα του 17^{ου} αιώνα, οι βασικές αρχές του ολοκληρωτικού λογισμού ήταν αρκετά διαδεδομένες στη μαθηματική κοινότητα . Οι μέθοδοι των αδιαιρέτων και της εξάντλησης δεν κατέστη δυνατό να ενταχθούν σε ένα ενοποιημένο σύστημα. Κάθε πρόβλημα απαιτούσε διαφορετική προσέγγιση, και η επιτυχία εξαρτιόταν από τη γεωμετρική επινοητικότητα, τις αλγεβρικές δεξιότητες και κατά μεγάλο ποσοστό ,από την τύχη. Θεωρήθηκε λοιπόν αναγκαία μια γενική και συστηματική μέθοδος –ένα σύνολο αλγορίθμων-που θα επέτρεπε να λύνονται τα συγκεκριμένα προβλήματα με αποτελεσματικότητα. Τη μέθοδο αυτή παρουσίασαν ο Νεύτων και ο Leibniz. Η παράγωγος, εκτός της θεμελιώδους σημασίας της για το διαφορικό λογισμό, είναι το κλειδί για την περαιτέρω ανάπτυξη του ολοκληρωτικού λογισμού. Με άλλα λόγια, τα δύο θεμελιώδη προβλήματα της Ανάλυσης, το πρόβλημα της εφαπτομένης και το πρόβλημα του εμβαδού, είναι αντίστροφα. Ας δούμε τώρα, μια εμπειρική ερμηνεία του θεμελιώδους θεωρήματος:

Έστω $A(t)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες x=a, x=t , τον άξονα x'x και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=\mathrm{f}(x)$. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού στο διάστημα [t , t + Δ t] είναι $\dfrac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}$. Όταν Δ t $\to$0, το εμβαδόν της στενής λωρίδας που περικλείεται από τις ευθείες x=t , x= t + Δ t τον άξονα των x'x και της γραφική παράσταση της f είναι περίπου ίσο με $\mathrm{f}(t)\cdot\Delta t$, δηλαδή προκύπτει : $\dfrac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}$ = f(t), οπότε $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}=\mathrm{f}(t)$ ή $\mathrm{A}'(t)=\mathrm{f}(t)$. Δηλαδή η συνάρτηση Α($t$), είναι παράγουσα της f.

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να απαντούν οι μαθητές;

- Να περιγράψετε την διαδικασία που ακολουθούμε για τον υπολογισμό του εμβαδού του παραβολικού χωρίου.
- Πως συσχετίζεται ο υπολογισμός του εμβαδού του παραβολικού χωρίου με την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος της f από α έως β;
- Διατυπώστε και δώστε γεωμετρικές ερμηνείες (ερμηνεύοντας το ολοκλήρωμα ως εμβαδόν) ή όπου είναι δυνατόν αποδείξεις των ιδιοτήτων του ορισμένου ολοκληρώματος.
- Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης της μορφής $F(x)=\int_{\alpha}^{x}\mathrm{f}(t)dt$ και εξηγήστε γιατί η παράγωγος F$'$ της F είναι f.
- Έχει κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα παράγουσα; Ποια είναι η παράγουσα της $\mathrm{f}(x)=e^{-x^2}$;
- Διατυπώστε και αποδείξτε το 2^{ο} θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης.
  Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από τις ευθείες $y=x, x=r, r>0$ και τους άξονες $x'x, y'y$.

1)Με τα σημεία $0,\frac{r}{\nu},\frac{2r}{\nu},\frac{3r}{\nu},...,\frac{(\nu-1)r}{\nu},\frac{\nu r}{\nu}$ χωρίζουμε το διάστημα $[0\ ,\ r]$ σε ν ίσα υποδιαστήματα μήκους $\frac{r}{\nu}$

2) Θεωρούμε τα ορθογώνια με βάση το διάστημα $\left[\frac{(k-1)r}{\nu}\ ,\ \frac{kr}{\nu}\right]$, $k=1,2,3,...,\nu$ και ύψος $\frac{kr}{\nu}$, $k=1,2,3,...,\nu$

3) Περιστρέφουμε το χωρίο γύρω από τον άξονα x'x, οπότε ο όγκος του κώνου που παράγεται είναι περίπου ίσος με το άθροισμα των όγκων κυλίνδρων: $\pi\left(\frac{r}{\nu}\right)^2\frac{r}{\nu}+\pi\left(\frac{2r}{\nu}\right)^2\frac{r}{\nu}+\pi\left(\frac{3r}{\nu}\right)^2\frac{r}{\nu}+...+\pi\left(\frac{\nu r}{\nu}\right)^2\frac{r}{\nu}$ και η προσέγγιση είναι τόσο καλύτερη όσο πιο μεγάλος είναι ο ν.

4) Τελικά ο όγκος που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι το όριο του προηγουμένου αθροίσματος όταν $\nu\to+\infty$ δηλαδή $\frac{\pi r^3}{3}$ ίσος με $\int_0^r \pi x^2 dx$.Αν f είναι μια συνεχής και μη αρνητική συνάρτηση ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha\ ,\ \beta]$ τότε ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$,τις ευθείες $x=\alpha\ , x=\beta$ και την γραφική παράσταση της f γύρω από τον άξονα $x'x$ δίνεται από τον τύπο…

Ποια είναι τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα μετά από την ολοκλήρωση της διδασκαλίας του κεφαλαίου 5;

Μετά την ολοκλήρωση του κεφαλαίου 5 οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί:

Μ1. Να ορίζουν την παράγουσα μιας συνάρτησης $f:\Delta\to R$ (Δ διάστημα).

Μ2. Να αποδεικνύουν ότι: αν $F:\ \Delta\to R$ είναι μια παράγουσα της $f:\Delta\to R$ (Δ διάστημα) τότε

1) όλες οι συναρτήσεις της μορφής $F(x)+c$ με c πραγματική σταθερά είναι παράγουσες της f.

2) αν G είναι παράγουσα της f τότε η G παίρνει την μορφή $G(x)=F(x)+c$ με c πραγματική σταθερά.

Μ3. Να συνθέσουν πίνακα παραγουσών βασικών συναρτήσεων από αντίστοιχους πίνακες παραγώγων, όπως:

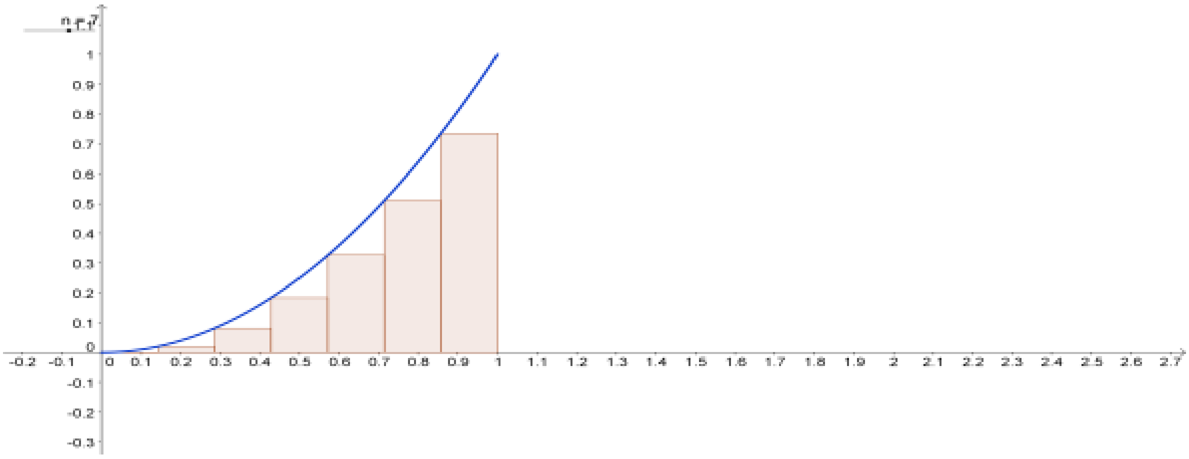
1) $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$ άρα οι παράγουσες της $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι οι συναρτήσεις $F(x)=\eta\mu x+c$ 2) $(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ άρα οι παράγουσες της $f(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ σε διάστημα $\Delta\subseteq\left(\kappa\pi-\frac{\pi}{2},\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right),\kappa\in\mathbb{Z}$ είναι οι συναρτήσεις $F(x)=\varepsilon\varphi x+c$ κλπ.

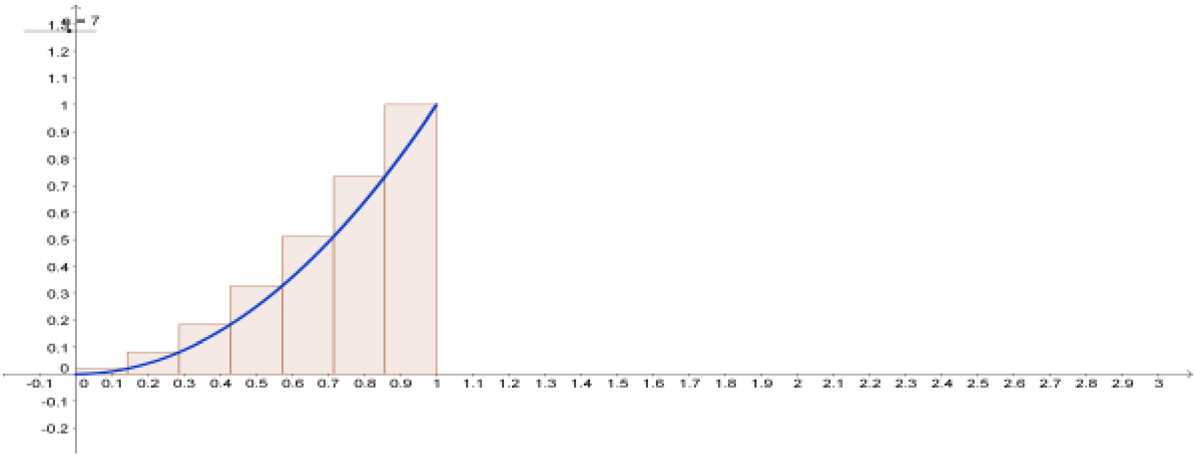
M4. Να υπολογίζουν παράγουσες συναρτήσεων που μπορούν να πάρουν τις μορφές: $f'+g', f'g+fg'$, $\frac{f'g-fg'}{g^2}$, $cf', f'(g)g'$ κλπ όπως:

1) Οι παράγουσες της $f(x)=x^3+\eta\mu x$ είναι οι συναρτήσεις $F(x)=\frac{x^4}{4}-\sigma\upsilon\nu x+c$.

2) Οι παράγουσες της $f(x)=xe^x+e^x$ είναι οι συναρτήσεις $F(x)=xe^x+c$ κλπ.

M5. Να υπολογίζουν το εμβαδό Ε του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f*(x)=x²* τον άξονα x'x και τις ευθείες x=0 και x=1, με την εξής διαδικασία:





1) Με τα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_\nu$ χωρίζουμε το διάστημα [0,1] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους 1/ν

2) μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το άθροισμα: $\varepsilon_\nu=\sum_{j=0}^{\nu-1} f\left(\frac{j}{\nu}\right)\Delta x=\ldots$

3) μια άλλη προσέγγιση του εμβαδού είναι το άθροισμα: $\mathrm{E}_\nu=\sum_{j=1}^{\nu} f\left(\frac{j}{\nu}\right)\Delta x=\ldots$

4) ισχύουν: $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\varepsilon_\nu=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\mathrm{E}_\nu=\frac{1}{3}$ και $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\varepsilon_\nu\le\mathrm{E}\le\lim\limits_{\nu\to+\infty}\mathrm{E}_\nu$ άρα $\mathrm{E}=\frac{1}{3}$

5) αν $\xi_j\in\left[x_{j-1},x_j\right]$, $j=1,2,3,...,\nu$ είναι οποιαδήποτε ενδιάμεσα σημεία και $S_\nu=\sum\limits_{j=1}^{\nu}\mathrm{f}\left(\xi_j\right)\Delta x$ ισχύει $\varepsilon_\nu\le S_\nu\le\mathrm{E}_\nu$ άρα $\lim\limits_{\nu\to+\infty}S_\nu=\mathrm{E}=\frac{1}{3}$.

M6. Να συσχετίζουν την έννοια του εμβαδού με την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f σε κλειστό διάστημα [α,β] και να συμβολίζουν το $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\sum\limits_{j=1}^{\nu}\mathrm{f}(\xi_j)\Delta x$ ως $\int\limits_\alpha^\beta\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$,επεκτείνουμε το παραπάνω και έχουμε: $\int\limits_\alpha^\alpha\mathrm{f}(x)dx=0$, $\int\limits_\beta^\alpha\mathrm{f}(x)dx=-\int\limits_\alpha^\beta\mathrm{f}(x)dx$.

M7. Να εξηγούν τις προτάσεις:

1) αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $\mathrm{f}(x)\ge0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int\limits_\alpha^\beta\mathrm{f}(x)dx\ge0$

2) αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $\mathrm{f}(x)\ge0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int\limits_\alpha^\beta\mathrm{f}(x)dx>0$.

M8. Να εξηγούν την γραμμικότητα του ορισμένου ολοκληρώματος ως εξής:

$$\int\limits_\alpha^\beta\left[\mathrm{f}(x)+\mathrm{g}(x)\right]dx=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\sum\limits_{j=1}^{\nu}\left[\mathrm{f}\left(\xi_j\right)+\mathrm{g}\left(\xi_j\right)\right]\Delta x=...\text{και}\int\limits_\alpha^\beta\lambda\mathrm{f}(x)dx=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\sum\limits_{j=1}^{\nu}\lambda\mathrm{f}\left(\xi_j\right)\Delta x=...$$

M9. Να αποδεικνύουν τις προτάσεις: 1) αν f , g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $\mathrm{f}(x)\le\mathrm{g}(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int\limits_\alpha^\beta\mathrm{f}(x)dx\le\int\limits_\alpha^\beta\mathrm{g}(x)dx$ 2) αν f , g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $\mathrm{f}(x)\le\mathrm{g}(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και δεν είναι παντού $\mathrm{f}(x)=\mathrm{g}(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int\limits_\alpha^\beta\mathrm{f}(x)dx<\int\limits_\alpha^\beta\mathrm{g}(x)dx$

M10. Να εξηγούν την σχέση του Chalses.

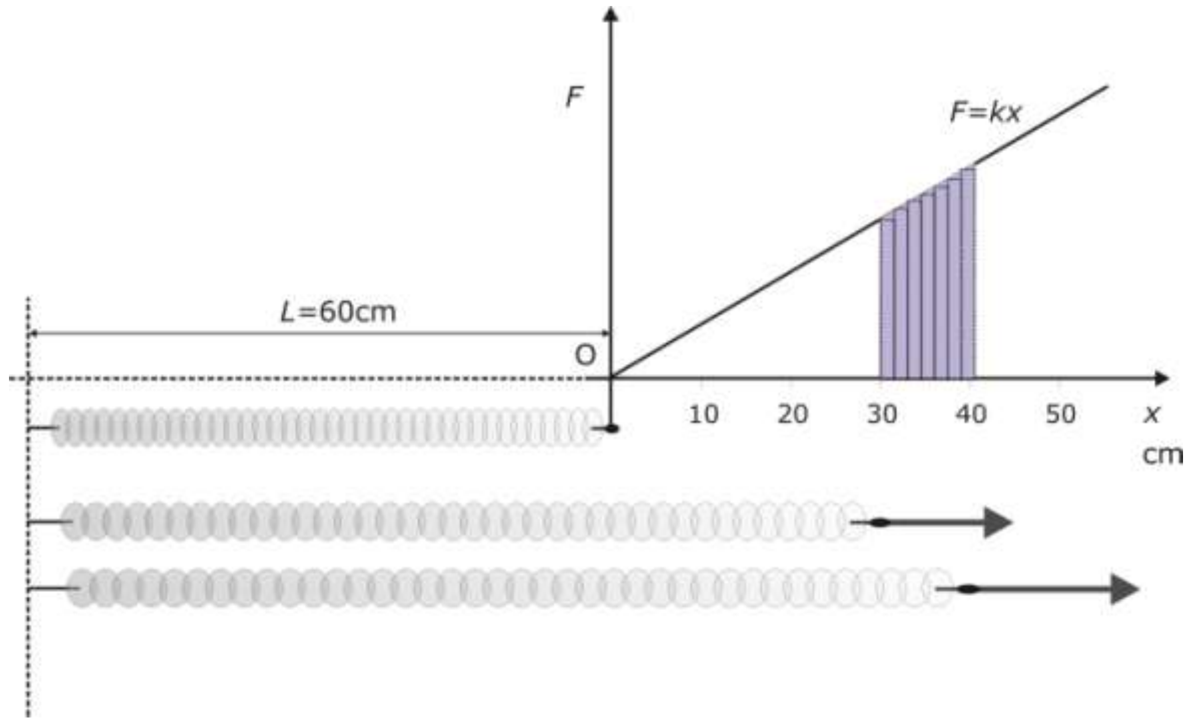
M11. Να δίνουν παραδείγματα και να εξηγούν : $\left(\int\limits_\alpha^x\mathrm{f}(t)dt\right)'=\mathrm{f}(x)$ όπου f συνάρτηση συνεχής σε διάστημα Δ και α , x σημεία του Δ (κάθε συνεχής έχει παράγουσα).

M12. Να αποδεικνύουν το 2^{ο} θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης: αν F μια παράγουσα της συνεχούς $\mathrm{f}:[\alpha,\beta]\to R$ τότε $\int\limits_\alpha^\beta\mathrm{f}(x)dx=\mathrm{F}(\beta)-\mathrm{F}(\alpha)$.

M13. Να κάνουν χρήση του ορισμένου ολοκληρώματος και να υπολογίζουν εμβαδά επιπέδων χωρίων όπως:

1) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x) = ημx , g(x) = συνx και τις ευθείες x = 0 και x = 2π.

2) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f(x) = lnx, τον άξονα των x και την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(e,1).



3) Δ27 και Δ28 του Π.Σ.

4) i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)= $\sqrt{x}$ την εφαπτόμενή της στο σημείο (1,1) και τον άξονα των x.

ii) Να βρείτε την ευθεία x = α, η οποία χωρίζει το χωρίο αυτό σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Μ14. Να μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις, κάνοντας χρήση του ορισμένου ολοκληρώματος, και να υπολογίζουν διάφορα μεγέθη όπως:

1) Ένα ελατήριο έχει φυσικό μήκος 0,6m. Όταν του ασκούμε δύναμη 10N το ελατήριο αποκτά μήκος 1m. Αν ισχύει ο νόμος του Hook για το ελατήριο αυτό, να βρείτε τη σταθερά *k* του ελατηρίου και το έργο που παράγεται για το τέντωμα του ελατηρίου από 0,9m σε 1,1m.

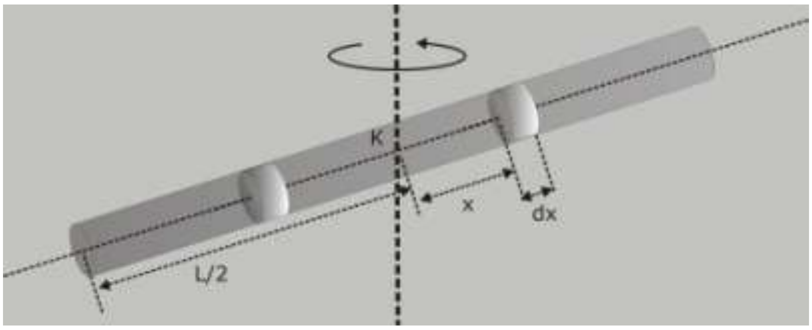
Λύση:

Αν F(*x*) το μέτρο της δύναμης και k η σταθερά του ελατηρίου, έχω F(*x*)=*kx* ή 10=0,4*k* άρα *k*=25N/m, $W=\int_{0,9-0,6}^{1,1-0,6} kxdx=...=2$ J.

2) Ένας πυκνωτής χωρητικότητας *C* έχει φορτίο μηδέν. Φορτίζουμε τον πυκνωτή μέχρις ότου αποκτήσει φορτίο *Q*. Να υπολογίσετε την ενέργεια *U* που έχει ο φορτισμένος πυκνωτής.

Λύση:

Θεωρούμε ότι ο πυκνωτής φορτίζεται σταδιακά μεταφέροντας μικρές ποσότητες φορτίου Δ*q* από τον



αρνητικό οπλισμό προς το θετικό. Όταν το φορτίο του πυκνωτή είναι *q*, το δυναμικό του είναι $V=\frac{1}{C}q$. Επομένως το έργο που απαιτείται για την μεταφορά του στοιχειώδους φορτίου Δ*q* από τον αρνητικό οπλισμό προς το θετικό, είναι $\Delta W = V\Delta q = \frac{1}{C}q\Delta q$.

Η ενέργεια *U* του φορτισμένου πυκνωτή ισούται με το ολικό έργο *W*, που απαιτείται για τη φόρτισή του. Ώστε:

$$U = W = \int_0^Q \frac{1}{C} q\,dq = \frac{Q^2}{2C}$$

3) Υπολογισμός της ροπής αδράνειας I_K ομοιογενούς ράβδου μάζας *m* και μήκους *L*, ως προς άξονα κάθετο σε αυτή που διέρχεται από το κέντρο μάζας της.

Η ροπή αδράνειας I_K της ράβδου, υπολογίζεται από τη σχέση:

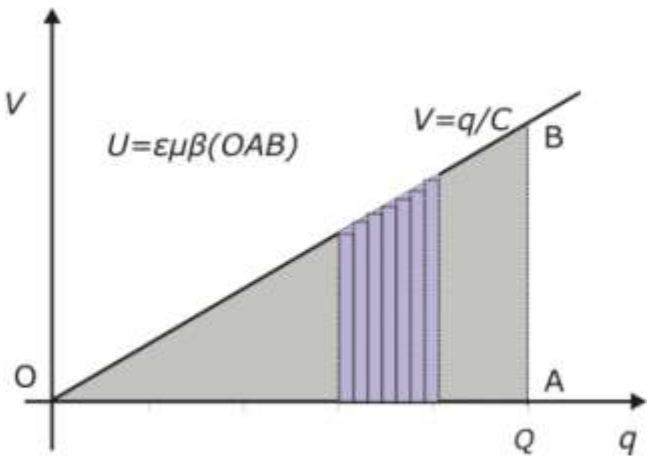
$$I_K = \sum x^2 \Delta m$$

όπου *Δm* η μάζα στοιχειώδους τμήματος της ράβδου μήκους *Δx* που απέχει από το Κ απόσταση *x*. Δεδομένου ότι η ράβδος είναι ομοιογενής ισχύει η σχέση:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta x}{L}$$

ή:

$$\Delta m = \frac{m}{L}\Delta x$$



Οπότε ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας ανάγεται στον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

$$I_K = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{m}{L} x^2 dx$$

από το οποίο προκύπτει ότι:

$$I_K = \frac{1}{12} mL^2$$

4) Δ29 του Π.Σ.

Μ15. Να κάνουν χρήση της σχέσης $V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \left(\mathrm{f}\left(x\right)\right)^2 dx$,να την ερμηνεύουν ,και να υπολογίζουν όγκους στερεών που προκύπτουν εκ περιστροφής ως προς τον άξονα x΄x όπως:

1) Δ30 του Π.Σ.

2) Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα x'x του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, από τον άξονα x'x και από τις ευθείες με εξισώσεις x=α και x=β, στις εξής περιπτώσεις:

i) $\mathrm{f}(x) = \sqrt{4x-1}, \alpha = 1, \beta=5$ ii) $\mathrm{f}(x) = \sqrt{\eta\mu x}, \alpha = 0, \beta = \pi$ iii) $\mathrm{f}(x) = \sqrt{4-x^2}, \alpha = 0, \beta = 2$ iv) $\mathrm{f}(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{x}}, \alpha = 1, \beta = 2$

3) Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα x'x, του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\mathrm{f}(x) = \dfrac{x^2}{4}$ και $\mathrm{g}(x) = x$.

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Προτεινόμενες εισαγωγικές δραστηριότητες στην έννοια της Παράγουσας[16,10]

1) Η προκαλούμενη, από τη βαρύτητα, επιτάχυνση κοντά στην επιφάνεια της Γης είναι περίπου 10m/s^2. Αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει ελεύθερα σε κενό αέρος από κατάσταση ηρεμίας, ποια θα είναι η ταχύτητά του σε χρόνο *t* από την αρχική στιγμή της πτώσης;

Έχουμε *v΄(t)*=10 και v(0)=0. «**ποιες συναρτήσεις του *t*, έχουν παραγώγους ίσες με 10;»** v(t)=10t, v(t)=10t+6,… τελικά v(t)=10t+c, όπου c οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Κάνοντας χρήση της αρχικής συνθήκης βρίσκουμε *v(t)*=10*t*.

2) Μια σφαίρα εκτοξεύεται την χρονική στιγμή t=0 σε ευθεία προς τα πάνω από μια εξέδρα ύψους x_0 m πάνω από το έδαφος, με αρχική ταχύτητα μέτρου v_0 m/s. Η μόνη δύναμη που επηρεάζει την κίνηση της σφαίρας κατά την διάρκεια της πορείας της είναι η βαρύτητα, η οποία προκαλεί προς τα κάτω επιτάχυνση μέτρου g m/s^2.

α) Να αποδείξετε ότι $x(t)=x_0+v_0t-1/2gt^2$, όπου x(t) το ύψος της σφαίρας πάνω από το έδαφος τη χρονική στιγμή t.

β) Να υπολογιστεί το μέγιστο ύψος που φτάνει η σφαίρα.

γ) Να υπολογιστεί η ταχύτητα της σφαίρας με την οποία φτάνει στο έδαφος.

Υπόδειξη:

Έχουμε $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$, $v'(t)=-g$, $x'(t)=v(t)$. Άρα $v(t)=-gt+c_1$, οπότε $c_1=v_0$. Τελικά $v(t)=-gt+v_0$. Οπότε $x'(t)=-gt+v_0$.

Άρα $x(t)=-1/2gt^2+v_0t+c_2$ και προσδιορίζοντας $c_2=x_0$, έχουμε $x(t)=x_0+v_0t-1/2gt^2$.

Ποια σημεία του κεφαλαίου 5 χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής;

Ακολουθούν κάποιες συνήθεις παρανοήσεις των μαθητών και προτείνεται ως ένας τρόπος αντιμετώπισής τους η χρήση αντιπαραδειγμάτων.

1) Αν η συνάρτηση F είναι παράγουσα της f τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta)-F(\alpha)$

Αντιπαράδειγμα

Η $F(x)=\ln|x|$ είναι μια παράγουσα της $f(x)=\frac{1}{x}$ σε κάθε διάστημα Δ με $\Delta \subseteq (0,+\infty)$ ή $\Delta \subseteq (-\infty,0)$, αλλά το $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}dx$ δεν έχει νόημα, αφού η $f(x)=\frac{1}{x}$ δεν είναι συνεχής στο $[-1,1]$...

Σχόλιο: Πρέπει να τονιστεί ότι όταν αναφέρουμε παράγουσα F πρέπει να αναφέρουμε και το διάστημα στο οποίο είναι παράγουσα.

2) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες y=0, x=α και x=β είναι ίσο με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Αντιπαράδειγμα

Κάθε συνάρτηση f με f(x)<0 για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$

3) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Αντιπαράδειγμα

$\int_{-1}^{2} x dx = \frac{3}{2} > 0$

4) Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και $\lim_{x \to +\infty} \int_{1}^{x} f(t)dt = +\infty$, τότε και $\lim_{x \to +\infty} \pi \int_{1}^{x} f^2(t)dt = +\infty$.

Αντιπαράδειγμα

$\int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt = \ln x$ και $\lim_{x \to +\infty} \int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt = +\infty$, αλλά $\lim_{x \to +\infty} \int_{1}^{x} \pi \frac{1}{t^2} dt = \pi$, δηλαδή ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή της $y = \frac{1}{x}, x \in [1, +\infty)$ γύρω από τον άξονα x'x είναι αριθμητικά ίσος με το εμβαδό του μοναδιαίου κύκλου!!

Βιβλιογραφία

Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β. Κα (2004). Μαθηματικά Γ' Γενικού Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Διόφαντος

Γαγάτσης, Α. & Σπύρου, Π. (2008). Η συνάρτηση: επιστημολογική της διάσταση και διδακτική μεταφορά. Πανεπιστήμιο Αθηνών, Πανεπιστήμιο Κύπρου. http://www.math.uoa.gr/me/faculty/spirou/Spyrou%204.pdf
Νεγρεπόντης Σ., Γιωτόπουλος Σ., Γιαννακούλιας Ε. (1987). *Απειροστικός Λογισμός*, Τόμοι Ι&ΙΙ, Εκδόσεις Συμμετρία,

Αθήνα 1987

Ντούγιας Σ.(2005). *Απειροστικός Λογισμός Ι*, Εκδόσεις Leader Books, Αθήνα

Πηχωρίδης Σ.(1996). *Απειροστικός Λογισμός Ι.* Εκδόσεις Σύγχρονη Εποχή, Αθήνα 1996

Πινάτσης Π.(2011). Φυσικά Μαθηματικά, Εκδόσεις Mathbooks

Πλατάρος Γ.(2004). *Η Διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού μέσω αντιπαραδειγμάτων*, Διπλωματική Εργασία

Πούλος Α.(2009). *Εικασίες και Αντιπαραδείγματα*, Εκδόσεις Μαυρίδη

Τουμάσης Μπ, Αρβανίτης Τ.(2003). Διδασκαλία Μαθηματικών με χρήση Η/Υ, Εκδόσεις Σαββάλας

Χρυσανθόπουλος, Κ. Η. (2009). Αξιοποίηση της ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. *Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών*. (Συλλογικό έργο). Εκδόσεις: ΖΗΤΗ

Apostol, T. M. (1962). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*. (Δ. Γκιόκα, μετάφραση). Αθήνα: Ατλαντίς

Bell, E. T. (2000). *Οι Μαθηματικοί*. (Μ. Μαγειρόπουλος, μετάφραση). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.. (Πρωτότυπη έκδοση, 1971).
Boyer, C. B. (1959). *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* New York: Dover Publications, Inc

Bunt, L. N.H., Jones, P. S. & Bedient J. D. (1981). *Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών* (Α. Φερεντίνου-Νικολακοπούλου, μετάφραση). Αθήνα: Γ. Α. Πνευματικός.
Clawson, C. C. (2008). *Η Μαγεία των Μαθηματικών: Αποκαλύπτοντας τα μυστικά των αριθμών*. (Π. Παπαχρήστου, μετάφραση).Εκδόσεις: ΚΕΔΡΟΣ. (Πρωτότυπη έκδοση, 1999).

Davis, P. & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience.* Birkhauser, Boston.

Davis, D. M. (2007). *Η Φύση και η Δύναμη των Μαθηματικών*. (Δ. Καραγιαννάκης & Μ. Μαγειρόπουλος, μετάφραση). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. (Πρωτότυπη έκδοση, 1993).
Edwards, C. H. Jr. (1979).The Historical Development of the Culculus. New York/Berlin: Springer-Verlag.
Eves H,(1989) Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών, Εκδόσεις Τροχαλία

Gelbaum and Olmsted (1964), Counterexamples in Analysis, Holden Day

Goldstein, R. (2006). *Αιχμάλωτος των Μαθηματικών. Ο Κούρτ Γκέντελ και το Θεώρημα της Μη Πληρότητας*. (Ε. Πισσία, μετάφραση). Εκδόσεις: Τραυλός. (Πρωτότυπη έκδοση, 2005).

Heath, T. L. (2001). *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών.* Τόμος ΙΙ. Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.. (Πρωτότυπη έκδοση, 1921).

Katz, V.J (2013) Ιστορία των Μαθηματικών, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *College Mathematics Journal, Vol. 20,vo. 4.* σελ. 282-300*.*

Klymchuk S., Counterexamples in Calculus, Mathematical Association of America

Maor E.(2002). Τριγωνομετρικά Λουκούμια, επιμ. Μ.Λάμπρου. Εκδόσεις Κάτοπτρο

Maor E. (2005).e:Η Ιστορία ενός αριθμού, επιμ.Μ.Λάμπρου. Εκδόσεις Κάτοπτρο

O'Connor, J. & Robertson F. (2005) *History topic: The function concept MacTutor History of Mathematics archive.* University of St. Andrews*.*

Russ, S. B. (1980). A Translation of Bolzano's paper on the intermediate value theorem. *Historia Mathematica*, 7, 156-185.

Sawyer W. (1993).Τι είναι ο Απειροστικός Λογισμός;, Εκδόσεις Τροχαλία

Spivak M. (1991). *Μια εισαγωγή στην Ανάλυση*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

Thomas G.B, Finney R.L.(1995) Απειροστικός Λογισμός, Τόμος Α', Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο

Tikhomirov V.M. (1999). Ιστορίες για Μέγιστα και Ελάχιστα, Εκδόσεις Κάτοπτρο

Vilenkin N. (1997). Αναζητώντας το άπειρο, Εκδόσεις Κάτοπτρο

Yakovlev G.N. (1984). High-School Mathematics, Part 1, Mir Publishers, Moscow

Β΄ Μέρος (Πιθανότητες – Αναλυτική Γεωμετρία)

$Β_1$(Πιθανότητες)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $1^{ο}$: Συνδυαστική

Εισαγωγή

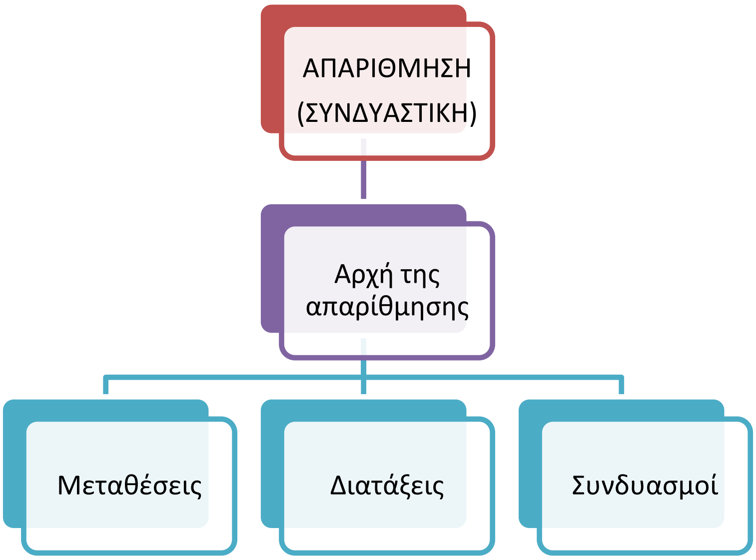
Φαίνεται ότι ίχνη δραστηριοτήτων σχετικών με την απαρίθμηση συνδυασμών βρίσκουμε σε κείμενα αρχαίων πολιτισμών. Το αρχαιότερο ίσως κείμενο με περιεχόμενο σχετικό με συνδυαστικούς υπολογισμούς βρίσκεται στο πάπυρο του Rhind (1650 π.χ) πρόβλημα 79. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα αναφέρεται μία απογραφή στην οποία καταγράφονται 7 σπίτια, κάθε σπίτι είχε 7 γάτες, κάθε γάτα έφαγε 7 ποντίκια κάθε ποντίκι είχε φάει 7 σπόρους σταριού και από κάθε σπόρο σταριού είχαν παραχθεί 7 hekat (μονάδα μέτρησης). Είναι χαρακτηριστική η πληροφορία που αναφέρεται από τον Biggs (1979) ότι σε Ινδικά κείμενα του $6^{ου}$ π.χ αιώνα συναντάμε μία προσπάθεια απαρίθμησης των συνδυασμών 6 διαφορετικών γεύσεων ανά δύο ή ανά τρεις ή ανά τέσσερις. Ο Smith (1953) αναφέρει ότι την ιδέα των μεταθέσεων συναντάμε σε Ινδικά κείμενα του $2^{ου}$ π.χ αιώνα, με τα οποία γινόταν απαρίθμηση των τρόπων με τους οποίους μπορούν να συνδυαστούν μουσικές φράσεις. Ο Smith επιπλέον αναφέρει ότι πρώιμες αναφορές κατά τον Μεσαίωνα συναντώνται στα κείμενα του Rabbi ben Ezra (1140 μ.χ), στα οποία επιχειρεί να υπολογίσει τους συνδυασμούς του πλανήτη Κρόνου με τους άλλους πλανήτες. Ο εν λόγω ποιητής, μαθηματικός και ερευνητής γνώριζε τρόπους υπολογισμού των 7 αντικειμένων ανά δύο. Το 1494 έχουμε το πρώτο τυπωμένο κείμενο που αναφέρεται στις μεταθέσεις αντικειμένων, είναι το έργο του Pacioli «Suma».

	Μία πρώιμη τεχνολογική εφαρμογή των κανόνων της Συνδυαστικής κατά τον $16^{ο}$ αιώνα μ.χ βρίσκουμε σε κείμενα των Cardano και Buteo σχετικά με την κατασκευή κλειδαριών οι οποίες μπορούν να ανοίξουν μόνο αν κάποιος γνωρίζει τον συνδυασμό κάποιων γραναζιών τους.

Κατά τον $17^{ο}$ αιώνα μ.χ συνεχίστηκε η ανάπτυξη της Συνδυαστικής και ο Herigone (1634) δίνει για πρώτη φορά τον γενικό τύπο που υπολογίζει τους συνδυασμούς ν αντικειμένων ανά κ δηλαδή το $\binom{\nu}{\kappa}$. Την ίδια περίπου περίοδο ο Pascal έδειξε τη σχέση μεταξύ των συντελεστών του διωνυμικού αναπτύγματος και των Συνδυαστικών μοντέλων. Τέλος, το περιεχόμενο της Συνδυαστικής, έτσι όπως το γνωρίζουμε και το διδάσκουμε σήμερα, διαμορφώθηκε από τον Jacques Bernoulli στο έργο του «Ars Conjectandi», στο οποίο έργο για πρώτη φορά χρησιμοποιείται ο όρος «permutations» (μεταθέσεις). Οι Pascal και Wallis είναι οι πρώτοι που χρησιμοποίησαν τον όρο «combinations» (συνδυασμοί).

Τι περιέχει το κεφάλαιο της Συνδυαστικής και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Στο κεφάλαιο της Συνδυαστικής αναλύονται τρία βασικά μοντέλα απαρίθμησης: οι μεταθέσεις, οι διατάξεις και οι συνδυασμοί. Τα τρία αυτά μοντέλα στηρίζονται σε μία βασική αρχή απαρίθμησης των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου, σύμφωνα με την οποία κάθε απαρίθμηση των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω προσθέσεων ή / και πολλαπλασιασμών.



Όσον αφορά τη σύνδεση του κεφαλαίου αυτού με ύλη που έχει διδαχτεί σε προηγούμενες τάξεις επισημαίνουμε ότι σε ελάχιστες περιπτώσεις οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή με θέματα που απαιτούν δραστηριότητες απαρίθμησης.
Στο Γυμνάσιο οι μαθητές έχουν ασχοληθεί με το τρίγωνο του Pascal ενώ σε προηγούμενες τάξεις του Λυκείου έχουν χρησιμοποιήσει δενδροδιαγράμματα για την περιγραφή της εξέλιξης μιας διαδικασίας.
Στο μάθημα της Γεωμετρίας συναντάμε θέματα που απαιτούν συνδυαστική σκέψη όπως για παράδειγμα:
1) Από μία περιοχή 4 ευθείες οδοί, έτσι ώστε ανά δύο να διασταυρώνονται και ανά 3 να μη διέρχονται από το ίδιο σημείο. Η τροχαία για να διευκολύνει την κίνηση θέλει να τοποθετήσει έναν τροχονόμο σε κάθε διασταύρωση. Πόσοι τροχονόμοι χρειάζονται; Να εξεταστεί το πρόβλημα για ν δρόμους (ν≥2).

2) Να βρείτε το πλήθος των διαγωνίων κυρτού νιγώνου σαν συνάρτηση του πλήθους των πλευρών του (ν≥3)

Οι προαπαιτούμενες γνώσεις για το κεφάλαιο της Συνδυαστικής είναι ελάχιστες και αυτό παρουσιάζει ιδιαίτερο διδακτικό ενδιαφέρον.

Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο της Συνδυαστικής;

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να επισημανθεί ότι: ο τρόπος με τον οποίο δύο πολύ απλές λογικές παραδοχές (προσθετική, πολλαπλασιαστική), για την απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου, αναπτύχθηκαν σε τέτοιο σημείο, ώστε σήμερα τα μοντέλα που δημιουργήθηκαν να είναι ιδιαίτερα σύνθετα και ικανά να λύσουν απαιτητικά προβλήματα απαρίθμησης.

Επιπλέον σημαντικοί κλάδοι και περιοχές των Μαθηματικών συνδέονται με την ανάπτυξη της Συνδυαστικής ιδιαίτερα καθώς η περιοχή των Πιθανοτήτων χρησιμοποιεί κατ εξοχήν τα Συνδυαστικά μοντέλα.

Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο της Συνδυαστικής;

Η Συνδυαστική δεν προϋποθέτει εξειδικευμένες γνώσεις από άλλες Μαθηματικές περιοχές, αλλά χωρίς υπερβολή, θα μπορούσαμε να πούμε ότι αναπτύσσεται πάνω σε δύο απλές λογικές παραδοχές.

Α. Αν ένα σύνολο προκύπτει από την ένωση ξένων μεταξύ τους συνόλων τότε το πλήθος των στοιχείων του μπορεί να υπολογιστεί αν προσθέσουμε τα πλήθη των στοιχείων των συνόλων αυτών.
Β. Αν μία διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ν διακριτές φάσεις και η πρώτη φάση πραγματοποιείται με $κ_1$ τρόπους η δεύτερη φάση πραγματοποιείται με $κ_2$ τρόπους ...η νιοστή φάση μπορεί να πραγματοποιηθεί με $κ_ν$ τρόπους, τότε όλη η διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί με $κ_1 \cdot κ_2 \cdot κ_3 \cdot \ldots \cdot κ_ν$ διαφορετικούς τρόπους.
Οι δύο αυτοί απλοί λογικοί συλλογισμοί αποτελούν και τις δύο βασικές αρχές (προσθετική, πολλαπλασιαστική) πάνω στις οποίες θα στηθούν τα Συνδυαστικά μοντέλα, με τα οποία θα ασχοληθούμε στο κεφάλαιο αυτό.

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

1) Τι είναι ένα δενδροδιάγραμμα και ποια η χρησιμότητά του;
2) Πότε κάνουμε απαρίθμηση με την προσθετική αρχή και πότε με την πολλαπλασιαστική;
3) Πότε και πως εφαρμόζουμε το μοντέλο των μεταθέσεων σε ένα πρόβλημα απαρίθμησης;
4) Πότε και πως υπολογίζουμε τις διατάξεις κ στοιχείων από τα ν στοιχεία ενός συνόλου;
5) Πότε και πως υπολογίζουμε τους συνδυασμούς κ στοιχείων από ένα σύνολο ν στοιχείων;

Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Αυτό που θα πρέπει να παραμείνει στους μαθητές ως διδακτικό ίζημα είναι η δυνατότητα:

Να μπορούν με τυπικό ή άτυπο τρόπο να υπολογίζουν το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου.

Συγκεκριμένα:

1) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να δημιουργούν ένα δενδροδιάγραμμα, από το οποίο θα μπορούν να διακρίνουν τις φάσεις εξέλιξης μιας διαδικασίας. Η σημασία του δενδροδιαγράμματος έγκειται στο ότι αυτό θα αποτελέσει τη γέφυρα μετάβασης των μαθητών στα 3 μοντέλα απαρίθμησης. (Στόχοι ΠΣ 1.1.1)

2) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να διακρίνουν, σε απλά προβλήματα, αν ο υπολογισμός του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου προκύπτει άμεσα προσθετικά ή προκύπτει πολλαπλασιαστικά. (Στόχοι ΠΣ 1.1.2, 1.1.3)

Προτεινόμενη δραστηριότητα:

Σε μία πόλη οι μαθητές τις ελεύθερες ώρες τους, εκτός των άλλων, μπορούν να ασχοληθούν με Κλασικό Αθλητισμό και με την Τέχνη. Σχετικά με τις Κλασικές Αθλητικές δραστηριότητες μπορούν να επιλέξουν άλματα, ρίψεις, δρόμους ταχύτητας και δρόμους αντοχής. Σχετικά με την Τέχνη μπορούν να επιλέξουν εικαστικά, μουσική και χορό. Επιπλέον για κάθε μία από τις επιλογές της Τέχνη θα πρέπει να επιλέξουν κλασική ή σύγχρονη. Πόσες επιλογές έχει ένας μαθητής για τον Κλασικό Αθλητισμό και πόσες για την Τέχνη;

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση:

Με την εν λόγω δραστηριότητα επιδιώκεται οι μαθητές να διακρίνουν τη διαφορά της απαρίθμησης των επιλογών του Κλασικού Αθλητισμού από την απαρίθμηση των επιλογών της Τέχνης. Στην επιλογή Κλασικού Αθλητισμού ο μαθητής έχει να επιλέξει από ξένα μεταξύ τους μονοσύνολα. Στην δεύτερη περίπτωση, θα πρέπει να συζητηθεί με τους μαθητές το γεγονός ότι η επιλογή του τομέα Τέχνη ολοκληρώνεται σε δύο φάσεις, στην Α΄ φάση υπάρχουν 3 επιλογές και στη Β΄ φάση υπάρχουν 2 επιλογές οπότε υπάρχουν συνολικά 3×2 επιλογές. Το σημαντικό τελικά είναι να συνδέσουν οι μαθητές την προσθετική μέθοδο με ξένα μεταξύ τους μονοσύνολα, ενώ στην πολλαπλασιαστική μας ενδιαφέρει η απαρίθμηση όλων των υποσυνόλων με δύο τουλάχιστον στοιχεία το κάθε ένα.

3) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να διακρίνουν σε ένα πρόβλημα απαρίθμησης μεταθέσεων ότι το κατάλληλο μοντέλο είναι οι μεταθέσεις και να το εφαρμόζουν.
(Στόχοι ΠΣ 1.2.1)
Προτεινόμενη δραστηριότητα

Με πόσους τρόπους 4 αθλητές Α, Β, Γ, Δ, άγνωστης δυναμικότητας, μπορεί να τερματίσουν σε έναν αγώνα δρόμου; Αν ζητούμε με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η τριάδα από τους 4 που θα ανέβει στο βάθρο σε τι διαφέρει τώρα το πρόβλημα από το προηγούμενο;

4) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να διακρίνουν σε ένα πρόβλημα απαρίθμησης διατάξεων κ στοιχείων από ένα σύνολο με ν στοιχεία ότι το κατάλληλο μοντέλο είναι οι διατάξεις των ν ανά κ και να το εφαρμόζουν. (Στόχοι ΠΣ 1.2.2)
Προτεινόμενη δραστηριότητα

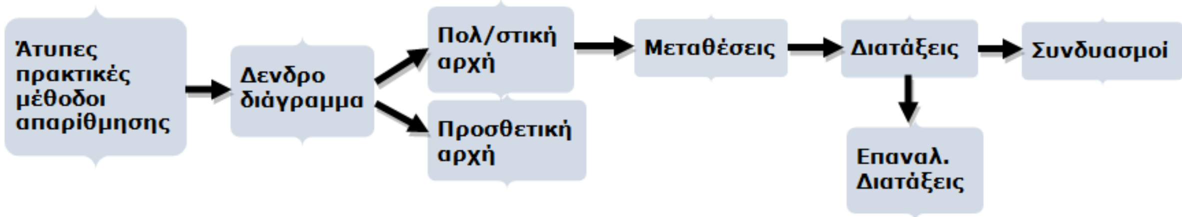
Το πενταμελές συμβούλιο ενός τμήματος θέλει να εκλέξει πρόεδρο, αντιπρόεδρο και ταμία. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

6) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να διακρίνουν σε ένα πρόβλημα απαρίθμησης συνδυασμών κ στοιχείων από ένα σύνολο με ν στοιχεία ότι το κατάλληλο μοντέλο είναι οι συνδυασμοί των ν ανά κ και να το εφαρμόζουν. (Στόχοι ΠΣ 1.2.3)

Οδηγίες για την διδασκαλία του κεφαλαίου

Ας έρθουμε τώρα στη διδακτική μεθοδολογία. Όσα αναφέρονται στη συνέχεια είναι προτεινόμενα ώστε ο διδάσκων να διαθέτει μία οργανωμένη πρόταση διδασκαλίας.

Κατά αρχήν, καλό θα είναι ο διδάσκων να διαθέτει μία γενική εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η διδασκαλία του κεφαλαίου όπως η παρακάτω.



Με βάση το διάγραμμα:

3) Αρχικά προτείνεται να δοθεί ένα απλό πρόβλημα απαρίθμησης, το οποίο μπορεί να επιλυθεί μέσα από νοερούς υπολογισμούς.
Προτεινόμενη δραστηριότητα;

Πόσους διαφορετικούς 3ψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να κατασκευάσουμε από τα ψηφία 1,3, 5; Να καταγράψετε από νου όλους τους δυνατούς συνδυασμούς.

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση:

Εδώ είναι σημαντικό να συζητηθεί στην τάξη ένας τρόπος οργάνωσης της κατασκευής των διατεταγμένων τριάδων όπως για παράδειγμα πρώτα οι τριάδες με πρώτο ψηφίο το 1, μετά οι τριάδες με πρώτο ψηφίο το 2 και τέλος οι τριάδες με πρώτο ψηφίο το 3.

4) Όταν το πρόβλημα γίνει περισσότερο πολύπλοκο ο διδάσκων βρίσκει την ευκαιρία να προτείνει στους μαθητές να οργανώσουν την αρίθμηση με ένα δενδροδιάγραμμα. Με τον τρόπο αυτό γίνεται η μετάβαση από τις άτυπες ανοργάνωτες μεθόδους στην πρώτη οργανωμένη μέθοδο απαρίθμησης.
Προτεινόμενη δραστηριότητα:

Να κατασκευάσετε ένα δενδροδιάγραμμα με το οποίο θα απαντήσετε στο προηγούμενο ερώτημα. Με βάση το δενδροδιάγραμμα περιγράψτε έναν απλούστερο αριθμητικό, άμεσο τρόπο υπολογισμού των δυνατών τριψήφιων.

5) Η δομή του δενδροδιαγράμματος μπορεί να αποτελέσει το διαισθητικό πέρασμα στην πολλαπλασιαστική μέθοδο και στο σημείο αυτό να γίνει η διάκριση μεταξύ της πολλαπλασιαστικής μεθόδου απαρίθμησης από την προσθετική. Η πολλαπλασιαστική αρχή μπορεί τώρα να γίνει η βάση πάνω στην οποία θα στηριχτεί η δημιουργία του πρώτου τυπικού μοντέλου απαρίθμησης, των μεταθέσεων. Θα πρέπει να τονιστεί ότι είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να αφιερωθεί χρόνος για την διερεύνηση των ιδιοτήτων των συμβόλων, τα οποία θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές στην εξέλιξη της διδασκαλίας και των άλλων μοντέλων ιδιαίτερα δε του ν!. Η κατάκτηση της σημασίας και της χρήσης των συμβόλων από τους μαθητές θα τους επιτρέψει να χειρίζονται με ευχέρεια το τυπικό μέρος της επίλυσης ενός προβλήματος απαρίθμησης.
Προτεινόμενη δραστηριότητα:

α) Αν συμβολίσουμε 3!=1·2·3, 4!= 1·2·3·4 κ.λ.π να γράψετε με τη βοήθεια του συγκεκριμένου συμβολισμού το πλήθος των 6ψήφιων αριθμών με διαφορετικά ψηφία που μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία 1,2,3,4,5,6.

β) Υπάρχει ν ε Ν ώστε ν!=100;

γ) Να βρείτε το αριθμητικό αποτέλεσμα της παράστασης $\frac{10!\cdot 19!}{9!\cdot 20!}$ *χωρίς να χρησιμοποιήσετε χαρτί και στυλό.*

6) Με κατάλληλη αναδιατύπωση του αρχικού προβλήματος που είχε θέσει ο διδάσκων, ως εισαγωγή στη διδασκαλία των μεταθέσεων, μπορεί να γίνει το πέρασμα στο επόμενο μοντέλο των διατάξεων ν στοιχείων ανά κ. Η εκ νέου αναδιατύπωση του προβλήματος θα οδηγήσει στην δημιουργία του μοντέλου των επαναληπτικών διατάξεων.
Προτεινόμενη δραστηριότητα:

α) Αν με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 ήθελα να φτιάξω τετραψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία πόσους θα μπορούσα να κατασκευάσω;

β) Αν για τους παραπάνω τετραψήφιους δεν θέσω τον περιορισμό να έχουν διαφορετικά ψηφία, πόσους μπορώ να κατασκευάσω;

7) Τέλος με ένα κατάλληλο πρόβλημα (Δες δραστηριότητες Σ10, Σ11 του ΠΣ) μπορεί να γίνει διάκριση μεταξύ διατάξεων και συνδυασμών και να δημιουργηθεί το μοντέλο της απαρίθμησης συνδυασμών (υποσυνόλων) ν στοιχείων ανά κ.
Προτεινόμενη δραστηριότητα:

Ζητώ από κάποιον να πει στην τύχη 3 αριθμούς από το 1 μέχρι και το 5. Πόσες διαφορετικές τριάδες μπορεί να πει;

8) Όταν πλέον έχει ολοκληρωθεί η διδασκαλία των συνδυαστικών μοντέλων ο διδάσκων θα μπορούσε να προτείνει στους μαθητές να εφαρμόσουν τα εν λόγω μοντέλα στην εύρεση των συντελεστών του δυωνυμικού αναπτύγματος $(α+β)^ν$ μέσα από μία επαγωγική διαδικασία. Η μετάβαση από τις δυνάμεις $(α+β)^2$, $(α+β)^3$, $(α+β)^4$ θα μπορούσε να οδηγήσει τους μαθητές στον εντοπισμό του κανόνα με τον οποίο δημιουργούνται οι συντελεστές.

Τέλος μέσα από κατάλληλους συνδυαστικούς συλλογισμούς θα μπορούσε να συνδεθεί ο συντελεστής του κ όρου του αναπτύγματος με τους συνδυασμούς $\binom{\nu}{\kappa}$. (Coolidge 1949)

Ποια σημεία θα πρέπει να προσέξει ιδιαίτερα ο διδάσκων;

1) Η χρήση του δενδροδιαγράμματος δεν θα πρέπει να υποτιμάται ή και να παραλείπεται καθώς πάνω σε αυτό θα στηριχτεί η μετάβαση στα τυπικά μοντέλα απαρίθμησης. Επιπλέον δεν θα πρέπει να γίνει υπερβολική χρήση της μεθόδου αυτής αλλά ένα ή δύο ενδεικτικά παραδείγματα.

2) Εκτός από προβλήματα τα οποία λύνονται με βάση τους τύπους καλό θα είναι να δίνονται και προβλήματα στα οποία είναι αναγκαία συνθετότερη συνδυαστική σκέψη.
Προτεινόμενη δραστηριότητα 1:

Πόσα διαφορετικά λεκτικά μορφώματα μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα γράμματα της λέξης ¨θάλασσα¨;

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση:

Εδώ θα πρέπει η κατασκευή του μορφώματος να γίνει σε φάσεις καθώς διαθέτει επανάληψη του α 3 φορές και επανάληψη του σ 2 φορές. Για παράδειγμα θα μπορούσε να υποδειχτεί από τον διδάσκοντα να διακρίνουν οι μαθητές 3 φάσεις. Στην πρώτη φάση επιλέγουν 3 θέσεις από τις 7 και τοποθετούν το α με $\binom{7}{3}$ τρόπους. Στη δεύτερη επιλέγουν 2 θέσεις από τις 4 που έχουν απομείνει και τοποθετούν τα σ με $\binom{4}{2}$ και στην τρίτη φάση τοποθετούν τα 2 εναπομείναντα γράμματα με 2! τρόπους (μεταθέσεις 2 στοιχείων).

Προτεινόμενη δραστηριότητα 2:

Διαθέτετε ένα σύνολο με 3 στοιχεία. Πόσα υποσύνολα του συνόλου αυτού μπορείτε να κατασκευάσετε; Αν το σύνολο είχε 4 στοιχεία πόσα θα ήταν τα υποσύνολα; Αν είχε 5 στοιχεία πόσα θα ήταν τα υποσύνολα; Μπορείτε να γενικεύσετε ώστε να υπολογίζετε άμεσα το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου με ν στοιχεία;

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση:

Μία στρατηγική υπολογισμού είναι να γίνει μία εμπειρική μεν αλλά συστηματική καταγραφή των υποσυνόλων σε σύνολα που περιέχουν μικρό αριθμό στοιχείων π.χ 3, 4, 5 και για αυτά να γίνει υπολογισμός του πλήθους των υποσυνόλων αθροιστικά μέσω πρόσθεσης των συνδυασμών. Μία άλλη στρατηγική είναι να θεωρήσουμε ότι για ένα σύνολο Σ των π.χ 5 στοιχείων ζητούμε το πλήθος των πεντάδων όπου κάθε στοιχείο μπορεί να είναι ένα από τα γράμματα Α ή Δ (ανήκει ή δεν ανήκει στο Σ). Προκύπτει τελικά ότι για κάθε στοιχείο μιας πεντάδας έχουμε 2 επιλογές και επομένως η κατασκευή της πεντάδας αυτής μπορεί να γίνει με 2^5 τρόπους. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχουν 2^5 υποσύνολα του συνόλου Σ. Η γενίκευση είναι στη συνέχεια πολύ απλή.

3) Η υπερβολική ενασχόληση με θέματα που δεν σχετίζονται με προβλήματα απαρίθμησης αλλά απαιτούν σύνθετους χειρισμούς των συμβόλων και των τύπων, σε καθαρά αλγεβρικό πλαίσιο, δεν ενδείκνυται.

4) Η βασική δυσκολία των μαθητών αναμένεται να είναι η διάκριση και επιλογή του κατάλληλου μοντέλου ή της κατάλληλης στρατηγικής στην επίλυση ενός σύνθετου προβλήματος απαρίθμησης. Για την αντιμετώπιση των δυσκολιών αυτών καλό θα είναι ο διδάσκων να προτείνει τη λύση προβλημάτων που να διαθέτουν ανάλογες δομές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιων προβλημάτων είναι η εύρεση του πλήθους των χειραψιών ν ατόμων και η εύρεση του πλήθους των ευθειών που ορίζουν ν σημεία μη συνευθειακά ανά τρία.

Το κεφάλαιο της Συνδυαστικής είναι διδακτικά απαραίτητο για τον υπολογισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου με τον κλασσικό ορισμό σε ένα πείραμα τύχης. Αυτήν τη γενική προσέγγιση θα πρέπει κατά κύριο λόγο να υιοθετεί ο εκπαιδευτικός κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου.

Μπορούν τα ψηφιακά μέσα να υποστηρίξουν τη διδασκαλία της Συνδυαστικής;

Η χρήση ψηφιακών μέσων μόνο ως παιγνιώδης ολιγόλεπτη απασχόληση θα μπορούσε να ενσωματωθεί στη διδασκαλία. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο στόχος της διδασκαλίας του κεφαλαίου δεν είναι ο υπολογισμός μέσω αριθμητικών πράξεων, αλλά η εμπέδωση των μοντέλων και των στρατηγικών απαρίθμησης.

Ο παρακάτω ιστότοπος:

http://www.mathsisfun.com/combinatorics/combinations-permutations-calculator.html μπορεί να υποδειχθεί στους μαθητές, ώστε να τον επισκεφθούν εθελοντικά και να πειραματιστούν για λίγο με τις λειτουργίες και τις δυνατότητές του.

Βιβλιογραφία

1) N. L. BIGGS (1979): THE ROOTS OF COMBINATORICS Historia Mathematica 6 p.p 109-136

2) J. L. Coolidge (1949): The Story of the Binomial Theorem, by, *The American Mathematical Monthly* 56:3 pp. 147–157

ΚΕΦΑΛΑΙΑ 2^{o} & 3^{o}: Πιθανότητες – Κατανομές

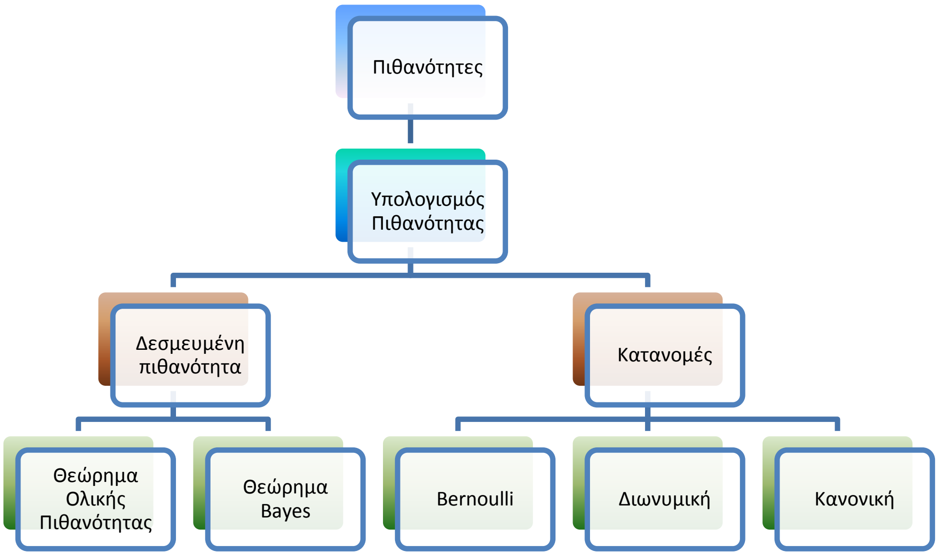
Εισαγωγή

Η Θεία Κωμωδία του Δάντη αναφέρει "παιχνίδι της τύχης" που παίζεται με τρία ζάρια και ποίημα του ψευδο-Οβίδιου του 13ου αι. απαριθμεί τους 56 διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούν να πέσουν τα ζάρια (Mankiewicz, 2002). Η ιστορία, όμως, των τυχερών παιχνιδιών είχε ήδη ξεκινήσει πολύ γρηγορότερα. Οι Δάρας και Σύψας (2010) αναφέρουν ότι ανασκαφές που έγιναν στις πυραμίδες της Αιγύπτου έφεραν στο φώς αστραγάλους προβάτων των οποίων οι τέσσερες πλευρές στις οποίες μπορούσαν να στηριχθούν, παρίσταναν τους αριθμούς 4, 3, 1 και 6 και τα οποία πιθανολογείται ότι είχαν κατασκευασθεί στην αρχαία Αίγυπτο από το 3000 π.χ. Το παιχνίδι αυτό με τους αστραγάλους ήταν γνωστό σε Έλληνες και Ρωμαίους (Χαραλαμπίδης, 2002), και πιστεύεται ότι οι Έλληνες κατασκεύασαν τα γνωστά μας ζάρια, με λείανση των καμπύλων επιφανειών και τα οποία αποκαλούσαν "τέσσερα" (Δάρας & Σύψας, 2010, σ. 4), ίσως από το σύνολο των ακμών κάθε έδρας. Πέραν όμως από τα τυχερά παιχνίδια αλλά και αυτής της πρόβλεψης του μέλλοντος με σκοπό να επηρεάσουν το πεπρωμένο, η ιστορία έχει καταδείξει ότι οι έννοιες της τύχης και της τυχαιότητας συνδέθηκαν και σε άλλους τομείς των ανθρώπινων δραστηριοτήτων. Ενδεικτικά, στην Αθηναϊκή πολιτεία, επί ισχύος της νομοθεσίας του Δράκοντα (624 ή 621 π.Χ.) και του Σόλωνα (639-559 π.Χ.), η επιλογή των αρχόντων διεξάγονταν με κλήρο. Επίσης, ο Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.) ασχολήθηκε με θέματα Πιθανοτήτων προσδιορίζοντας την έννοια του τυχαίου, χωρίς όμως να του προσδίδει επιστημονική υφή, ενώ, εν γένει οι αρχαίοι Έλληνες δεν είχαν προχωρήσει στη διαπίστωση της δυνατότητας ποσοτικοποίησης της πραγματοποίησης μελλοντικών γεγονότων (Δάρας και Σύψας,2010). Η διαδρομή προς τη δημιουργία της θεωρίας των Πιθανοτήτων και η εξέλιξή της μέχρι σήμερα είναι μακρά,[15] αλλά θεμελιωτές της θεωρούνται οι 1623-1662)και Pierre de Fermat (1601-1665). Οι και Fermat χάραξαν τις θεμελιώδεις αρχές του κλάδου μέσα από πυκνή και ενδιαφέρουσα αλληλογραφία το 1654 στην προσπάθειά τους να επιλύσουν ένα πρόβλημα κυβοπαιξίας που έθεσε ο Γάλλος ευγενής Chevalier de Mere στον (Apostol, 1962; Bell, 1998; Mankiewicz, 2002). Η θεωρία ξεκίνησε με αφορμή ένα τυχερό παιχνίδι και η δημοσίευση της θεωρίας από τον Christiaan Huygens (1629-1695), ο οποίος έλαβε γνώση της αλληλογραφίας των και Fermat, προκάλεσε λόγω του θέματος το γενικό ενδιαφέρον, όμως, ο (1749-1827) έδειξε ότι η θεωρία θα μπορούσε να επεκταθεί σε πολλά επιστημονικά και πρακτικά προβλήματα (Apostol, 1962). Η θεωρία Πιθανοτήτων, όπως εξελίχθηκε στη συνέχεια εμπλέκεται στη Στατιστική στη Θεωρία Σφαλμάτων, και τα Οικονομικά μαθηματικά με εφαρμογές, εν γένει, από την κβαντική θεωρία ως την επιστημολογία (Apostol, 1962; Bell, 1998).

Τι περιέχει το κεφάλαιο των πιθανοτήτων και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Το κεφάλαιο των πιθανοτήτων αναφέρεται σε επιλεγμένα μοντέλα υπολογισμού της πιθανότητας ενός ενδεχομένου. Συγκεκριμένα, περιλαμβάνει την δεσμευμένη πιθανότητα και αναφέρεται στην έννοια της κατανομής μέσω της έννοιας της διακριτής ή της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής. Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται η δομή του κεφαλαίου σε σχέση με το περιεχόμενό του.

[15] Ο σύνδεσμος οδηγεί σε χρονολόγιο Πιθανοτήτων και Στατιστικής του Department of Mathematical Sciences, του Πανεπιστημίου του Texas στο El Paso:http://www.math.utep.edu/Faculty/mleung/probabilityandstatistics/chronologypage1.html



Σε προηγούμενη τάξη του Λυκείου οι μαθητές γνώρισαν τις πρώτες, τις βασικές έννοιες θεωρίας πιθανοτήτων. Διαπίστωσαν ότι είναι πολύ σημαντικό να μπορούν να βρίσκουν το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου αφού αυτό προϋποθέτει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας. Οι γνώσεις που απέκτησαν εκεί οι μαθητές είναι αρκετές για να υπολογίσουν πιθανότητες ενδεχομένων σε απλά πειράματα τύχης. Για να το πετύχουν αυτό αρκεί η χρήση του δενδροδιαγράμματος ή της απλής, άμεσης καταγραφής των απλών ενδεχομένων. Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές που έχουν επιλέξει τον προσανατολισμό των θετικών σπουδών, θα κληθούν να λύσουν προβλήματα περισσότερο σύνθετα και επομένως ο μαθηματικός εξοπλισμός τους θα πρέπει να είναι ανάλογος. Η δεσμευμένη πιθανότητα είναι η αφετηρία στην εισαγωγή των νέων εννοιών και από την επέκταση των εφαρμογών της έννοιας αυτής θα προκύψουν δύο ιδιαίτερα σημαντικές προτάσεις, το θεώρημα της ολικής πιθανότητας και το θεώρημα του Bayes. Ο γενικός ορισμός της πιθανότητας θα δώσει το περίγραμμα μέσα στο οποίο θα κινηθεί η μελέτη της έννοιας της πιθανότητας και θα προετοιμάσει το εννοιολογικό πλαίσιο στο οποίο θα οριστούν νέες έννοιες. Δύο πολύ σημαντικές νέες έννοιες είναι αυτή της τυχαίας μεταβλητής και η έννοια της συνάρτησης πιθανότητας με τα μέτρα της αναμενόμενης ή μέσης τιμής και της διακύμανσης ή της διασποράς. Τέλος θα μελετηθούν η κατανομή Bernoulli, η διωνυμική κατανομή και η κανονική κατανομή καθώς οι δύο πρώτες αντιπροσωπεύουν τις διακριτές τυχαίες μεταβλητές και η άλλη τις συνεχείς. Το κεφάλαιο θα ολοκληρωθεί με την προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής από την κανονική κατανομή.

Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο των Πιθανοτήτων;

Η διάσταση της εφαρμογής και η πολιτιστική – κοινωνική διάσταση είναι δυο απο τις διαστάσεις των Μαθηματικών που χαρακτηρίζουν ιδιαίτερα το περιεχόμενο του κεφαλαίου των πιθανοτήτων.

Η προσπάθεια των ανθρώπων να προβλέπουν το μέλλον έχει την ίδια ηλικία με την ανθρώπινη φύση. Αυτή η προσπάθεια, ακολούθησε είτε τη διαδρομή των μεταφυσικών, αστρολογικών και γενικά μη επιστημονικών προσεγγίσεων, είτε τη διαδρομή της επιστημονικής μελέτης και δημιουργίας Μαθηματικών μοντέλων πρόβλεψης.

Στην πρώτη διαδρομή λέμε ότι το μέλλον εξαρτάται από τη μοίρα, στη δεύτερη διαδρομή το μέλλον εξαρτάται από νόμους, κανονικότητες και στατιστικές διακυμάνσεις (Μόδης 1995).

Στο παρόν κεφάλαιο, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να διαπιστώσουν τη σημασία του υπολογισμού μιας πιθανότητας στη λήψη κάποιας απόφασης. Να γνωρίσουν τη σημασία των πιθανοθεωρητικών μεθόδων στην ανάπτυξη της επιστήμης (Βιολογία, Φυσική, Μετεωρολογία), της οικονομίας (προβλέψεις ανάκαμψης, ύφεσης, επιλογή επενδύσεων), της Ιατρικής (προσδόκιμο ζωής, αναμενόμενη εξάπλωση ασθενειών). Αυτό όμως που κατεξοχήν αναδεικνύει την ιδιαίτερη σημασία του κεφαλαίου των Πιθανοτήτων, είναι το γεγονός ότι οι μαθητές εισάγονται σταδιακά σε έναν άλλο χώρο και τρόπο σκέψης, στο στοχαστικό. Ο στοχαστικός γραμματισμός, ο οποίος ολοκληρώνεται με το κεφάλαιο της Στατιστικής, αποτελεί μία ανάγκη της σύγχρονης αντίληψης για την Μαθηματική παιδεία καθώς σηματοδοτεί την αναγνώριση της αξίας μη αιτιοκρατικών προσεγγίσεων των γεγονότων του κόσμου. Αναγνωρίζει το γεγονός της αβεβαιότητας και της μεταβλητότητας στην συλλογή δεδομένων και επιτρέπει στους ανθρώπους να παίρνουν αποφάσεις υπό το φως της αβεβαιότητας. (Cockcroft, 1982).

Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο των Πιθανοτήτων;

Το κεφάλαιο των Πιθανοτήτων στην Γ΄ Λυκείου στην ουσία οδηγεί τους μαθητές από τις απλές, σχεδόν εμπειρικές αριθμητικές μεθόδους υπολογισμού μιας πιθανότητας σε ένα χώρο όπου τα σύνθετα προβλήματα απαιτούν μία περισσότερο αναπτυγμένη στρατηγική και νέα Μαθηματικά εργαλεία. Συγκεκριμένα:

Α) Οι δύο νέες σημαντικές έννοιες πάνω στις οποίες στηρίζεται η περαιτέρω Μαθηματικοποίηση του χώρου των Πιθανοτήτων είναι η τυχαία μεταβλητή και η κατανομή πιθανότητας. Τυχαία μεταβλητή Χ είναι μία συνάρτηση η οποία σε κάθε στοιχείο $α_i$ του δειγματικού χώρου Ω αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό $Χ(α_i)$. Κατανομή πιθανοτήτων είναι το σύνολο των ζευγών $(x_i\ ,\ p_i)$ όπου x_i είναι τιμή της μεταβλητής Χ και το p_i ανήκει στο διάστημα[0, 1]. Ο ορισμός πλέον αφορά όχι μόνο σε δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα ενδεχόμενα αλλά και σε χώρους με μη ισοπίθανα ενδεχόμενα.

Β) Ο γενικός (αξιωματικός) ορισμός της πιθανότητας επιχειρεί να μεταφέρει τις απλές διαισθητικές παραδοχές του κλασικού ορισμού (που έχει διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις) στον τυπικό, αφηρημένο χώρο της Μαθηματικής αυστηρότητας. Η κλίμακα μέτρησης πιθανοτήτων είναι από το 0 μέχρι το 1.

Γ) Οι πρόσθετες πληροφορίες άλλοτε μεταβάλλουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου και άλλοτε όχι.

Δ)Αν σε ένα πείραμα τύχης τα δυνατά αποτελέσματα είναι δύο (επιτυχία, αποτυχία) τότε κατατάσσουμε το πείραμα στις δοκιμές Bernoulli. Η πιθανότητα να έχουμε x επιτυχίες σε ν ανεξάρτητες δοκιμές με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p P(X=x) αποτελεί τη συνάρτηση πιθανότητας μιας κατανομής που λέγεται διωνυμική.

Ε) Το ιστόγραμμα της κανονικής κατανομής έχει κωδωνοειδή μορφή και η κανονικοποίηση της κατανομής αυτής μας επιτρέπει να υπολογίζουμε πιθανότητες με χρήση έτοιμων πινάκων.

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

1) Σε ποια περίπτωση ένα πείραμα χαρακτηρίζεται πείραμα τύχης ;
2) Πως μπορούμε να εκφράσουμε ένα σύνθετο ενδεχόμενο με τη γλώσσα των συνόλων;
3) Ποιοι είναι οι 3 ορισμοί της πιθανότητας ενός ενδεχομένου και ποιες είναι οι διαφορές και οι ομοιότητες των ορισμών αυτών;
4) Ποια είναι η σημασία του νόμου των μεγάλων αριθμών;
5) Πως αξιοποιούνται τα μοντέλα της συνδυαστικής στον υπολογισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου;
6) Ποιες είναι οι βασικές σχέσεις στον λογισμό των πιθανοτήτων;
7) Σε τι διαφέρει η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας από την απλή και ποια είναι η σημασία της κατά τον έλεγχο της στοχαστικής ανεξαρτησίας δύο ενδεχομένων;
8) Πότε χρησιμοποιούμε το θεώρημα της ολικής πιθανότητας και πότε το θεώρημα Bayes;
9) Τι είναι η τυχαία μεταβλητή και ποια τα είδη της; Πως ορίζεται η κατανομή πιθανότητας και η συνάρτηση πιθανότητας στις τυχαίες διακριτές μεταβλητές;

10) Σε ποια πειράματα τύχης χρησιμοποιούμε την κατανομή Bernoulli και πως συνδέεται αυτή με τη διωνυμική κατανομή;
11) Ποια είναι η σημασία της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής πιθανότητας και πως αξιοποιείται σε πειράματα τύχης στα οποία η τυχαία μεταβλητή είναι διακριτή;
12) Ποια είναι η χρησιμότητα της αναμενόμενης τιμής και της διασποράς μιας τυχαίας μεταβλητής;
13) Σε τι διαφέρει η τυχαία διακριτή μεταβλητή από τη συνεχή και πως ορίζονται τα χαρακτηριστικά μεγέθη της τελευταίας; (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της πιθανότητας, η μέση τιμή και η διασπορά)
14) Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της κανονικής κατανομής και πως και για ποιον λόγο μετασχηματίζουμε την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ στην $N(0, 1)$;
15) Ποια είναι η σημασία των παραμέτρων μ και σ της κανονικής κατανομής σε καταστάσεις των οποίων τα αριθμητικά δεδομένα ακολουθούν την κανονική κατανομή;

Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μ1) Τα θεμέλια της στοχαστικής σκέψης είναι οι βασικές, οι πρωταρχικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων τις οποίες οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν σε υψηλότερο επίπεδο από αυτό που διδάχτηκαν στην Α΄ τάξη. Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να αξιοποιήσουν τις βασικές γνώσεις της Συνδυαστικής ώστε να μπορούν να υπολογίζουν ορισμένα βασικά μεγέθη όπως το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου, του ενδεχομένου, του συμπληρωματικού ενδεχομένου. (Δραστηριότητα Δ1).

Μ2) Επιπλέον θα πρέπει να μπορούν να μεταφράσουν τα ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης στην τυπική γλώσσα των συνόλων και να τα παριστούν με διαγράμματα (στόχοι 2.1.1 και 2.1.2)
(Δραστηριότητα Δ2)

Μ3) Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την ανάγκη η οποία οδήγησε τη μαθηματική κοινότητα να κατασκευάσει, με πρωτεργάτη τον Kolmogorov, τον γενικό (αξιωματικό) ορισμό της πιθανότητας. Επιπλέον θα πρέπει να μπορούν να αναγνωρίζουν τις ομοιότητες και τις διαφορές του με τον κλασικό ορισμό. (Στόχοι ΠΣ 2.2.1 και 2.2.3)
(Δραστηριότητα Δ3)

Μ4) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να συνδέσουν την έννοια της σχετικής συχνότητας με τον πειραματικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου ως όριο της σχετικής συχνότητας όταν ν→ (ν το πλήθος των παρατηρήσεων). (Στόχος 2.2.3)
(Δραστηριότητα Δ4)

Μ5) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να επιλέγουν τον κατάλληλο συνδυασμό των μοντέλων της Συνδυαστικής που έχουν διδαχτεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, ώστε να υπολογίζουν με τον κλασικό ορισμό την πιθανότητα ενός ενδεχομένου. (Στόχος 2.2.2)
(Δραστηριότητα Δ5)

Μ6) Οι μαθητές έχουν διδαχτεί στην Α΄ τάξη στοιχειώδεις κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων. Μέσα από μία σύντομη επανάληψη των συγκεκριμένων κανόνων οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να υπολογίσουν πιθανότητες σύνθετων ενδεχομένων ή να συσχετίζουν πιθανότητες σύνθετων ενδεχομένων όπως $P(A \cup B')$ (Στόχος 2.3.1). Κατάλληλα διατυπωμένα προβλήματα θα μπορούσαν να υποστηρίξουν τη διδασκαλία σε αυτό το σημείο. (Δραστηριότητα Δ6)

Μ7) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να αναγνωρίζουν σε ένα πείραμα τύχης τα ενδεχόμενα που είναι στοχαστικά εξαρτημένα και σε αυτή την περίπτωση να υπολογίζουν την πιθανότητά τους. (Στόχος 2.4.1) (Δραστηριότητα Δ7)

Μ8) Οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν τη σημασία του θεωρήματος της ολικής πιθανότητας όταν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης μπορεί να θεωρηθεί ως ένωση δύο ξένων ενδεχομένων. Εδώ το σημαντικό είναι να μπορούν οι μαθητές να διακρίνουν την στενή σχέση, αλλά και την διαφορετική χρηστική αξία του θεωρήματος του Bayes με το θεώρημα της ολικής πιθανότητας. Στην ουσία θα πρέπει να γνωρίζουν ότι το θεώρημα Bayes συσχετίζει πιθανότητες της μορφής $P(A|B)$ με πιθανότητες της μορφής $P(B|A)$. (Στόχοι 2.4.4 και 2.4.5) (Δραστηριότητα Δ8)

Μ9) Οι μαθητές θα πρέπει να αναγνωρίσουν στον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής την πρόθεση των Μαθηματικών να ξεπεράσουν τα στενά εμπειρικά πλαίσια του κλασικού ορισμού και να δομηθεί ο χώρος των πιθανοτήτων με αυστηρά Μαθηματικό τρόπο. Αυτό που θα πρέπει να υπογραμμιστεί είναι ότι όλες οι νέες έννοιες που εισάγονται στην Γ΄ Λυκείου για τον χώρο των Πιθανοτήτων έχουν στόχο την επέκταση της μελέτης πειραμάτων τύχης στα οποία τα στοιχειώδη ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα. Επιπλέον θα πρέπει να γνωρίζουν ότι η τυχαία μεταβλητή είναι συνάρτηση με την οποία σε ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου αντιστοιχούμε πραγματικούς αριθμούς. Τέλος θα πρέπει να γνωρίζουν ότι η συνάρτηση πιθανότητας είναι αυτή που σε κάθε τιμή της τυχαίας μεταβλητής αντιστοιχεί την πιθανότητά της. (Στόχοι 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3)
(Δραστηριότητα Δ9)

Μ10) Οι μαθητές θα πρέπει καταρχήν να μπορούν να διακρίνουν την κατανομή Bernoulli από την διωνυμική κατανομή καθώς και τις συναρτήσεις πιθανοτήτων των δύο κατανομών. Επιπλέον θα πρέπει να είναι ικανοί να αξιοποιήσουν την διωνυμική κατανομή και την αναμενόμενη τιμή σε πειράματα τύχης που μπορεί να θεωρηθούν δοκιμές Bernoulli. (Στόχοι 3.3.1 – 3.3.6)
(Δραστηριότητα Δ10)

Μ11) Οι μαθητές μέσα από ένα πρόβλημα που συνδέεται με την διωνυμική κατανομή θα πρέπει να κατασκευάσουν την αθροιστική συνάρτηση κατανομής ώστε να κατανοήσουν τη σημασία και τη χρησιμότητα της συγκεκριμένης έννοιας.
(Δραστηριότητα Δ9)

Μ12) Οι μαθητές θα πρέπει σε ρεαλιστικά προβλήματα να αξιοποιούν την έννοια της τυπικής απόκλισης μιας τυχαίας μεταβλητής Χ, σε συνδυασμό με την αναμενόμενη τιμή της, ώστε να μπορούν να εντοπίζουν αναμενόμενα διαστήματα στα οποία υλοποιείται ή όχι ένα προσδοκώμενο αποτέλεσμα.
(Δραστηριότητα Δ11)

Μ13) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να διακρίνουν αν μία τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής ή διακριτή και στην περίπτωση της συνεχούς να συνδέσουν και να υπολογίζουν την πιθανότητα με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και πάνω από τον οριζόντιο άξονα.
(Δραστηριότητα Δ12)

Μ14) Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τη σημασία του μετασχηματισμού της $N(\mu, \sigma^2)$ στην $N(0,1)$. Επιπλέον θα πρέπει να μπορούν να αξιοποιούν πίνακες ώστε να υπολογίζουν πιθανότητες ενδεχομένων όταν η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής είναι η κανονική.

(Δραστηριότητα Δ13)

Μ15) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να υπολογίσουν βασικές παραμέτρους της κανονικής κατανομής σε ένα πραγματικό πρόβλημα με ρεαλιστικά αριθμητικά δεδομένα και να αξιοποιούν τη σημασία τους στο συγκεκριμένο πρόβλημα.
(Δραστηριότητα Δ14)

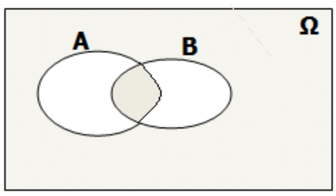
Προτεινόμενες δραστηριότητες.

Δ1) Από όλους τους τριψήφιους θετικούς ακεραίους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία που μπορούμε να δημιουργήσουμε με τα ψηφία 2, 3, 5, 7, 8 επιλέγουμε έναν στην τύχη.

α) Πόσα στοιχεία έχει ο δειγματικός χώρος;

β) Αν Α το ενδεχόμενο ο αριθμός που επιλέξαμε να είναι ζυγός να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του Α και του Α΄.

Δ2) Να συμπληρωθούν τα κελιά του πίνακα

Φυσική γλώσσα	**Συμβολική γλώσσα συνόλων**	**Διαγράμματα**
Συμβαίνουν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α, Β ή δεν συμβαίνει κανένα.		
	$(A\text{-}B)\cup(B\text{-}A)$	
		 Το γραμμοσκιασμένο ενδεχόμενο.

Δ3) Να γίνει μία μικρή ιστορική αναδρομή της εξέλιξης του ορισμού των πιθανοτήτων με αφετηρία το Laplace, ο οποίος συστηματοποίησε το λογισμό των πιθανοτήτων με βάση τον κλασικό ορισμό. Θα πρέπει να τονιστεί ότι ο κλασικός ορισμός αναφέρεται σε ισοπίθανα ενδεχόμενα. Στη συνέχεια να γίνει αναφορά στην προσέγγιση της έννοιας της πιθανότητας μέσω της σχετικής συχνότητας ν επαναλήψεων ενός πειράματος τύχης (πειραματικός ορισμός) για πολύ μεγάλο ν (νόμος των μεγάλων αριθμών). Τέλος να γίνει σύντομη αναφορά στην γενικευμένη πιθανότητα, η οποία πολλές φορές αναφέρεται και ως αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας.

Δ4) Να αναφερθούν από τον διδάσκοντα τα αποτελέσματα μεγάλου πλήθους πειραμάτων των Hodges και Lehman (Κουνιάς, Μωυσιάδης 1995) Στα συγκεκριμένα πειράματα υλοποιήθηκαν 5000 ρίψεις ενός ζαριού χωρισμένες σε 20 ομάδες των 250 ρίψεων η κάθε μία. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η σχετική συχνότητα της εμφάνισης του 1 ή του 2 σε κάθε μία από τις 20 ομάδες ρίψεων ήταν μεταξύ 0,276 και 0,372 ενώ η κλασική πιθανότητα είναι $\frac{2}{6}=0{,}333$.

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5182?locale=el

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5196?locale=el

Δ5) Ένα κλασικό και ιδιαίτερα ενδιαφέρον θέμα διαπραγμάτευσης με τους μαθητές είναι το πρόβλημα της σύμπτωσης γενεθλίων. Συγκεκριμένα ο διδάσκων μπορεί να δημιουργήσει κατάλληλη κινητοποίηση στους μαθητές υλοποιώντας την παρακάτω δραστηριότητα: Επιλέγει, δήθεν μετά από κάποια περίσκεψη, έξι μαθητές και τους ανακοινώνει ότι μεταξύ τους υπάρχουν δύο που έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα. Επειδή τις περισσότερες φορές η συγκεκριμένη πρόβλεψη είναι επιτυχής οι μαθητές διερωτούνται πως είναι δυνατόν να το γνωρίζει αυτό ο διδάσκων. Στο σημείο αυτό ζητά από τους μαθητές να διατυπώσουν και να λύσουν το αντίστοιχο πρόβλημα κάνοντας χρήση συνδυαστικών μοντέλων.

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση: Θα πρέπει να γίνει διαπραγμάτευση με τους μαθητές ώστε να επιλεγεί η βέλτιστη στρατηγική για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας. Αν Α το ενδεχόμενο να έχουν γεννηθεί όλοι οι μαθητές σε διαφορετικούς μήνες τότε ζητάμε την πιθανότητας $1\text{-}P(A)=1-\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{12^6}=0{,}78$. Στη συνέχεια θα ήταν χρήσιμο να συζητηθεί κάθε πόσες επαναλήψεις του πειράματος αναμένουμε αποτυχία.

http://statweb.stanford.edu/~susan/surprise/Birthday.html

Δ6) Σε ένα σχολείο γνωρίζουμε ότι το 40% των μαθητών ασχολείται με τον αθλητισμό αλλά δεν γνωρίζει κάποιο μουσικό όργανο. Το 15% των μαθητών γνωρίζει κάποιο μουσικό όργανο αλλά δεν ασχολείται με τον αθλητισμό. Το 20% των μαθητών δεν γνωρίζει κάποιο μουσικό όργανο ούτε ασχολείται με τον αθλητισμό. Επιλέγουμε στην τύχη έναν μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα να ασχολείται με τον αθλητισμό και συγχρόνως να γνωρίζει κάποιο μουσικό όργανο;

Να υπολογίσετε την ζητούμενη πιθανότητα αφού πρώτα μεταφράσετε τα δεδομένα στην συμβολική γλώσσα των πιθανοτήτων.

Δ7) Η παρακάτω δραστηριότητα θα μπορούσε να αξιοποιηθεί κατά την εισαγωγή της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας.

Σε μία φιλική συγκέντρωση βρέθηκαν 9 άτομα διαφόρων ηλικιών όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

ΟΝΟΜΑ	**ΗΛΙΚΙΑ (έτη)**
Μαρία	21
Βασιλική	26
Γιώργος	30
Κατερίνα	34
Πέτρος	28
Νίκος	40
Αργύρης	24
Άννα	38
Βασίλης	31

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

Η: η ηλικία ενός ατόμου να είναι άνω των 30 ετών.

Α: το άτομο είναι άνδρας

Γ: το άτομο είναι Γυναίκα

Να υπολογίσετε και να συγκρίνετε τις πιθανότητες: P(H), την πιθανότητα να είναι άνδρας άνω των 30 ετών, την πιθανότητα να είναι γυναίκα άνω των 30 ετών. Να εξηγήσετε τον λόγο για τον οποίο η P(H) διαφέρει από τις άλλες δύο πιθανότητες.

Δ8) Ένας από τους καθηγητές Μαθηματικών σε κάποιο Λύκειο έβαλε ωριαίο διαγώνισμα σε 2 τμήματα της Β΄ Λυκείου. Συγκέντρωσε 24 γραπτά από το τμήμα Β1 και 26 γραπτά από το τμήμα Β2. Διόρθωσε τα γραπτά και διαπίστωσε ότι το 10% των μαθητών στο Β1 και το 20% των μαθητών στο Β2 βαθμολογήθηκαν κάτω από τη βάση. Τα γραπτά όμως δεν ταξινομήθηκαν κατά τμήμα και βρέθηκαν μέσα στο συρτάρι του καθηγητή ανακατεμένα. Ο καθηγητής παίρνει στην τύχη ένα γραπτό.

α) Ποια είναι η πιθανότητα το γραπτό να έχει βαθμό κάτω από τη βάση;

β) Αν το γραπτό έχει βαθμό κάτω από τη βάση, ποια είναι η πιθανότητα να προέρχεται από το τμήμα Β1;

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση: Εδώ καλό θα είναι το πρώτο ερώτημα να απαντηθεί με χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας θεωρώντας Ω=(Β1)U(Β2) καθώς $(B1)\cap(B2)=\varnothing$

Το δεύτερο ερώτημα είναι απλή εφαρμογή του θεωρήματος Bayes.

Δ9) Δύο φίλοι, ο Α και ο Β, παίζουν το εξής παιγνίδι. Ο Α παίρνει δύο μπάλες, τυχαία χωρίς επανάθεση, από ένα κουτί που περιέχει 10 μπάλες αριθμημένες μία προς μία από το 1 μέχρι και το 10. Αν μία τουλάχιστον από τις μπάλες φέρει αριθμό μεγαλύτερο του 7 κερδίζει ο Α διαφορετικά κερδίζει ο Β. Ποιος από τους δύο έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει;

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση: Η συγκεκριμένη δραστηριότητα θα μπορούσε να αξιοποιηθεί στην εισαγωγή της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής. Ο διδάσκων έχει την ευκαιρία να δείξει στους μαθητές τον τρόπο με τον οποίο καθορίζεται μία τυχαία μεταβλητή ώστε να είναι κατάλληλη για το συγκεκριμένο πρόβλημα και πως αξιοποιείται η έννοια της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής. Αν για παράδειγμα ορίσει ως μεταβλητή Χ τον μεγαλύτερο αριθμό από τις δύο μπάλες τότε οι τιμές της μεταβλητής είναι 2, 3, 4, …..10. Οι πιθανότητες για κάθε ευνοϊκή τιμή της μεταβλητής Χ είναι:

$$P(X=10)=\frac{9}{\binom{10}{2}}=0,200,\quad P(X=9)=\frac{8}{\binom{10}{2}}=0,177,\quad P(X=8)=\frac{7}{\binom{10}{2}}=0,155$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς ο Α έχει ελαφρώς μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει καθώς $P(X>7)\approx 0,200+0,177+0,155=0,532$. Στο σημείο αυτό είναι ευκαιρία να γίνει αναφορά στην αθροιστική συνάρτηση κατανομής $P(X\leq κ)$ η οποία στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα έχει τη μορφή $P(X\leq 6)= P(X=1)+ P(X=2)+ P(X=3)+ P(X=4)+ P(X=5)+ P(X=6)$. Τέλος θα ήταν χρήσιμο να συνδεθούν οι $P(X>7)$ και η $P(X\leq 6)$ μέσα από τη σχέση
$P(X>7) =1- P(X\leq 6)$.
Παρατήρηση: Προφανώς το πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί και χωρίς τον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής κάτι που ίσως επισημάνουν και οι ίδιοι οι μαθητές.

Δ10) Σημαδεύουμε με ένα μικρό μπαλάκι ένα κουτί σε ορισμένη απόσταση. Η πιθανότητα να το πετύχουμε σε μία ρίψη είναι 0,3. Ρίχνουμε το μπαλάκι ώστε να πετύχουμε δύο φορές το κουτί ή να αποτύχουμε 2 φορές οπότε και σταματά το πείραμα.

α) Να ορίσετε τυχαία μεταβλητή Χ η οποία να παίρνει τιμές το πλήθος των ρίψεων στις οποίες σταματά το πείραμα και να βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας στο παραπάνω πείραμα.

β) Να υπολογίσετε την μέση τιμή Ε[Χ]. Πόση θα ήταν αυτή η μέση τιμή αν η επιτυχία και η αποτυχία ήταν ισοπίθανες;

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση: Ο στόχος της δραστηριότητας είναι να εμπλακούν οι μαθητές σε μία διαδικασία κατασκευής μιας απλής συνάρτησης πιθανότητας. Συγκεκριμένα η τυχαία μεταβλητή του πρώτου ερωτήματος παίρνει δύο τιμές Χ=2 και Χ=3 καθώς απαιτούνται 2 ή 3 το πολύ ρίψεις για να ολοκληρωθεί το πείραμα. Η συνάρτηση πιθανότητας καλό θα είναι να τεθεί σε διαπραγμάτευση ώστε να προκύψει ότι αυτή είναι $P[X=2]=(0,3)^2+(0,7)^2=0,58$ και $P[X=3]=1-P[X=2]=0,42$.

Η μέση τιμή είναι: $E[X]=2\cdot 0,58+3\cdot 0,42=2,42$. Αυτό σημαίνει ότι είναι περισσότερο πιθανό το πείραμα να ολοκληρωθεί σε 2 ρίψεις παρά σε 3. Αν η επιτυχία του στόχου ή η αποτυχία ήταν ισοπίθανες τότε $P[X=2]=P[X=3]=0,5$ και $E[X]=2,5$. Στην τελευταία περίπτωση παρατηρούμε ότι η μέση τιμή ισαπέχει κατά κάποιον τρόπο από τις τον αριθμό 2 και 3 και επομένως δεν προκρίνει καμία τιμή της Χ.

Δ11) Ένας παίκτης σε μία ομάδα μπάσκετ κατά το πρώτο ημίχρονο ενός αγώνα της ομάδας του έχει ποσοστό επιτυχίας 40% στα τρίποντα. Με την προϋπόθεση ότι ο παίκτης θα διατηρήσει σταθερό το ποσοστό των επιτυχιών στα τρίποντα και κατά το δεύτερο ημίχρονο:

α) Να κατασκευάσετε την συνάρτηση πιθανότητας του παίκτη για κ επιτυχίες σε ν σουτ τριών πόντων.

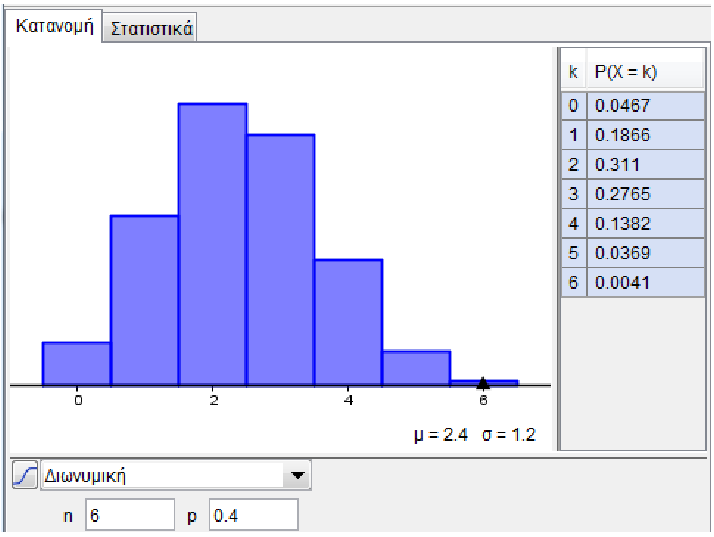
β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα σε 6 σουτ τριών πόντων να έχει τουλάχιστον 3 επιτυχίες.

γ) Για τα 6 σουτ του δευτέρου ερωτήματος να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής που έχετε ορίσει στο πρώτο ερώτημα και την διασπορά. Ποια είναι η σημασία των δύο αυτών ποσοτήτων για τον συγκεκριμένο παίκτη στον συγκεκριμένο αγώνα;

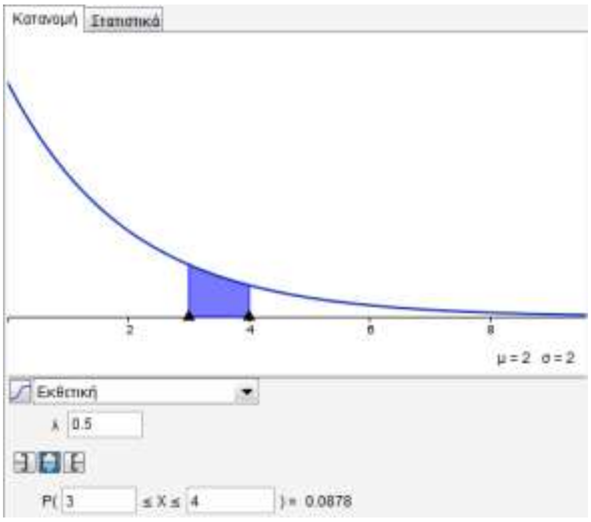
Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση: Η δραστηριότητα αυτή θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως αρχική εφαρμογή για την εμπέδωση της διωνυμικής κατανομής και των μέτρων της.

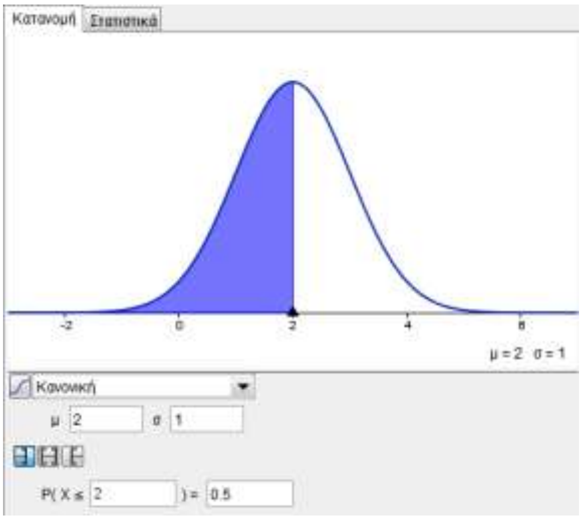
- α) $P(X=\kappa)=\binom{\nu}{\kappa}\cdot 0{,}4^{\kappa}\cdot 0{,}6^{\nu-\kappa}$
- β) Αν X η τυχαία μεταβλητή των επιτυχημένων σουτ τριών πόντων τότε ζητάμε την P(X≥3) η οποίας θα υπολογιστεί ως συμπληρωματική της πιθανότητας να έχει 0 ή 1 ή 2επιτυχημένες βολές $P(X\geq 3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$
- γ) Στο τρίτο ερώτημα η αναμενόμενη τιμή E[X]=6·0,4=2,4 εκφράζει τον προσδοκώμενο αριθμό από επιτυχημένες βολές του παίκτη. Με την τυπική απόκλιση $\sigma=\sqrt{6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}=1{,}2$ θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι ο παίκτης είναι ιδιαίτερα πιθανό να έχει τουλάχιστον 2 επιτυχίες και το πολύ 3 ή μάλλον 4 επιτυχίες.

Τα παραπάνω μπορούν να παρασταθούν συνολικά σε ένα γράφημα και έναν πίνακα ώστε οι μαθητές να έχουν μία πληρέστερη εικόνα των ποσοτήτων που υπολόγισαν αριθμητικά.

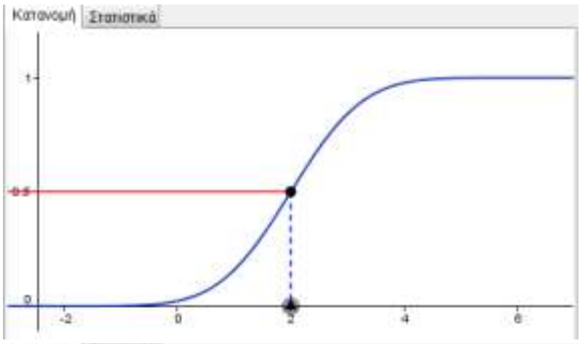


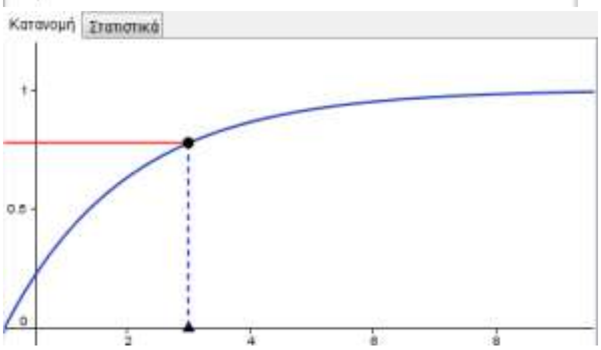
Δ12) Παρατηρήστε τις παρακάτω παραστάσεις κατανομών 2 διαφορετικών συνεχών τυχαίων μεταβλητών. Τι πληροφορίες μπορούμε να αντλήσουμε από το γράφημα και τα αριθμητικά δεδομένα; Σε τι διαφέρουν οι δύο κατανομές; Τι το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό έχει η δεύτερη κατανομή;



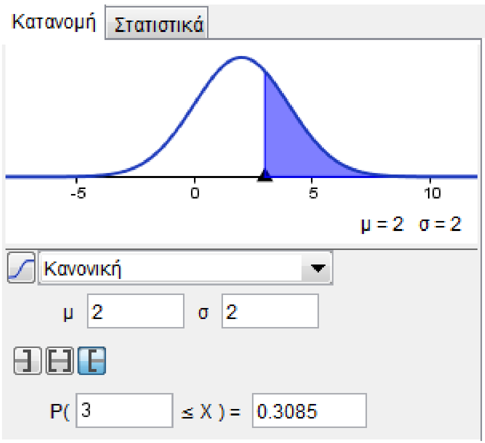


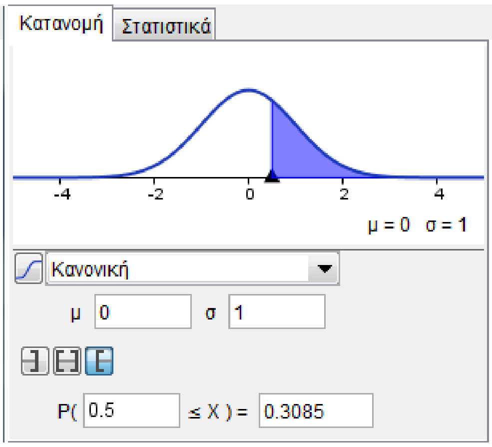
Από τα παρακάτω γραφήματα αθροιστικών κατανομών ποιο αντιστοιχεί στην πρώτη (αριστερή εικόνα) και ποιο στην δεύτερη (δεξιά εικόνα) κατανομή;





Δ13) Με βάση τα παρακάτω διαγράμματα να συγκρίνετε την P(X≥3), όταν η κατανομή της X είναι η N(2, 4), με την P(X≥0.5) όταν η κατανομή είναι η N(0, 1).

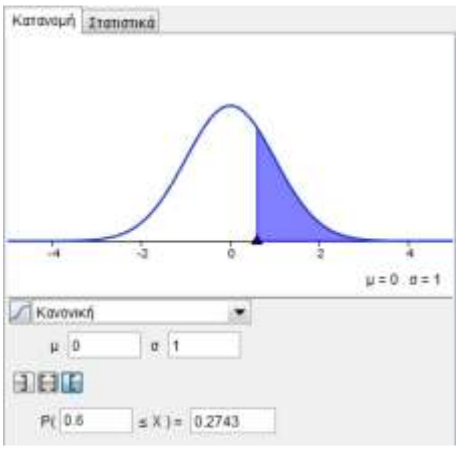




Σημείωση: Εδώ προτείνεται να υποδειχτεί από τον διδάσκοντα να εφαρμόσουν οι μαθητές στην κατανομή N(2, 4) τον μετασχηματισμό Z=(X-μ)/σ στην τιμή X=3.

Δ14) Ο Στέφανος είναι μαθητής Λυκείου στον θετικό προσανατολισμό και έχει παρατηρήσει ότι ξοδεύει κατά μέσο όρο μ= 20 € την εβδομάδα. Όταν διδάχτηκε το κεφάλαιο των πιθανοτήτων, και ειδικά την κανονική κατανομή, υπέθεσε ότι τα έξοδά του ακολουθούν κανονική κατανομή και πρόσεξε ότι θα ήταν ρεαλιστικό να θεωρήσει ότι η τυπική απόκλιση είναι σ=5 €. Για την επόμενη εβδομάδα το μέγιστο ποσό που μπορεί να εξασφαλίσει είναι 23 €. Ποια είναι η πιθανότητα να μην μπορεί να ανταποκριθεί στα έξοδα της συγκεκριμένης εβδομάδας;

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση: Κατ αρχήν θα πρέπει να γίνει μετάφραση του προβλήματος στο χώρο των πιθανοτήτων και της κανονικής κατανομής. Μία προτεινόμενη μετάφραση είναι και η εξής: Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η P(X>23) όταν η τυχαία μεταβλητή X των εβδομαδιαίων εξόδων του ακολουθεί την κανονική κατανομή N(20, 5^2). Ο μετασχηματισμός της μεταβλητής X σε Z=(X-20)/5 και του 23 σε (23-20)/5 =0,6 θα μετασχηματίσει την ζητούμενη πιθανότητα στην P(Z>0,6) =0,2743 καθώς η μεταβλητή Z ακολουθεί την κανονική κατανομή N(0,1).



Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου.

Ας έρθουμε τώρα στη διδακτική μεθοδολογία. Όσα αναφέρονται στη συνέχεια είναι προτεινόμενα ώστε ο διδάσκων να διαθέτει μία οργανωμένη πρόταση διδασκαλίας.

Κατά αρχήν καλό θα είναι ο διδάσκων να διαθέτει μία γενική εικόνα-όπως η παρακάτω- για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η διδασκαλία του κεφαλαίου.

Σε πρώτη φάση ο διδάσκων θα κάνει μία γενική επανάληψη των μεθόδων υπολογισμού του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης. Επιπλέον θα κάνει επανάληψη βασικών εννοιών που σχετίζονται με τον χώρο των Πιθανοτήτων μέσα στα πλαίσια του κλασικού ορισμού. Η φάση αυτή θα μπορούσαμε να πούμε ότι εστιάζει κυρίως σε δραστηριότητες που έχουν στόχο την ανάπτυξη δεξιοτήτων μετάφρασης μεταξύ διαφορετικών πλαισίων. Οι δεξιότητες αυτές θα βοηθήσουν τους μαθητές να χειρίζονται απλές παραστάσεις όπως $A \cap B'$ μέσω διαγραμμάτων. Να σημειωθεί και να τονιστεί ότι θα πρέπει να αποφεύγονται δραστηριότητες που απαιτούν σύνθετη αλγεβρική διαχείριση πολύπλοκων παραστάσεων συνόλων.

Σε δεύτερη φάση ο διδάσκων θα αναφερθεί στον κλασικό θεωρητικό ορισμό της πιθανότητας και στον ορισμό της πειραματικής πιθανότητας. Η διάκριση των δύο ορισμών είναι σημαντική και θα πρέπει να γίνει μέσω συγκεκριμένων παραδειγμάτων. Στο σημείο αυτό θα μπορούσε ο διδάσκων να ζητήσει από τους μαθητές, ιδιαίτερα από αυτούς που έχουν δυνατότητα πρόσβασης σε Η/Υ στο σπίτι τους, να μελετήσουν και παρουσιάσουν ένα παράδειγμα στο οποίο ο υπολογισμός των δύο πιθανοτήτων θα ήταν εφικτός.

Στη συνέχεια θα ακολουθήσει η αξιοποίηση των Συνδυαστικών μοντέλων, ιδιαίτερα δε της πολλαπλασιαστικής αρχής, στον υπολογισμό μιας πιθανότητας με τη βοήθεια του κλασικού ορισμού. Στην φάση αυτή δίνονται ένα η δύο προβλήματα υπολογισμού πιθανότητας με τον κλασσικό ορισμό τα οποία προέρχονται, αν είναι δυνατόν, από τον κόσμο της εμπειρίας των μαθητών. Κατά τον υπολογισμό των ευνοϊκών και των συνολικών περιπτώσεων καλό θα είναι να απαιτείται η χρήση συνδυασμών, μεταθέσεων και πολλαπλασιαστικής αρχής. Για παράδειγμα το πρόβλημα με το ασανσέρ που προτείνεται στο πρόγραμμα σπουδών (Δ10) είναι αρκετά ενδιαφέρον και προσφέρει την ευκαιρία στον διδάσκοντα να δώσει ένα ανάλογο πρόβλημα π.χ ένα πρόβλημα κατασκευής τριψήφιων αριθμών από 5 διαφορετικά μη μηδενικά ψηφία, και να ζητήσει από τους μαθητές να το λύσουν ανάλογα.

Κατά την **τρίτη φάση** θα γίνει η διδασκαλία της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας μέσα από κατάλληλα απλά παραδείγματα. Καλό θα είναι να αποσαφηνιστεί η έννοια της στοχαστικής ανεξαρτησίας ενδεχομένων μέσω της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας. Η εισαγωγή της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας θα πρέπει να γίνει με ένα πρόβλημα όπως αυτό που προτείνεται στον παρόντα οδηγό στη δραστηριότητα Δ7.

Η διδασκαλία της δεσμευμένης πιθανότητας θα κλείσει με την διδασκαλία του θεωρήματος της ολικής πιθανότητας για δύο ενδεχόμενα και θα ολοκληρωθεί με το θεώρημα του Bayes. Εδώ ο διδάσκων είναι χρήσιμο να κάνει μία αρχική επεξεργασία του θεωρήματος ολικής πιθανότητας και αφού καταλήξει στον τύπο του θεωρήματος Bayes να τον εφαρμόσει σε ένα απλό αλλά χαρακτηριστικό παράδειγμα όπως αυτό που προτείνεται στον παρόντα οδηγό (Δ8).

Στην επόμενη **τέταρτη φάση** γίνεται η ανάλυση του γενικού ορισμού της πιθανότητας και η ανάλυση της ανάγκης που οδήγησε τη μαθηματική κοινότητα να κατασκευάσει τον συγκεκριμένο ορισμό. Ο ορισμός της τυχαίας μεταβλητής θα πρέπει να δοθεί μέσα από κατάλληλα παραδείγματα, τα οποία θα αναδεικνύουν το νόημα και τη χρησιμότητα της έννοιας. Για παράδειγμα η εισαγωγή της εν λόγω έννοιας θα μπορούσε να γίνει μέσα από την δραστηριότητα Δ9 του παρόντος οδηγού όπου και αναλύεται η διδακτική προσέγγιση της δραστηριότητας.

Στην **πέμπτη φάση** θα γίνει η διδασκαλία της έννοιας της κατανομής. Το παράδειγμα του νομίσματος και των επιτυχιών σε ένα ανάλογο πρόβλημα μπορεί να αποτελέσει την αφετηρία της διδασκαλίας της έννοιας της κατανομής και στη συνέχεια της κατανομής Bernoulli. Ακολούθως θα πρέπει να αποσαφηνιστεί η διαφορά της κατανομής Bernoulli από την διωνυμική κατανομή. Τέλος, θα πρέπει να τονιστεί η χρησιμότητα της αθροιστικής κατανομής μέσα από κατάλληλα διατυπωμένα ερωτήματα της μορφής : «Να υπολογίσετε την πιθανότητα τουλάχιστον 5 επιτυχιών σε 8 ρίψεις ……….»

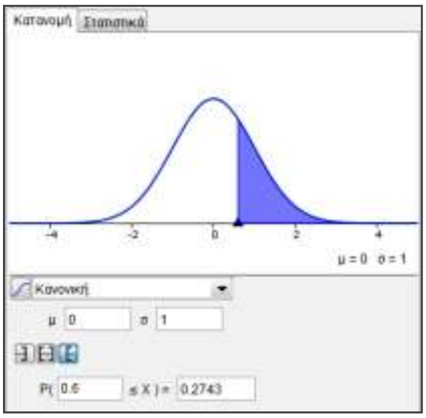
Στην **πέμπτη φάση** υλοποιείται η διδασκαλία της έννοιας της συνεχούς μεταβλητής και της κανονικής κατανομής. Αφού τονιστεί η ιδιαίτερη σημασία της κατανομής αυτής θα πρέπει να αποσαφηνιστούν οι σημασίες των όρων μέση τιμή και τυπική απόκλιση στην εν λόγω κατανομή. Θα τονιστεί η ανάγκη κανονικοποίησης της κατανομής και μέσα από απλά παραδείγματα και χρήση κατάλληλων πινάκων θα υπολογιστούν πιθανότητες σε κατανομές που αναφέρονται σε συγκεκριμένα προβλήματα. Λόγω της ιδιαίτερης σημασίας της εν λόγω κατανομής καλό θα είναι ο διδάσκων να οργανώσει τη διδασκαλία του με τρόπο παραστατικό κάτι που μπορεί να υλοποιηθεί μέσα από την αξιοποίηση της τεχνολογίας. Αν αυτό είναι ανέφικτο θα πρέπει τουλάχιστον να παρουσιάσει στους μαθητές φωτοτυπημένες εικόνες πάνω σε φύλλα εργασίας τα οποία θα εμπλέκουν τους μαθητές σε κατάλληλες δραστηριότητες. Ας δούμε πως μπορεί να υλοποιηθεί η δραστηριότητα Δ14 του παρόντος οδηγού μέσω ενός φύλλου εργασίας.

Φύλλο εργασίας

Ερώτημα 1: Να ορίσετε κατάλληλη τυχαία μεταβλητή για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Ποια κανονική κατανομή Ν (μ, σ^2) ακολουθεί η εν λόγω μεταβλητή; Πως θα συμβολίσετε τη ζητούμενη πιθανότητα;

Ερώτημα 2: Ποιος μετασχηματισμός είναι απαραίτητος για να μπορεί να υπολογιστεί η εν λόγω πιθανότητα με τη βοήθεια πινάκων; Να υλοποιήσετε τον εν λόγω μετασχηματισμό.

Ερώτημα 3: Με βάση την παρακάτω εικόνα να απαντήσετε στο ερώτημα του προβλήματος.



Ποια σημεία θα πρέπει να προσέξει ιδιαίτερα ο διδάσκων;

1) Ο γενικός ορισμός της πιθανότητας συνήθως χαρακτηρίζεται ως αξιωματικός ορισμός σε πολλά βιβλία. Καλό θα είναι να αποφεύγεται ο χαρακτηρισμός του ορισμού αυτού ως «αξιωματικός» και να υπογραμμίζεται στους μαθητές ότι ο ορισμός αυτός δεν είναι τίποτε περισσότερο από μία γενίκευση του κλασικού ορισμού.

2) Είναι χρήσιμο να τονισθεί ότι η πιθανότητα χωρίς δέσμευση αναφέρεται στο σύνολο των ενδεχομένων του δειγματικού χώρου οπότε ο υπολογισμός της γίνεται μέσω ενός κλάσματος με μεγαλύτερο παρονομαστή από αυτόν που αντιστοιχεί στην δεσμευμένη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η πιθανότητα χωρίς δέσμευση να είναι μικρότερη από τη δεσμευμένη πιθανότητα.

3) Το θεώρημα του Bayes στην ουσία μας επιτρέπει να απαντάμε σε ερωτήματα τα οποία θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως αντιστροφή των ερωτημάτων στα οποία μπορούμε να απαντήσουμε μέσω της δεσμευμένης πιθανότητας, και σαν τέτοιο θα πρέπει να χρησιμοποιείται κατά την διδασκαλία.

4) Αναμένεται να υπάρξει κάποια δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής ιδιαίτερα δε στην επιλογή κατάλληλης τυχαίας μεταβλητής σε ένα σύνθετο πρόβλημα υπολογισμού πιθανότητας.

5) Είναι απαραίτητο οι μαθητές να έχουν μία σαφή εικόνα για τις διαφορές μεταξύ της τυχαίας μεταβλητής που η κατανομή της χαρακτηρίζεται ως κατανομή Bernoulli και της τυχαίας μεταβλητής που χαρακτηρίζεται ως διωνυμική. Στην πρώτη περίπτωση η τυχαία μεταβλητή παίρνει τιμές μόνο τις 0 και 1 η δε συνάρτηση πιθανότητας αυτής της τυχαίας μεταβλητής

είναι $P(X=x)=\begin{cases} p, & \text{αν } x=1 \\ 1-p, & \text{αν } x=0 \end{cases} \quad 0 \le p \le 1$

Μία άλλη ισοδύναμη έκφραση της συγκεκριμένης συνάρτησης πιθανότητας είναι και η

$P(X=x)=p^x \cdot (1-p)^{1-x}$. Στην περίπτωση της κατανομής Bernoulli η τυχαία μεταβλητή παίρνει τιμές 0, 1, 2, 3, ……, ν η δε συνάρτηση πιθανότητας είναι η $P(X=x)=\binom{\nu}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{\nu-x} \quad 0 \le p \le 1$.

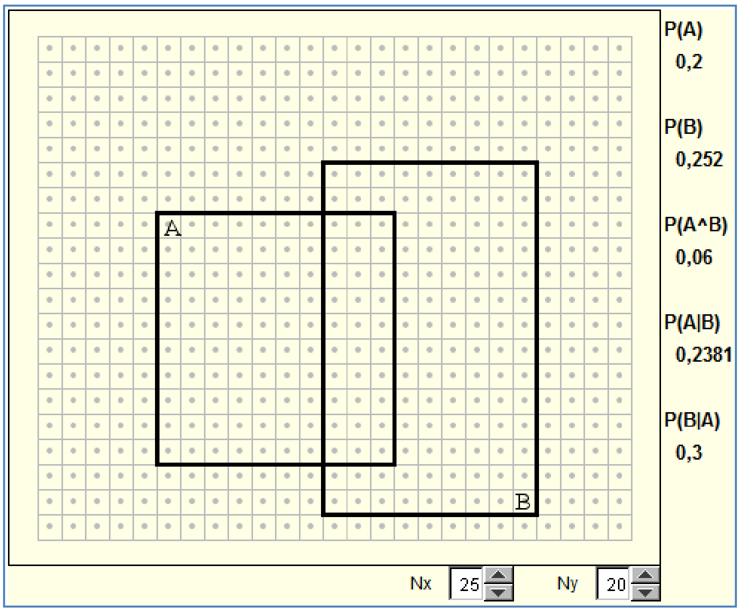
6) Αν η συνεχής τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή τότε οι πιθανότητες $P(X \le \kappa)$ ή $P(X \ge \kappa)$ ή $P(\kappa \le X \le \lambda)$ κ.λ.π υπολογίζονται μέσω του αντίστοιχου εμβαδού μεταξύ της καμπύλης της γραφικής παράστασης της $f(x)=\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ και του άξονα x΄x.

Αξιοποίηση της Τεχνολογίας στην διδασκαλία του κεφαλαίου.

Αρχικά θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η χρήση της τεχνολογίας έχει προστιθέμενη αξία αν επιτρέπει πειραματισμό και διερεύνηση σε συνδυασμό με πολλαπλές αναπαραστάσεις της έννοιας που θέλουμε να διδάξουμε.

Ας δούμε 2 παραδείγματα:

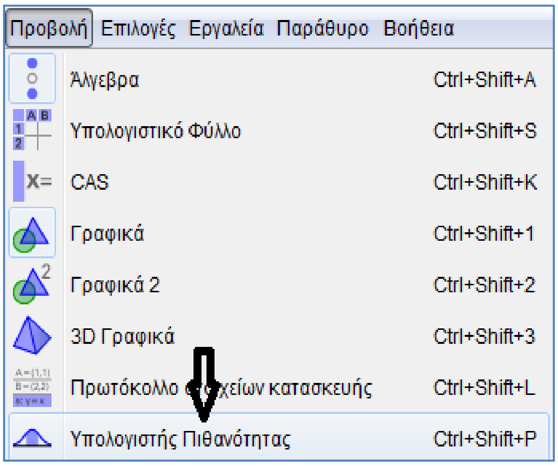
1) Στην ιστοσελίδα:
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Probability/ConditionalProbability.shtml
υπάρχει μία μικροεφαρμογή (applet) στο οποίο οι μαθητές και ο διδάσκων έχουν τη δυνατότητα να διερευνήσουν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται οι πιθανότητες P(A), P(B), $P(A \cap B)$, $P(A|B)$, $P(B|A)$. Τα Α, Β είναι ενδεχόμενα που παριστάνονται μέσα σε ένα Γεωμετρικό, δυναμικά μεταβαλλόμενο περιβάλλον.

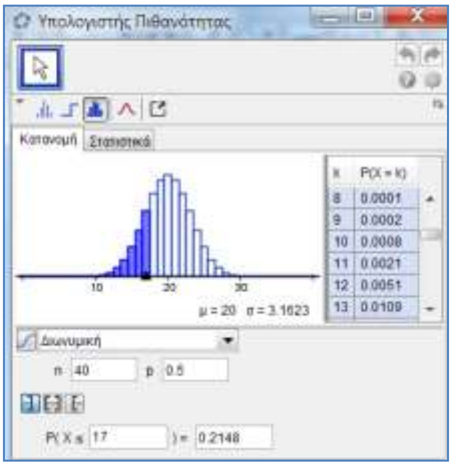


Τα N_x και N_y δημιουργούν τον χώρο Ω ($N_x \cdot N_y$ τελείες) μέσα στον οποίο μπορούμε δυναμικά να αλλάζουμε τα ενδεχόμενα (υποσύνολα) Α και Β. Στην διπλανή στήλη εμφανίζονται όλες οι πιθανότητες των ενδεχομένων που μας ενδιαφέρουν. Ενδεικτικά ερωτήματα που μπορούμε να θέσουμε στους μαθητές είναι τα παρακάτω:

- Να δημιουργήσετε έναν δειγματικό χώρο Ω με N(Ω)=25×20. Τα ενδεχόμενα Α και Β με P(A)=0,2 και P(B)=0,252 και P(A∩B)=0,06. Να συγκρίνετε τα P(B|A) που προκύπτουν από το γράφημα με αυτό που προκύπτει από τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας και αυτό που προβάλλεται στην οθόνη.
- Να πειραματιστείτε με άλλα ενδεχόμενα ιδιαίτερα με στοχαστικά ανεξάρτητα και με ενδεχόμενα στα οποία το ένα είναι υποσύνολο του άλλου.

2) Ένα ιδιαίτερα χρήσιμο και συγχρόνως ελεύθερο λογισμικό κατάλληλο για τη διδασκαλία των Πιθανοτήτων είναι το Geogebra. Οι πλέον πρόσφατες εκδόσεις δίνουν τη δυνατότητα επιλογής ενός υπολογιστή πιθανότητας με τον οποίο μπορούμε να εμπλέξουμε τους μαθητές σε δραστηριότητες υπολογισμού Πιθανοτήτων διακριτών αλλά και συνεχών τυχαίων μεταβλητών.





Αφού οι μαθητές εξοικειωθούν με το συγκεκριμένο περιβάλλον μπορούμε να ζητήσουμε, κατά την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων, να καταφεύγουν στον υπολογιστή πιθανότητας και με βάση τα γραφήματα και τα αριθμητικά δεδομένα να κάνουν υπολογισμούς. Επιπλέον θα μπορούσε να ζητηθεί να μεταφράσουν οι μαθητές τα γραφήματα, να αντλήσουν επιπλέον πληροφορίες και να πειραματιστούν αλλάζοντας τα δεδομένα του προβλήματος.

Βιβλιογραφία

1) Apostol, T. M. (1962). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*. Αθήνα: Ατλαντίς.
2) Bell, E. T. (2000). *Οι Μαθηματικοί*. (Μ. Μαγειρόπουλος, μετάφραση). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.. (Πρωτότυπη έκδοση, 1971).
3) Cockcroft, W. (1982). *The Cockcroft Report: Mathematics counts.*
http://www.educationengland.org.uk/documents/cockcroft/

4) Mankiewicz, R. (2002). *Η Ιστορία των Μαθηματικών*.(Λ. Καρατζάςμετάφ.).Εκδόσεις: Αλεξάνδρεια.

5) Sheldon Ross (2011). *Βασικές αρχές θεωρίας Πιθανοτήτων*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

6) Δάρας, Τ. Ι. & Σύψας, Π.Θ.(2010). *Πιθανότητες και Στατιστική: Θεωρία και Εφαρμογές.*Εκδόσεις:ΖΗΤΗ.

7) Κουνιάς. Σ, Μωυσιάδης. Χ (1995): *Θεωρία Πιθανοτήτων Ι*. Εκδόσεις Ζήτη.

8) Μόδης Θεόδωρος (1995). *ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ. Προσεγγίζοντας επιστημονικά τα προμηνύματα του αύριο*. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης. Ηράκλειο.

9) Χαραλαμπίδης, Χ. (2002). Ιστορική Ανασκόπηση των Πιθανοτήτων. Στο *19ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας-Τα μαθηματικά Διαχρονικός Παράγοντας Πολιτισμού*, σ. 35-62. Τελευταία ανάσυρση 10-01-2015: http://www.hms.gr/apothema/?s=se&i=732

B_2 (Αναλυτική Γεωμετρία)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

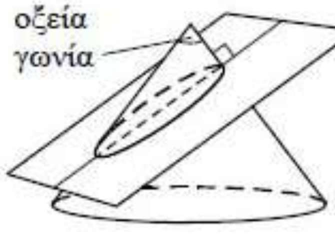
Η αφορμή για την ανακάλυψη των κωνικών τομών στην αρχαιότητα φαίνεται ότι ήταν το περίφημο «Δήλιον Πρόβλημα»:

«*Να κατασκευαστεί, με κανόνα και διαβήτη, ακμή κύβου ο οποίος να έχει όγκο διπλάσιο του όγκου ενός δοθέντος κύβου*»

Με αλγεβρικό συμβολισμό αυτό σημαίνει ότι αν α είναι η πλευρά του αρχικού κύβου, ζητείται να κατασκευαστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα x, που θα είναι η πλευρά του κύβου με όγκο $2\alpha^3$, δηλαδή να ισχύει $x^3 = 2\alpha^3$. Το πρόβλημα έμεινε άλυτο για πολλά χρόνια μέχρι που ο Ιπποκράτης ο Χίος (430 περίπου π. Χ.) έκανε ένα σημαντικό βήμα, όπως μας πληροφορεί ο Πρόκλος (450 περίπου μ. Χ.). Διαπίστωσε ότι το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την παρεμβολή δύο μέσων αναλόγων ανάμεσα στο α και στο 2α. Με άλλα λόγια είναι ισοδύναμο με την κατασκευή δύο τμημάτων x και y, τέτοιων ώστε $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2\alpha}$. Από την τελευταία αναλογία εύκολα προκύπτει ότι $x^3 = 2\alpha^3$, δηλαδή το x είναι η πλευρά του ζητούμενου κύβου.

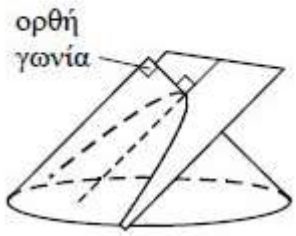
Ένας άλλος Έλληνας αρχαίος Γεωμέτρης που παρουσίασε μια αξιόλογη λύση του Δήλιου προβλήματος, χωρίς ωστόσο να χρησιμοποιήσει αποκλειστικά τον κανόνα και το διαβήτη, ήταν ο Μέναιχμος. Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο Μέναιχμος δεν χρησιμοποιούσε για την ονομασία των κωνικών τομών τις σημερινές ονομασίες «έλλειψη», «παραβολή» και «υπερβολή», οι οποίες εισήχθηκαν και καθιερώθηκαν, αργότερα, από τον Απολλώνιο. Οι ονομασίες των κωνικών τομών κατά τον Μέναιχμο ήταν εμπνευσμένες από τον τρόπο με τον οποίο οι αρχαίοι Έλληνες όριζαν τον κώνο. Όπως αναφέρει ο Heath[16], γνώριζαν μόνο τον ορθό κώνο, τον οποίο όριζαν ως την επιφάνεια που διαγράφεται από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου ως προς μια από τις κάθετες πλευρές του. Ανάλογα με το είδος της γωνίας τους κώνους τους χώριζαν σε τρείς κατηγορίες: οξυγώνιο κώνο, ορθογώνιο κώνο και αμβλυγώνιο κώνο. Από κάθε είδος κώνου παρήγαγαν ένα μόνο είδος κωνικής τομής, η οποία προέκυπτε από την κάθετη τομή ενός επιπέδου προς ένα από τους γεννήτορες του κώνου. Με αυτόν τον τρόπο προέκυπταν οι τρεις κωνικές τομές όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

Η τομή του επιπέδου που είναι κάθετο στη γενέτειρα οξυγωνίου κώνου, είναι έλλειψη.

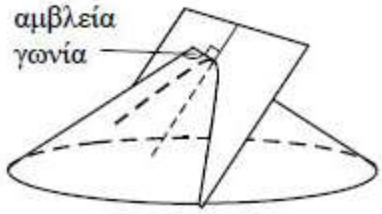


---

[16] Sir Thomas L. Heath, «Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών», Τόμος ΙΙ, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., σελ. 150



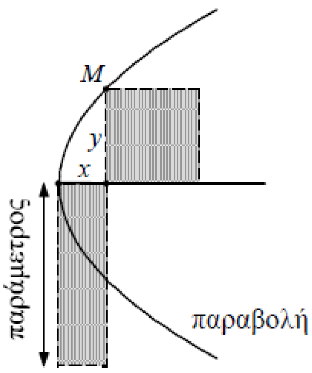
Η τομή του επιπέδου που τέμνει κάθετα τη γενέτειρα ορθογωνίου κώνου, είναι παραβολή.

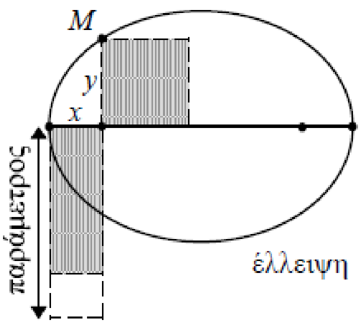


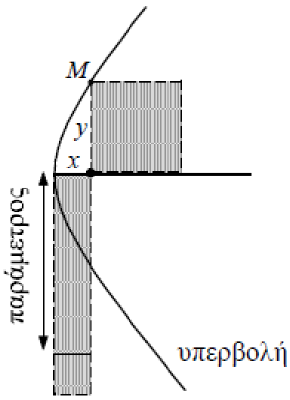
Η τομή του επιπέδου που τέμνει κάθετα τη γενέτειρα αμβλυγωνίου κώνου, είναι υπερβολή.

Οι όροι αυτοί χρησιμοποιούνται και από τον Αρχιμήδη (287-212 π. Χ.) στα έργα του «Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής» και «Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων».

Αποκορύφωμα της θεωρητικής μελέτης των τριών κωνικών τομών κατά την αρχαιότητα υπήρξε το περίφημο έργο «Κωνικά» του Απολλώνιου του Περγαίου (250 περίπου π. Χ.). Τα «Κωνικά» ήταν χωρισμένα σε 8 βιβλία, τα οποία περιείχαν μια άψογη θεωρία των κωνικών τομών και ένα μεγάλο πλήθος νέων αποτελεσμάτων[17]. Έχουν διασωθεί τα 7 πρώτα βιβλία στα οποία υπάρχουν 387 θεωρήματα ενώ στο 8^{o}, όπως προκύπτει από τη μαρτυρία του Πάππου, υπήρχαν άλλα 100. Η καινοτομία του Απολλώνιου έγκειται στον ορισμό των τριών καμπύλων ως τομών ενός τυχαίου κώνου με ένα επίπεδο, καθώς και στην εισαγωγή των όρων «Παραβολή», «Έλλειψη» και «Υπερβολή». Τα ονόματα αυτά σχετίζονται άμεσα με το νέο ορισμό του Απολλώνιου. Ας παρατηρήσουμε τα παρακάτω σχήματα.







[17] Αδαμόπουλος et al, «Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου», σελ. 80

Πηγή: Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου

Ο Απολλώνιος απέδειξε ότι τα δύο γραμμοσκιασμένα εμβαδά, του τετραγώνου και του ορθογωνίου, είναι ισοδύναμα σε καθένα από τα παραπάνω σχήματα. Η πλευρά y του τετραγώνου ισούται με το κάθετο τμήμα από ένα σημείο Μ της γραμμής προς τον άξονα συμμετρίας της. Το τμήμα x, που είναι η μία πλευρά του ορθογωνίου, ισούται με την απόσταση του ίχνους της καθέτου y από την κορυφή της καμπύλης. Η σχέση της άλλης πλευράς του ορθογωνίου με τη σταθερή παράμετρο της τομής καθορίζει τη μορφή και το όνομα της καμπύλης. Αν η άλλη πλευρά ισούται (παραβάλλεται) προς την παράμετρο, τότε η καμπύλη είναι παραβολή. Αν η άλλη πλευρά είναι μικρότερη (ελλείπει) από την παράμετρο, η καμπύλη είναι έλλειψη. Τέλος, αν είναι μεγαλύτερη (υπερβάλλει) από την παράμετρο, η καμπύλη είναι υπερβολή. Με άλλα λόγια, ο Απολλώνιος λαμβάνοντας ως μονάδα μέτρησης την κωνική τομή στην οποία η παράμετρος παρουσιάζεται αυτούσια, την παραβολή δηλαδή, στη συνέχεια «παρέβαλλε» τις άλλες δύο κωνικές τομές, την έλλειψη και την υπερβολή.

Ο τελευταίος μεγάλος αρχαίος Έλληνας μαθηματικός που συνέβαλε καθοριστικά στην ανάπτυξη των κωνικών τομών μέχρι τον 17^{ο} αιώνα, ήταν ο Πάππος. Στο έργο του «Συναγωγή» και ιδιαίτερα στο 4^{ο} βιβλίο ο Πάππος κάνει χρήση των κωνικών τομών και συγκεκριμένα της υπερβολής, δίνοντας δύο λύσεις για την τριχοτόμηση οποιασδήποτε γωνίας[18]. Μετά τον Πάππο σημαντική ώθηση στη μελέτη των κωνικών τομών έδωσαν οι μελέτες των μαθηματικών του 17^{ου} αιώνα. Ο Desargues (1591 – 1661) αποτέλεσε τον πρώτο μαθηματικό ο οποίος εξέτασε τις κωνικές τομές μέσω της προβολικής γεωμετρίας. Ο Pascal (1623 – 1662) μαθητής του Desargues, ασχολήθηκε και αυτός με τις κωνικές τομές στην πραγματεία του «Essay pour les coniques» η οποία διασώθηκε από τον Leibniz. Ωστόσο, η θεμελίωση της αλγεβρικής γεωμετρίας πραγματοποιήθηκε από δύο μεγάλους μαθηματικούς, τον Pierre De Fermat και τον Rene Descartes και επέτρεψε τη μετάφραση των αλγεβρικών πράξεων σε γεωμετρικές και αντίστροφα, γεγονός που συνέβαλε καθοριστικά στην εξέλιξη των κωνικών τομών.

Η χρήση των κωνικών τομών από τον Kepler στην εργασία του «Σχόλια πάνω στις κινήσεις του Άρη», (1609) όπου και διατύπωσε τους συνώνυμους νόμους (ελλειπτικές τροχιές πλανητών, ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους), οδήγησαν σε μια πιο δραστική επανεξέταση των κωνικών τομών. Το ενδιαφέρον που προέκυψε για την κατασκευή κατόπτρων για τα τηλεσκόπια, πολλά από τα οποία έχουν σχήματα κωνικών τομών, αλλά και η εισαγωγή της έννοιας της κινούμενης γης απαιτούσε πλέον τη μελέτη καμπυλών για να εξηγηθούν οι τροχιές των κινουμένων σωμάτων. Ανάμεσα στα κινούμενα σώματα, τα βλήματα απέκτησαν ξεχωριστή σημασία, αφού σε μια πρώτη προσέγγιση ακολουθούν τις τροχιές παραβολών[19].

Τι περιέχει το κεφάλαιο των κωνικών τομών και πώς το περιεχόμενο του συνδέεται με προγενέστερο σχετικό

Κατά τη φοίτηση τους στη Β΄ τάξη του Λυκείου, οι μαθητές έχουν έλθει ήδη σε επαφή με έννοιες της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Πιο συγκεκριμένα: έχουν διδαχθεί τη βασική θεωρία του διανυσματικού λογισμού και έχουν μελετήσει σε βάθος την ευθεία γεωμετρικά και αναλυτικά με τη βοήθεια εξισώσεων.

Στην Γ΄ Λυκείου οι μαθητές πρόκειται να διδαχθούν τις κωνικές τομές. Η μελέτη των κωνικών τομών αποτελεί μια φυσιολογική διδακτική εξέλιξη μετά τη μελέτη της ευθείας, που εκφράζεται με εξίσωση

[18] Heath, «Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών», Τόμος ΙΙ, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ., σελ. 420.

[19] Thomas, G.-Finney, R., (1995). «Απειροστικός Λογισμός», Τόμος Α΄, Π.Ε.Κ.

πρώτου βαθμού, αφού η αναλυτική τους έκφραση γίνεται με εξισώσεις 2^{ου} βαθμού. Η μελέτη τους κρίνεται απαραίτητη όχι μόνο για την ιστορική τους αξία στη διαμόρφωση νέων μαθηματικών εννοιών, αλλά και για τις πολλές εφαρμογές που έχουν σε διάφορους τομείς. Η κατασκευή κατόπτρων, η μελέτη των τροχιών των πλανητών, των ηλεκτρονίων, των βλημάτων και η λιθοθρυψία αποτελούν χαρακτηριστικούς τομείς εφαρμογής των ιδιοτήτων των κωνικών τομών.

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο μελετώνται ο κύκλος, η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή. Η μελέτη τους στηρίζεται στην εστιακή τους ιδιότητα από την οποία προκύπτουν και οι εξισώσεις που τις χαρακτηρίζουν. Επιπλέον, σε κάθε περίπτωση, μελετάται και η εφαπτομένη γεωμετρικά και αλγεβρικά. Η εξίσωση της εφαπτομένης προκύπτει με τη βοήθεια των παραγώγων, θεωρώντας κάθε κωνική τομή ως καμπύλη που προκύπτει από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Τέλος, οι μαθητές έρχονται σε επαφή και με το σύστημα των πολικών συντεταγμένων, στο οποίο η κίνηση των πλανητών και αντίστοιχων συστημάτων περιγράφεται καλύτερα σε σχέση με τις καρτεσιανές συντεταγμένων.

Εστίαση σε σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο των κωνικών τομών

- Κάθε κωνική τομή είναι γεωμετρικός τόπος σημείων του επιπέδου τα οποία ικανοποιούν συγκεκριμένη κάθε φορά ιδιότητα.
- Ο τιμή της εκκεντρότητας καθορίζει τη μορφή της κωνικής τομής.
- Οι κωνικές τομές που εξετάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο με κατάλληλες προϋποθέσεις μπορούν να περιγραφούν μέσω μιας συνάρτησης.
- Οι ιδιότητες των κωνικών τομών έχουν πολλές πρακτικές εφαρμογές.

Σε ποια ερωτήματα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

- Γιατί ονομάσθηκαν κωνικές τομές ο κύκλος, η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή;
- Πώς ορίζεται ο κύκλος, η παραβολή, η έλλειψη και η υπερβολή;
- Ποιες είναι οι εξισώσεις των κωνικών τομών;
- Πώς μετασχηματίζεται η εξίσωση μιας κωνικής τομής έτσι, ώστε να εκφράζει συνάρτηση;
- Πώς ορίζεται η εφαπτομένη σε ένα σημείο μιας κωνικής τομής, ποια είναι η εξίσωσή της και πώς την προσδιορίζουμε με τη χρήση των παραγώγων;
- Ποιες είναι οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου και της έλλειψης;
- Πώς συνδέονται οι πολικές με τις καρτεσιανές συντεταγμένες και πώς εκφράζονται οι εξισώσεις του κύκλου και της έλλειψης σε σύστημα πολικών συντεταγμένων;
- Πώς ορίζονται οι ασύμπτωτες της υπερβολής;

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Μετά το τέλος της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου οι μαθητές θα είναι ικανοί να:

Μ1. Διατυπώνουν τον ορισμό για κάθε κωνική τομή, εστιάζοντας στο γεγονός ότι κάθε κωνική τομή αποτελεί γεωμετρικό τόπο σημείων του επιπέδου που ικανοποιούν συγκεκριμένη ιδιότητα (στόχοι: 1.2.1, 1.3.1, 1.4.1).

Μ2. Χρησιμοποιούν τις εξισώσεις των κωνικών τομών στις διάφορες μορφές τους για την επίλυση προβλημάτων και αναγνωρίζουν από την εξίσωση την αντίστοιχη κωνική τομή (στόχοι: 1.1.1, 1.2.1, 1.3.1, 1.4.1).

Μ3. Περιγράφουν τις κωνικές τομές αλγεβρικά και γεωμετρικά με συναρτήσεις.

Μ4. Συνδέουν την αναλυτική εξίσωση του κύκλου με τις γεωμετρικές του ιδιότητες.

Μ5. Αποδεικνύουν με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων ότι μια εξίσωση της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με συγκεκριμένους συντελεστές, παριστάνει κύκλο και να βρίσκει το κέντρο και την ακτίνα του (στόχος: 1.1.3).

Μ6. Περιγράφουν τις εξισώσεις του κύκλου και της έλλειψης με πολικές συντεταγμένες (στόχοι: 1.1.1, 1.3.1).

Μ7. Αποδεικνύουν την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής, της έλλειψης και της υπερβολής με χρήση των παραγώγων (στόχοι: 1.2.3, 1.3.3, 1.4.3) και χρησιμοποιούν τον μνημονικό κανόνα στην επίλυση ασκήσεων προσδιορισμού της εξίσωσης της εφαπτομένης συγκεκριμένων κωνικών τομών σε συγκεκριμένα σημεία τους. .

Μ8. Χρησιμοποιούν την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής και της έλλειψης για την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου.

Μ9. Συσχετίζουν την εκκεντρότητα με το είδος της κωνικής τομής και εξηγούν το ρόλο της στη μορφή της εκάστοτε κωνικής τομής (1.3.4, 1.4.5).

Μ10. Περιγράφουν γεωμετρικά και αλγεβρικά τις ασύμπτωτες της υπερβολής και τη συμμετρία της γραφικής αναπαράστασης (στόχος: 1.4.5).

Μ11. Να λύνουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου και της έλλειψης.

Δραστηριότητες

Ας δούμε τώρα μερικές δραστηριότητες που μπορούμε να υλοποιήσουμε στην τάξη με τους μαθητές μας, προκειμένου να διαπιστώσουμε, τι μπορούν να κάνουν με αναφορά στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα και στους στόχους του Π.Σ.

Δ1. (Μ4)

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Όταν έχει κέντρο το σημείο $\mathrm{K}(0,1)$ και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}\left(\sqrt{3},0\right)$.

ii) Όταν έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα $\mathrm{A}(-1,2)$ και $\mathrm{B}(7,8)$.

iii) Όταν έχει ακτίνα $\rho = 5$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $\mathrm{A}(1,0)$ και $\mathrm{B}(7,0)$

iv) Όταν τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $\mathrm{A}(4,0)$ και $\mathrm{B}(8,0)$ και τον άξονα $y'y$ στα σημεία $\Gamma(0,-2)$ και $\Delta(0,\mu)$.

v) Όταν εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{A}(3,0)$ και διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(1,2)$.

Δ2. (Μ5)

Δίνονται οι εξισώσεις:

1. $x^2+y^2+4x-6y-3=0$
2. $x^2+y^2+6x-8y+25=0$
3. $x^2+y^2-4\alpha x+10\beta y+4\alpha^2+16\beta^2=0$
4. $x^2+y^2-3x+4y+10=0$

Ποιες από τις παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν κύκλο; Στην περίπτωση που η εξίσωση παριστάνει κύκλο, να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Δ3. (Μ1, Μ2, Μ8)

α. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης του πίνακα που ακολουθεί με το αντίστοιχό του στη δεύτερη στήλη:

Εξίσωση	**Κωνική τομή**
$9x^2-y^2=0$	Έλλειψη
$x^2+y^2-4x+2y-6=0$	Υπερβολή
$y^2-2x-2y+1=0$	Παραβολή
$4x^2+y^2-8x+2y+4=0$	Ζεύγος ευθειών
$x^2-y^2+2x-4y-4=0$	Κύκλος

β. Όμοια για τον πίνακα:

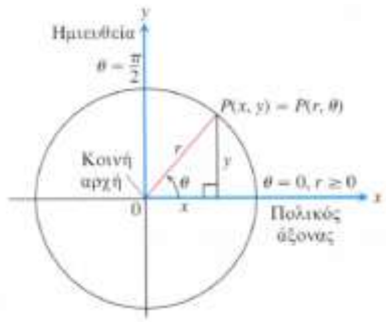
Εκκεντρότητα	**Κωνική τομή**
$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	Κύκλος
0	Ισοσκελής υπερβολή
$\dfrac{4}{5}$	Υπερβολή

$\frac{5}{4}$	Έλλειψη
$\sqrt{2}$	

Δ4. (Μ5)

Συσχέτιση πολικών και καρτεσιανών συντεταγμένων

Στο διπλανό σχήμα εμφανίζονται συγχρόνως πολικές και καρτεσιανές συντεταγμένες.



Α. Γράψτε τις εξισώσεις συσχετισμού πολικών και καρτεσιανών συντεταγμένων.

Β. Συμπληρώστε τον πίνακα που ακολουθεί με βάση τις παραπάνω εξισώσεις και με κατάλληλους αλγεβρικούς χειρισμούς

Πολική εξίσωση	**Καρτεσιανή εξίσωση**	**Γεωμετρική ερμηνεία**
$r\sigma\upsilon\nu\theta=2$		
$r^2\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\eta\mu\theta=4$		
$4r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta+9r^2\eta\mu^2\theta=36$		
$r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta-r^2\eta\mu^2\theta=1$		

Γ. Να βρείτε μια πολική εξίσωση του κύκλου $x^2+(y-4)^2=16$ και της έλλειψης $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$.

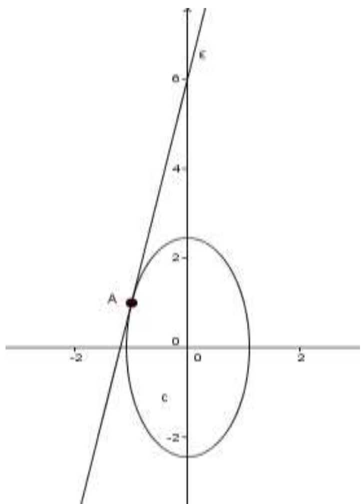
Δ. Να βρείτε τις καρτεσιανές εξισώσεις που αντιστοιχούν στις παρακάτω πολικές εξισώσεις:

1. $r^2=4r\sigma\upsilon\nu\theta$
2. $r=\dfrac{4}{2\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta}$

Δ5. (Μ7). Δίνεται η εξίσωση $5x^2+y^2=6$

i) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει έλλειψη, της οποίας να βρείτε τις εστίες και την εκκεντρότητα.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $\mathrm{A}(-1,1)$ της έλλειψης με χρήση παραγώγων.



Ενδεικτική λύση για το (ii) ερώτημα

Στο διπλανό σχήμα εμφανίζεται η έλλειψη με εξίσωση $5x^2+y^2=6$ και η εφαπτομένη στο σημείο της $\mathrm{A}(-1,1)$. Αυτό που ζητάμε είναι να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης με τη χρήση παραγώγων. Διαδοχικά έχουμε:

$$5x^2+y^2=6 \Leftrightarrow y^2=6-5x^2 \quad (1)$$

Επειδή το 1ο μέλος είναι μη αρνητικός αριθμός πρέπει και

$$6-5x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{6}{5} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{6}{5}} \leq x \leq \sqrt{\frac{6}{5}}$$

Επομένως, η εξίσωση (1) γράφεται ισοδύναμα

$$y=\sqrt{6-5x^2}=f(x) \text{ ή } y=-\sqrt{6-5x^2}=-f(x)$$

με $x \in D_f=\left[-\sqrt{\frac{6}{5}},\sqrt{\frac{6}{5}}\right]$. Παρατηρούμε ότι το σημείο $\mathrm{A}(-1,1)$ βρίσκεται στο τμήμα της έλλειψης που

είναι πάνω από τον άξονα $x'x$, γι αυτό επιλέγουμε τον τύπο $f(x)=\sqrt{6-5x^2}$. Για κάθε $x \in\left(-\sqrt{\frac{6}{5}},\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$

η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{-5x}{\sqrt{6-5x^2}}$, οπότε:

$f(-1)=1$ και $f'(-1)=5$ και άρα η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $\mathrm{A}(-1,1)$ είναι:

$$y-f(-1)=f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y=5x+6$$

ΣΧΟΛΙΟ: Η παραπάνω δραστηριότητα μπορεί να δοθεί ως παράδειγμα στους μαθητές και στη συνέχεια να διδαχθεί η γενική μορφή της εξίσωσης της εφαπτομένης σε σημείο κωνικής τομής με τη βοήθεια παραγώγων και να λύνονται οι ασκήσεις με βάση το μνημονικό κανόνα που θα προκύψει.

Δ6. (Μ2, Μ3).

Δ6.1. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση στις επόμενες ερωτήσεις

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{3}\sqrt{16x^2-144}$ είναι:

   Α. Ο κύκλος με κέντρο το Ο και ακτίνα ρ = 12

   Β. Το άνω τμήμα της έλλειψης με α = 3 και β = 4

   Γ. Η υπερβολή με εστίες τα σημεία Ε'(- 5, 0) και Ε(5, 0)

   Δ. Η παραβολή με διευθετούσα x = - $\dfrac{5}{4}$

   Ε. Τα δύο άνω τμήματα υπερβολής με εστίες τα σημεία Ε'(- 5, 0) και Ε(5, 0)

2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ είναι:

Α. Ημικύκλιο που βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Β. Η έλλειψη με α=3 και β=2.

Γ. Η υπερβολή με α=3 και β=2

Δ. Το κάτω τμήμα της υπερβολής με εστίες τα σημεία Ε’ $\left(-\sqrt{7},0\right)$ και Ε $\left(\sqrt{7},0\right)$.

Ε. Το κάτω τμήμα της έλλειψης με εστίες τα σημεία Ε’ $\left(-\sqrt{7},0\right)$ και Ε $\left(\sqrt{7},0\right)$.

3. Η εξίσωση του ημικυκλίου του διπλανού σχήματος είναι

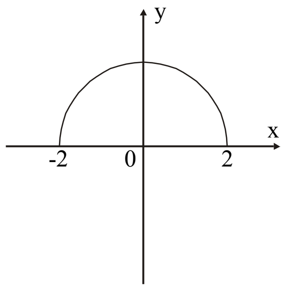
Α. $x^2 + y^2 = 2$

Β. $x^2 + y^2 = 4$

Γ. $y = \sqrt{4 - x^2}$

Δ. $x = \sqrt{4 - y^2}$

Ε. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$

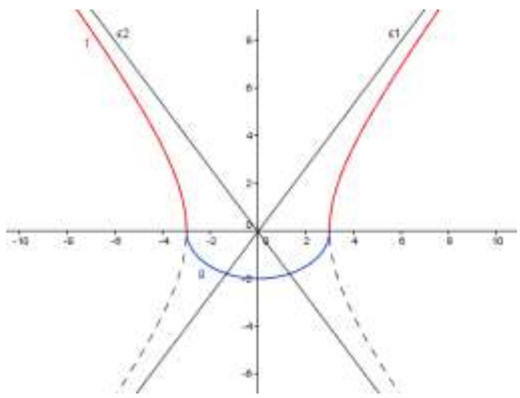


Δ6.2. Με βάση τις συναρτήσεις της 1ης και 2ης ερώτησης και τις απαντήσεις που δώσατε, προσδιορίστε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)=\begin{cases} f(x), & \text{αν } x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty) \\ g(x), & \text{αν } x\in[-3,3] \end{cases}$ και χαράξτε τη γραφική της παράσταση. Στηριζόμενοι στη γραφική παράσταση, εξηγήστε τι συμβαίνει με τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες.

Ενδεικτική λύση

Από τις ερωτήσεις 1 και 2 προκύπτει η συνάρτηση με τύπο

$$h(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{16x^2-144}, & x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty) \\ -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}, & x\in[-3,3] \end{cases}$$



Ο πρώτος κλάδος είναι τα δύο άνω τμήματα της υπερβολής με εστίες (-5,0), (5, 0) και ασύμπτωτες $y=\frac{4}{3}x$ και $y=-\frac{4}{3}x$, ενώ ο δεύτερος κλάδος είναι το κάτω τμήμα της έλλειψης που διέρχεται από τα σημεία (-3, 0) και (3, 0) και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο (0, -2). Αναμένεται ότι σχετικά εύκολα μπορούν οι μαθητές να κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση που βλέπουμε στο σχήμα. Στη συνέχεια με βάση τη γραφική παράσταση μπορούν να απαντήσουν στα ερωτήματα της δραστηριότητας.

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Α. Σημαντικά Ερωτήματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά τη διδασκαλία

Στη συνέχεια παραθέτουμε ενδεικτικές ερωτήσεις που μπορούν να βοηθήσουν στην ανάπτυξη της διδασκαλίας του κεφαλαίου.

- **Ποιος είναι ο ορισμός του κύκλου σύμφωνα με την Ευκλείδεια Γεωμετρία; Μπορείτε να εκφράσετε σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με εξίσωση την ιδιότητα του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ ;**

  Αναμένεται ότι εύκολα οι μαθητές θα καταλήξουν στην εξίσωση του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$. Στη συνέχεια ο διδάσκων ζητεί από τους μαθητές να απαντήσουν στην ίδια ερώτηση με τη διαφορά ότι ο κύκλος τώρα έχει κέντρο, όχι την αρχή των αξόνων, αλλά οποιοδήποτε σημείο $\mathrm{K}(x_0,y_0)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές περνούν από την ειδική περίπτωση του κύκλου (O,ρ) στη γενικότερη (K,ρ).
- **Πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε το γεωμετρικό ορισμό της εφαπτομένης του κύκλου σε ένα σημείο του προκειμένου να κατασκευάσουμε την εξίσωση της στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων;**

  Προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές αρχικά, στην εύρεση της εφαπτομένης σε σημείο κύκλου που το κέντρο του είναι αρχή των αξόνων και στη συνέχεια να γενικεύσουν μέσω της δραστηριότητας Δ1 του Π.Σ.
- **Γιατί εκτός από τις καρτεσιανές συντεταγμένες χρησιμοποιούμε και το σύστημα των πολικών συντεταγμένων;**

  Η ερώτηση αυτή στοχεύει στην εισαγωγή του συστήματος πολικών συντεταγμένων. Οι μαθητές πρέπει να καταλάβουν την αναγκαιότητα της επινόησης του συστήματος πολικών συντεταγμένων με συγκεκριμένες πρακτικές εφαρμογές.

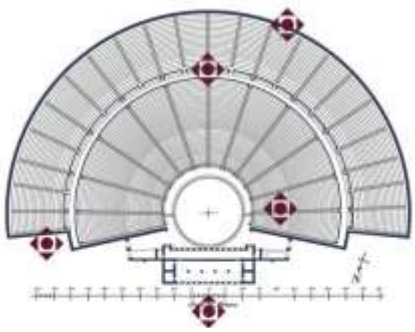
Περιοχή Αμπελοκήπων Αθήνας - Πηγή: Google earth

Η παραπάνω εικόνα αποτυπώνει κάποια τοποθεσία της περιοχής των Αμπελοκήπων. Για να προσδιορίσουμε τη θέση κάποιου κτιρίου στο χάρτη, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε καρτεσιανές συντεταγμένες με άξονες τα κόκκινα ευθύγραμμα τμήματα.

Περιοχή Ρώμης – Ιταλία. Πηγή: Google earth

Χάρτης στην οθόνη ραντάρ

Η εικόνα άνω αριστερά αποτυπώνει περιοχή της Ρώμης της Ιταλίας. Επειδή τα οικοδομικά τετράγωνα τοποθετούνται σε κυκλική διάταξη με κέντρο την πλατεία, ο προσδιορισμός της θέσης του κτιρίου που βρίσκεται στο σημείο Μ, φαίνεται πιο εύκολη αν γνωρίζουμε την απόσταση του από την πλατεία και τη γωνία που σχηματίζει το αντίστοιχο τμήμα με τον οριζόντιο άξονα που αντιστοιχεί στο κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα.
Στην εικόνα άνω δεξιά, βλέπουμε πώς αποτυπώνεται ένας χάρτης στην οθόνη ενός ραντάρ. Είναι φανερό ότι ο προσδιορισμός οποιουδήποτε σημείου στο χάρτη της οθόνης είναι ευκολότερος αν γνωρίζουμε την απόσταση του από το κέντρο και τη γωνία που σχηματίζει με τον ορίζοντα.
Το ίδιο συμβαίνει και για τον προσδιορισμό μιας θέσης σε ένα θέατρο όπως φαίνεται και στην επόμενη εικόνα του αρχαίου θεάτρου της Επιδαύρου.



Αυτό που πρέπει να αντιληφθούν οι μαθητές μας είναι ότι οι μετασχηματισμοί που μπορούμε να εφαρμόσουμε:

✓Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι η οριζόντια και κατακόρυφη μεταφορά.

✓Στο πολικό σύστημα συντεταγμένων η περιστροφή και η αυξομείωση.

- **Σε ποιες περιπτώσεις η εξίσωση $x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0$ παριστάνει κύκλο και ποιο είναι το κέντρο και η ακτίνα του;**
  Οι μαθητές διερευνούν τις συνθήκες για τους συντελεστές $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma$ έτσι, ώστε η παραπάνω εξίσωση να παριστάνει κύκλο. Οι μαθητές πρέπει να εξοικειωθούν να μεταβαίνουν από την καρτεσιανή εξίσωση στην πολική εξίσωση και αντιστρόφως, αλλά και να βρίσκουν από αυτές το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.
- **Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από μία ευθεία δ και ένα σημείο Ε του επιπέδου;**

Οι μαθητές καλούνται να διατυπώσουν τις απόψεις τους για τη μορφή της γραμμής που καθορίζουν τα σημεία που έχουν την παραπάνω ιδιότητα. Η χρήση των ΤΠΕ μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν διαισθητικά ότι η καμπύλη είναι μια παραβολή και στη συνέχεια να προχωρήσουν στην απόδειξη της εξίσωσής της.

- **Πώς μπορούμε να εκφράσουμε με τη βοήθεια δύο αντίθετων συναρτήσεων την εξίσωση της παραβολής $y^2 = 2px$;**

  Καταρχάς, πρέπει να τονίσουμε στους μαθητές ότι η εξίσωση $y^2 = 2px$ δεν αντιστοιχεί σε συνάρτηση, οπότε τους ζητάμε να τη μετασχηματίσουν, ώστε να διαπιστώσουν ότι η παραβολή που παριστάνει αποτελείται από τα σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο αντίθετων συναρτήσεων. Αναμένεται να καταλήξουν στη μορφή $y = \sqrt{2px}$ ή $y = -\sqrt{2px}$. Η πρώτη εκφράζει το μέρος της παραβολής που είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ και η δεύτερη το μέρος που είναι κάτω από τον $x'x$.
- **Πώς μπορούμε με χρήση των παραγώγων να προσδιορίσουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ σε κάποιο σημείο της $A(x_1, y_1)$;**

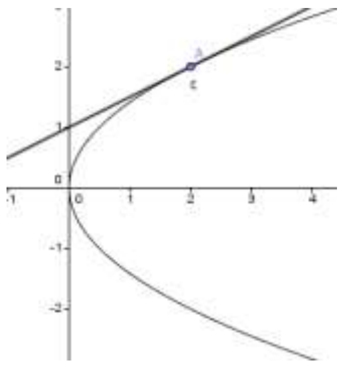
  Όπως είδαμε προηγουμένως η παραβολή $y^2 = 2px$ αποτελείται από τα σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $y = \sqrt{2px} = f(x)$ και $y = -\sqrt{2px} = -f(x)$

  Είναι, όμως $f'(x) = \dfrac{p}{\sqrt{2px}}$, για $x \neq 0$ Έτσι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_1, y_1)$ της παραβολής είναι ίσος με:

$$\lambda = \begin{cases} f'(x_1) = \dfrac{p}{\sqrt{2px_1}} = \dfrac{p}{y_1}, & \text{αν } y_1 > 0 \\ -f'(x_1) = \dfrac{p}{-\sqrt{2px_1}} = \dfrac{p}{y_1}, & \text{αν } y_1 < 0 \end{cases}$$

  οπότε, αντικαθιστώντας στον τύπο $y - y_1 = \lambda(x - x_1)$ όπου $\lambda = \dfrac{p}{y_1}$ και $y_1^{\,2} = 2px_1$, παίρνουμε ως εξίσωση της εφαπτομένης την $yy_1 = p(x + x_1)$.

  Αν $y_1 = 0$, δηλαδή, αν το σημείο Α ταυτίζεται με το Ο, τότε η γραφική παράσταση της *f* και της αντίθετής της έχουν ως εφαπτομένη στο Ο τον άξονα $y'y$, που έχει εξίσωση την *x=0*, η οποία δίνεται και αυτή από τον τύπο $yy_1 = p(x + x_1)$, για $x_1 = 0$ και $y_1 = 0$.

  Στο διπλανό σχήμα η παραβολή έχει εξίσωση $y^2 = 2x$ και το σημείο $A(2,2)$ ανήκει σε αυτή. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο $A(2,2)$ είναι:

$$2y = x + 2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

- **Ποια είναι η ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής;**

  Προτείνεται η ανακλαστική ιδιότητα να χρησιμοποιηθεί στην επίλυση προβλημάτων που αναφέρονται σε πραγματικές καταστάσεις, όπως η δραστηριότητα Δ2 του Π.Σ.
- **Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που το άθροισμα των αποστάσεων τους από δύο δεδομένα σημεία επιπέδου είναι σταθερό και μεγαλύτερο από την απόστασή τους; Ποια είναι η εξίσωση που τον περιγράφει;**
- **Ποια είναι η θέση των κορυφών του μεγάλου άξονα και των εστιών της έλλειψης σε κάθε περίπτωση;**

  Στόχος της ερώτησης είναι να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι οι κορυφές του μεγάλου άξονα της έλλειψης και οι εστίες της, βρίσκονται στον ίδιο άξονα σε κάθε περίπτωση.

- **Πώς ορίζεται η εκκεντρότητα της έλλειψης και πώς επηρεάζει τη μορφή της;**
- **Ποια είναι η ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης;**
  Για τη διδασκαλία της ανακλαστικής ιδιότητας προτείνεται η δραστηριότητα Δ3 του Π.Σ.
- **Πώς μπορούμε να εκφράσουμε με τη βοήθεια δύο αντίθετων συναρτήσεων την εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$;**
- **Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων τους από δύο δεδομένα σημεία επιπέδου είναι σταθερή και μικρότερη από την απόστασή τους ; Ποια είναι η εξίσωση που τον περιγράφει;**
- **Ποια είναι η ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής;**
- **Ποια είναι η θέση των κορυφών της υπερβολής και των εστιών της σε κάθε περίπτωση;**
  Στόχος της ερώτησης είναι να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι οι κορυφές της υπερβολής και οι εστίες της, βρίσκονται στον ίδιο άξονα σε κάθε περίπτωση.
- **Πώς ορίζεται η εκκεντρότητα της υπερβολής και πώς επηρεάζει τη μορφή της;**
- **Πώς μπορούμε να εκφράσουμε με τη βοήθεια δύο αντίθετων συναρτήσεων την εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$;**
- **Πώς βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της υπερβολής;**
  Προτείνεται να βρεθεί η ασύμπτωτη του κλάδου της υπερβολής που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και στη συνέχεια με χρήση της συμμετρίας της υπερβολής να βρεθούν οι ασύμπτωτες και στα άλλα τεταρτημόρια.

Β. Σημεία που χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής

- Η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο μιας κωνικής τομής έχει μόνο ένα κοινό σημείο με την καμπύλη. Προκειμένου να μην υπάρξουν παρανοήσεις, προτείνεται να γίνει αναφορά σε συναρτήσεις, που ήδη γνωρίζουν οι μαθητές από το κεφάλαιο των παραγώγων, όπου η εφαπτομένη ευθεία έχει και άλλο κοινό σημείο ή σημεία με την καμπύλη, εκτός από το σημείο επαφής.
- Οι μαθητές πρέπει να αντιληφθούν ότι οι κωνικές τομές δεν αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Μπορούν όμως με κατάλληλους μετασχηματισμούς οι εξισώσεις τους να μετατραπούν σε εξισώσεις συναρτήσεων με δύο κλάδους, οπότε η κωνική τομή προκύπτει ως η ένωση των γραφικών παραστάσεων που αντιστοιχούν στους δύο κλάδους.

Βιβλιογραφία

Finney, R., Weir, M., & Giordano, F. (2011). *Απειροστικός λογισμός, τόμος ΙΙ.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

Heath, T., (2001). *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, Τόμος ΙΙ*. Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.

Αδαμόπουλος, Λ., Βισκαδουράκης, Β., Γαβαλάς, Δ., Πολύζος, Γ. & Σβέρκος, Α. (2012). *Μαθηματικά Β΄ τάξη γενικού λυκείου Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση.* Αθήνα: ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

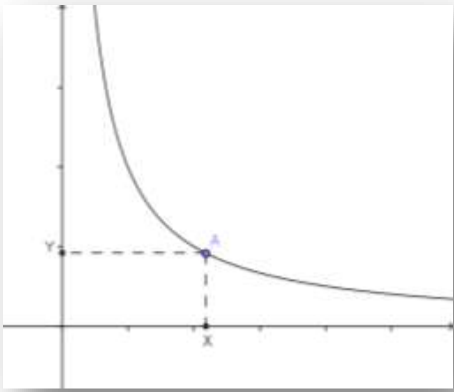
Χρυσάκης, Θ. (2013). *Γραμμική Άλγεβρα & Αναλυτική Γεωμετρία.* Αθήνα: Αυτοέκδοση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο} : Όριο και Συνέχεια Συνάρτησης

Εισαγωγή

Κατά τις αρχές του 17ου αιώνα, στην ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης διαδραμάτισε αποφασιστικό ρόλο η Συμβολική Άλγεβρα (χρήση γραμμάτων και ειδικών συμβόλων για την αναπαράσταση αγνώστων, μαθηματικών πράξεων, σχέσεων, κλπ) και η Αναλυτική Γεωμετρία (χρήση αλγεβρικών συμβολισμών σε προβλήματα Γεωμετρίας).

Όμως, η έννοια της συνάρτησης εμφανίζεται με ένα υπονοούμενο τρόπο από την αρχαιότητα, αφού ανάγεται στην ανάγκη του ανθρώπου να κάνει συσχετίσεις μεταξύ των μεγεθών (Γαγάτσης & Σπύρου, 2008). Κατά την μετέπειτα εξελικτική της πορεία η οποία διαρκεί μέχρι τα μέσα του 20ου αι. διαμορφώνεται από τους μαθηματικούς της εκάστοτε εποχής σύμφωνα με τις ανάγκες των ερευνών τους.



Εικόνα 3

Ο Descartes (1596-1950) σχεδίαζε καμπύλες από σημεία των οποίων τη θέση προσδιόριζε από τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών των ευθυγράμμων τμημάτων (εικ.1). Ο Leibniz (1646-1716), επίσης, για πρώτη φορά το 1673 αναφέρεται στον όρο "συνάρτηση[20]" σε χειρόγραφό του με τίτλο "Η αντίστροφη μέθοδος των εφαπτομένων ή περί συναρτήσεων[21]", κατά τον υπολογισμό των τεταγμένων των σημείων μιας καμπύλης από ιδιότητα των αντίστοιχων εφαπτομένων.

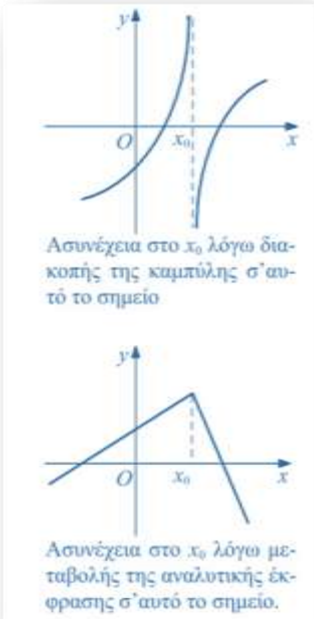
Ταυτόχρονα, όμως, με την πορεία της εξέλιξης της έννοιας της συνάρτησης αναπτύσσονταν κατά τον 17ο αι. και ο απειροστικός λογισμός (Ανάλυση) από τους Newton (1642-1727) και Leibniz, παράλληλα και ανεξάρτητα του ενός από τον άλλον (Bell, 2000). Κατά τον 18ο αιώνα, ο J. Bernoulli (1667-1748) το 1718 καταλήγει σε ένα γενικό ορισμό για τη συνάρτηση και ο Euler (1707-1783) το 1748 στο έργο του "Εισαγωγή στην Απειροστική Ανάλυση[22]", δίνει τον ορισμό της συνάρτησης ως αλγεβρικής έκφρασης (αναλυτική έκφραση) υπονοώντας ότι αναλυτική έκφραση είναι ο αλγεβρικός τύπος (Kleiner, 1989). Επίσης, ο Euler, αντίθετα με μαθηματικούς της εποχής του, θεωρούσε ως συναρτήσεις όχι μόνο αυτές

[20] Προέρχεται από το λατινικό ρήμα fungor, το οποίο ελληνιστή αποδίδεται με τα ρήματα "εκτελώ", " λειτουργώ".
[21] Τίτλος πρωτότυπου : Methodus tangentium inversa, seu de functionibus.
[22]Τίτλος πρωτότυπου : Introductio in analysin infinitorum

που δίνονταν από ένα μόνο αλγεβρικό τύπο, αλλά και τις πολύκλαδες και αυτές των οποίων η γραφική παράσταση ήταν αυθαίρετα σχεδιασμένη (O'Connor & Robertson, 2005).

Η πορεία της διαμόρφωσης της έννοιας της συνάρτησης συνεχίστηκε και τον 19ο αι. με το πρόβλημα του Fourier (1758-1830) για τη θεωρία της διάδοσης της θερμότητας το οποίο έθετε ως ερώτημα τι θεωρούμε ότι πρέπει να περιλαμβάνει η έννοια της συνάρτησης (Davis & Hersch,1981). Ο Dirichlet (1805-1859) έδωσε νέο ορισμό για τη συνάρτηση "*Η μεταβλητή y είναι συνάρτηση της μεταβλητής x, ορισμένης σε ένα διάστημα πραγματικών, αν σε κάθε τιμή της μεταβλητής x στο διάστημα αυτό αντιστοιχεί μία συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής y*", εισάγοντας στον ορισμό το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και το μονοσήμαντο της τιμής του *y* χωρίς να θεωρείται αναγκαίος ο προσδιορισμός του τρόπου με τον οποίο εγκαθίσταται αυτή η αντιστοιχία (Kleiner, 1989). Αξιοσημείωτο είναι ότι, το μονοσήμαντο της τιμής, διαχώρισε την αναπαράσταση μιας καμπύλης, η οποία προέρχεται από εξίσωση, από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

Ο Cauchy (1789-1857) το 1821 στο έργο του "Αλγεβρική Ανάλυση[23]" , καταθέτει ορισμό της συνάρτησης και αποπειράται για πρώτη φορά να μελετήσει την έννοια της συνέχειας της συνάρτησης με αυστηρότητα (Χρυσανθόπουλος, 2009; Boyer, 1959). Η ανάπτυξη της τοπολογίας των μετρικών χώρων λειτούργησε καταλυτικά ως προς τη διαπίστωση ότι η συνάρτηση εξαρτάται και από τη δομή του συνόλου στο οποίο ορίζεται, οδηγώντας με αυτό τον τρόπο στο πεδίο ορισμού και στο σύνολο τιμών της συνάρτησης, ενώ η ανάπτυξη της θεωρίας συνόλων τον 20ο αι. διαμόρφωσε περαιτέρω την έννοια της συνάρτησης και εν γένει την έννοια της πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής όπως την έχουμε γνωρίσει και σε προηγούμενη τάξη του λυκείου.



Δάνειο από (Ανδρεαδάκης κ.α., 2014)

Η έμφαση που έδιναν οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί στη "θεωρητική και αξιωματική προσπέλαση της Γεωμετρίας" κυριαρχούσε στο χώρο των μαθηματικών μέχρι των χρόνων της Αναγέννησης, αλλά οι πρωτοπόροι μαθηματικοί του 16ου, 17ου και 18ου αι. βασίζονταν και στην διαίσθηση πέραν της επαγωγικής συλλογιστικής (Apostol, 1962, σ. 10). Η διαίσθηση όμως κρύβει παγίδες και τα μαθηματικά δεν είναι ο μόνος τομέας στον οποίο κάτι που φαίνεται "διαισθητικά" προφανές, να αποδεικνύεται ότι είναι εν τέλει λάθος (Goldstein, 2006, σ. 120-124). Η προσπάθεια που είχε γίνει από πολλούς μαθηματικούς να "μαθηματικοποιήσουν" την καθημερινή αντίληψη (Χρυσανθόπουλος, 2009), οδήγησαν σε εργασίες που αποδείχτηκαν άκαρπες, αλλά και σε ένα μεγάλο αριθμό αυτών που οδήγησαν σε σπουδαίες ανακαλύψεις "χάρη στην εξαιρετική δεξιοτεχνία και την αγχίνοια των πρωτοπόρων αυτών ερευνητών" (Apostol, 1962, σ. 10). Ερμηνεύεται, λοιπόν, η μακροσκελής και με διακυμάνσεις πορεία εξέλιξης της έννοιας της συνάρτησης, εφόσον αφενός η διαίσθηση ασκεί πολύ ισχυρή επίδραση αλλά και αφετέρου, διότι, μετά την αυστηρή θεμελίωση της έννοιας επανέρχεται και συγκρούεται μαζί της (Χρυσανθόπουλος, 2009, σ.171). Κατά τη διάρκεια του 16ου, 17ου και 18ου αι., από διακυμάνσεις χαρακτηρίστηκε και η έννοια της συνέχειας και του ορίου.

Στην προσπάθεια διαμόρφωσης του ορισμού της συνάρτησης, το έργο του Fourier για τη διάδοση της θερμότητας συνετέλεσε και στο διαχωρισμό των συνεχών και ασυνεχών συναρτήσεων όπως τις γνωρίζουμε σήμερα (Apostol, 1962). Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αυτής της εποχής διακατέχονταν από δύο αντιλήψεις καθόσον μέχρι τότε και η έννοια της συνάρτησης προσδιορίζονταν ως

[23] Τίτλος πρωτότυπου : Cours d' An-alyse

αναλυτική έκφραση. Αυτής κατά την οποία η συνάρτηση δεν παρουσιάζει διακοπές και της άλλης που εκφράζει ότι ένα φαινόμενο ακολουθεί τον ίδιο κανόνα της φυσικής (Ανδρεαδάκης κ.α., 2014; Edwards, 1979).

Ο δρόμος όμως μέχρι να φτάσουμε στον ορισμό του ορίου όπως τον γνωρίζουμε σήμερα, ήταν και εδώ μακρύς. Η μέθοδος της εξάντλησης του Εύδοξου εισήγαγε για πρώτη φορά στην ιστορία των Μαθηματικών την ιδέα του ορίου η οποία μέχρι και την εποχή του Newton δεν μπορούσε να αποδοθεί με τη λογική αυστηρότητα των Μαθηματικών αλλά παρέμενε βασισμένη στη λογική διαίσθηση και ενόραση.

Ο Cauchy έδωσε τον πρώτο ορισμό του ορίου συνάρτησης στο προαναφερθέν έργο του "Αλγεβρική Ανάλυση" σε αυστηρά μαθηματική μορφή δίνοντας ώθηση στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού (Ανάλυσης), αλλά με εκφράσεις που απαιτούσαν περαιτέρω διαλεύκανση, και εν τέλει, ο Weierstrass (1815-1897) έδωσε τους ορισμούς για το όριο στη σύγχρονη μορφή τους, ενώ ο αυστηρά μαθηματικός ορισμός του ορίου καθόρισε και τον ορισμό της συνέχειας συνάρτησης (Χρυσανθόπουλος, 2009).

Τι περιέχει το κεφάλαιο Όριο και Συνέχεια Συνάρτησης και πώς το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Οι μαθητές έχουν ήδη διδαχθεί τους πραγματικούς αριθμούς και πολυωνυμικές και ρητές εξισώσεις και ανισώσεις. Επιπλέον έχουν επιλύσει τριγωνομετρικές εξισώσεις και απλές εξισώσεις με ριζικά. Ένας άλλος τομέας με τον οποίο έχουν ασχοληθεί οι μαθητές σε προηγούμενες τάξεις, είναι αυτός των συναρτήσεων. Ειδικότερα, έχουν διδαχθεί την έννοια της συνάρτησης και έχουν ερμηνεύσει τον ορισμό της μέσω της αντιστοίχισης και της συμμεταβολής. Έχουν μελετήσει τις βασικές συναρτήσεις με τύπους $y = ax + \beta,\ y = \frac{\alpha}{\chi},\ y = ax^2,\ y = ax^2 + \beta x + \gamma$, τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με τύπους $y = \eta\mu x,\ y = \sigma\upsilon\nu x,\ y = \varepsilon\varphi x,\ y = \sigma\varphi x$, την εκθετική συνάρτηση, και έχουν διδαχθεί τους λογαρίθμους και τις ιδιότητές τους, χωρίς όμως να έχουν μελετήσει τη λογαριθμική συνάρτηση. Τέλος, έχουν επιλύσει προβλήματα που μοντελοποιούνται είτε με πολυωνυμικές ή ρητές εξισώσεις, είτε με εκθετικές συναρτήσεις.

Όλα τα ανωτέρω, αποτελούν την αφετηρία για τη διδασκαλία των κεφαλαίων της ανάλυσης στην τελευταία τάξη του λυκείου. Επί του προκειμένου, στο κεφάλαιο "Όρια και συνέχεια συνάρτησης", οι μαθητές, αρχικά, θα διδαχθούν σε μεγαλύτερο βάθος τις συναρτήσεις, ξεκινώντας από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις και το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, τα ολικά ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας και τη μελέτη περισσότερων συναρτήσεων πλέον των ήδη γνωστών. Οι λογαριθμικές συναρτήσεις θα διδαχθούν εδώ για πρώτη φορά στους μαθητές. Επιπλέον θα γνωρίσουν το λογισμό των συναρτήσεων και τη σύνθεση συναρτήσεων και θα απαιτηθεί να μαθηματικοποιούν απλά προβλήματα πραγματικών καταστάσεων μέσω συναρτήσεων. Κατά κύριο όμως λόγο, σε αυτό το κεφάλαιο, θα περάσουν από τις συναρτήσεις στα όρια συναρτήσεων και τις συνεχείς συναρτήσεις. Ύλη, την οποία θα διδαχθούν για πρώτη φορά. Γιατί όμως είναι σημαντικό οι μαθητές να λάβουν αυτή τη νέα γνώση;

Ποιές είναι οι «σημαντικές ιδέες» που περιέχονται στο κεφάλαιο Όριο και Συνέχεια Συνάρτησης;

I. Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο

Η βασική έννοια στην οποία στηρίζεται ο κλάδος αυτός των Μαθηματικών είναι οι συναρτήσεις (Spivak, 2007, σ. 23). Η ανάπτυξη στις επιστήμες και στα Μαθηματικά μετά το 1600 μ.Χ. συνδέθηκε άμεσα με τον απειροστικό λογισμό (Ανάλυση), γεγονός που συνηγορεί υπέρ του ότι αποτελεί απαραίτητο κλάδο για τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, αλλά και για αυτόν που μελετά τα Μαθηματικά, αποκλειστικά, από θεωρητικής σκοπιάς (Sawyer, 1993, σ. 1-2). Σε όλους σχεδόν τους κλάδους των σύγχρονων Μαθηματικών, η συνάρτηση κατέχει δεσπόζουσα θέση αφού αποτελεί το σημαντικότερο αντικείμενο της έρευνας (Spivak, 2007, σ. 33). Σε κάθε φαινόμενο ή κατάσταση που διερευνούμε, δεν αρκεί απλά να γνωρίζουμε από τι εξαρτάται, ή ποιοι είναι οι παράμετροι που επιδρούν καταλυτικά στην εξέλιξή του. Είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε και τον ακριβή τρόπο σύνδεσης αυτών των παραμέτρων. Επειδή, όμως, η πραγματικότητα δεν είναι πάντα απλή και δεν εξασφαλίζεται πάντα ένα σημείο αναφοράς, οι σχέσεις που χαρακτηρίζουν τις μεταβλητές των ερευνών είναι επίσης πολύπλοκες. Με την είσοδο στο κεφάλαιο αυτό γίνεται αναφορά στο λογισμό των συναρτήσεων. Αποτέλεσμα του λογισμού είναι η κατασκευή νέων συναρτήσεων από δοθείσες. Όμως, πολλές καταστάσεις περιγράφονται από συναρτήσεις οι οποίες δεν μπορούν να προκύψουν με την βοήθεια και μόνο των αντίστοιχων πράξεων των αριθμών. Για παράδειγμα, η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \eta\mu(2x)$ δεν μπορεί να προκύψει από πράξεις μεταξύ συναρτήσεων. Η αναζήτηση ενός νέου τρόπου συνδυασμού συναρτήσεων μας οδήγησε στη σύνθεση συναρτήσεων, ένα νέο τρόπο κατασκευής συναρτήσεων από δύο ή περισσότερες δοθείσες συναρτήσεις και κάτω από προϋποθέσεις.

Ο λογισμός και η σύνθεση των συναρτήσεων μας οδηγούν στην κατασκευή συναρτήσεων που περιγράφουν κάποια κατάσταση. Γνωρίζοντας τη συνάρτηση η οποία περιγράφει ένα φαινόμενο μπορούμε έχουμε πολλές πληροφορίες για το φαινόμενο αυτό. Για να φτάσουμε, όμως, στη συνάρτηση η οποία περιγράφει ένα φαινόμενο πρέπει να περάσουμε από πολλά στάδια και στη συνέχεια θα πρέπει να είμαστε σε θέση να μελετήσουμε τη συνάρτηση. Η μελέτη της συνάρτησης μας οδηγεί στην περιγραφή της εξέλιξης του φαινομένου.

Με τις διαδικασίες οι οποίες θα μας οδηγήσουν στη συγκεκριμένη συνάρτηση που περιγράφει ένα φαινόμενο για το οποίο ενδιαφερόμαστε, ασχολούνται κυρίως άλλες επιστήμες χρησιμοποιώντας συνήθως την παρατήρηση και το πείραμα. Με τη μελέτη της συνάρτησης, από τη στιγμή που αποφασισθεί ποια είναι, ασχολείται η Ανάλυση. Αναλυτικότερα, για τη μελέτη της συνάρτησης χρειάζονται οι έννοιες, τα θεωρήματα και τα πορίσματα τα σχετικά με το όριο και την παράγωγο συνάρτησης. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναπτυχθεί η έννοια του ορίου, ίσως η πιο σημαντική και η πιο δύσκολη σε ολόκληρο τον απειροστικό λογισμό (Spivak, 2007, σ. 70), και θα περάσουμε από τα όρια, στο επόμενο κεφάλαιο, στις παραγώγους, των οποίων τα όρια αποτελούν προαπαιτούμενη γνώση.

Διερωτάται κανείς γιατί αυτή η διάκριση των συναρτήσεων σε συνεχείς; Πώς προέκυψε η ανάγκη διατύπωσης του ορισμού της συνέχειας; Προέκυψε στα τέλη του 18ου αιώνα, όταν έκαναν την εμφάνισή τους οι ασυνεχείς συναρτήσεις όπως προαναφέρθηκε στην εισαγωγή[24], οπότε και χρειάστηκε να διαφοροποιηθεί η κατηγορία των συνεχών από τις ασυνεχείς. Ειδικότερα, μια συνεχής συνάρτηση συνοδεύεται από μια αφθονία θεωρημάτων των οποίων τα ενδιαφέροντα και ισχυρά αποτελέσματα μας οδηγούν σε πεπατημένους δρόμους για τη μελέτη της.

[24] Η έρευνα διαφόρων ειδικών φυσικών προβλημάτων, με αντιπροσωπευτικό έργο αυτό του Fourier (1758-1830) για τη θεωρία της θερμότητας ώθησε τους μαθηματικούς να αποδώσουν ακριβές νόημα στις έννοιες της συνάρτησης και της συνέχειας (Apostol, 1962, σ. 127).

II. Σημαντικά σημεία που πρέπει να εστιάσουμε

Στο κεφάλαιο αυτό ο μαθητής μελετά πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής σε μεγαλύτερο βάθος από ότι σε προηγούμενες τάξεις. Αναλυτικότερα, ανακαλύπτει νέες συναρτήσεις και ωθείται στη δημιουργία άλλων συναρτήσεων από δοθείσες. Σταθμός στην πορεία αυτή, η διδασκαλία της λογαριθμικής συνάρτησης που είναι σημαντικές για το πλήθος εφαρμογών τους σε πραγματικές καταστάσεις. Τα ανωτέρω, υπαγορεύουν εξοικείωση όχι μόνο με τα χαρακτηριστικά της συνάρτησης, αλλά και εξοικείωση με ένα νέο περιβάλλον, αυτό του λογισμού των συναρτήσεων και της σύνθεσης αυτών. Πέραν τούτων, κρίσιμο ρόλο στη πορεία του μαθητή προς την νέα γνώση, διαδραματίζουν η διδασκαλία του ορίου, και της συνέχειας των συναρτήσεων.

Ακολουθούν επιγραμματικά προτεινόμενα σημαντικά σημεία του κεφαλαίου που θα μπορούσαν να οριοθετήσουν τη διδασκαλία, και κάποιες εφαρμόσιμες ιδέες που έχουν προκύψει από μερικά εξ αυτών.

- Η σημασία της μελέτης εκθετικής συνάρτησης, αλλά και της λογαριθμικής συνάρτησης, συμμετρικής της εκθετικής συνάρτησης με ίδια βάση ως προς τη διχοτόμο του 1ου τεταρτημόριου, όπως προκύπτει από το πλήθος των εφαρμογών της. Πράγματι, πολλά φαινόμενα του φυσικού κόσμου, αλλά και του κόσμου των "καθαρών" Μαθηματικών περιγράφονται από την λογαριθμική και εκθετική συνάρτηση (Clawson, 2008, σ. 217). Για παράδειγμα (περισσότερα στον http://el.wikipedia.org/wiki/Λογάριθμος),
    - Κάθε φυσικός αριθμός N αναπαρίσταται σε δυαδική μορφή με όχι περισσότερα από ($\log_2(N)+1$)bit (Το bit είναι η στοιχειώδης μονάδα πληροφορίας στην Επιστήμη των Υπολογιστών και στις Τηλεπικοινωνίες). Δηλαδή, για την αποθήκευση του φυσικού αριθμού N, το ποσό της μνήμης που απαιτείται δίνεται από τη συνάρτηση με τύπο $y=\log_2(N)+1$ (αυξάνεται λογαριθμικά με το N).
    - Σύμφωνα με το νόμο του Hick, η σχέση μεταξύ του χρόνου που χρειάζεται ένα άτομο για την επιλογή μίας απόφασης και του αριθμού των επιλογών που έχει, περιγράφεται από λογαριθμική συνάρτηση.
    - Στη θεωρία πληροφοριών η εντροπία μετράει την ποσότητα της πληροφορίας. Αν ένας αποδέκτης μηνύματος αναμένει οποιοδήποτε από N πιθανά μηνύματα με την ίδια πιθανότητα, τότε η ποσότητα πληροφορίας που μεταβιβάζεται από οποιοδήποτε τέτοιο μήνυμα ποσοτικοποιείται ως $\log_2(N)$ bit.
    - Οι λογάριθμοι εμφανίζονται και στην πυραυλική εξίσωση Tsiolkovsky (εικ. 1), η οποία αποτελεί τη βάση της αστροναυτικής.

- Σύνθεση συναρτήσεων: Όταν μια ποσότητα εξαρτάται από μια άλλη και ταυτόχρονα επηρεάζει μια τρίτη, η σύνθεση δίνει τον κανόνα που διέπει την τρίτη ποσότητα από την αρχική, άμεσα, εξαλείφοντας την ενδιάμεση ποσότητα.

Εικόνα 2: Στη «μαύρη τρύπα» που αφήνει πίσω της η αναστολή της «διπλής ανάπλασης» στον Βοτανικό οι δύο αρχιτέκτονες προτείνουν την ανάπτυξη της πόλης καθ' ύψος με την κατασκευή ουρανοξυστών που θα αφήνουν χώρο για πράσινο και εξωσκελετούς που θα συγκεντρώνουν το νερό της βροχής για να το μεταφέρουν στις κατοικίες ή να τροφοδοτούν την άρδευση του πάρκου.
Πηγή: Το Βήμα (http://www.tovima.gr/society/article/?aid=644682&wordsinarticle=δόμηση).

Παράδειγμα: Έρευνες εκτιμούν τον πληθυσμό μιας πόλης (2η) σε συνάρτηση με το χρόνο (1η) σε διάστημα δεκαετίας. Άλλες έρευνες έχουν αποφανθεί για τον αριθμό των τετραγωνικών πρασίνου (3η) που αντιστοιχούν ανά άτομο (εικ. 2) σε συνάρτηση με τον πληθυσμό της πόλης (2η). Με βάση τις συναρτήσεις που έχουν προκύψει από τις έρευνες ένας μαθητής μπορεί να υπολογίσει σε λίγες γραμμές τον αριθμό των τετραγωνικών πρασίνου(3η) που θα αναλογεί στην επόμενη γενιά, δηλαδή, μετά από 10 έτη (1η).

- Έννοια του ορίου : Αν μια συνάρτηση f ορίζεται κοντά στο x_0, χωρίς κατ' ανάγκη να ορίζεται στο x_0 τότε ο συμβολισμός $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ έχει την πρόθεση να εκφράσει την ιδέα ότι μπορούμε να φέρουμε τον αριθμό $f(x)$ **όσο θέλουμε** κοντά στο l, απαιτώντας το x να είναι αρκούντως κοντά στο x_0, αλλά όχι ίσο με αυτό (Spivak, 2013, σ.87). Η έννοια έχει τοπικό χαρακτήρα. Επειδή, όμως η έννοια του ορίου συνάρτησης είναι αφενός πολύ σημαντική για τα Μαθηματικά, αφετέρου πολύ δύσκολη στην κατανόηση, προτείνεται να περάσει στους μαθητές με εποπτικό τρόπο, ώστε να επιτρέψει μεν στους μαθητές να κάνουν πράγματα που δεν θα μπορούσαν να γίνουν με άλλο τρόπο, αλλά και να μην τους απογοητεύσει. Επιπλέον, για να προκαλέσει ενδιαφέρον για τη μελέτη του επόμενου κεφαλαίου και να συνδυασθεί με το περιεχόμενο άλλων μαθημάτων, προτείνεται να αναφερθεί ότι ο μαθηματικός ορισμός του ορίου έδωσε λύση σε πολλά ερωτήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Ενδεικτικά, έδωσε λύση στο ερώτημα "τί είναι ταχύτητα και πώς μπορούμε να την υπολογίσουμε;" η αξία και οι προεκτάσεις του οποίου θα φανούν στο επόμενο κεφάλαιο.

- Συνέχεια συναρτήσεων : Αν x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f, τότε δεν ισχύει υποχρεωτικά ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Μπορεί να μην ορίζεται το $\lim_{x \to x_0} f(x)$, ή και αν ορίζεται να είναι διαφορετικό του $f(x_0)$. Αν όμως ισχύει η ανωτέρω σχέση και ακόμη καλύτερα, αν ισχύει για κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η συνάρτηση αποκτά ένα νέο χαρακτηριστικό το οποίο αξίζει να μελετηθεί. Η συνέχεια σε σημείο συνάρτησης συνιστά τοπική ιδιότητα, αλλά, όταν η συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, η ανωτέρω ιδιότητα γενικεύεται σε όλο το πεδίο ορισμού της. Η μελέτη των συνεχών συναρτήσεων, ανέδειξε ενδιαφέροντα θεωρήματα για τις συνεχείς συναρτήσεις, όπως το Θεώρημα Bolzano, τα οποία θα παρουσιαστούν στο 3ο κεφάλαιο.

Σε ποιά ερωτήματα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

- Τί ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του $\mathbf{R}$ και ποιοί οι τρόποι αναπαράστασής της;
- Αποτελεί ένας κύκλος γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;
- Στον παγκόσμιο νόμο της βαρύτητας του Newton ποιά θα δηλώνατε ως εξηρτημένη και ποιά ως ανεξάρτητη μεταβλητή; (*παράδειγμα του να διακρίνουν τις παραμέτρους από την ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή*)
- Ποιες πληροφορίες για μια συνάρτηση μπορείτε να εξάγετε από τη γραφική της παράσταση;
- Πότε δύο συναρτήσεις λέμε ότι είναι ίσες;
- Ποιές είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = ax+\beta,\ y=\dfrac{\alpha}{x},\ y = ax^2,\ y = ax^2+\beta x+\gamma$, $y = \eta\mu x,\ y = \sigma\upsilon\nu x,\ y = \varepsilon\varphi x,\ y = \sigma\varphi x$ $y=\alpha^x$ και της $y = \ln x$;
- Τι ισχύει για τις γραφικές παραστάσεις της εκθετικής και λογαριθμικής;
- Αν σας δίνονταν δυνατότητα επιλογής, θα προτιμούσατε η καμπύλη των οικονομικών σας απολαβών να αυξάνεται εκθετικά από την συνάρτηση με τύπο $y = e^t$ ή λογαριθμικά από την συνάρτηση με τύπο $y=\ln t$, όπου t παριστάνει χρονολογικά έτη;
- Τί θα χρησιμοποιήσετε για να κατασκευάσετε νέες συναρτήσεις από δύο δοθείσες;
- Από ποιες συναρτήσεις προέκυψε η συνάρτηση με τύπο $y=\eta\mu(2t+32)$;
- Για την συνάρτηση f πότε ορίζονται τα $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
- Σε ποια σημεία αναζητούμε τη συνέχεια μιας συνάρτησης και ποιες διαδικασίες ακολουθούμε για να διαπιστώσουμε αν μια συνάρτηση είναι συνεχής;
- Πώς ορίζεται ως συνεχής μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ανοικτό διάστημα και πώς σε κλειστό διάστημα;
- Πού αναζητούμε ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης και ποιούς τύπους χρησιμοποιούμε αντίστοιχα;

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Πραγματικοί αριθμοί (3 ώρες)

Η ενότητα αυτή έχει την έννοια της επανάληψης της ύλης από προγενέστερες στάξεις και ο ρόλος της είναι εισαγωγικός για την επόμενη ενότητα.

Με την ολοκλήρωση της διδασκαλίας της ενότητας, οι μαθητές θα πρέπει

Μ1. Να αξιοποιούν έννοιες, ιδιότητες και προτάσεις των πραγματικών αριθμών για να λύνουν εξισώσεις, ανισώσεις και προβλήματα.

<u>Συναρτήσεις (5 ώρες)</u>

Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν

Μ2. Να δίνουν τον ορισμό της συνάρτησης και να αναγνωρίζουν τις μεταβλητές και τις παραμέτρους σε μία συνάρτηση.

Μ3. Δοθέντος του τύπου $y = f(x)$ μιας συνάρτησης f, να αναγνωρίζουν ποιοι περιορισμοί θα πρέπει να ικανοποιούνται ώστε να έχει νόημα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και να χρησιμοποιούν αυτήν την πληροφορία πραγματοποιώντας τους αντίστοιχους υπολογισμούς για να ορίσουν το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbf{R}$ στο οποίο ορίζεται η f.

Μ4. Να αξιοποιούν τον ορισμό της συνάρτησης για να εξηγούν αν μια καμπύλη σε ένα ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων μπορεί να παριστά τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

Μ5. Να αναγνωρίζουν αν μια σχέση που δίνεται συμβολικά είναι συνάρτηση, για παράδειγμα, η $y^2 = 4x$.

Μ6. Να αναγνωρίζουν αν μια σχέση που δίνεται λεκτικά είναι συνάρτηση . (**Δ1**)

Μ7. Να συνδέουν τις διαφορετικές εκφράσεις μιας συνάρτησης.

Μ8. Να ερμηνεύουν τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, προσδιορίζοντας από αυτή το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, τα σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία παρουσιάζει την ίδια τιμή, τα ολικά ακρότατα τα διαστήματα μονοτονίας, το πρόσημο.(**Δ2, Δ3**)

Μ9. Να υπολογίζουν την τιμή μιας συνάρτησης, σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της καθώς και τα σημεία τομής της με τον οριζόντιο άξονα.

Μ10. Να υπολογίζουν τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων.

Μ11. Να αναπαριστούν γραφικά τις βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις συναρτήσεις με τύπους $y = ax + \beta, y = ax^2, y = ax^3, y = \ln x, y = e^x \; \mu\varepsilon \; a, \beta \in \mathbf{R}$, στο πεδίο ορισμού τους, αλλά και να ερμηνεύουν τις γραφικές τους παραστάσεις και να σχεδιάζουν τις συναρτήσεις $-f(x)$ και $|f(x)|$ από την $f(x)$.

Μ12. Να εκφράζουν πραγματικές καταστάσεις με την βοήθεια συναρτήσεων. (**Δ4**)

Μ13. Να αποδεικνύουν, κάνοντας υπολογισμούς αν απαιτείται, αν είναι ίσες δύο συναρτήσεις και αν δεν είναι ίσες να μπορούν να ορίζουν το ευρύτερο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο ο περιορισμός των συναρτήσεων δίνει ίσες συναρτήσεις.

<u>Πράξεις με συναρτήσεις - Σύνθεση συναρτήσεων (3 ώρες)</u>

Οι μαθητές θα πρέπει

Μ14. Να χρησιμοποιούν το λογισμό ή τη σύνθεση των συναρτήσεων για να δομούν νέες συναρτήσεις με πεδίο ορισμού όπως αυτό προσδιορίζεται από τον λογισμό ή τη σύνθεση των συναρτήσεων. (**Δ5**)

Μ15. Να αναλύουν άλλες σύνθετες συναρτήσεις σε απλούστερες. Για παράδειγμα, η $f(x) = \eta\mu^2(3x^4 + 5)$ είναι σύνθεση της $\mathrm{g}(x) = 3x^4 + 5$ με την $h(x) = \eta\mu^2 x$.

<u>Πεπερασμένο όριο συνάρτησης (2 ώρες)</u>

Οι μαθητές θα πρέπει

Μ16. Να εκτιμούν το όριο μιας συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbf{R}$, από τη γραφική της παράσταση. (**Δ6,Δ7**)

<u>Ιδιότητες των ορίων (Όριο και διάταξη, Όριο και πράξεις) (4 ώρες)</u>

Οι μαθητές θα πρέπει

Μ17. Να γνωρίζουν ότι το όριο έχει τοπικό χαρακτήρα και τις ιδιότητες του ορίου συνάρτησης, και με τη βοήθεια τους να υπολογίζουν τα όρια απλών συναρτήσεων.

Μη πεπερασμένο όριο στο (4 ώρες)

Οι μαθητές θα πρέπει

Μ18. Να εικάζουν την ύπαρξη μη πεπερασμένων ορίων συναρτήσεων από τη γραφική τους παράσταση και δεδομένου του τύπου της συνάρτησης να χρησιμοποιούν τις ιδιότητες και τα θεωρήματα για τα όρια του αθροίσματος και του γινομένου συναρτήσεων με μη πεπερασμένα όρια για να υπολογίζουν το όριό της σε σημείο.

Μ19. Να αναγνωρίζουν τα σημεία της συνάρτησης στα οποία θα αναζητηθούν οι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης και να προσδιορίζουν τον τύπο τους εφόσον υπάρχουν. (**Δ8**)

Όριο συνάρτησης στο άπειρο (4 ώρες)

Οι μαθητές θα πρέπει

Μ20. Να υπολογίζουν, εφόσον ορίζονται, τα όρια συναρτήσεων στο $-\infty$ και στο $+\infty$. (**Δ9,Δ10**)

Μ21. Να αναγνωρίζουν οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες από τη γραφική παράσταση συναρτήσεων. Να ελέγχουν με βάση τον ορισμό, αν μια ευθεία $y = \alpha x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. (**Δ11**)

Συνέχεια συνάρτησης (3 ώρες)

Οι μαθητές θα πρέπει

Μ22. Να αναγνωρίζουν αν μια συνάρτηση είναι συνεχής ή ασυνεχής από τη γραφική της παράσταση.

Μ23. Να ορίζουν πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής σε σημείο της και πότε ασυνεχής και να διαπιστώνουν, με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των συνεχών συναρτήσεων, αν μια συνάρτηση είναι συνεχής ή ασυνεχής. (**Δ12,Δ13**)

Δραστηριότητες

Οι δραστηριότητες που ακολουθούν δεν σχετίζονται υποχρεωτικά με ένα μόνο από τα μαθησιακά αποτελέσματα ανωτέρω, ούτε καλύπτουν τη διδασκαλία όλων των ενοτήτων και είναι ενδεικτικές. Δραστηριότητες μπορεί να αναζητήσει ο εκπαιδευτικός και στο αντίστοιχο Πρόγραμμα Σπουδών. Ούτως ή άλλως, η διδασκαλία θα πρέπει να εμπλουτισθεί και με ασκήσεις πέραν των δραστηριοτήτων, καθόσον οι τελευταίες στοχεύουν περισσότερο στην εμπέδωση της νέας γνώσης.

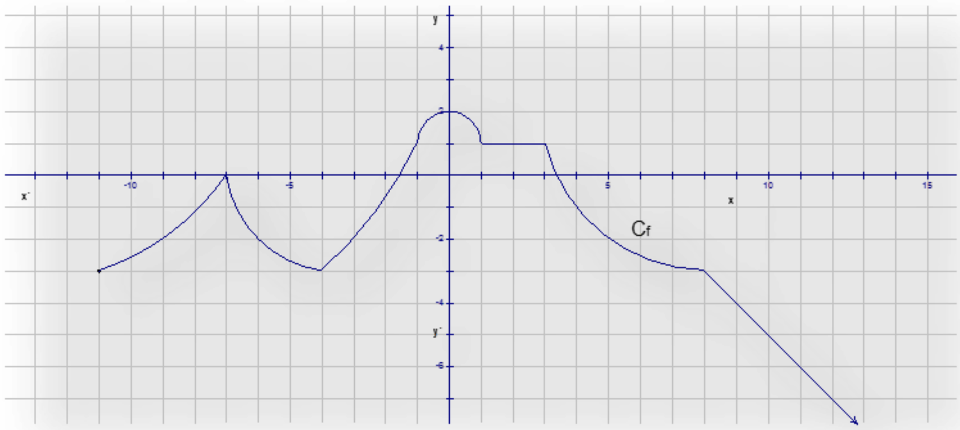
Δ1. "Το εμβαδόν του τετραγώνου ισούται με το τετράγωνο της πλευράς του". Μαθηματικοποιήστε τη σχέση που περιγράφει η ανωτέρω πρόταση χρησιμοποιώντας μία συνάρτηση. Μπορείτε να κάνετε το ίδιο για τις επόμενες προτάσεις;

α)Ένα συμπαγές σώμα όγκου V, βυθισμένου εξ' ολοκλήρου σε ένα υγρό ειδικού βάρους ε, δέχεται άνωση A από το υγρό ανάλογη του ειδικού του βάρους ε.

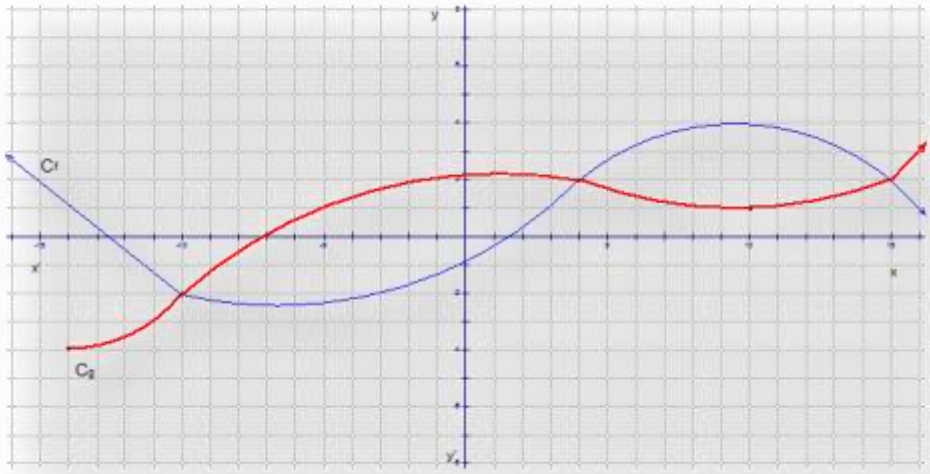
β)Πόσα N/cm^2 είναι η πίεση P που ασκείται σε μία επιφάνεια S cm^2 αν η πιεστική δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια S είναι 80Nt και τα ποσά P, S είναι αντιστρόφως ανάλογα;

γ)Τα τέλη της αποστολής μεμονωμένων δεμάτων εσωτερικού μέχρι 10 κιλά για μια εταιρεία μεταφοράς δεμάτων είναι 4,5 ευρώ όταν το βάρος του πακέτου είναι μέχρι και 1κιλό, 7 ευρώ όταν το βάρος του πακέτου είναι μεγαλύτερο του ενός κιλού μέχρι και 5 κιλά και 11 ευρώ όταν το βάρος του πακέτου είναι μεγαλύτερο από 5 μέχρι και 10 κιλά.
δ)Τα σημεία ενός κύκλου σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, έχουν την ιδιότητα το άθροισμα των τετραγώνων των συντεταγμένων τους να ισούται με το τετράγωνο της ακτίνας του κύκλου.
Αιτιολογείστε τις απαντήσεις σας.

Δ2. Στο κάτωθι σχήμα να απεικονίζεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f. Προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της f, το σύνολο τιμών, τις αρνητικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, τα σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία παρουσιάζει τιμή 1, τα ολικά ακρότατα και τα διαστήματα μονοτονίας.

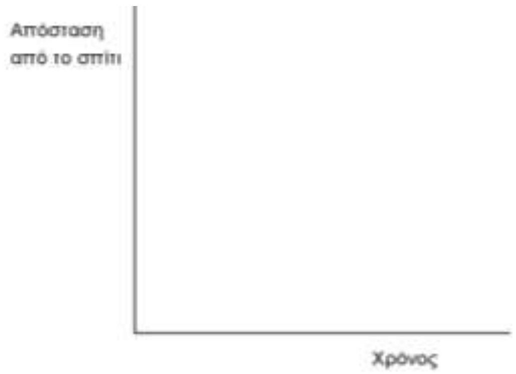


Δ3. Να προσδιορίσετε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g. Να βρεθεί το πρόσημο της g. Για ποια x είναι $f(x)=g(x)$; Για ποια x είναι $f(x)\geq g(x)$;

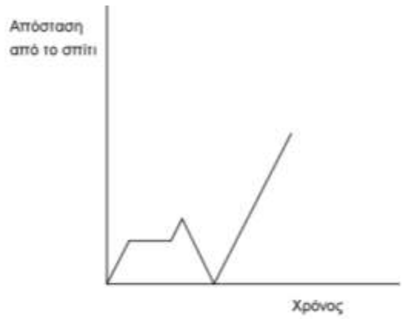


Δ4. Σχεδιάστε τη καμπύλη που παριστά την αφήγηση που ακολουθεί στο διπλανό της καρτεσιανό σύστημα και αιτιολογείστε αν μπορεί να παριστά γραφική παράσταση συνάρτησης.

"Ξεκινώντας από το σπίτι να συναντήσω ένα φίλο και ενώ πήγαινα διατηρώντας σταθερό το ρυθμό μου, έκανα μια στάση στο κατάστημα ηλεκτρονικών για να δώ από κοντά το νέο μοντέλο iPod της Apple. Συνέχισα με τον ίδιο ρυθμό. Ξαφνικά αντιλήφθηκα ότι δεν είχα πάρει το DVD της ταινίας που θα βλέπαμε και γύρισα πίσω διατηρώντας το ρυθμό στο βάδισμά μου. Πήρα το DVD κοίταξα την ώρα, και ξεκίνησα με ταχύτερο ρυθμό".

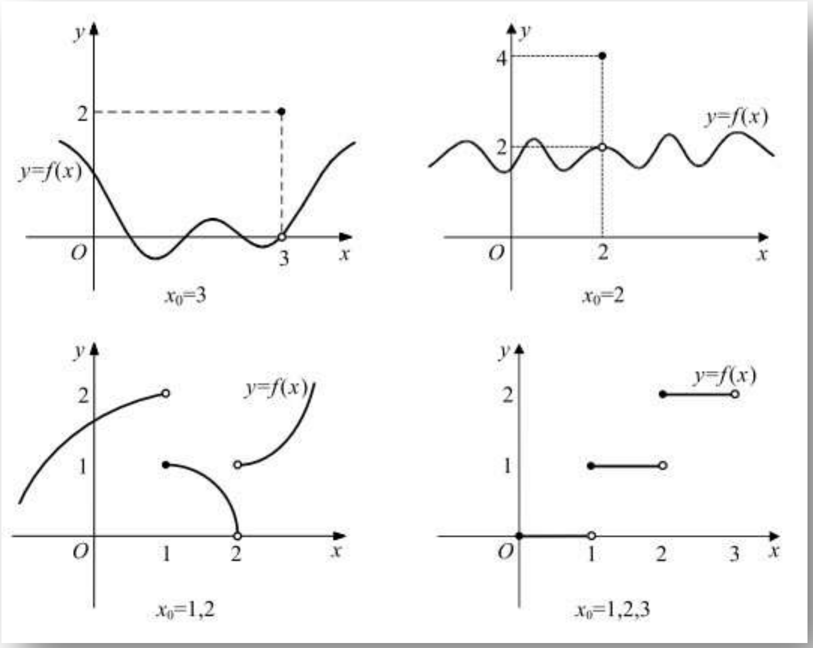


Απάντηση: Σταθερός ρυθμός, άρα ταχύτητα σταθερή. Επομένως κινείται σε ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων,.... Μπορεί να παριστά γραφική συνάρτηση διότι για κάθε χρονική στιγμή ορίζεται η απόσταση από το σπίτι και είναι μοναδική, αφού δεν μπορεί ταυτόχρονα να βρίσκεται σε δύο σημεία.



Δ5. Έρευνες εκτιμούν ότι ο αριθμός των αυτοκινήτων που θα κυκλοφορούν στην πόλη θα είναι $N = 5(x+1)$ όταν ο πληθυσμός της θα είναι x εκατοντάδες χιλιάδες άτομα. Άλλες έρευνες αποφάνθηκαν ότι σε t έτη από σήμερα ο πληθυσμός της πόλης θα είναι $\sqrt{t+5}$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα. Πόσα αυτοκίνητα προβλέπεται να κυκλοφορούν στην πόλη μετά από 2 δεκαετίες;

Δ6. Βρείτε το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$ εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι :



Πηγή: Ψηφιακό Σχολείο (http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3197,12974/)

Δ7. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο [−2, +∞) και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 2$$

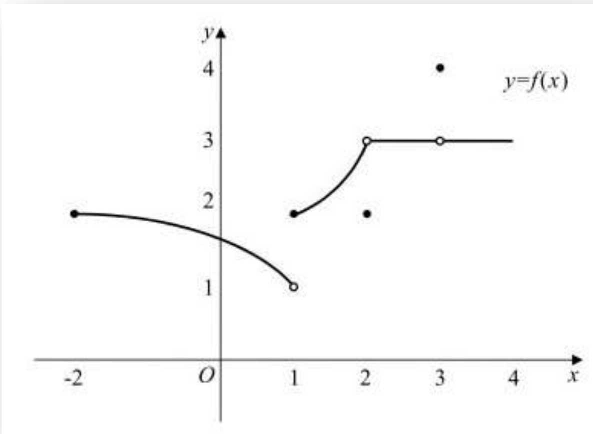
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 4$$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 3$$



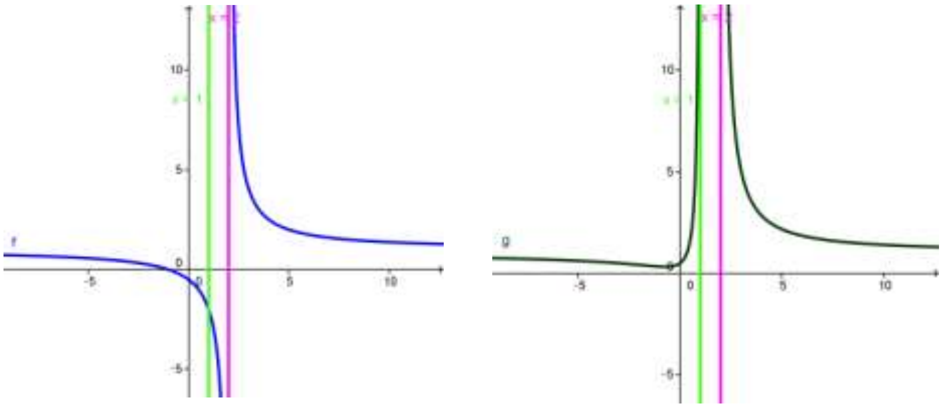
Πηγή: Ψηφιακό Σχολείο (http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3197,12974/)

Δ8. Βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των συναρτήσεων με τύπους:

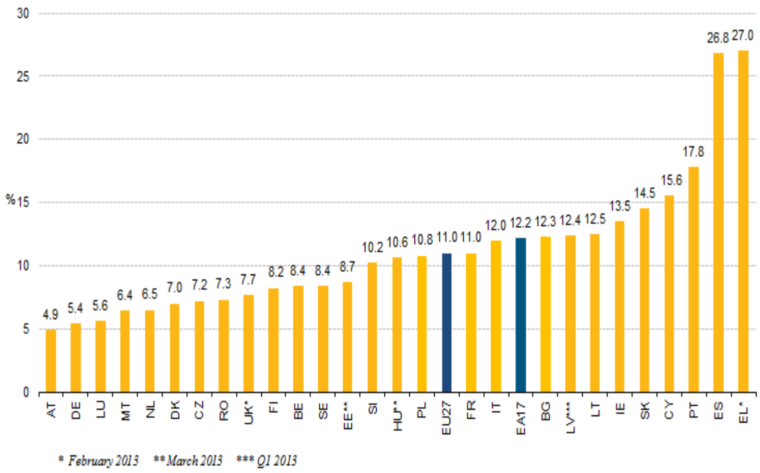
- $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$
- $g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$

<u>Σχόλιο</u>:

Οι κάθετες ευθείες στα άκρα των ανοικτών διαστημάτων του πεδίου ορισμού συναρτήσεων, στα οποία αυτές δεν ορίζονται, δεν είναι πάντα κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών τους παραστάσεων (βλέπε κάτωθι σχήμα).



Δ9. Το ποσοστό ανεργίας σε μια χώρα το Σεπτέμβρη του 2013 εκτιμήθηκε σε 27%. Οικονομολόγοι δήλωσαν, αν δεν αλλάξουν οι συνθήκες σε t έτη από σήμερα το ποσοστό ανεργίας θα δίνεται από τη συνάρτηση $f(t)=\dfrac{12t+27}{t+1}$. Εξηγείστε γιατί η ανεργία δεν θα πέσει ποτέ κάτω από 12%, όσο επικρατούν οι ίδιες συνθήκες με τις οποίες οι οικονομολόγοι όρισαν τη



συνάρτηση.

Απάντηση: Είναι $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=12$.

Δ10. Το κόστος κατασκευής ενός προϊόντος μιας εταιρείας εξαρτάται από το πλήθος των προϊόντων που κατασκευάζονται από την εταιρεία και αποδίδεται από τη συνάρτηση $K(x)=1000+\dfrac{450000}{x}$, όπου x το πλήθος των προϊόντων που κατασκευάζονται από την εταιρεία. Υπολογίστε το κόστος ενός προϊόντος, αν η εταιρεία κατασκευάσει 1000, 3000, 5000, 15000, 90000 προϊόντα. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to\infty} K(x)$ και ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

Δ11. Δείξτε ότι η ευθεία $y = x+2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x}$ στο $-\infty$ και στο $+\infty$

Δ12. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} &, x\neq 1\\ a &, x=1\end{cases}$. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. Για ποια τιμή του a η f είναι συνεχής συνάρτηση;

Δ13. Να προσδιορίσετε τις τιμές των a και β, ώστε η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-(\beta+1)x+6}{x-2} &, x\neq 2\\ -1 &, x=2\end{cases}$ να είναι συνεχής στην θέση $x_0=2$.

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

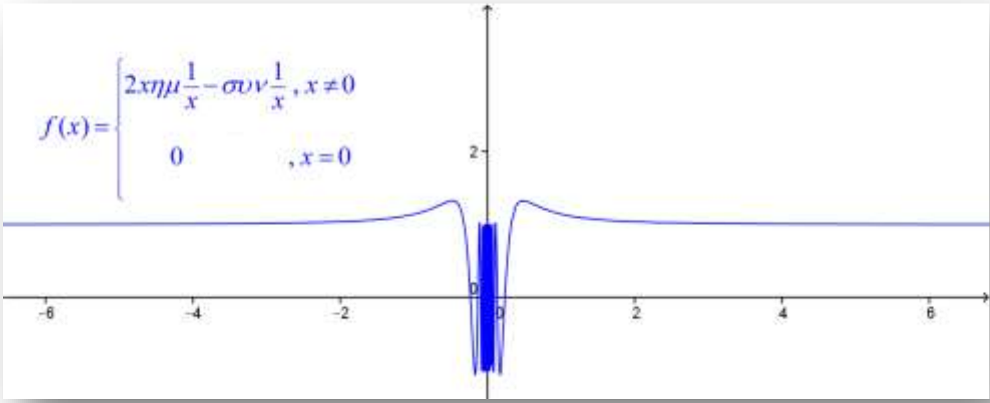
Μια συνάρτηση συνοδεύεται από το πεδίο ορισμού της. Σε αυτό θα αναζητήσουμε τα σημεία συνέχειας, αυτό θα μας οδηγήσει να αποφανθούμε αν ορίζεται το όριο της συνάρτησης σε κάποιο σημείο ή στο άπειρο, αποτελεί την αφετηρία για την εύρεση ασυμπτώτων και γενικά για τη μελέτη της συνάρτησης, ενώ αποτελεί προϋπόθεση για την ισχύ θεωρημάτων ανάλογα με το αν είναι διάστημα και το είδος του.

Η λογαριθμική διδάσκεται για πρώτη φορά, οπότε ενδείκνυται να τονισθεί αναλυτικά και γραφικά ότι είναι η συμμετρική της εκθετικής με ίδια βάση ως προς τη διχοτόμο του 1ου τεταρτημορίου.

Επιπρόσθετα, προς αποφυγήν πιθανής παρανοήσεως ότι «το όριο της συνάρτησης σε σημείο ταυτίζεται με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό», προτείνεται να δοθούν παραδείγματα στους μαθητές, όπως στη δραστηριότητα 10 όπου είναι $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$, αλλά $f(x)=2$.

Να τονισθεί, επίσης, ότι το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ μπορεί να ορίζεται στο x_0, ακόμη και αν το x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, ενώ αντίθετα για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0, εξ ορισμού της συνέχειας συνάρτησης σε σημείο, θα πρέπει το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Ειδικότερα, για το όριο συνάρτησης σε σημείο, να τονισθεί ότι για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $\mathrm{D}_f=(\alpha,\beta)$ είτε πεδίο ορισμού το $\mathrm{D}_f=[\alpha,\beta]$, έχει νόημα σε κάθε περίπτωση να αναζητηθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\beta} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), x_0\in D_f$. Συγκεκριμένα, είναι $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to\beta} f(x)=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$. Επίσης, για να έχει νόημα η αναζήτηση του $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και του $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ το πεδίο ορισμού της συνάρτησης θα πρέπει να περιέχει διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$ ή $(-\infty,\beta]$ και $(\alpha,+\infty)$ ή $[\alpha,+\infty)$ αντίστοιχα. Δηλαδή, για να «ορισθεί το όριο στο x_0» πρέπει να ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις σχετικά με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Επίσης, η έκφραση «υπάρχει το όριο της f στο x_0», δηλώνει ότι ικανοποιούνται μεν οι προϋποθέσεις για την αναζήτηση ύπαρξης του ορίου της f στο x_0 και υπάρχει το όριο της συνάρτησης στο x_0, ανεξαρτήτως αν είναι πραγματικός αριθμός ή το $+\infty$ ή το $-\infty$.

Τέλος να τονισθεί ότι δεν υπάρχει πάντα το όριο συνάρτησης και να δοθούν αντίστοιχα παραδείγματα (προτείνεται χρήση λογισμικού).Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\ , \ x\neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\ , \ x=0 \end{cases}$ δεν έχει όριο όταν το x τείνει στο 0.

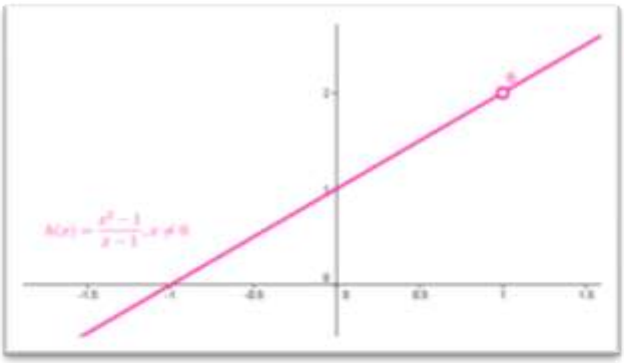


Οι μαθητές, σύμφωνα με το Πρόγραμμα Σπουδών ζητείται να μπορούν να σχεδιάζουν τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f(x)$ και $|f(x)|$ από την $f(x)$. Προτείνεται να δοθεί σημασία, αφού στο κεφάλαιο "Ολοκληρώματα" θα φανεί χρήσιμη αυτή η γνώση.

Επίσης, αναμένεται να συναντήσουν δυσκολία στην έννοια του ορίου και για το λόγο αυτό προτείνεται να εισαχθεί η έννοια εποπτικά.

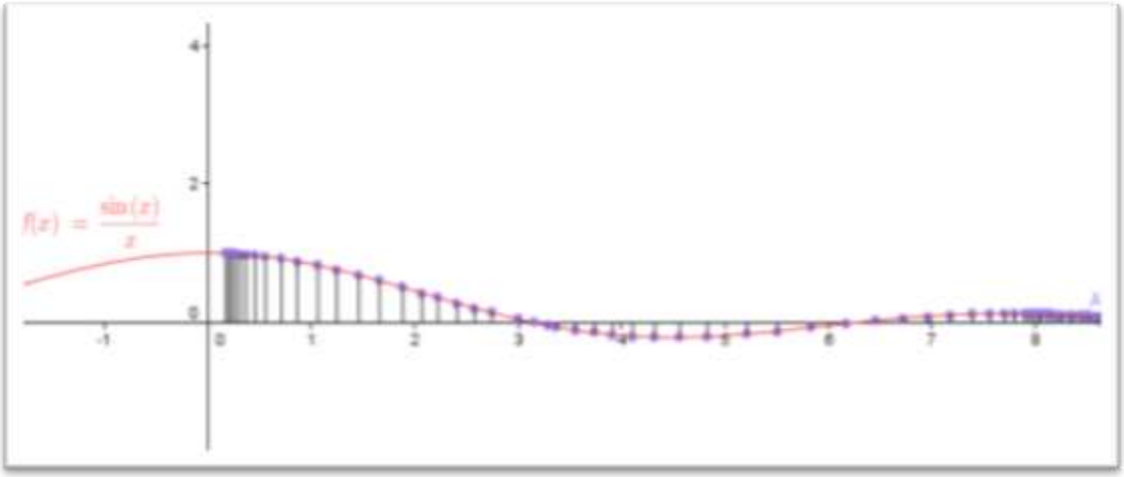
Δυσκολίες συναντούν, επίσης, οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας της πλάγιας ασυμπτώτου, όταν αυτή τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης. Για το λόγο αυτό, προτείνεται με τον ορισμό της ασυμπτώτου να τονισθεί η γεωμετρική σημασία της. Ειδικά για τις ρητές συναρτήσεις να αναδειχθεί στους μαθητές ότι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας ρητής συνάρτησης αναζητούμε στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η ρητή συνάρτηση δεν ορίζεται, στα σημεία του πεδίου ορισμού στα οποία η ρητή συνάρτηση δεν είναι συνεχής, και στο -∞ , +∞, καθόσον η ρητή συνάρτηση ορίζεται σε διαστήματα της μορφής (-∞,α) , (α, +∞) αντίστοιχα.

Προτείνεται επίσης να σχεδιασθεί η συνάρτηση με τύπο $y=\frac{x^2-1}{x-1}$, η οποία είναι ρητή αλλά δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, για να καταφανεί το γεγονός ότι μια ρητή συνάρτηση δεν έχει υποχρεωτικά κατακόρυφη ασύμπτωτη στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η ρητή συνάρτηση δεν ορίζεται.



Να τονισθεί, επίσης το γεγονός ότι η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης μπορεί να εφάπτεται ή να τέμνει τη γραφική παράσταση συνάρτησης. Για παράδειγμα η συνάρτηση

$h(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα, έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και το $-\infty$ την $y = 0$, την οποία η γραφική της παράσταση τέμνει σε άπειρα σημεία:



Μπορούν τα ψηφιακά μέσα να υποστηρίξουν τη διδασκαλία του ορίου και της συνέχειας συναρτήσεων;

Ενδείκνυται η χρήση λογισμικών, όπως του Geogebra[25], ειδικότερα για την έννοια του ορίου, η οποία θα γίνει εποπτικά, αλλά και των ασυμπτώτων. Επίσης και για τις γραφικές παραστάσεις των

[25] Η ενότητα ενδείκνυται για διδασκαλία με χρήση λογισμικών CAS (Computer Algebra Systems) τα οποία επικεντρώνονται στον χειρισμό πολλαπλών αναπαραστάσεων οι οποίες σύμφωνα με τον Ainsworth (2006) ενθαρρύνουν τους μαθητές να κατασκευάσουν βαθύτερη κατανόηση της κατάστασης που μελετούν, καθώς μπορούν να κάνουν επεκτάσεις, αφαιρέσεις και συσχετίσεις. Βέβαια, η χρήση τεχνολογικών εργαλείων στην διδασκαλία, προσφέρεται στο να οδηγήσει τους μαθητές να θέτουν ερωτήματα, να κάνουν συλλογισμούς και να τα επιλύουν με κριτική σκέψη (NCTM, 2000) αλλά, παρότι η τεχνολογία μπορεί να είναι προσιτή σε όλους τους μαθητές, η χρήση των τεχνολογικών εργαλείων δεν μπορεί να αντικαταστήσει την βασική εννοιολογική κατανόηση, την υπολογιστική ευχέρεια και τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων (NCTM, 2008). Επίσης, τα λογισμικά DGS (Dynamic Geometry Software) εστιάζουν σε σχέσεις μεταξύ σημείων, γραμμών, κύκλων, κ.α., και είναι ακριβώς κατάλληλα για να οδηγήσουν τον μαθητή σε εξερεύνηση και ανακάλυψη, είτε καθοδηγημένα είτε τελείως ανοικτά (Schwartz & Yerushalmy, 1986). Και, καθώς αυτοί οι τύποι λογισμικού έχουν αναπτυχθεί με την πάροδο του χρόνου, τα CAS λογισμικά έχουν αρχίσει να περιλαμβάνουν γραφικές δυνατότητες προκειμένου να οπτικοποιήσουν τις μαθηματικές έννοιες, αλλά και τα DGS λογισμικά έχουν αρχίσει να συμπεριλαμβάνουν στοιχεία αλγεβρικού συμβολισμού προκειμένου να καταστούν χρήσιμα σε ένα ευρύτερο πεδίο μαθηματικών προβλημάτων (Hohenwarter & Jones, 2007). Αντιπροσωπευτικό παράδειγμα το εκπαιδευτικό λογισμικό GeoGebra, το οποίο συνδυάζει την άλγεβρα και τη γεωμετρία με την δυνατότητα μετακίνησης από το παράθυρο της άλγεβρας στο παράθυρο της γεωμετρίας και αντίστροφα, υπό την έννοια ότι ο χρήστης έχει την δυνατότητα να ανακαλύπτει και τις αντίστοιχες

συναρτήσεων $-f(x)$ και $|f(x)|$ από την , $f(x)$ ένα λογισμικό θα αποτελούσε ιδανικό εργαλείο. Τα τριγωνομετρικά όρια δεν θα διδαχθούν, αλλά, τριγωνομετρικές συναρτήσεις μπορεί να αποβούν χρήσιμες για παρουσίαση αντιπαραδειγμάτων ώστε οι μαθητές να μην δημιουργούν αλλά και να διαλύουν τυχόν παρανοήσεις. Όμως, η γραφική παράσταση τριγωνομετρικών συναρτήσεων, αλλά και άλλων μορφών δεν είναι εύκολο να αποτυπωθούν σε χαρτί, ενώ αντίθετα με λογισμικό παρέχονται άμεσα και επιπλέον το λογισμικό δίνει το πλεονέκτημα μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης και γενικά διερεύνησης από πλευράς μαθητών αλλά και του εκπαιδευτικού. Η άμεση και διαδραστική εικόνα που προσφέρουν τα ψηφιακά μέσα αφενός συμβάλουν στην εξοικονόμηση χρόνου, αφετέρου διαλύει τις λάθος εντυπώσεις αφού οι μαθητές μπορούν να διερευνήσουν τις γραφικές παραστάσεις μέσω λογισμικού και επιπλέον θεωρούν ότι το λογισμικό δεν δίνει λάθος αποτελέσματα, ενώ συνιστούν ένα ενδεδειγμένο τρόπο επαλήθευσης των συμπερασμάτων τους. Εφίσταται, βέβαια, η προσοχή του εκπαιδευτικού κατά τη χρήση λογισμικού, στις αδυναμίες χρήσης του όπως, διακριτές τιμές, πεπερασμένη ακρίβεια, πεπερασμένες διαδικασίες, κοινά χαρακτηριστικά του λογισμικού.

αλγεβρικές εξισώσεις των γεωμετρικών σχημάτων σε κάθε ανανέωση τους μέσω του συρσίματος από το παράθυρο της γεωμετρίας (Hohenwarter & Jones, 2007).

Βιβλιογραφικές αναφορές

Ainsworth, S. E. (2006). DeFT: A conceptual framework for learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, *16*(3), 183-198.

Apostol, T. M. (1962). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*. (Δ. Γκιόκα, μετάφραση). Αθήνα: Ατλαντίς.

Bell, E. T. (2000). *Οι Μαθηματικοί*. (Μ. Μαγειρόπουλος, μετάφραση). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.. (Πρωτότυπη έκδοση, 1971).

Boyer, C. B. (1959). *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* New York: Dover Publications, Inc.

Davis, P. & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience.* Birkhauser, Boston.

Edwards, C. H. Jr. (1979).The Historical Development of the Culculus. New York/Berlin: Springer-Verlag.

Goldstein, R. (2006). *Αιχμάλωτος των Μαθηματικών. Ο Κούρτ Γκέντελ και το Θεώρημα της Μη Πληρότητας*. (Ε. Πισσία, μετάφραση). Εκδόσεις: Τραυλός. (Πρωτότυπη έκδοση, 2005).

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of Geogebra. *Proceedings of the British Society for*, *27*(3), 126–131. Ανακτήθηκε 28 Μαρτίου, 2013, από http://eprints.soton.ac.uk/50742/

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *College Mathematics Journal , Vol. 20,νο. 4.* σελ. 282-300*.*

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2008). The role of technology in the teaching and learning of mathematics. *NCTM News Bulletin, 44*(9), pp.1-12.

O'Connor, J. & Robertson F. (2005) *History topic: The function concept MacTutor History of Mathematics archive.* University of St Andrews*.*

Sawyer, W.W. (1993). *Τί είναι ο Απειροστικός Λογισμός*. (Σ. Λιάτσου & Γ. Τσαπακίδης, μετάφραση). Εκδόσεις: Τροχαλία. (Πρωτότυπη έκδοση, 1993).

Schwartz, J. L. & Yerushalmy, M., (1986). The Geometric Supposer series [Computer-based courseware]. Pleasantville, NY: Sunburst Communications.

Spivak, M. (2007). Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός. (Α. Γιαννόπουλος, μετάφραση). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. (Πρωτότυπη έκδοση, 1980).

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ. (2014). *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ Τάξης Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

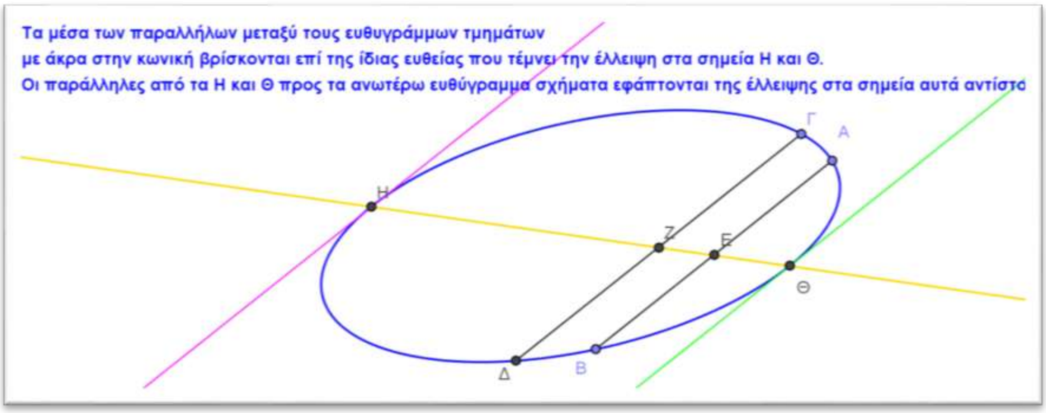
Γαγάτσης, Α. & Σπύρου, Π. (2008). Η συνάρτηση: επιστημολογική της διάσταση και διδακτική μεταφορά. Πανεπιστήμιο Αθηνών , Πανεπιστήμιο Κύπρου. Αναρτήθηκε 10-1-2015 από http://www.math.uoa.gr/me/faculty/spirou/Spyrou%204.pdf

Χρυσανθόπουλος, Κ. Η. (2009). Αξιοποίηση της ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. *Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών*. (Συλλογικό έργο). Εκδόσεις: ΖΗΤΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο : Παράγωγος συνάρτηση

Εισαγωγή

Από την έννοια της παραγώγου αναδεικνύεται η κεντρική ιδέα του διαφορικού λογισμού (Apostol, 1962, σ. 113), ο οποίος μαζί με τον ολοκληρωτικό λογισμό αποτελούν δύο κύριους κλάδους της ανάλυσης και θεωρείται ότι συνθέτουν μαζί το πιο ισχυρό μέχρι σήμερα εργαλείο για την εξερεύνηση του φυσικού κόσμου (Bell, 2000, τ. I σ. 48). Οι ρίζες της έννοιας της παραγώγου εντοπίζονται στην αναζήτηση της λύσης ενός γεωμετρικού προβλήματος, αυτού της χάραξης της εφαπτομένης σε σημείο μιας καμπύλης. Αν είναι γνωστή η διεύθυνση της εφαπτόμενης σε ένα σημείο μιας καμπύλης τότε μπορεί να κατασκευασθεί η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό.



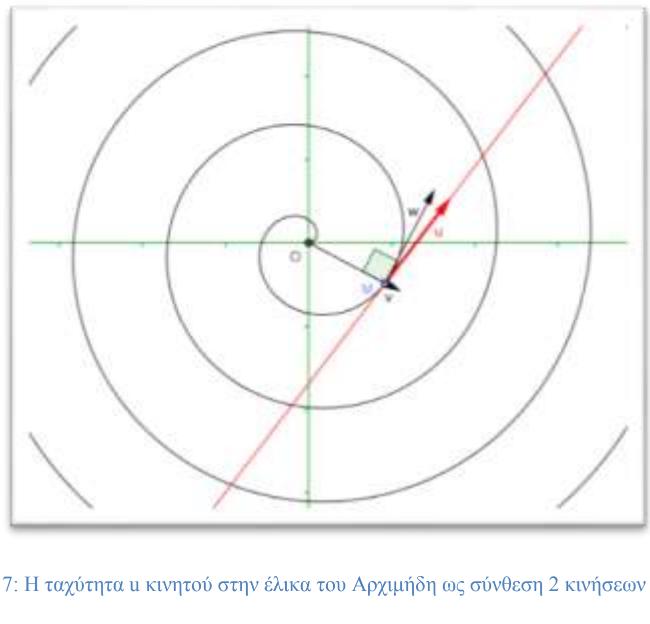
Εικόνα 4: Εφαπτόμενες της έλλειψης

Ο Αρχιμήδης στη πραγματεία του "Περί Ελίκων" έδωσε με μεθόδους μηχανικής τον ορισμό της "έλικας", επί των ημερών μας της "γραμμικής σπείρας", και παράθεσε τρόπο προσδιορισμού της εφαπτομένης της έλικας σε τυχαίο σημείο της, τον οποίο απέδειξε γεωμετρικά (Heath, 2001, τ. II, σ.83-94). Επίσης, τρόπος κατασκευής της εφαπτομένης κωνικών τομών σε σημείο τους περιγράφεται από τον Απολλώνιο στα "Κωνικά" (Heath, 2001 ; Clawson, 2008) σύμφωνα με τις αρχές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (εικ. 6).

Και ενώ η εξέλιξη των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα είχε συνδεθεί κυρίως με φιλοσοφικά και θεωρητικά κίνητρα προς αναζήτηση της εσωτερικής αρμονίας. Αντίθετα, τα κίνητρα για την εξέλιξη των μαθηματικών από τον 17ο αιώνα και εντεύθεν, προσανατολίζονταν στην διάνοιξη οδών προς την ανάπτυξη της τεχνολογίας, με αποτέλεσμα οι μέθοδοι της Ευκλείδειας Γεωμετρίας να μήν επαρκούν για τη μελέτη των καμπυλών. Το γεγονός αυτό οδήγησε στην ανάγκη αναζήτησης νέων ορισμών, όπως αυτού της εφαπτομένης σε σημείο καμπύλης, δηλαδή την ανάγκη γενίκευσης του ορισμού της εφαπτομένης του κύκλου σε τυχούσα πλέον καμπύλη.

Ο Descartes (1596-1650), εξελληνισμένα Καρτέσιος, ανακάλυψε την Αναλυτική (Καρτεσιανή) Γεωμετρία[26], την οποία έδωσε στη δημοσιότητα το 1637 με το έργο του "Μέθοδος", ενώ ανεξάρτητα από τον Καρτέσιο, ο Fermat (1601-1665), επίσης επινόησε τη μέθοδο της Αναλυτικής (Καρτεσιανής) Γεωμετρίας, καθενός το έργο, προφανώς με διαφοροποιήσεις του ενός από το άλλο, κατάλληλο εργαλείο γεωμετρικής απόδειξης (Bell, 2000, τ. I σ. 7-9). Ο Καρτέσιος, για την εύρεση της εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο της, χρησιμοποίησε την Αναλυτική Γεωμετρία όμως ,ο Fermat, προχωρώντας παραπέρα για τον υπολογισμό των σημείων ειδικών καμπυλών των οποίων οι τεταγμένες λαμβάνουν τοπικά μέγιστες ή ελάχιστες τιμές, παρατήρησε ότι στα σημεία αυτά οι εφαπτόμενες είναι οριζόντιες. Το πρόβλημα της αναζήτησης των σημείων στα οποία μια καμπύλη παρουσιάζει τοπικά ακρότατα έδειχνε να έχει άμεση σχέση με την εύρεση των οριζόντιων εφαπτομένων της καμπύλης ή γενικότερα με τον προσδιορισμό της εφαπτομένης σε τυχαίο σημείο μιας καμπύλης, γεγονός που τον οδήγησε στην ανακάλυψη κάποιων βασικών ιδεών για τη σύλληψη της έννοιας της παραγώγου (Apostol, 1962, σ. 113-114).

Παράλληλα, ο Barrow (1630-1677), από τις έδρες των Αρχαίων Ελληνικών και της Γεωμετρίας, το 1660 στο Cambridge, είχε αναπτύξει το πρόβλημα της εφαπτομένης με το δικό του τρόπο χρησιμοποιώντας γνώσεις Μαθηματικών έως και την εποχή του και κάνοντας τις δικές του παραδοχές, οι οποίες ναι μεν λειτουργούσαν, αλλά χωρίς να έχει αποδείξει ότι μπορούν να λειτουργούν (Clawson, 2008, σ. 364). Το πρόβλημα της εφαπτομένης σε σημείο καμπύλης έλυσε ο Νεύτων (1642-1727) το 1665 αφού είχε αναπτύξει αρκετά τις αρχές του απειροστικού λογισμού (Ανάλυσης) και ανακαλύψει το γενικευμένο διωνυμικό θεώρημα, όντας φοιτητής του Barrow από το 1661 (Bell, 2000, τ. I σ. 152). Όπως αναφέρει σε σημείωσή του ο ίδιος ο Νεύτων, και την οποία ανακάλυψε ο Louis Trenchard Moore, ανέπτυξε το διαφορικό λογισμό με βάση τη μέθοδο του Fermat για τον σχεδιασμό των εφαπτομένων. Παράλληλα με τον Νεύτωνα, και εργαζόμενος ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, ο Leibniz (1646-1716) ανέπτυξε, επίσης, τη θεωρία του διαφορικού λογισμού με συμβολισμούς διαφορετικούς αυτών του Νεύτωνα.



Εικόνα 7: Η ταχύτητα u κινητού στην έλικα του Αρχιμήδη ως σύνθεση 2 κινήσεων

[26] Αξιοσημείωτο είναι ότι ο Απολλώνιος στα "Κωνικά" ανακάλυψε θεμελιώδεις γεωμετρικές ιδιότητες, ισοδύναμες με εξισώσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες (Heath, 2001, τ. II, σ.179-180).

Επί των ημερών μας, ακολουθούμε τις θεωρίες των Νεύτωνα και Leibniz ενώ, έχουν υιοθετηθεί από την ευρύτερη επιστημονική κοινότητα παρεμφερείς συμβολισμοί με αυτούς του Leibniz, είτε γιατί η δημοσίευσή του προηγήθηκε, είτε γιατί είναι περισσότερο εύχρηστοι, αυτών του Νεύτωνα (Bell, 2000, τ. I). Ειδικότερα, στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς του Lagrange (1736-1813) τους οποίους εισήγαγε πολύ αργότερα, στα τέλη του 18ου αιώνα, παριστώντας την παράγωγο μιας συνάρτησης f με f' και την τιμή της στο σημείο x_0 με $f'(x_0)$, τη δεύτερη παράγωγο με f'', ... την νιοστή παράγωγο με $f^{(\nu)}$ και αντίστοιχα συμβολίζοντας τις τιμές τους.

Γεωμετρικά διατυπωμένο, το βασικό πρόβλημα του διαφορικού λογισμού αποτελεί η εύρεση της διεύθυνσης της εφαπτομένης σε ένα σημείο μιας καμπύλης. Δικαιώνοντας, όμως, τον Αρχιμήδη ο οποίος σύμφωνα με τον Heath (2001) ανάφερε ότι «πρώτα γίνονται σαφή σε μένα μέσω μιας μηχανικής μεθόδου, παρότι έπειτα πρέπει να παρουσιασθούν μέσω της Γεωμετρίας….»(σ. 39) και πράγματι συνδύασε κινηματικές μεθόδους (εικ. 7) για την εφαπτομένη σε σημείο της έλικας[27], μολονότι η έννοια της παραγώγου αρχικά συνδέθηκε με την εύρεση της εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο της, απεδείχθη τελικά ότι προσφέρεται επίσης και για τον υπολογισμό της στιγμιαίας ταχύτητας και εν γένει του συντελεστή μεταβολής μιας συνάρτησης σε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Τι περιέχει το κεφάλαιο των Παραγώγων και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Η διδασκαλία του τρέχοντος κεφαλαίου προϋποθέτει αφενός κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης (πεδίο ορισμού, τύπος, σύνολο τιμών), και των τρόπων παράστασής της, αλλά, και ανεπτυγμένες δεξιότητες στις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων και τη σύνθεση συναρτήσεων. Αφετέρου, προϋποθέτει γνώση της έννοιας του ορίου συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbf{R}$, δεξιότητες εφαρμογής των ιδιοτήτων των ορίων, και εν τέλει κατανόηση του ορισμού της συνέχειας της συνάρτησης και των ιδιοτήτων της. Εν γένει, εμπέδωση της ύλης του προγενέστερου κεφαλαίου.

Εστιάζοντας στο παρόν κεφάλαιο, παρουσιάζονται οι ορισμοί της παραγώγου σε σημείο συνάρτησης και της παραγώγου συνάρτησης, αναλύεται η αναγκαία συνθήκη της συνέχειας για την ύπαρξη της παραγώγου, και δίνεται έμφαση μέσω εφαρμογών στη διάσταση του ορισμού της παραγώγου ως ρυθμού μεταβολής ενός μεγέθους, με χρήση τύπων παραγώγων βασικών συναρτήσεων και κανόνων παραγώγισης.

Το κεφάλαιο των Παραγώγων, πέραν της σημασίας του για τα Μαθηματικά, είναι ιδιαίτερα κρίσιμο για το πλήθος των εφαρμογών του διαφορικού λογισμού, γενικότερα, αφού συνδυάζεται με προβλήματα φυσικής, βιολογίας και πλήθος άλλων επιστημών, προσφέροντας άμεσες λύσεις.

[27] Ο Αρχιμήδης έδωσε για πρώτη φορά τον αυστηρό ορισμό της γραμμικής σπείρας, την οποία αυτός ονόμαζε έλικα, ως εξής: «Αν μια ημιευθεία, η αρχή της οποίας παραμένει σταθερή, αναγκαστεί να περιστραφεί με σταθερή γωνιακή ταχύτητα σε ένα επίπεδο έως ότου επιστρέψει στην θέση από την οποία άρχισε η περιστροφή και αν συγχρόνως, καθώς η ημιευθεία περιστρέφεται, ένα σημείο κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος της, αρχίζοντας από την αρχή της, το σημείο θα διαγράψει στο επίπεδο μια έλικα». Στο βιβλίο του «Περί ελίκων» γίνεται μια μεθοδική μελέτη των ιδιοτήτων αυτής (HEATH, 2001).

Ποιές είναι οι «σημαντικές ιδέες» που περιέχονται στο κεφάλαιο της Παραγώγου Συνάρτησης;

I. Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο

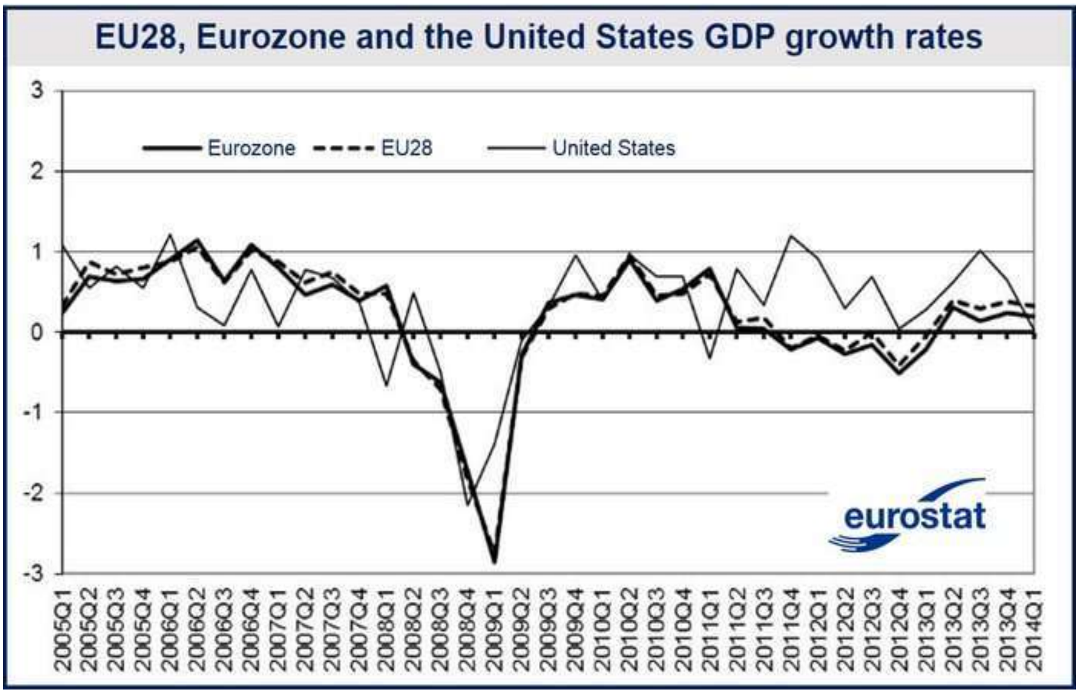
Η παρατήρηση του Fermat κατά την αναζήτηση των τοπικών ακροτάτων μιας καμπύλης ότι, στα σημεία στα οποία μία καμπύλη παρουσιάζει τοπικά ακρότατα οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες, τον οδήγησε στο γενικότερο πρόβλημα του εντοπισμού των σημείων της καμπύλης στα οποία οι εφαπτόμενες είναι οριζόντιες. Και «*Μολονότι η αρχική διατύπωση της έννοιας της παραγώγου σκοπό είχε τη μελέτη του προβλήματος των εφαπτομένων, ύστερ' από λίγο φάνηκε ότι προσέφερε ακόμα και ένα τρόπο για τον υπολογισμό της ταχύτητας και πιο γενικά του συντελεστή μεταβολής μιας συνάρτησης.*»Apostol, σ. 113 και 114).

Η ιδέα είναι ο προσδιορισμός της εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο της Α ως όριο των τεμνουσών την καμπύλη ευθειών που ορίζονται από το σημείο Α και ένα άλλο σημείο της καμπύλης το οποίο για τις διάφορες θέσεις του προσεγγίζει το Α. Ουσιαστικά είναι ο προσδιορισμός της κλίσης της καμπύλης, μέσω της προσέγγισής της από τις γνωστές κλίσεις των ανωτέρω τεμνουσών την καμπύλη ευθειών. Η μεγάλη ιδέα του κεφαλαίου, ουσιαστικά, συνίσταται στο πέρασμα από το πηλίκο μεταβολής στο όριο του πηλίκου μεταβολής (ρυθμό μεταβολής) ο οποίος μας οδηγεί στην κλίση της εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο της.

Εν γένει, η ανακάλυψη του διαφορικού λογισμού ο οποίος αποτελεί σημαντικό ζητούμενο πολλών επιστημονικών εφαρμογών, οδήγησε στην τεχνολογική ανάπτυξη επιλύοντας προβλήματα που φάνταζαν πολλές φορές ανυπέρβλητα, με στερεότυπες πλέον μεθόδους. Ένα ελάχιστο δείγμα τέτοιων προβλημάτων, εστιασμένο στην ύλη του τρέχοντος κεφαλαίου, αναφέρεται στη συνέχεια.

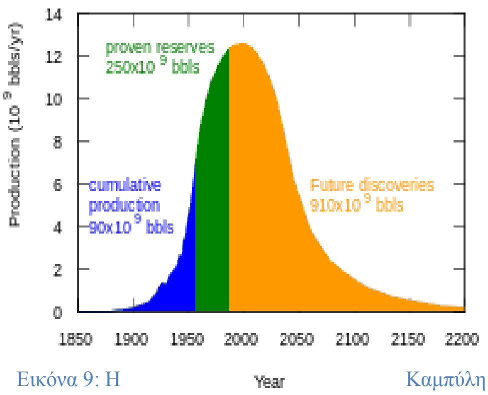
- Εύρεση της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ενός κινητού κάθε χρονική στιγμή της κίνησής του από τη συνάρτηση της τροχιάς του.

- Από τη συνάρτηση προσδιορισμού του Ακαθάριστου Εθνικού Προϊόντος (ΑΕΠ) μιας χώρας, ο υπολογισμός του ρυθμού μεταβολής του.



Εικόνα 8: Ρυθμοί μεταβολής του ΑΕΠ για τις χώρες της Ε.Ε., της Ευροζώνης και των Η.Π.Α.
Πηγή: Eurostat, 2014

- Από τη συναρτησιακή σχέση των ποσών προσφορά-ζήτηση ενός προϊόντος βιομηχανίας ο υπολογισμός του ρυθμού μεταβολής εσόδων της βιομηχανίας.



Εικόνα 9: Η Καμπύλη του Χιούμπερτ για την παγκόσμια κορύφωση παραγωγής πετρελαίου όπως αρχικά εκφράστηκε το 1956, πηγή Βικιπαίδεια

Εικόνα 10: Φωτοχημική ρύπανση στο Χονγκ Κονγκ, πηγή Βικιπαίδεια

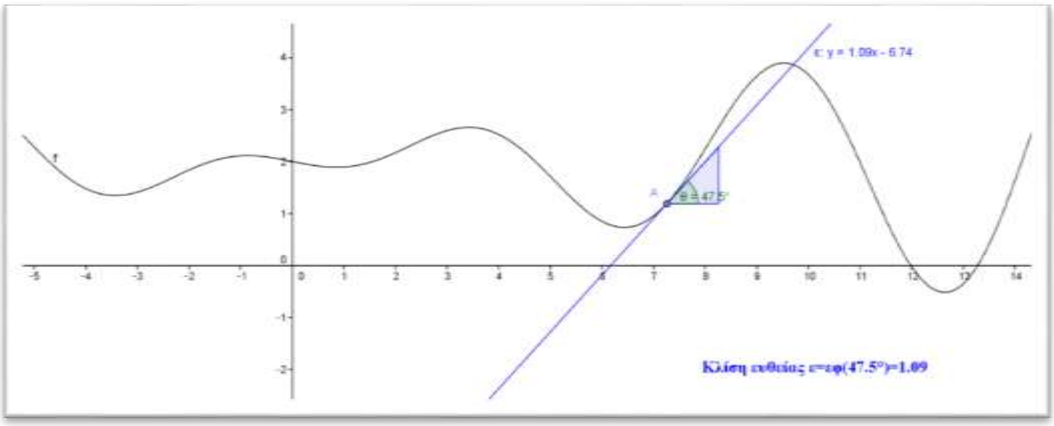
- Από τη συνάρτηση μέσης συγκέντρωσης του μονοξειδίου του άνθρακα στην ατμόσφαιρα οδηγούμεθα σε τεκμηριωμένα συμπεράσματα για το ρυθμό μεταβολής της συγκέντρωσης, στην αρχή του αιώνα και επί των ημερών μας, ώστε να σχεδιασθούν δράσεις προστασίας του πλανήτη μας.

- Μετά την εφαρμογή μέτρων για τη διάσωση του manta birostris (κοινώς **σαλάχι μάντα),** από την προκύπτουσα συνάρτηση του αριθμού σαλαχιών αναφορικά με το χρόνο, ο υπολογισμός του ρυθμού αύξησης του πληθυσμού των σαλαχιών τα επόμενα έτη εφαρμογής των μέτρων.

Εικόνα 11: Το σαλάχι μάντα, πηγή Βικιπαίδεια

II. <u>Σημαντικά σημεία που πρέπει να εστιάσουμε</u>

Ένα, σημαντικό στοιχείο που πρέπει να αναδειχθεί είναι η **στενή σχέση μεταξύ μαθηματικών εννοιών και προβλημάτων της φυσικής**. Θα πρέπει να υπογραμμισθεί η φυσική ερμηνεία της παραγώγου μέσω της έννοιας της στιγμιαίας ταχύτητας και της κλίσης της εφαπτομένης καμπύλης μέσω της διεύθυνσης της στιγμιαίας ταχύτητας. Αυτό μπορεί να γίνει είτε ορμώμενοι από προβλήματα της φυσικής, ή γενικότερα από ρεαλιστικά προβλήματα, προς την ανάγκη προσδιορισμού αυστηρά μαθηματικών εννοιών, και ακολούθως θεωρημάτων, είτε παρουσιάζοντας τις έννοιες και τα θεωρήματα σε αυστηρά μαθηματική μορφή και αναδεικνύοντας στη συνέχεια τη σημασία τους στο χώρο άλλων επιστημών.



Εικόνα 12: Η εφαπτομένη έχει περισσότερα του ενός κοινά σημεία με την καμπύλη

Ένα άλλο σημείο στο οποίο πρέπει να εστιάσουμε στο κεφάλαιο αυτό είναι ότι η **εφαπτομένη καμπύλης**, όπως ορίζεται στην ανάλυση, αποτελεί γενικότερη έννοια από αυτής της εφαπτομένης του κύκλου στην Ευκλείδεια γεωμετρία.

Επιπλέον, η παράγωγος της συνάρτησης με τύπο y=f(x), δηλώνει τον υπολογισμό του ορίου του πηλίκου διαφορών (λόγου της μεταβολής της συνάρτησης f(x), σε σχέση με τη μεταβολή της μεταβλητής x), δηλαδή, δηλαδή, το ρυθμό μεταβολής. Και ίσως να έγινε η αρχή με έναυσμα τον υπολογισμό της στιγμιαίας ταχύτητας από τη μέση ταχύτητα, αλλά, η το πηλίκο διαφορών, μπορεί πέραν της μέσης ταχύτητας, να εκφράζει και άλλα πράγματα, όπως το μέσο κέρδος μιας επιχείρησης σε συνάρτηση του αριθμού πώλησης των προϊόντων της, οπότε σε αυτή τη περίπτωση το όριο του πηλίκου διαφορών εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του κέρδους της επιχείρησης. Πρέπει, λοιπόν, αφενός να τονισθεί η διαφοροποίηση μεταξύ μέσου συντελεστή μεταβολής της συνάρτησης (πηλίκου διαφορών) και ρυθμού μεταβολής αυτής, αλλά και να αναδειχθεί το πλήθος των εφαρμογών της παραγώγου, οι οποίες επεκτείνονται πέραν αυτών των ορίων των χρονικών μεταβολών, συσχετίζοντας καταστάσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε άλλα μαθήματα ή και γενικότερα στη καθημερινότητά τους, με έμφαση, ή δυνατόν, σε αυτές που εμπίπτουν στα ενδιαφέροντά τους.

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

1. Πώς ορίζεται η παράγωγος συνάρτησης σε σημείο του πεδίου ορισμού της;
2. Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο; (συντελεστής διεύθυνσης ευθείας)
3. Ποιά είναι η αλγεβρική ερμηνεία της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο; (ρυθμός μεταβολής φυσικού μεγέθους)
4. Πότε μια συνάρτηση είναι μη παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της;
5. Ποιά είναι η εξίσωση εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο της;
6. Πώς σχετίζεται η παραγώγιση συνάρτησης με τη συνέχεια συνάρτησης;
7. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη;
8. Πώς ορίζεται η παράγωγος συνάρτησης;
9. Τί παριστά η παράγωγος σε σημείο συνάρτησης και τί η παράγωγος συνάρτησης σε διάστημα;
10. Ποιές είναι οι ιδιότητες των παραγώγων;
11. Πώς παραγωγίζουμε συναρτήσεις της μορφής $f(x)^{g(x)}$;
12. Πώς διαπιστώνουμε αν μια ευθεία εφάπτεται στη γραφική παράσταση συνάρτησης;
13. Πώς από τη συνάρτηση θέσης βρίσκουμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός κινητού;
14. Πώς εξακριβώνουμε τη φορά κίνησης ενός κινητού;
15. Πώς βρίσκουμε το ολικό διάστημα που διάνυσε ένα κινητό;
16. Πώς αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα της κίνησης σημείου σε καμπύλη;

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα - Δραστηριότητες

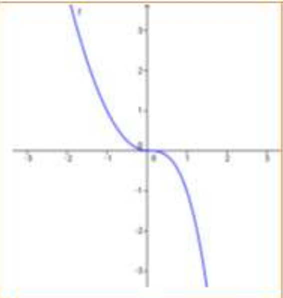
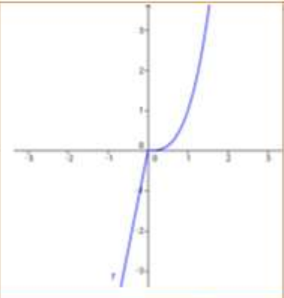
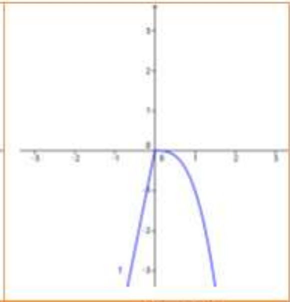
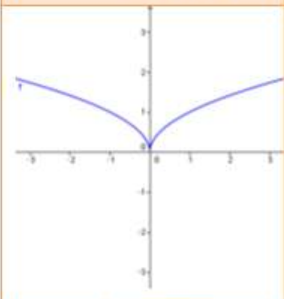
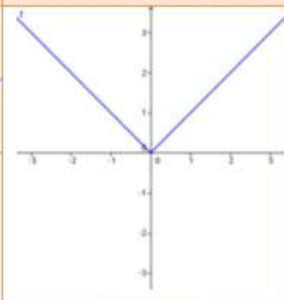
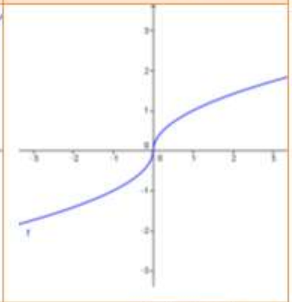
Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου οι μαθητές αναμένεται να είναι ικανοί να:

Μ1. Ορίζουν την εφαπτομένη καμπύλης σε ένα σημείο της και αναγνωρίζουν από τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται εφαπτομένη και αυτά στα οποία η εφαπτομένη είναι κατακόρυφη.

<u>Ενδεικτικά ερωτήματα-δραστηριότητες</u>

1. Δώστε τον ορισμό εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο της. Πότε λέμε ότι δεν ορίζεται εφαπτομένη της καμπύλης σε ένα σημείο της; (Αναφέρονται και στην περίπτωση που δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης και όταν η εφαπτομένη είναι κατακόρυφη).
2. Στα κάτωθι σχήματα αναγνωρίστε σε κάθε περίπτωση, αν υπάρχουν, σημεία της καμπύλης στα οποία δεν ορίζεται η εφαπτομένη. <u>Ενδείκνυται η χρήση λογισμικού</u>.

Πίνακας 1

		
$f(x)=\{\begin{matrix}x^2, & x<0\\ -x^3, & x\geq 0\end{matrix}$	$f(x)=\{\begin{matrix}5x, & x<0\\ x^3, & x\geq 0\end{matrix}$	$f(x)=\{\begin{matrix}5x, & x<0\\ -x^3, & x\geq 0\end{matrix}$
		
$f(x)=\sqrt{\lvert x\rvert}$	$f(x)=\lvert x\rvert$	$f(x)=\{\begin{matrix}-\sqrt{-x}, & x<0\\ \sqrt{x}, & x\geq 0\end{matrix}$

M2. Ορίζουν την έννοια της παραγώγου και διακρίνουν από τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα και προσδιορίζουν πότε μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη. Αποδεικνύουν ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό και δίνουν αντιπαραδείγματα για την μή ισχύ του αντιστρόφου.

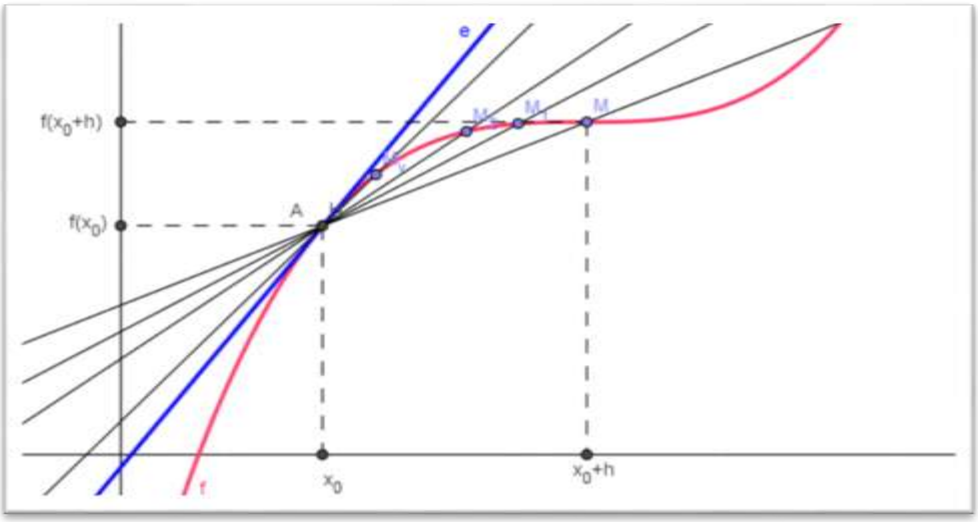
Ενδεικτικά ερωτήματα-δραστηριότητες

Στα σχήματα του πίνακα 1 να αναγνωρίστε σε κάθε περίπτωση, αν υπάρχουν, σημεία της καμπύλης στα οποία δεν ορίζεται η παράγωγος.

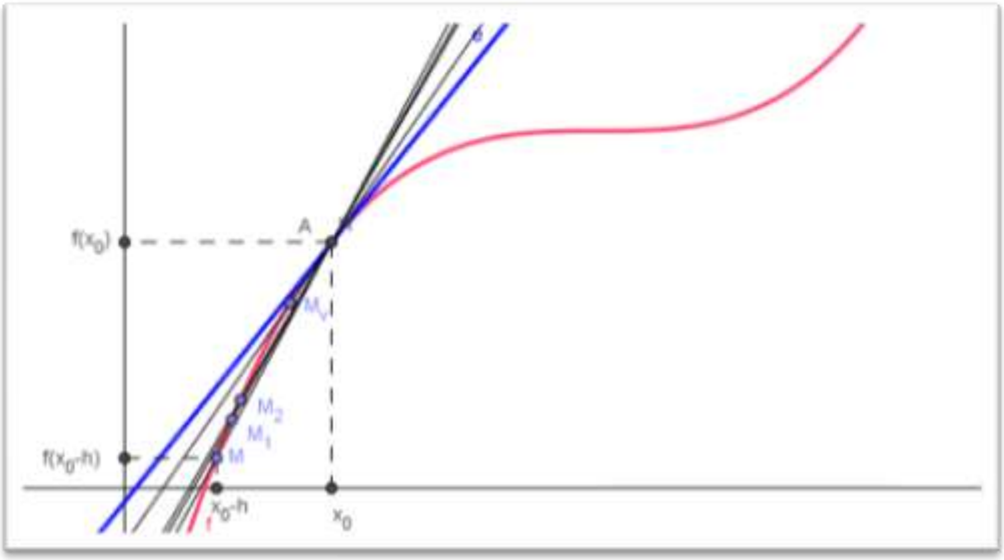
M3. Αποδεικνύουν τους αλγεβρικούς κανόνες παραγώγισης.

M4. Ορίζουν και ερμηνεύουν γεωμετρικά την εφαπτομένη καμπύλης C: $y=f(x)$ στο σημείο της A με τετμημένη $x=x_0$ ως οριακή θέση της ευθείας AM, με M σημείο της καμπύλης διαφορετικό του A, όταν το M κινείται στη καμπύλη πλησιάζοντας το σημείο A, δηλαδή όταν $h\to 0$ όπως κάτωθι.

Το M κινείται στην καμπύλη από δεξιά του A



Και όταν το Μ κινείται στην καμπύλη από αριστερά του Α



Ενδεικτικά ερωτήματα-δραστηριότητες

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x \geq 0$. Σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση και δείτε, χαράσσοντας τις κατάλληλες ευθείες με το χάρακά σας, αν μπορείτε να ορίσετε εφαπτομένη στο σημείο της (0,0);
   Υπόδειξη: Η εφαπτομένη ορίζεται ($x=0$), η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της αλλά η παράγωγος της δεν ορίζεται για $x=0$ (εφαπτομένη κατακόρυφη στο (0,0), άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο (0,0)). Ενδείκνυται η χρήση λογισμικού.
2. Βλέπε και Πρόγραμμα Σπουδών:
   Στη διεύθυνση:
   http://webspace.ship.edu/msrenault/geogebracalculus/derivative_at_a_point.html
   οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν διαδραστικά με την έννοια της παραγώγου συνάρτησης.

Μ5. Αντιπαραβάλλουν τον γεωμετρικό ορισμό εφαπτομένης του κύκλου με τον αντίστοιχο αλγεβρικό ορισμό για την εφαπτομένη καμπύλης και υπολογίζουν αλγεβρικά την εφαπτομένη σε σημείο της.

Ενδεικτικά ερωτήματα-δραστηριότητες

1. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων σχεδιάστε με τη βοήθεια διαβήτη την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $-2 \leq x \leq 2$. α) Με χρήση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας χαράξτε τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία της $(1, \sqrt{3})$ και (2,0). β) Βρείτε, με τη βοήθεια των παραγώγων την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο Μ$(1, \sqrt{3})$. γ) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $y = e^x$ και την εφαπτομένη της στο σημείο $(1, e)$.

   Υπόδειξη: α)Διαπιστώνουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι ημικύκλιο με κέντρο το Ο και ακτίνα ρ=2, αφού $y^2 = 4 - x^2$, και y θετικό. Άρα για τις εφαπτόμενες φέρουν κάθετη στην ακτίνα στο σημείο τομής της με τον κύκλο. β,γ)…. Εδώ αυτό που πρέπει να τονιστεί είναι ότι η εφαπτομένη του κύκλου όπως την γνωρίζουμε από την γεωμετρία συμπίπτει με την εφαπτομένη όπως ορίζεται στην Ανάλυση. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία για να φανεί ότι η έννοια της εφαπτομένης που ορίστηκε στην Ανάλυση συνδέεται με την έννοια της εφαπτομένης που ξέρουμε από την Γεωμετρία και αποτελεί επέκταση της.

2. Αν η $f(t) = \sqrt{t}$, παριστά τη συνάρτηση θέσης ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα τη χρονική στιγμή t, πώς θα υπολογίσετε τη στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = 1$;

3. Πόσα το πολύ κοινά σημεία μπορεί να έχει η εφαπτομένη σε ένα σημείο μιας καμπύλης με τη καμπύλη; Ισχυροποιείστε την απάντησή σας με παραδείγματα. (άπειρα, π.χ. η ευθεία $y = 1$ εφάπτεται της $f(x) = \eta\mu x$ σε άπειρα σημεία). Ενδείκνυται η χρήση λογισμικού, για όλες τις ανωτέρω περιπτώσεις.

Μ6. Υπολογίζουν την παράγωγο συναρτήσεων, κάνοντας χρήση των ορισμών $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ και $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Ενδεικτικά ερωτήματα-δραστηριότητες

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Εξετάστε αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. Υπολογίστε, κάνοντας χρήση του ορισμού, το $f'(2)$ και στη συνέχεια την παράγωγο της $f(x) = \sqrt{x}$;

   Υπόδειξη: Υπολογίζουν το όριο $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ για $x_0 = 0$, $x_0 = 2$ και ως έχει.

   Δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ γιατί το όριο του πηλίκου διαφορών είναι $+\infty$.

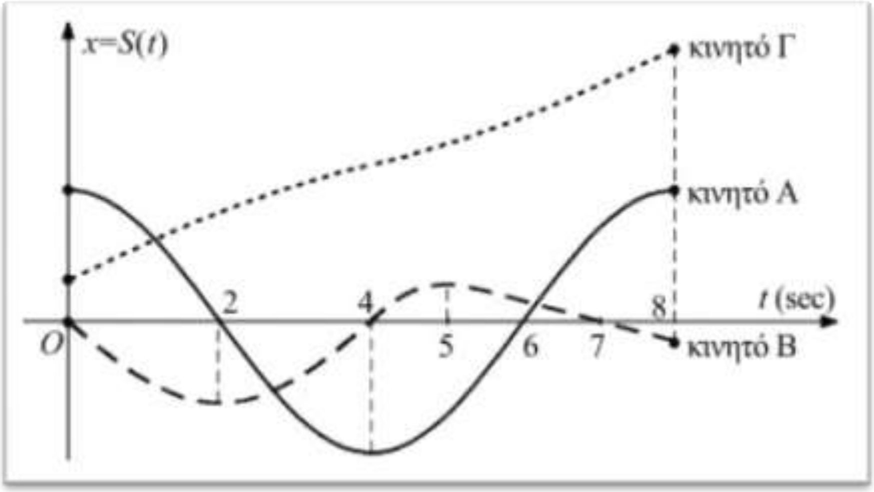
Μ7. Από τη συνάρτηση που παριστά τη θέση του κινητού στον αντίστοιχο χρόνο υπολογίζουν τη μέση ταχύτητα για δεδομένο χρονικό διάστημα, και τη στιγμιαία ταχύτητα και επιτάχυνση σε δεδομένη χρονική στιγμή.

Ενδεικτικά ερωτήματα-δραστηριότητες

1. Αν η συνάρτηση θέσης ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα είναι $f(t) = -t^2 + 6t, t \geq 0$ να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα ανάμεσα από τις χρονικές στιγμές $t = 1$ και $t = 5$, την στιγμιαία ταχύτητα τις χρονικές στιγμές $t = 1$ και $t = 5$. Υπολογίστε την επιτάχυνσή του.

   Υπόδειξη: Για τη μέση ταχύτητα υπολογίζουν το πηλίκο διαφορών τις χρονικές στιγμές $t = 1$ και $t = 5$. Για τη στιγμιαία ταχύτητα, το $f'(t)$ για $t = 1$ και $t = 5$ αντίστοιχα. Για την επιτάχυνση υπολογίζω το $f''(t)$.

2. Στο παρακάτω σχήμα (Ανδρεαδάκης κ.α., 2014) δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων θέσεως τριών κινητών που κινήθηκαν πάνω στον άξονα x' x στο χρονικό διάστημα από 0sec έως 8sec. Βρείτε :



i) Ποιο κινητό ξεκίνησε από την αρχή του άξονα κίνησης;
ii) Ποιο κινητό κινήθηκε μόνο προς τα δεξιά;
iii) Ποιο κινητό άλλαξε φορά κίνησης τη χρονική στιγμή $t = 2$sec, ποιο τη χρονική στιγμή $t = 4$sec και ποιο τη χρονική στιγμή $t = 5$sec;
iv) Ποιο κινητό κινήθηκε προς τα αριστερά σε όλο το χρονικό διάστημα από 0sec έως 4sec;
v) Ποιο κινητό τερμάτισε πιο κοντά στην αρχή του άξονα κίνησης;
vi) Ποιο κινητό διάνυσε το μεγαλύτερο διάστημα;
Απάντηση: i) το Β. ii) το Γ. iii) μέχρι το 2 κινείται προς τα αριστερά οπότε, για $t = 2$, αλλάζει το Β. Ομοίως για $t = 4$ το Α και $t = 5$ το Β. iv) το Α. v) το Β. vi) το Α.

Μ8. Εφαρμόζουν την έννοια της παραγώγου, για να υπολογίσουν την κλίση και την εξίσωση της εφαπτομένης σε σημείο καμπύλης $y = f(x)$

Ενδεικτικά ερωτήματα-δραστηριότητες

1. Για τις συναρτήσεις του πίνακα 1 να υπολογισθούν όπου ορίζονται η κλίση και η εξίσωση της εφαπτομένης στο $x_0 = 0$.

Μ9. Επιλύουν προβλήματα ρυθμού μεταβολής.

Ενδεικτικά ερωτήματα-δραστηριότητες

1. Όταν δίνονται οι συναρτήσεις κόστους και εσόδων για x μονάδες προϊόντος και ζητείται ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους για $x = \alpha$ μονάδες προϊόντος ($\alpha \in \mathbb{N}$).

Μ10. Εφαρμόζουν τους αλγεβρικούς κανόνες παραγώγισης αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου δύο συναρτήσεων καθώς και τις σύνθετης συνάρτησης $c(x) = f(g(x))$ **. Αποδεικνύουν παραγώγους των συναρτήσεων με τύπους** $y = c, c \in \mathbb{R}$ **,** $y = x, y = x^2, c = \sqrt{x}$ **και αξιοποιούν τους βασικούς τύπους παραγώγων των συναρτήσεων με τύπους** $y = \eta\mu x,\ y = \sigma\upsilon\nu x,\ y = e^x,\ y = \ln x$ **για την εύρεση των παραγώγων συναρτήσεων με περισσότερο πολύπλοκους τύπους.**

Ενδεικτικά ερωτήματα-δραστηριότητες

Βλέπε Πρόγραμμα Σπουδών:

Στη διεύθυνση:
http://webspace.ship.edu/msrenault/geogebracalculus/derivative_elementary_functions.html οι μαθητές μπορούν να εμπλακούν διαδραστικά με τον υπολογισμό των παραγώγων των βασικών συναρτήσεων

Μ11. Μοντελοποιούν πραγματικές καταστάσεις, χρησιμοποιώντας τις παραγώγους σε ρεαλιστικά προβλήματα. (αν η συνάρτηση η οποία περιγράφει το πρόβλημα παίρνει διακριτές τιμές, ορίζουμε τη συνάρτηση σε κατάλληλο διάστημα).

Ενδεικτικά ερωτήματα-δραστηριότητες

1. Δεξαμενή πετρελαίου σχήματος ορθού κυλίνδρου διαμέτρου δύο μέτρων, αδειάζει με σταθερό ρυθμό μείωσης του ύψους της στάθμης του πετρελαίου 2 εκατοστά ανά ώρα. Πόσο γρήγορα ελαττώνεται η ποσότητα του πετρελαίου;

   Υπόδειξη:

   Η ακτίνα βάσης της δεξαμενής είναι $R = 1m = 10dm$. Το ύψος της στάθμης του πετρελαίου ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό 2 εκατοστά την ώρα. Άρα, για τη συνάρτηση του ύψους του πετρελαίου $\upsilon(t)$ ισχύει $\upsilon'(t) = -2cm/h = -0,2dm/h$, για κάθε χρονική στιγμή. Από τον τύπο $V(t) = \pi R^2 \upsilon(t)$ του όγκου του πετρελαίου του κυλίνδρου, προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του πετρελαίου κάθε χρονική στιγμή t είναι:

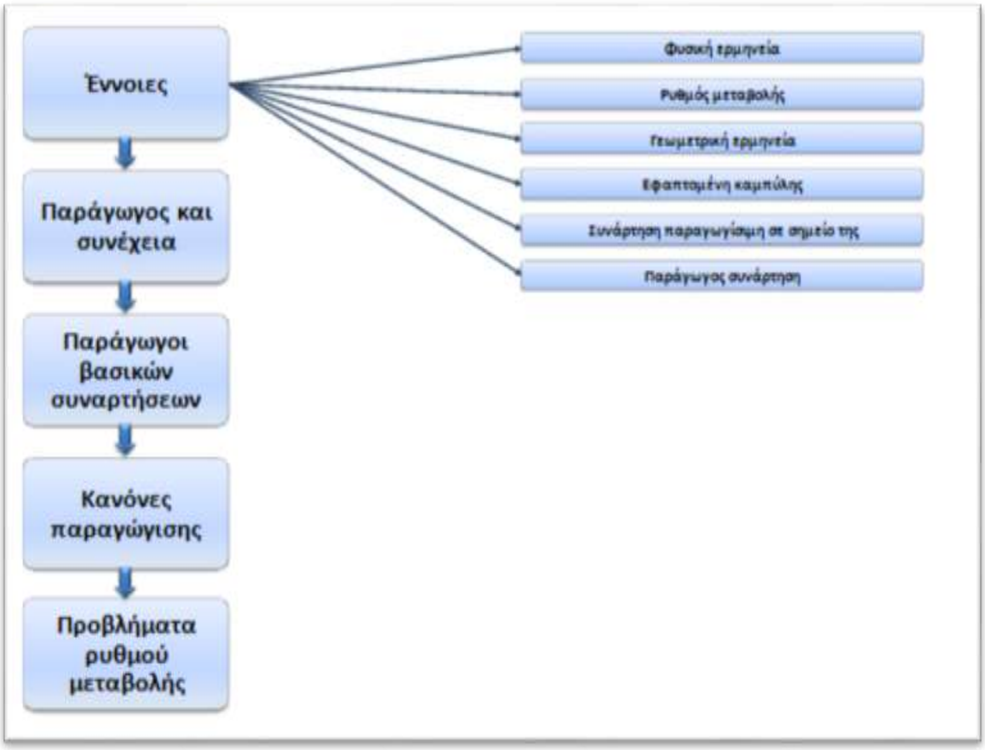
   $V'(t) = \pi R^2 \upsilon'(t) = -0,2\pi(10)^2 = -20\pi = -62,83$ (σε lit/ h)

   , περίπου 17cm^3/sec.

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Μετά και την εξειδίκευση των στόχων με την παρουσίαση των μαθησιακών αποτελεσμάτων και κάτω από την προϋπόθεση ότι κάθε διδασκαλία είναι μοναδική εξαρτώμενη από το δυναμικό της τάξης, ακολουθούν προτεινόμενες διδακτικές προσεγγίσεις υλοποίησης προτεινόμενων, και πάλι, δραστηριοτήτων.

Αρχικά, προτείνεται στο διδάσκοντα, επειδή οι ενότητες του κεφαλαίου δεν είναι ασύνδετες μεταξύ τους και θέτουν περιορισμούς για τη ροή της διδασκαλίας, να έχει υπόψη ένα γενικό πλάνο της εξέλιξης της διδασκαλίας του κεφαλαίου. Συγκεκριμένα, για το παρόν κεφάλαιο προτείνεται το κάτωθι πλάνο:



Σχήμα 1

Ακολουθούν σειριακά, σύμφωνα με το πλάνο, προτεινόμενες δραστηριότητες και οι αντίστοιχες προτεινόμενες διδακτικές προσεγγίσεις. Τα προτεινόμενα οριοθετούν μια γενική εικόνα και δεν αποκλείουν, αντίθετα· ενισχύουν άλλες δραστηριότητες οι οποίες, βέβαια, ακολουθούν το πνεύμα του αναλυτικού προγράμματος και είναι προσαρμοσμένες στις εκάστοτε διαφορετικές ανάγκες των μαθητών της τάξης του εκπαιδευτικού.

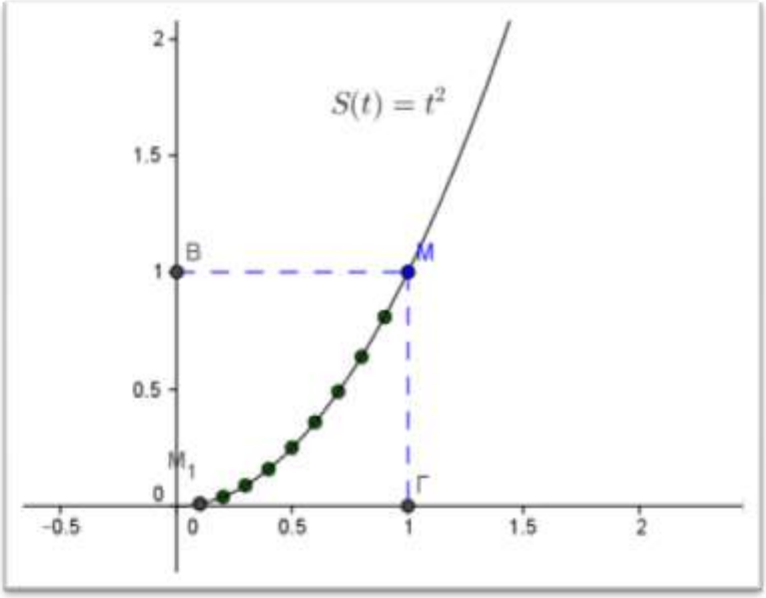
Ενότητα I. Ο εκπαιδευτικός προτείνεται ξεκινήσει τη διδασκαλία με ένα πρόβλημα που σχετίζεται με την ταχύτητα.

<u>Προτεινόμενη Δραστηριότητα 1</u>

Σε εργοστάσιο παραγωγής ηλεκτρικού αυτοκινήτου, οι κατασκευαστές ενδιαφέρθηκαν να υπολογίσουν την ταχύτητα που αναπτύσσει συγκεκριμένο μοντέλο ένα δευτερόλεπτο ακριβώς μετά την εκκίνησή του. Τα φυσικά πειράματα έδειξαν ότι η συνάρτηση θέσης του αυτοκινήτου τα πρώτα 5'' (sec) δίνεται από τον τύπο $S(t) = t^2$ με $S(t)$ να δηλώνει την θέση του αυτοκινήτου σε οριζόντιο άξονα σε μέτρα(m) t δευτερόλεπτα μετά την εκκίνησή του. Κάποιοι, άμεσα και κατηγορηματικά, αποφάνθηκαν ότι είναι ακριβώς 2m/sec εφόσον η συνάρτηση θέσης δίνεται από τον τύπο $S(t) = t^2$. Άλλοι, άλλοι διατήρησαν τις αμφιβολίες τους για την βεβαιότητα των πρώτων και άρχισαν τους υπολογισμούς τους:

Με τη βοήθεια του τύπου $S(t) = t^2$ συμπλήρωσαν τον κάτωθι πίνακα:

Χρόνος σε sec	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**	**1**
Απόσταση σε m	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1



Υπολόγισαν τη μέση ταχύτητα για τα χρονικά διαστήματα από 0.1 έως 1, 0.2 έως 1, ..., 0.9 έως 1, χρησιμοποιώντας τον τύπο $\frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}$ και ειδικότερα τον τύπο $\frac{S(1+h)-S(1)}{h}$ με το h να παριστά το χρονικό διάστημα όπως στον πίνακα. Για τη μέση ταχύτητα προέκυψε ο πίνακας:

Χρονικό Διάστημα h (sec)	**0,1 - 1 =0,9**	**0,2 - 1 =0,8**	**0,3 - 1 =0,7**	**0,4 - 1 =0,6**	**0,5 - 1 =0,5**	**0,6 - 1 =0,4**	**0,7 - 1 =03**	**0,8 - 1 =0,2**	**0,9 - 1 =0,1**
Μέση Ταχύτητα (m/sec)	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90

Ποιά είναι η δική σας θέση; Τεκμηριώστε την απάντησή σας.

<u>Προτεινόμενη Διδακτική Προσέγγιση</u>

Οι μαθητές γνωρίζουν να υπολογίζουν τη μέση ταχύτητα και αντιλαμβάνονται την ανωτέρω διαδικασία, εκείνο όμως που προτείνεται στον εκπαιδευτικό είναι να καθοδηγήσει, αν απαιτηθεί, τους μαθητές στο **σκεπτικό επιλογής των συγκεκριμένων χρονικών διαστημάτων** από τους εργαζόμενους. Η μέση ταχύτητα λαμβάνεται για όλο και μικρότερο χρονικό διάστημα πλησιάζοντας κάθε φορά την χρονική στιγμή $t = 1$, ώστε το πλάτος του χρονικού διαστήματος να πλησιάζει στο μηδέν.

Πράγματι, η στιγμιαία ταχύτητα είναι μία θεωρητική έννοια που δεν αντιστοιχεί ακριβώς σε κάποια παρατηρήσιμη ποσότητα, εκείνο που μπορούμε να μετρήσουμε είναι μία μέση ταχύτητα σ' ένα "πολύ μικρό" χρονικό διάστημα και η μέτρηση αυτή δεν μπορεί να δώσει ακριβές αποτέλεσμα, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι είναι ανεπαρκής αφού οι μετρήσεις δεν μπορούν ποτέ να είναι ακριβείς (Spivak, 2007, σ. 124).

Ως δεύτερο βήμα προτείνεται να δοθεί στους μαθητές πίνακας για τη μέση ταχύτητα σε **μικρότερα χρονικά διαστήματα καθώς πλησιάζουμε την χρονική στιγμή $\boldsymbol{t = 1}$** από αριστερά, ώστε να επιβεβαιώσουν τις παρατηρήσεις τους. Εύκολα, στη συνέχεια μπορούν να οδηγηθούν στον **ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας ως όριο του πηλίκου διαφορών** με το χρονικό διάστημα με σταθερή τη μία χρονική στιγμή, αυτής στην οποία αναζητούμε την ταχύτητα, να πλησιάζει την τιμή 0. Ακολουθούν οι πίνακες για χρονικό διάστημα κοντά στη στιγμή $t = 1$ πλησιάζοντας από αριστερά και δεξιά αντίστοιχα:

Χρονικό διάστημα	**0,10000**	**0,01000**	**0,00100**	**0,00010**	**0,00001**
Μέση ταχύτητα	1,90000	1,99000	1,99900	1,99990	1,99999

Χρονικό διάστημα	**-0,00001**	**-0,00010**	**-0,00100**	**-0,01000**	**-0,10000**
Μέση ταχύτητα	2,00001	2,00010	2,00100	2,01000	2,10000

Εδώ μπορεί να αναφερθεί ότι η στιγμιαία ταχύτητα $\upsilon(t_0)$ ενός κινητού δίνεται από τον τύπο:

$$\upsilon(t_0) = S'(t_0) = \lim_{h\to 0}\frac{S(t_0+h)-S(t_0)}{h} = \lim_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$$

λέγεται και "**ρυθμός μεταβολής**", έννοια η οποία μπορεί να εφαρμοσθεί σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση όπου κάποιο φυσικό μέγεθος μεταβάλλεται με το χρόνο. Για παράδειγμα, ως "ρυθμό μεταβολής της μάζας" ενός αντικειμένου που μεταβάλλεται με το χρόνο, θεωρούμε το όριο $\lim_{h\to 0}\frac{m(t+h)-m(t)}{h}$, όπου $m(t)$ είναι η μάζα τη χρονική στιγμή t. Στο σημείο αυτό μπορούν να ερωτηθούν οι μαθητές τι σημαίνει ρυθμός μεταβολής της στιγμιαίας ταχύτητας $\upsilon(\mathrm{t})$. Η όλη συζήτηση προτείνεται να γενικευθεί για να οδηγήσει στον ορισμό του **ρυθμού μεταβολής ενός μεγέθους σε συγκεκριμένη τιμή:**

Αν δύο μεγέθη x, y συνδέονται με τη συνάρτηση f, έτσι ώστε $y = f(x)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η παράγωγος $f'(x_0)$ εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του μεγέθους y ως προς x, για τη συγκεκριμένη τιμή $x = x_0$.

<u>**Προτεινόμενη δραστηριότητα 2**</u>

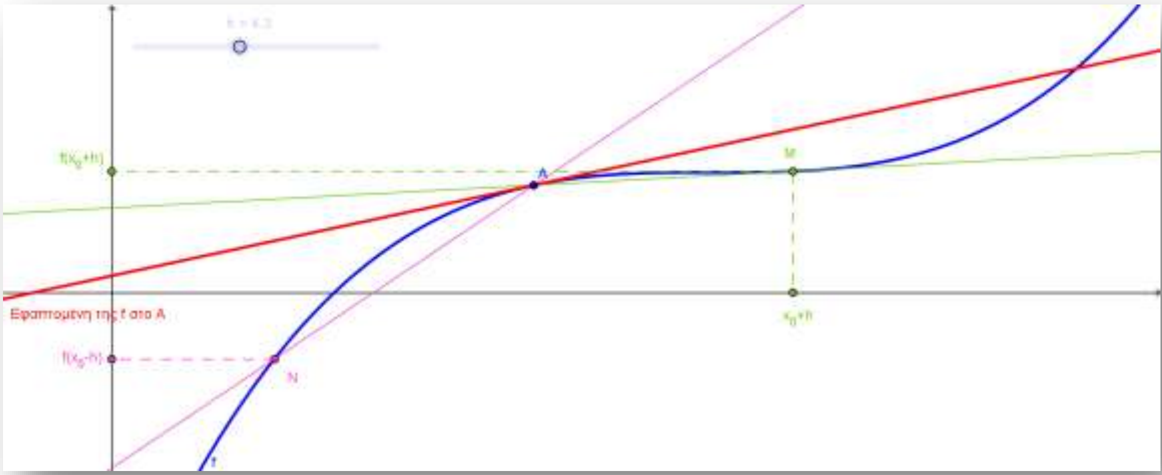
Δραστηριότητα 7 στην παράγραφο των αναμενόμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων.

Ενότητα ΙΙ. Ως δεύτερο βήμα πριν την εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης σε σημείου ή της παραγώγου συνάρτησης, προτείνεται η έννοια της εφαπτομένης καμπύλης σε ένα σημείο της, μια έννοια που θα απασχολήσει τους μαθητές στα επόμενα κεφάλαια. Μπορεί να προηγηθεί μια εισαγωγή υπό μορφή ιστορικής ανασκόπησης, για να αναδειχθεί η ανάγκη που ώθησε στον ορισμό της νέας έννοιας (βλέπε εισαγωγή).

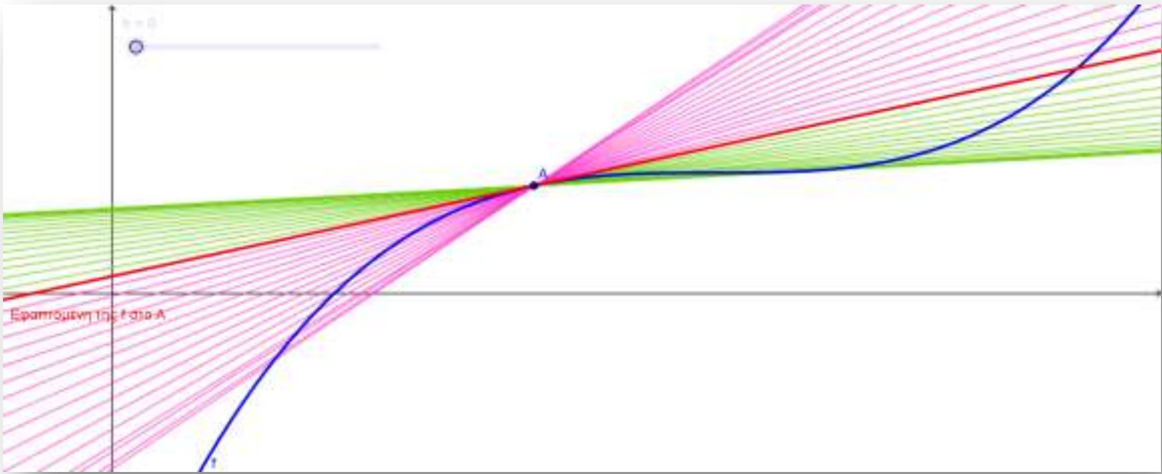
Η επόμενη δραστηριότητα προτείνεται για να αποδοθεί η γεωμετρική ερμηνεία του ρυθμού μεταβολής και οδηγεί αβίαστα στην έννοια της εφαπτομένης καμπύλης.

<u>Προτεινόμενη Δραστηριότητα</u>

Στο σχήμα αποτυπώνεται τμήμα γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f και τα σημεία της με συντεταγμένες: $\mathrm{A}(x_0, f(x_0))$, $\mathrm{M}(x_0+\mathrm{h}, f(x_0+\mathrm{h}))$, $\mathrm{N}(x_0-\mathrm{h}, f(x_0-\mathrm{h}))$.



Καθώς το M κινείται προς το A σχεδιάστε τις ευθείες που ορίζονται από το A και την εκάστοτε θέση του σημείου M. Ομοίως, Καθώς το N κινείται προς το A σχεδιάστε τις ευθείες που ορίζονται από το A και την εκάστοτε θέση του σημείου N. Παρατηρείστε τι συμβαίνει για τις "οριακές" θέσεις των ευθειών AM και AN (κάτωθι σχήμα).



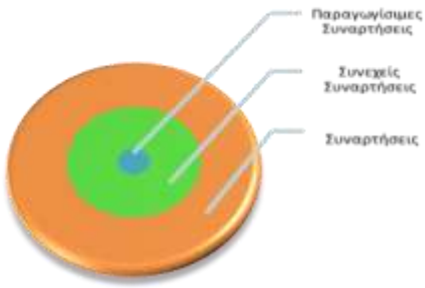
Ενδείκνυται η χρήση λογισμικού.

Ενότητα ΙΙΙ. Στο σημείο αυτό προτείνεται να δοθεί ο ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο, και της κατακόρυφης εφαπτόμενης ως και οι περιπτώσεις για τις οποίες δεν ορίζεται η εφαπτομένη καμπύλης σε σημείο της. Προτείνεται να δοθούν πολλά παραδείγματα γραφικών παραστάσεων για να οπτικοποιήσουν τις έννοιες οι μαθητές και να διερευνηθούν όλες οι δυνατές περιπτώσεις. Ενδείκνυται η χρήση λογισμικού.

Τέλος, προτείνεται να δοθεί εδώ και ο ορισμός της παραγώγου με το συμβολισμό της, ως και της νιοστής παραγώγου συνάρτησης, ώστε, να δικαιολογηθεί και το όνομα της παραγώγου· εφόσον, με την παραγώγιση της f "παράγεται" μια νέα συνάρτηση, η f', και ούτω καθεξής (Apostol, 1962, σ. 145).

Επίσης προτείνεται, να γίνουν μεν υπολογισμοί παραγώγων με βάση τον ορισμό, αλλά απλών, γιατί σε επόμενες ενότητες οι μαθητές θα διδαχθούν τους κανόνες παραγώγισης και τις παραγώγους βασικών συναρτήσεων. Βλέπε και τις δραστηριότητες στα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα Μ1, Μ4, Μ5, Μ6 και Μ8.

Ενότητα IV. Ορισμένες συναρτήσεις, ένας αρκετά περιορισμένος αριθμός από το σύνολο των συναρτήσεων, παρουσιάζουν το χαρακτηριστικό της συνέχειας. Είναι αναμενόμενο να διακρίνουμε στις συνεχείς συναρτήσεις κάποιες επιπλέον ιδιότητες σε αντίθεση με τις μη συνεχείς. Πράγματι, το σύνολο των θεωρημάτων που έπονται σε επόμενα κεφάλαια το αναδεικνύουν.



Εικόνα 5: Σχέση παραγώγου - συνέχειας

Όμως, στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων, μπορούμε να διακρίνουμε ένα γνήσιο υποσύνολο του με ένα επιπλέον χαρακτηριστικό, αυτό της παραγωγισιμότητας. Και όπως και πάλι αναμένεται, και έχει καταδειχθεί, για τις συναρτήσεις με τα δύο επιπλέον χαρακτηριστικά, της συνέχειας και της παραγωγισιμότητας, ισχύουν επιπλέον ενδιαφέρουσες ιδιότητες με τις οποίες θα ασχοληθούμε σε επόμενα κεφάλαια. Επιβάλλεται, συνεπώς, να μπορούν να αναγνωρίζουν οι μαθητές τα χαρακτηριστικά όχι μόνο της συνέχειας αλλά και της παραγωγισιμότητας σε μία συνάρτηση. Η αναγκαία συνθήκη ύπαρξης της συνέχειας για την παραγωγισιμότητα, μπορεί να λειτουργήσει βοηθητικά στην επίλυση δύσκολων περιπτώσεων αναζήτησης ύπαρξης παραγώγου, και θα πρέπει να τονισθεί η σημασία της· όπως, επίσης, και το γεγονός ότι δεν αποτελεί ικανή συνθήκη για την παραγωγισιμότητα.

Προτεινόμενες δραστηριότητες

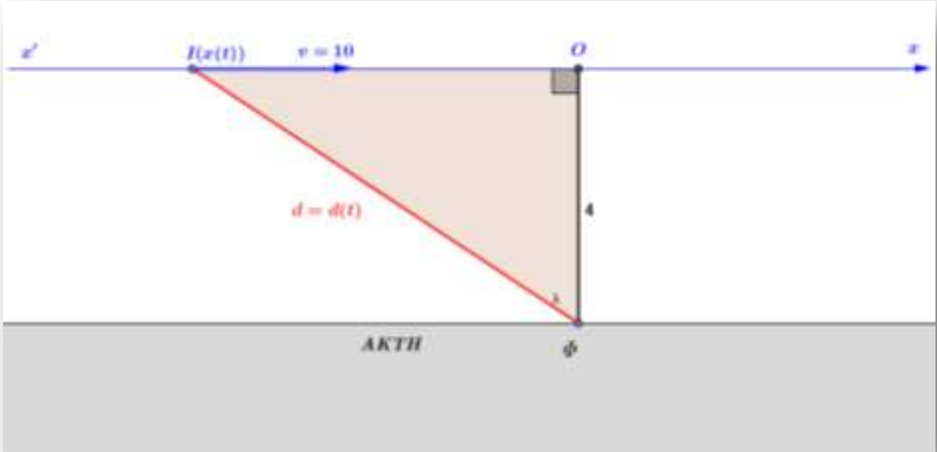
1. Για τις συναρτήσεις του πίνακα 1 να αποφανθούν ποιες είναι συνεχείς και ποιες παραγωγίσιμες, αντιπαραβάλλοντας τις γραφικές τους παραστάσεις, και στη συνέχεια να επιβεβαιώσουν τα συμπεράσματά τους με υπολογισμούς.

Ενότητα V. Η άλγεβρα των παραγώγων, και η εύρεση των παραγώγων των βασικών συναρτήσεων, πρέπει να παρουσιαστούν ως οδηγοί για την εύρεση των παραγώγων σύνθετων τύπων συναρτήσεων. Επίσης, να παραλληλισθεί η γραμμικότητα των παραγώγων με αυτήν των ορίων, και να διαλευκανθεί ότι κάθε τύπος των παραγώγων γράφεται είτε ως ισότητα μεταξύ συναρτήσεων (π.χ. $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$), είτε ως ισότητα μεταξύ αριθμών (π.χ. $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$). Με εφαρμογή των πράξεων των παραγώγων βρίσκουμε παραγώγους σύνθετων συναρτήσεων χωρίς να καταφεύγουμε στον ορισμό της παραγώγου. Αλλά τί γίνεται με τις συναρτήσεις των οποίων ο τύπος προκύπτει από σύνθεση συναρτήσεων; Για να μπορούμε να υπολογίζουμε παραγώγους σύνθεσης συναρτήσεων, αυξάνοντας τον αριθμό των συναρτήσεων των οποίων μπορούμε να βρούμε την παράγωγο χωρίς να καταφεύγουμε στον ορισμό, παρουσιάζουμε τον κανόνα της αλυσίδας ή της αλληλουχίας (παράγωγος σύνθεσης συναρτήσεων).

<u>**Προτεινόμενες δραστηριότητες**</u>

1. Δραστηριότητα Μ10 στα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα.
2. Ένα ιστιοφόρο πλέει παράλληλα προς ευθύγραμμη ακτή με σταθερή ταχύτητα. Η ταχύτητά του είναι 10μίλια/ώρα, η απόστασή του από την ευθύγραμμη ακτή 4μίλια. Στην ακτή βρίσκεται ένας φάρος. Όταν το ιστιοφόρο θα απέχει 5μίλια από το φάρο ποιά θα είναι η ταχύτητα με την οποία θα πλησιάζει το φάρο;

   <u>Υπόδειξη</u>: Έστω xx' ο άξονας κίνησης του ιστιοφόρου I, του οποίου άξονα παίρνουμε ως αρχή O το ίχνος της καθέτου από το φάρο Φ στον xx' και ως θετική φορά τη φορά κίνησης του ιστιοφόρου (σχήμα).



Αν $x = x(t)$ είναι η τετμημένη της θέσης του ιστιοφόρου I και $d = d(t)$ είναι απόσταση του από το φάρο Φ τη χρονική στιγμή t, τότε θα ισχύει:

$(I\Phi)^2 = (OI)^2 + (O\Phi)^2$ άρα $d^2(t) = x^2(t) + 4^2$ οπότε $d(t) = \sqrt{x^2(t)+4^2}$

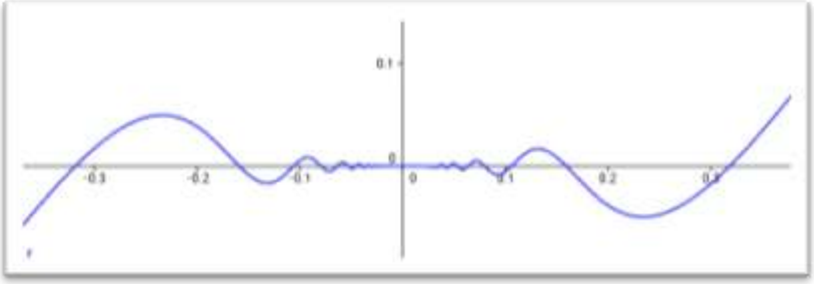
Κατά συνέπεια, $d'(t) = \dfrac{x(t)\cdot x'(t)}{\sqrt{x^2(t)+4^2}}$. Έτσι κατά τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το ιστιοφόρο θα απέχει από το φάρο 5 μίλια, θα ισχύει $(I\Phi) = 5$, οπότε, λόγω του πυθαγορείου θεωρήματος, θα είναι $(OI) = 3$, και άρα θα έχουμε $x(t_0) = -3$, αφού το ιστιοφόρο πλησιάζει τον φάρο ($x(t_0) < 0$). Επομένως, τη χρονική στιγμή t_0 το ιστιοφόρο θα πλησιάζει τον φάρο με ταχύτητα:

$$d'(t_0) = \frac{x(t_0)\cdot x'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+4^2}} = \frac{-3\cdot 10}{5} = -6 \text{ (σε μίλια/ώρα)}$$

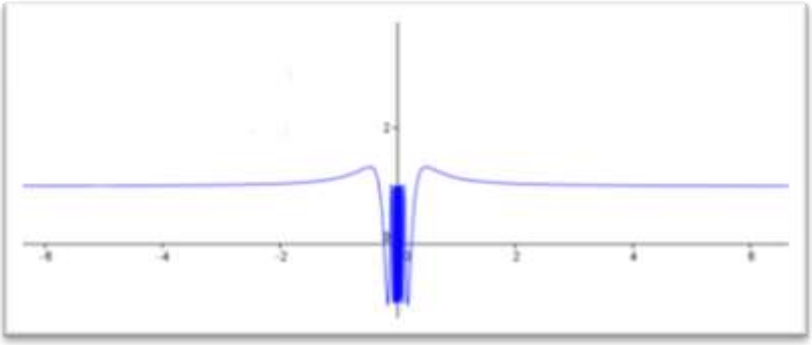
Ενότητα VI. Το βήμα αυτό συνοψίζει όλα τα προηγούμενα. Εδώ πρέπει να αναδειχθεί η σημασία της παραγώγου στην επίλυση προβλημάτων, βλέπε και δραστηριότητα Μ11 στα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα.

- η παράγωγος σε σημείο συνάρτησης είναι «τοπικό» και όχι «ολικό» χαρακτηριστικό: "αν $f(x) = g(x)$ για κάθε x σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το α, τότε $f'(\alpha) = g'(\alpha)$, δηλαδή για τον υπολογισμό της $f'(\alpha)$ μπορούμε να περιοριστούμε για εκείνα τα x που ανήκουν σε διάστημα της μορφής $(\alpha-\delta, \alpha+\delta)$ με, $\delta > 0$ οσοδήποτε μικρό επιθυμούμε.
- Το όριο συνάρτησης του $x \to x_0$ μπορεί να ορίζεται χωρίς να απαιτεί το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ενώ, η παράγωγος, όπως και η συνέχεια, ορίζεται σε σημεία του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης.

- Δεν ισχύει το αντίστροφο της πρότασης "Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό". Με τη χρήση ενός λογισμικού θα μπορούν να διαπιστώσουν ότι η $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0 \quad\quad, x=0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $x_0=0$



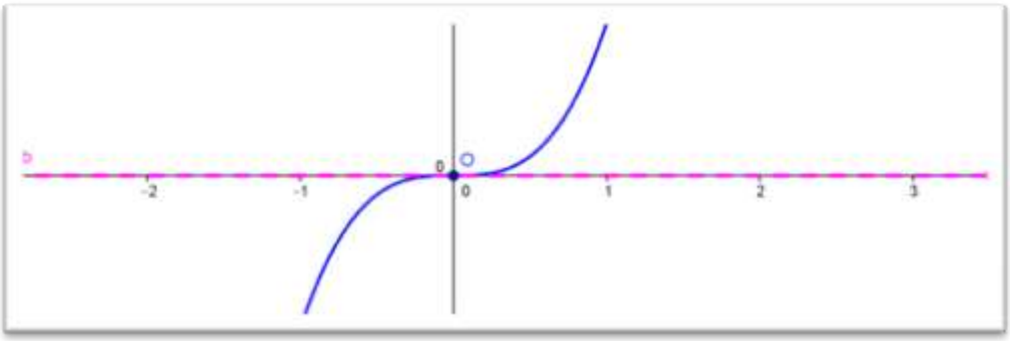
αλλά η παράγωγός της $f'(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$, δεν έχει όριο όταν το x τείνει στο 0:



- Δυσκολίες που συχνά συναντούν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας

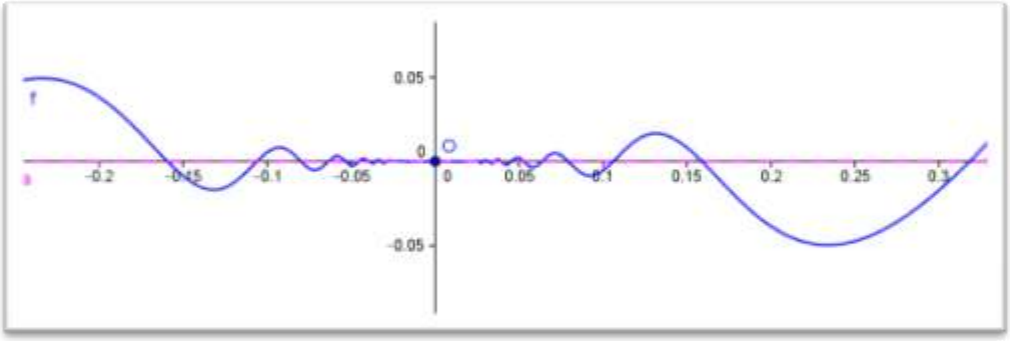
  Οι μαθητές συχνά αντιμετωπίσουν δυσκολίες στο να κατανοήσουν ότι

  - Η σύνδεση του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με το παράγωγο αριθμό $f'(x_0)$.
  - Η εφαπτομένη καμπύλης τέμνει την καμπύλη ή εφάπτεται της καμπύλης και σε άλλα σημεία της.
  - Η συνάρτηση με τύπο $y=ax+\beta$ με $\alpha,\beta\in$ ℝ (ευθεία), σε κάθε σημείο της έχει εφαπτομένη την ίδια την ευθεία.
  - Η εφαπτόμενη σε σημείο της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης μπορεί να διαπερνά τη γραφική παράσταση στο σημείο επαφής, για παράδειγμα η εφαπτομένη της $f(x)=x^3$ στο $x_0=0$.

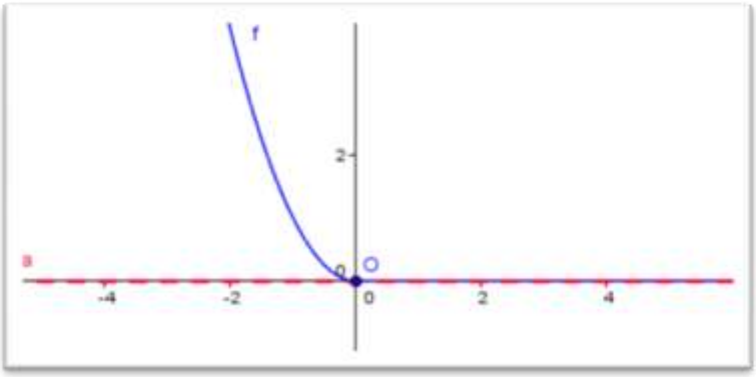


  - Η εφαπτόμενη σε σημείο της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης μπορεί να διαπερνά τη γραφική παράσταση σε άπειρα σημεία. Για παράδειγμα, η εφαπτομένη της

$f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0 \quad\quad , x_0=0 \end{cases}$ στο $x_0=0$ είναι η $y=0$, η οποία διαπερνά την γραφική παράσταση της f σε άπειρα σημεία.

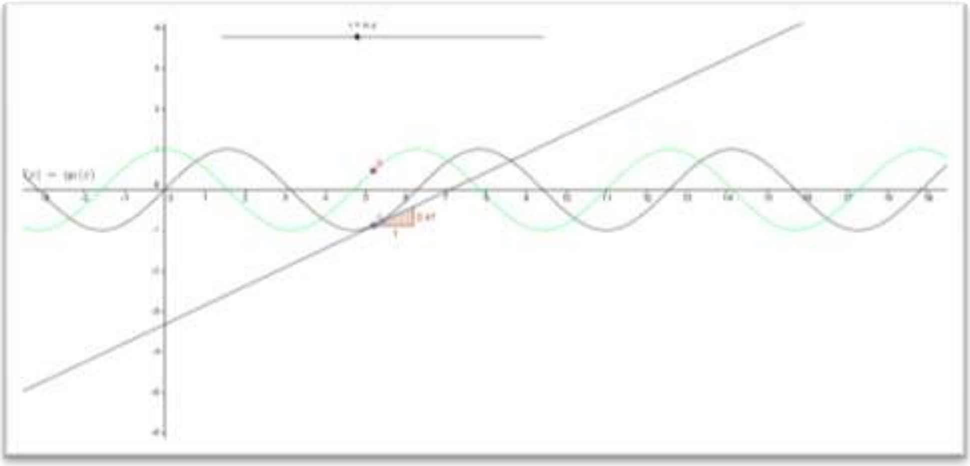


- Τμήμα της εφαπτομένης καμπύλης σε σημείο της μπορεί να συμπίπτει με τμήμα της καμπύλης, π.χ. η εφαπτομένη της $f(x)=\begin{cases} x^2, x\leq 0 \\ 0 \ , x_0>0 \end{cases}$ στο $x_0=0$.



Μπορούν τα ψηφιακά μέσα να υποστηρίξουν τη διδασκαλία της παραγώγου;

Με χρήση λογισμικού (π.χ. Geogebra) σχεδιάζουμε την παράγωγο f' δοθείσας συνάρτησης f. Η γραφική συνάρτηση της παραγώγου f' προκύπτει από το ίχνος του σημείου $(x_0, f(x_0))$ της f με x_0 σημείο του πεδίου ορισμού της f. Με τον τρόπο αυτό γίνεται άμεσα αντιληπτό στους μαθητές ότι $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$, και εύκολα αλλάζουν τον τύπο της συνάρτησης επιβεβαιώνοντας ή διαψεύδοντας κάθε φορά τις υποθέσεις τους.



Επίσης το λογισμικό προσφέρεται κατά την διδασκαλία του ορισμού της εφαπτομένης καμπύλης, εφόσον υπάρχει δυνατότητα να βλέπουν τις δυνατές θέσεις της ευθείας έως την οριακή θέση, εξερευνώντας πλήθος περιπτώσεων άμεσα. Όπως όμως έχει επισημανθεί ανωτέρω, είναι πολλές οι περιπτώσεις πέραν αυτών στις οποίες ενδείκνυται η χρήση λογισμικού. Γενικά, η χρήση λογισμικού συνεισφέρει σημαντικά στην εμπέδωση εννοιών μέσω της δυνατότητας οπτικοποίησης πολλαπλών αναπαραστάσεων και της οικονομίας χρόνου, αφού η χρήση λογισμικού προσφέρει άμεσα τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και, βέβαια, υπό την προϋπόθεση, ότι τα σχετικά αρχεία έχουν ήδη ετοιμασθεί ή οι μαθητές είναι απόλυτα εξοικειωμένοι με τις σχετικές κάθε φορές δυνατότητες του εργαλείου.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Apostol, T. M. (1962). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*. Αθήνα: Ατλαντίς.

Bell, E. T. (2000). *Οι Μαθηματικοί*. (Μ. Μαγειρόπουλος, μετάφραση). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.. (Πρωτότυπη έκδοση, 1971).

Heath, T. L. (2001). *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών.* Τόμος ΙΙ. Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.. (Πρωτότυπη έκδοση, 1921).

Clawson, C. C. (2008). *Η Μαγεία των Μαθηματικών: Αποκαλύπτοντας τα μυστικά των αριθμών*. (Π. Παπαχρήστου, μετάφραση).Εκδόσεις: ΚΕΔΡΟΣ. (Πρωτότυπη έκδοση, 1999).

Spivak, M. (2007). Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός. (Α. Γιαννόπουλος, μετάφραση). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. (Πρωτότυπη έκδοση, 1980).

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ. (2014). *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ Τάξης Γενικού Λυκείου*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Εισαγωγή

Οι μαθηματικοί του 16ου αι. εξελάμβαναν τον άρρητο λόγο ως αριθμό και τον αντιμετώπιζαν γεωμετρικά (Boyger, 1959) με αποτέλεσμα να επικρατεί σύγχυση στη κατανόηση της έννοιας της συνέχειας αφού η συνέχεια της ευθείας των πραγματικών συνδέεται άμεσα με τη συνέχεια της συνάρτησης (Χρυσανθόπουλος, 2009).

Στα τέλη του 18ου αι. οι ζυμώσεις μέχρι τότε στο χώρο της ανάλυσης είχαν πλέον αναδείξει ότι η διαίσθηση μπορεί πολλές φορές να επιλύει προβλήματα, αλλά συνήθως δημιουργεί σύγχυση. Ο Bolzano (1781-1848), υπέρμαχος της μαθηματικής αυστηρότητας και θεμελίωσης, στην προσπάθειά του να αποκόψει τις έννοιες του χρόνου και της κίνησης από τον ορισμό μαθηματικών εννοιών οι οποίες οδηγούσαν σε διαισθητική και ενορατική αντίληψη του χώρου (Boyger, 1959), έδωσε το δικό του ορισμό για τις συνεχείς συναρτήσεις το 1817: "... *η έκφραση ότι μια συνάρτηση* $f(x)$ *μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο της συνέχειας για όλες τις τιμές του* x *μέσα ή έξω από κάποια δοσμένα όρια, δε σημαίνει τίποτα άλλο παρά ότι: αν το* x *είναι κάποια τέτοια τιμή, η διαφορά* $f(x+\omega)-f(x)$ *μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε δοσμένη ποσότητα, με την προϋπόθεση να πάρουμε το* ω *οσοδήποτε μικρό θέλουμε*" (Russ, 1980). Επιπλέον απέδειξε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών για συνεχείς συναρτήσεις.

Bolzano, πηγή: Wikipedia

Στο συνονθύλευμα επαγωγικής συλλογιστικής, διαίσθησης, εικασιών και εν μέρει μυστικισμού που επικρατούσε στο χώρο της ανάλυσης ακόμη και τον 18ο αι. (Apostol, 1962), ο Cauchy (1789-1857) έδωσε τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης ορισμένης σε διάστημα το 1821. Ο Cauchy δεν αναφέρονταν σε απειροελάχιστα μικρές σταθερές ποσότητες, αλλά απέδιδε την έννοια της συνέχειας με βάση το όριο και όχι το αντίστροφο, όπως και ο Bolzano (Boyger, 1959). Ο Weierstrass (1815-1897), απέδωσε, στη συνέχεια, τον ορισμό με μεγαλύτερη σαφήνεια και ακρίβεια. ενώ η κατασκευή των πραγματικών αριθμών εδραίωσε την έννοια του συνεχούς και του απείρου (Χρυσανθόπουλος, 2009).

Αξιοσημείωτο, ότι ο Fermat (1601-1665) προέβλεψε σε κάποιο βαθμό, την εποχή που επικρατούσε η διαίσθηση στα μαθηματικά, την εξέλιξη του λογισμού , ανεκτίμητη προσφορά στον Νεύτωνα και Leibniz αργότερα, και ανέπτυξε μια μέθοδο για τον προσδιορισμό των τοπικών μεγίστων και ελαχίστων και των εφαπτομένων καμπυλών, ουσιαστικά ισοδύναμη με την παραγωγισιμότητα.

Τι περιέχει το κεφάλαιο Μελέτη Συνάρτησης και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Η ύλη των δύο προηγούμενων κεφαλαίων ουσιαστικά εξυπηρετεί τις διαδικασίες για τη μελέτη συνάρτησης. Τί εννοούμε όμως όταν μιλάμε για μελέτη συνάρτησης; Πρώτιστα, επειδή η συνάρτηση καθορίζεται πλήρως όταν ορίζεται πλην του τύπου της ταυτόχρονα και το πεδίο ορισμού της, η μελέτη συνάρτησης συνδέεται άμεσα με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης αναζητούμε τα χαρακτηριστικά της. Αναλυτικότερα, για τη μελέτη συνάρτησης μας ενδιαφέρουν τα διαστήματα μονοτονίας, τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες, το πρόσημο των τιμών της, το σύνολο τιμών της, αν έχει ασύμπτωτες και τα ακρότατα ολικά ή τοπικά, αν υπάρχουν. Απαύγασμα όλων αυτών είναι η σχεδίαση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

Το κεφάλαιο εστιάζεται σε θεωρήματα που υποδεικνύουν διαδικασίες που οδηγούν στη μελέτη συνάρτησης. Ειδικότερα, προσφέρει νέους τρόπους για τη διαπίστωση της μονοτονίας μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης και των ακροτάτων της (τοπικών ή ολικών), πλέον των διαδικασιών εύρεσης αυτών άμεσα ή έμμεσα μέσω των ορισμών της μονοτονίας και των ακροτάτων μιας συνάρτησης αντίστοιχα. Επιπλέον προσφέρει τρόπο προσδιορισμού του συνόλου τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης και πέραν αυτών, στο κεφάλαιο αυτό αναδεικνύονται τρόποι ύπαρξης ριζών μιας εξίσωσης της μορφής $f(x)=0$, η οποία προκύπτει από συνεχή συνάρτηση f σε διάστημα. Οι ανωτέρω διαδικασίες για τη μονοτονία και τα ακρότατα, εφαρμόζονται σε παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε διάστημα, άρα και συνεχείς. Η εύρεση του συνόλου τιμών και η ύπαρξη ρίζας συνάρτησης αναφέρεται, όσον αφορά το παρόν κεφάλαιο, σε συνεχείς συναρτήσεις σε διάστημα. Άρα, για τη μελέτη συνάρτησης στο κεφάλαιο αυτό μας ενδιαφέρει πέραν της αναζήτησης του πεδίου ορισμού της και η διαπίστωση αν η δοθείσα προς μελέτη συνάρτηση διακατέχεται και σε ποια σημεία του πεδίου ορισμού της από τα χαρακτηριστικά της συνέχειας και παραγωγισιμότητας.

Ποιές είναι οι «σημαντικές ιδέες» που περιέχονται στο κεφάλαιο Μελέτη Συνάρτησης;

I. <u>Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο</u>

Η μελέτη συμπεριφοράς των σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων, και εξειδικεύοντας επί του προκειμένου, των συναρτήσεων που περιγράφουν σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων στοιχειοθετεί μια διαδικασία. Για να επιτύχουμε τις επιδιώξεις μας, τη μελέτη συναρτήσεων επί του προκειμένου, και εφόσον οι συναρτήσεις τις οποίες συναντούμε δεν είναι συνήθως βασικού τύπου, χρειαζόμαστε εργαλεία που να διευκολύνουν το έργο μας. Για παράδειγμα, η αναζήτηση της μονοτονίας μια συνάρτησης με τη βοήθεια του ορισμού δεν είναι πάντα εύκολη διαδικασία, ούτε η απάντηση στο ερώτημα αν υπάρχουν τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής για τις οποίες μηδενίζεται η τιμή της συνάρτησης.

Τα κριτήρια εύρεσης της μονοτονίας και ύπαρξης ακροτάτων τα οποία παρουσιάζονται σε αυτό το κεφάλαιο, συνθέτουν συνήθως ένα εύχρηστο εργαλείο και ίσως ιδανικό για περιπτώσεις των οποίων ο ορισμός οδηγεί σε επίπονους δρόμους. Ουσιαστικά, μπορούμε να εξαγάγουμε συμπεράσματα για τη μονοτονία και τα ακρότατα με τη βοήθεια των παραγώγων. Η «μεγάλη ιδέα» του κεφαλαίου συνίσταται στο πέρασμα από το πρόσημο του πηλίκου μεταβολής στο πρόσημο του ρυθμού μεταβολής ο οποίος μας οδηγεί στην διαπίστωση του είδους μονοτονίας. Επιπλέον, τα πορίσματα που εξάγουμε από τα θεωρήματα της συνέχειας, μας παρέχουν οδηγό εύρεσης του προσήμου των τιμών μιας συνάρτησης, αλλά και του συνόλου τιμών της, συνδεόμενα δε με την μονοτονία, και του πλήθους των ριζών μιας εξίσωσης. Ειδικότερα, το θεώρημα Bolzano, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εύρεση της λύσης μιας εξίσωσης με προσέγγιση.Εν γένει, το κεφάλαιο αυτό μας παρέχει τα κατάλληλα εργαλεία τα οποία καθιστούν τετριμμένη τη διαδικασία μελέτης μιας συνάρτησης.

Καταλήγοντας, στο κεφάλαιο αυτό αναδεικνύεται η σημασία της έννοιας της παραγώγου, η οποία βέβαια εμπερικλείει και την έννοια της συνέχειας. Συγκεκριμένα, η παράγωγος μας οδηγεί στη χάραξη της γραφικής παράστασης, μας σκιαγραφεί το σχήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

II. <u>Σημαντικά σημεία που πρέπει να εστιάσουμε</u>

Επειδή όχι μόνο φαινόμενα του φυσικού κόσμου, αλλά και του συναισθηματικού και γενικότερα η ζωή διακατέχονται από σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων, η μελέτη της συμπεριφοράς αυτών των σχέσεων αποτελεί ζητούμενο όλων των επιστημών και έχει πλήθος εφαρμογών. Επακόλουθα, η μελέτη συναρτήσεων συνδέεται άμεσα με το κοινωνικό-οικονομικό-πολιτιστικό περιβάλλον.

Η συνάρτηση

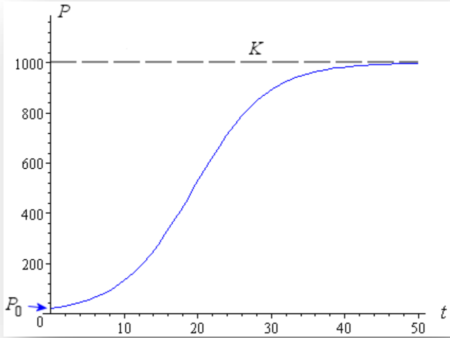
$$P(t) = \frac{kP_0}{rP_o + (k - rP_0)e^{k(t-t_0)}}$$

για

$k = 0,29, r = 2,695 \cdot 10^{12}, P_0 = 334 \cdot 10^7, t_0 = 1965$

, σύμφωνα με άρθρο του 1970 έδινε παγκόσμιο πληθυσμό P(2000)=5,96 δισεκατομμύρια κατοίκους ενώ η καταμέτρηση που έγινε το 2000 έδωσε περίπου 6 δισεκατομμύρια.

Πηγή: http://www.mathchall.com/forums/viewtopic.php?f=3&t=21



Από πλευράς, καθαρά, Μαθηματικών, στο κεφάλαιο αυτό αναδεικνύονται ιδιότητες των παραγώγων, δηλαδή αναδεικνύονται τα χαρακτηριστικά των παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και συγκεκριμένα, τα κριτήρια μονοτονίας και ύπαρξης τοπικών ακροτάτων. Τα σημαντικότερα, όμως, σημεία του κεφαλαίου συνθέτουν τα θεωρήματα που προκύπτουν από τη συνέχεια και παρουσιάζονται στο κεφάλαιο αυτό, όπως τα:

- Θεώρημα Bolzano: Η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f που ξεκινά κάτω από τον οριζόντιο άξονα και συνεχίζει πάνω από αυτόν, τέμνει τον άξονα αυτόν σε ένα τουλάχιστον σημείο. Με άλλα λόγια εκφράζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- Το Θεώρημα των Ενδιάμεσων Τιμών (επέκτασή του θεωρήματος του Bolzano): Αν μια συνάρτηση ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα παίρνει δύο τιμές, τότε παίρνει και κάθε τιμή ανάμεσά τους.

Σε ποιά ερωτήματα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

- Με ποιά διαδικασία μπορείτε να αποφανθείτε για το πρόσημο των τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης, αν γνωρίζετε τα σημεία τομής της με τον οριζόντιο άξονα;
- Όταν δυσκολεύεστε να λύσετε μια εξίσωση και ενδιαφέρεστε απλά αν έχει ρίζα σε ένα διάστημα, τί μπορείτε να δοκιμάσετε; Στην περίπτωση που αποδείξετε ότι έχει ρίζα στο διάστημα αυτό, πώς θα μπορούσατε να εξακριβώσετε αν είναι η μοναδική ρίζα στο διάστημα αυτό, χωρίς πάντα να επιλύσετε την εξίσωση με κάποιο τρόπο;
- Πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα Bolzano για να εξακριβώσετε αν μια εξίσωση έχει ρίζα σε ένα διάστημα;
- Πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα Bolzano για να εξακριβώσετε αν οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων έχουν ένα μόνο κοινό σημείο;
- Αν μια συνάρτηση ορίζεται σε ανοικτό διάστημα και είναι συνεχής σε αυτό, πώς θα αξιοποιούσατε το θεώρημα Bolzano;
- Πώς υπολογίζεται τα διαστήματα μονοτονίας παραγωγίσιμων σε διαστήματα συναρτήσεων;
- Πώς βρίσκουμε το πρόσημο συνεχούς συνάρτησης;
- Πώς μπορείτε να βρείτε το σύνολο τιμών της f με $f:[\alpha,\beta] \to \mathbf{R}$, αν f συνεχής και γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της; Αν το διάστημα στο οποίο ορίζεται η f ήταν ανοικτό πώς θα μπορούσατε να βρείτε το σύνολο τιμών της;

- Πώς σχετίζονται οι κλίσεις των εφαπτομένων στα σημεία της γραφικής παράστασης της συνεχούς συνάρτησης $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, με τη μονοτονία της;
- Πώς αποδεικνύουμε ότι μία συνάρτηση είναι σταθερή με τη βοήθεια των παραγώγων;
- Πώς από ισότητα των παραγώγων δύο συναρτήσεων μεταβαίνουμε σε σχέση μεταξύ αυτών των συναρτήσεων;
- Πώς συνδέονται τα σημεία των τοπικών ακροτάτων καμπύλης με την εφαπτομένη της καμπύλης σε αυτά;
- Πώς ελέγχεται αν μια πιθανή θέση τοπικού ακροτάτου είναι θέση τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου;

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Το Θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών (3 ώρες)

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να:

M1. Διατυπώνουν τα θεωρήματα Bolzano και Ενδιάμεσων Τιμών και τα ερμηνεύουν γεωμετρικά.

M2. Εξετάζουν και διαπιστώνουν αν μια εξίσωση της μορφής $f(x)=0$, με f να παριστά συνεχή συνάρτηση, έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε ένα διάστημα. (**Δ1,Δ2,Δ3**)

M3. Βρίσκουν το πρόσημο μιας συνεχούς σε διάστημα συνάρτησης.

Κριτήρια μονοτονίας συνάρτησης (8 ώρες)

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να:

M4. Αποφαίνονται για το αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα ή σταθερή σε ένα διάστημα Δ, χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο κριτήριο μονοτονίας, και προσδιορίζουν το σύνολο τιμών της και τις ρίζες της. Αποφαίνονται για το αν δύο συναρτήσεις διαφέρουν κατά σταθερή ποσότητα σε ένα διάστημα Δ, χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο κριτήριο. (**Δ4,Δ5**)

Τοπικά ακρότατα συνάρτησης – Κριτήριο ύπαρξης τοπικών ακροτάτων συνάρτησης (6 ώρες)

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να:

M5. Χρησιμοποιούν το κριτήριο 1ης παραγώγου για να προσδιορίσουν θέση τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου. (**Δ6**)

M6. Εκφράζουν με τη βοήθεια συναρτήσεων πραγματικές καταστάσεις και να λύνουν προβλήματα βελτιστοποίησης. (**Δ7**)

Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης (3 ώρες)

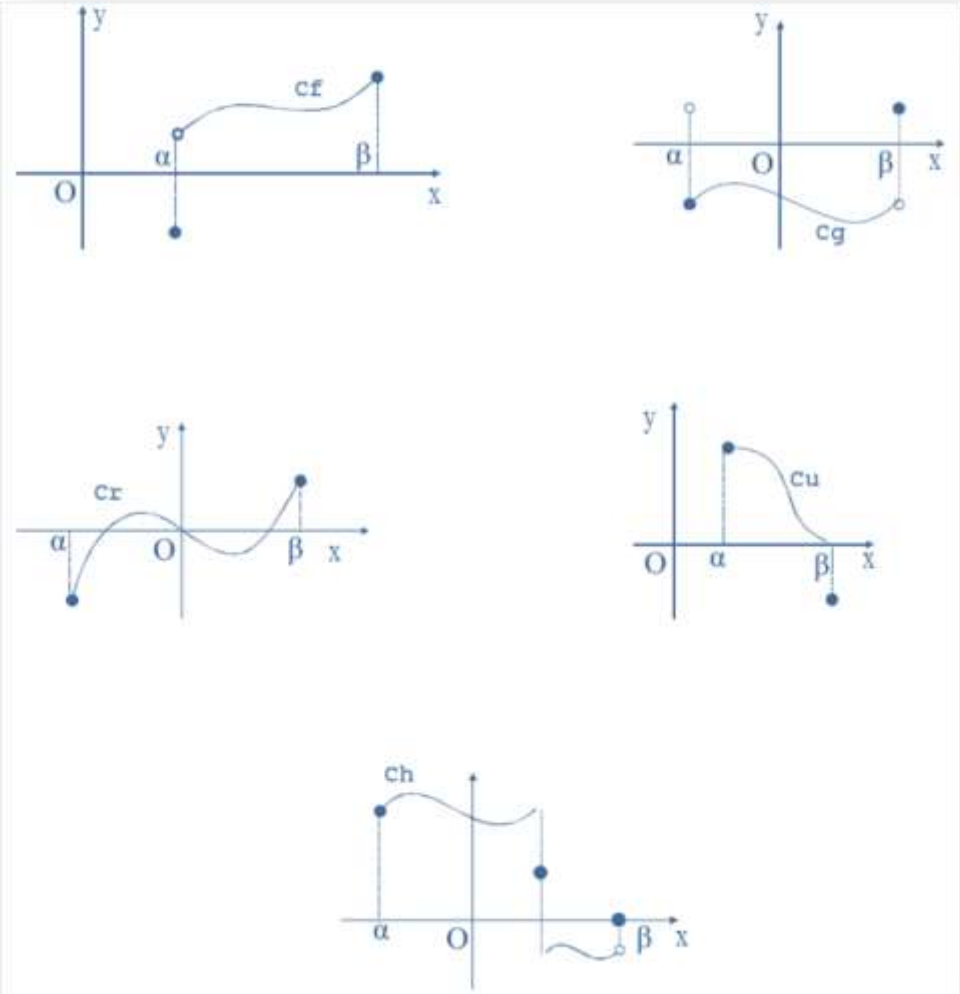
Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να:

M7. Μελετούν και να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση συνάρτησης χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα θεωρήματα και προτάσεις. . (**Δ8**)

Δραστηριότητες

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες συνήθως προσδιορίζουν περισσότερα του ενός μαθησιακά αποτελέσματα, καθόσον η φύση των Μαθηματικών καθιστά, πολλές φορές, ανέφικτο, να προσδιορίζουν ένα μόνο. Μετά από αυτή την επισήμανση προχωρούμε στην παρουσίαση των δραστηριοτήτων, των οποίων η αρίθμηση δηλώνεται στα μαθησιακά αποτελέσματα της ανωτέρω ενότητας.

Δ1. Για ποιές από τις κάτωθι συναρτήσεις f, g, r, u,h ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano;



Δ2. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\ln(x)+e^{x}=0$ έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα.

Απάντηση: Ορίζω την συνάρτηση $g(x)=\ln(x)+e^{x}$ (βρίσκω το πεδίο ορισμού της $(0,+\infty)$). Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(0,+\infty)$, οποτε το συνολο τιμων της ειναι το $(-\infty,+\infty)$. Άρα η συναρτηση αυτη εχει μοναδικη ριζα στο $(0,+\infty)$.

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $x^{2}+\ln(x)=1$.

Δ4. Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση περνάει από τα σημεία $A(1,8)$ και $B(2,13)$.

Αποδείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{46}{5}$.

Απάντηση:

I. Γνησίως μονότονη με $f(1)=8<f(2)<13$, άρα f είναι γνησίως αύξουσα.
II. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών για την f στο $[1,2]$.

Δ5. Να μελετήσετε τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}$ ως προς τη μονοτονία και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ6. Από ένα χαρτόνι σχήματος τετραγώνου πλευράς α μονάδες, θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κουτί χωρίς καπάκι, αποκόβοντας ένα μικρό τετράγωνο από κάθε γωνία και λυγίζοντας προς τα πάνω τις πλευρές. Ποια πρέπει να είναι η ακμή του τετραγώνου που θα αφαιρέσουμε από κάθε γωνία, ώστε το κουτί να έχει το μέγιστο δυνατό όγκο;

Απάντηση:

Ο όγκος του κουτιού σε κυβικές μονάδες δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=x(\alpha-2x)^2, 0\le x\le\frac{\alpha}{2}$. Παραγωγίζουμε την f και λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0$ στο $0\le x\le\frac{\alpha}{2}$. Η λύση της στο διάστημα αυτό είναι $\frac{\alpha}{6}$. Το τετράγωνο που θα αποκόψουμε από κάθε γωνία πρέπει να έχει ακμή $\frac{\alpha}{6}$.

Δ7. Σε μιά λίμνη η ρίψη οργανικών αποβλήτων επέδρασε στο περιεχόμενο του νερού σε οξυγόνο. Αν το ποσοστό επί τοις % της περιεκτικότητας του οξυγόνου στη λίμνη t ημέρες μετά την ρίψη των αποβλήτων δίνεται από τη συνάρτηση με τύπο $f(t)=100\frac{t^2+10t+100}{t^2+20t+100}$ βρείτε ποια ημέρα μετά την ρίψη των αποβλήτων το νερό της λίμνης θα έχει τη μικρότερη περιεκτικότητα σε οξυγόνο.

Απάντηση:

Μετά από 10 ημέρες.

Δ8. Στην προηγούμενη άσκηση μελετήστε τη συνάρτηση $f(t)$ και εξάγεται τα συμπεράσματά σας.

Απάντηση:

Η περιεκτικότητα σε οξυγόνο ελαττώνεται από την ημέρα ρίψης των αποβλήτων. Το νερό της λίμνης έχει τη μικρότερη περιεκτικότητα σε οξυγόνο την 10η ημέρα, αλλά στη συνέχεια στο νερό της λίμνης αυξάνεται η περιεκτικότητά του σε οξυγόνο, ενώ μετά από πολλές ημέρες η περιεκτικότητα του νερού σε οξυγόνο πλησιάζει και πάλι το 100% του φυσιολογικού επιπέδου, δηλαδή η ίδια η φύση αυτοδιορθώνεται.

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά διατυπώνονται τα θεωρήματα που απορρέουν από τη συνέχεια συνάρτησης, με αποκορύφωμα το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών ως συνέπεια του θεωρήματος Bolzano, ώστε να καταστεί δυνατή η εύρεση του πλήθους των ριζών μιας εξίσωσης, το πρόσημο μιας συνεχούς συνάρτησης σε διάστημα και το σύνολο τιμών της εφόσον είναι επιπλέον γνησίως μονότονη (το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής δεν προϋποθέτει την μονοτονία, αφήνεται στον διδάσκοντα η επιλογή της διδασκαλίας ή της αναφοράς του ή όχι). Επιπλέον διδάσκονται τα κριτήρια μονοτονίας και τα κριτήρια ύπαρξης ακροτάτων συνάρτησης για να καταλήξουν στη μελέτη και χάραξη της συνάρτησης (για τα κοίλα-κυρτά συνάρτησης επαφίεται και πάλι στον διδάσκοντα η επιλογή ή μή της διδασκαλίας τους).Σχηματικά η διδασκαλία μπορεί να παρασταθεί ως κάτωθι:

Μεγάλη σημασία προτείνεται να δοθεί στις προϋποθέσεις για την ισχύ του θεωρήματος Bolzano, αλλά και το ότι αν αυτές δεν ικανοποιούνται τότε δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει σημείο του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση δεν μηδενίζεται. Να μην αποδειχθούν τα θεωρήματα Bolzano και ενδιάμεσων τιμών, αλλά η παρουσίασή τους να γίνει διαισθητικά με διάφορες γραφικές αναπαραστάσεις (βλέπε και δραστηριότητα Δ1). Επιπλέον, να τονισθεί ότι οι γνήσια μονότονες συναρτήσεις αλλάζουν πρόσημο εκατέρωθεν των σημείων τους που ανήκουν στο οριζόντιο άξονα.

Προτείνεται να δοθεί έμφαση και στη σχέση που συνδέει συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε ένα διάστημα και έχουν ίσες παραγώγους στο εσωτερικό αυτού και να παρασταθεί με τη χρήση ΤΠΕ.

Τα κριτήρια μονοτονίας συνάρτησης, δηλαδή τα κριτήρια για γνησίως αύξουσες, γνησίως φθίνουσες και σταθερές συναρτήσεις, προτείνεται να δοθούν χωρίς απόδειξη. Η εισαγωγή των κριτηρίων, επίσης, να γίνει διαισθητικά και για το λόγο αυτό να συζητηθεί και η γεωμετρική ερμηνεία (θέση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, για παράδειγμα να λυθεί η ανίσωση $\ln(x) \leq x-1$), ενώ για την παρουσίασή τους προτείνεται να χρησιμοποιηθούν οι ΤΠΕ. Επίσης, προτείνεται να αναφερθεί ότι οι σταθερές είναι οι μόνες συναρτήσεις στις οποίες συμπίπτει το μέγιστο και το ελάχιστο και που να είναι ταυτόχρονα αύξουσες και φθίνουσες.

Μπορούν τα ψηφιακά μέσα να υποστηρίξουν τη διδασκαλία του ορίου και της συνέχειας συναρτήσεων;

Γενικά, εφόσον στο κεφάλαιο αυτό τα θεωρήματα παρουσιάζονται διαισθητικά, οι ΤΠΕ συνιστούν ιδανικό εργαλείο για την διαπίστωση από τους μαθητές των θεωρημάτων αλλά και των συμπερασμάτων που προκύπτουν από αυτά, όπως έχει προαναφερθεί. Και αυτό γιατί η σχεδίαση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων που απαιτούνται είναι δύσκολη και ενίοτε ανέφικτη, ενώ εξοικονομείται παράλληλα χρόνος. Ιδανικό, βέβαια, να εμπλέκονται ενεργά οι μαθητές.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Apostol, T. M. (1962). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*. Αθήνα: Ατλαντίς.

Boyger, C. B. (1959). *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover Publications, Inc.

Russ, S. B. (1980). A Translation of Bolzano's paper on the intermediate value theorem. *Historia Mathematica*, 7, 156-185.

Χρυσανθόπουλος, Κ. Η. (2009). Αξιοποίηση της ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών. *Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών*. (Συλλογικό έργο). Εκδόσεις: ΖΗΤΗ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο} : Ολοκληρωτικός Λογισμός

Εισαγωγή

Ο Αριστοτέλης για τη κατασκευή ενός μαθηματικού συστήματος προϋπέθετε την ύπαρξη κοινών εννοιών ως "υπόβαθρο κάθε παραγωγικού συλλογισμού", και διάκρινε δύο είδη εννοιών, τις θεμελιώδεις, οι οποίες δεν μπορούν να ορισθούν και αυτές που παράγονται από τις θεμελιώδεις (Bunt, Jones & Bedient, 1981, σ. 160-161). Οι αρχαίοι Έλληνες, όσον αφορά το μήκος και το εμβαδόνν, χρησιμοποιούσαν καθαρά γεωμετρικούς όρους για την έκφρασή τους παρά αριθμητικές τιμές (Davis, 2007, σ. 25). Παρότι, όμως στους ορισμούς του Ευκλείδη ορίζεται σαφώς η έννοια της επιφάνειας (θεμελιώδης έννοια), δεν γίνεται άμεσα αναφορά στο εμβαδόνν, ούτε στους ορισμούς ούτε τα αιτήματα/αξιώματα (Bunt κ.α. , 1981, σ. 160-166). Ο Apostol (1962) πιθανολογεί ότι, ο Αρχιμήδης ίσως θεωρούσε την έννοια του εμβαδού ως μη οριζόμενη και τις ιδιότητες του εμβαδού ως αξιώματα· όμως, το έργο του για τον υπολογισμό του εμβαδού παραβολικού χωρίου με τη μέθοδο της εξάντλησης υποδεικνύει ένα "λογικοφανή δρόμο προς τον ορισμό της εννοίας του εμβαδού" και "υποβάλλει ένα τρόπο ορισμού μιας πολύ γενικότερης έννοιας", της έννοιας του ολοκληρώματος, το οποίο "μας οδηγεί με τη σειρά του στον ορισμό και τον υπολογισμό ... και άλλων εννοιών, όπως είναι το μήκος τόξου, ο όγκος, το έργο κλπ" (Apostol, 1962, σ. 11). Οι ιδέες του Αρχιμήδη, σε αναφορά του Heath (2001) για τον Chasles "γέννησαν τον Απειροστικό λογισμό, που έγινε κατανοητός και τελειοποιήθηκε διαδοχικά από τους Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz και Νεύτωνα" (σ. 37). Εν γένει, η έννοια του ολοκληρώματος αποτελεί το απαύγασμα προσπαθειών δεκάδων αιώνων φωτισμένων μυαλών Εύδοξου, Αρχιμήδη, Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibniz, Νεύτωνα, Cauchy, Riemann Lebesgue και πολλών περισσότερων.

Τι περιέχει το κεφάλαιο του Ολοκληρωτικού Λογισμού και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Με το πέρας της διδασκαλίας του κεφαλαίου αυτού ολοκληρώνεται η διδασκαλία της Ανάλυσης, ενός κλάδου των Μαθηματικών το οποίο, πέραν του ενός "τεχνικού εργαλείου", συνθέτει" μια συλλογή από γοητευτικές και συναρπάζουσες ιδέες που επί αιώνες κέντριζαν το ενδιαφέρον των σκεπτόμενων ανθρώπων" (Apostol, 1962, σ. 2). Στο παρόν κεφάλαιο, διδάσκεται η παράγουσα μιας συνεχούς συνάρτησης και παρουσιάζεται η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος η οποία συνδέεται με αυτήν του εμβαδού, μιας εξαιρετικά δύσκολης έννοιας, αν και μιας "από τις πρώτες γεωμετρικές έννοιες που χρησιμοποίησε ο άνθρωπος για πρακτικούς λόγους" (Κοντογιάννης & Ντζιαχρήστος, 2003, σ. 313). Ακολουθούν η παρουσίαση χαρακτηριστικών του ορισμένου ολοκληρώματος, και συγκεκριμένα, της γραμμικότητας, της μονοτονίας και της σχέσης του Chasles για τα ορισμένα ολοκληρώματα. Τέλος παρουσιάζεται το θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης, και αναδεικνύεται η σημασία του μέσα από πλήθος προβλημάτων καθημερινών καταστάσεων στα οποία προσφέρει λύση. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με ειδικότερες εφαρμογές προβλημάτων, όπως της εύρεσης του εμβαδού επιπέδου χωρίου που οριοθετείται από τις γραφικές παραστάσεις δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων και κατακόρυφων ευθειών. Ειδικότερα, συνδέοντας το νυν με το πρώην κεφάλαιο, προβλήματα που αντιμετωπίζουμε, συχνά, σχετίζονται με το πώς από τη συνάρτηση ενός μεγέθους αναζητούμε το ρυθμό μεταβολής του, οπότε και χρησιμοποιούμε παραγώγους. Αντιμετωπίζουμε όμως και αντίστροφα προβλήματα, από το ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους αναζητούμε τη συνάρτηση μεγέθους και τότε χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση.

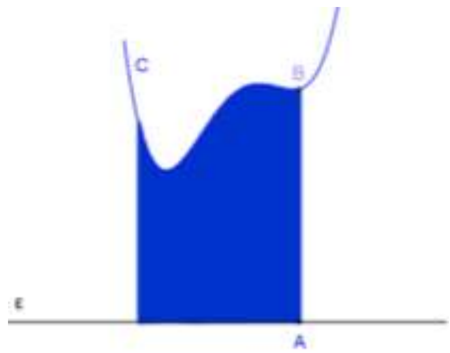
Ποιές είναι οι «σημαντικές ιδέες» που περιέχονται στο κεφάλαιο του Ολοκληρωτικού Λογισμού;

I. Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο

Στο κεφάλαιο αυτό παρατίθεται το θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης. Αυτό από μόνο του προδιαθέτει για τη σημαντικότητα του κεφαλαίου στην ιστορία όλης της ανάλυσης. Παρόλα αυτά, τονίζουμε ότι οι εφαρμογές του θεωρήματος, το οποίο συνιστά το πέρασμα από το ρυθμό μεταβολής μεγέθους στη συνάρτηση μέσω της οποίας εκφράζεται το μέγεθος, επεκτείνονται όχι μόνο στο χώρο των "καθαρών" Μαθηματικών. Το θεώρημα, επίσης, παρουσιάζει πληθώρα εφαρμογών στο χώρο των Θετικών και Κοινωνικών Επιστημών. Ενδεικτικά αναφέρεται από τους Ξεπαπαδέα και Γιαννίκο (2007) ότι στο χώρο των Οικονομικών Επιστημών αλλά και των Επιστημών της Διοίκησης Επιχειρήσεων, θεμελιώδη μεγέθη , όπως αυτά των επενδύσεων εκφράζουν ρυθμούς μεταβολής άλλων μεγεθών και με τη βοήθεια των ολοκληρωμάτων μπορούμε να προσδιορίσουμε τις αρχικές τους συναρτήσεις. Και συνεχίζοντας οι ίδιοι, αναφέρουν οικονομικές εφαρμογές των ολοκληρωμάτων, όπως "τον ορισμό της καθαρής παρούσας αξίας ενός περιουσιακού στοιχείου, τη μαθηματική ανάλυση της έννοιας της απόσβεσης και τη μεθοδολογία προσδιορισμού του άριστου χρόνου έναρξης μιας επενδυτικής δραστηριότητας" (Ξεπαπαδέας & Γιαννίκος, 2007, σ. 467).

II. Ποιές είναι οι σημαντικές ιδέες του κεφαλαίου

Έστω σε ένα επίπεδο μια ευθεία ε και μια καμπύλη C για την οποία, αν από οποιαδήποτε σημείο της χαράξουμε μια ευθεία θ κάθετη στην ε, τότε η θ δεν συναντά την καμπύλη σε άλλο σημείο πέραν του προαναφερθέντος, όπως απεικονίζεται στο σχήμα 1 με την ε οριζόντια.



Σχήμα 1

Το πρώτο θεμελιώδες πρόβλημα της ανάλυσης όπως περιγράφεται από τον Apostol για σχήμα αντίστοιχο προς το σχήμα 1 έχει ως εξής: "Να ορισθεί ένας αριθμός που να μετράει το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής ή χωρίου" (Apostol, 1962, σ. 2). Γενικεύοντας, αν θεωρήσουμε ότι η καμπύλη παριστά γραφική παράσταση συνάρτησης f σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με οριζόντιο άξονα την ε, τότε το εμβαδόν της γεωμετρικής επιφάνειας που ορίζεται από το σκιασμένο μέρος παριστά έννοιες αντίστοιχες με το τι παριστούν οι τιμές της f. Για παράδειγμα, αν η f παριστά δύναμη, το εμβαδόν της γεωμετρικής επιφάνειας παριστά έργο. Αλλά και:

- αν η f παριστά το ρυθμό μεταβολής κέρδους μιας εταιρείας, τότε το εμβαδόν της γεωμετρικής επιφάνειας παριστά το συνολικό κέρδος για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.
- αν η f παριστά το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού των εντόμων μετά τη ρίψη εντομοκτόνου, τότε το εμβαδόν της γεωμετρικής επιφάνειας παριστά το συνολικό πληθυσμό των εντόμων για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.
- αν η f παριστά τη ταχύτητα ενός κινητού σε άξονα σε ένα χρονικό διάστημα, τότε το εμβαδόν της γεωμετρικής επιφάνειας παριστά το συνολικό διάστημα που διάνυσε το κινητό σε αυτό το χρόνο, κλπ.

Τα ανωτέρω συνιστούν, επίσης, ότι η ολοκλήρωση συνιστά αντίστροφη διαδικασία από αυτής της παραγώγισης, επιλύει τρόπον τινά αντίστροφα προβλήματα. Ειδικότερα, από τον ρυθμό μεταβολής ενός μεγέθους και μια τιμή του, μπορούμε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε άλλη τιμή του μεγέθους.

Σε ποιά ερωτήματα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

- Πώς βρίσκουμε τις παράγουσες μιας συνάρτησης;
- Πώς υπολογίζεται η παράγουσα συνάρτησης με τύπο $f(x)=h(g(x))\cdot g'(x)$ από μια παράγουσα H της h;
- Πώς ορίζεται η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος και πώς συνδέεται με αυτή του εμβαδού χωρίου;
- Τί εννοούμε όταν λέμε ότι η παραγώγιση και η ολοκλήρωση είναι αντίστροφες διαδικασίες;
- Ποιές είναι οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος;
- Ποιό είναι το θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης και ποιού τύπου ασκήσεις επιλύει;
- Πώς υπολογίζουμε το εμβαδόν χωρίου μεταξύ γραφικής παράστασης συνάρτησης, του οριζόντιου άξονα και δύο κατακόρυφων ευθειών;
- Πώς υπολογίζουμε το εμβαδόν χωρίου μεταξύ δύο ή και περισσοτέρων γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων και δύο κατακόρυφων ευθειών;

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Σύμφωνα με τους στόχους της διδασκαλίας του κεφαλαίου, όπως προσδιορίζονται από τα προγράμματα σπουδών ακολουθούν τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα:

Παράγουσα συνεχούς συνάρτησης (4 ώρες)

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να:

Μ1. ορίζουν τις παράγουσες βασικών συναρτήσεων και να προσδιορίζουν παράγουσες περισσότερο σύνθετων συναρτήσεων και παράγουσες συναρτήσεων της μορφής $y = f\left(g(x)\right)g'(x)$, από μια παράγουσα της f .

Μ2. προσδιορίζουν, δοθείσης μιας παράγουσας μιας συνάρτησης, το σύνολο των παραγουσών της συνάρτησης, και αντίστροφα από το σύνολο των παραγουσών μιας συνάρτησης και, δοθέντος ενός σημείου μιας εκ των παραγουσών της, να επιλέγουν με υπολογισμούς την αντίστοιχη παράγουσα.

Μ3. επιλύουν απλά προβλήματα εύρεσης συναρτήσεων των οποίων δίνεται ο ρυθμός μεταβολής.

Ορισμένο Ολοκλήρωμα (4 ώρες)

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να:

Μ4. δίνουν τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος από το a στο β μιας συνεχούς συνάρτησης στο διάστημα $[a,\beta]$, τον συμβολισμό του, και την επέκταση του ορισμού και να συνδέουν το ορισμένο ολοκλήρωμα την έννοια του εμβαδού χωρίου.

Μ5. δίνουν τον ορισμό του εμβαδού και στα προβλήματα υπολογισμού του εμβαδού να του προσδίδουν ερμηνεία σύμφωνα με τα περιγραφόμενα μεγέθη του προβλήματος.

Μ6. περιγράφουν με σχέσεις και να εφαρμόζουν την ιδιότητα της γραμμικότητας του ορισμένου ολοκληρώματος και να αναπαριστούν τη σχέση Chasles, να την ερμηνεύουν και να την εφαρμόζουν όπου απαιτείται στην επίλυση ασκήσεων ή προβλημάτων.

Το θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης (4 ώρες)

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να:

Μ7. υπολογίζουν ολοκληρώματα με χρήση του θεμελιώδους θεωρήματος της ανάλυσης.

Μ8. Υπολογίζουν, με δεδομένο το ρυθμό μεταβολής μεγέθους και μια τιμή του μεγέθους στο $[a,\beta]$, οποιαδήποτε άλλη τιμή του στο $[a,\beta]$. (**Δ1**)

Εμβαδόν επιπέδου χωρίου (3 ώρες)

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου οι μαθητές θα πρέπει να είναι ικανοί να:

Μ9. υπολογίζουν εμβαδά που ορίζονται από τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης με θετικές και αρνητικές τιμές ή και περισσοτέρων στο $[a,\beta]$, με χρήση ολοκληρωμάτων. (**Δ2,Δ3**)

Μ10. χρησιμοποιούν το ορισμένο ολοκλήρωμα για να λύνουν διάφορα προβλήματα πραγματικών καταστάσεων. (**Δ4,Δ5**)

Δραστηριότητες

Οι προτεινόμενες δραστηριότητες συνήθως προσδιορίζουν περισσότερα του ενός μαθησιακά αποτελέσματα, καθόσον η υφή των Μαθηματικών καθιστά, πολλές φορές, ανέφικτο να προσδιορίζουν ένα μόνο. Μετά από αυτή την επισήμανση προχωρούμε στην παρουσίαση των δραστηριοτήτων και ασκήσεων, των οποίων η αρίθμηση δηλώνεται στα μαθησιακά αποτελέσματα της ανωτέρω ενότητας.

Δ1. Αν ο πληθυσμός βακτηρίων είναι $N(t)$ τη χρονική στιγμή t και ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού τους είναι $N'(t) = N_0 3^t \ln 3$, με N_0 να παριστά το πληθυσμό τους τη χρονική στιγμή $t = 0$, ποιά η συνάρτηση του πληθυσμού τους; (θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης: $\int_0^t N_0 3^x \ln 3 dx = N(t) - N(0)$ με $N(0) = N_0$).

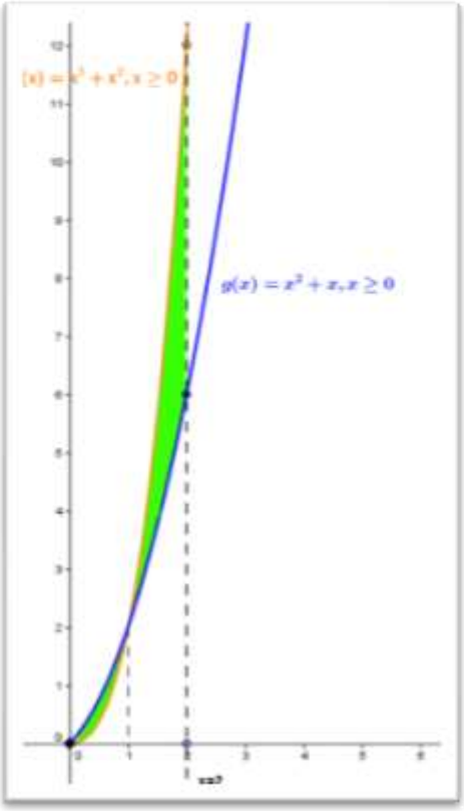
Δ2. Ποιό το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, το οποίο περικλείεται από τις ευθείες $y = 4$, $x = 0$ και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x$ και $y = 2^x$;

Δ3. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις συναρτήσεις με τύπους

$f(x) = 2x^3 + \frac{3}{2}x^2$ και $g(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x$ και την ευθεία $x = 2$.

Απάντηση

$$\int_0^2 |f(x) - g(x)| dx = 5$$



Δ4. Το κέρδος παραγωγής από την πώληση x χιλιάδων μικροϋπολογιστών από μια εταιρεία κατασκευής του προϊόντος προσεγγίζεται από τη συνάρτηση $f(x)$ σε δεκάδες χιλιάδες ευρώ και ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι $f'(x) = 2x^3 + \frac{3}{2}x^2$. Ποιό το συνολικό κέρδος της εταιρείας από την πώληση των πρώτων 2000 μικροϋπολογιστών;

Δ5. Η ταχύτητα ενός ποδηλάτη που κινείται σε ευθύγραμμο ποδηλατοδρόμο δίνεται από τον τύπο $\upsilon(t) = t^2 - t - 6$ (σε Km/h) για κάθε χρονική στιγμή t. α)Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο ποδηλάτης βρίσκονταν στην αρχή του ποδηλατοδρόμου, ποια η θέση του ακριβώς 5ώρες μετά την εκκίνηση του; β) Ποιό διάστημα διάνυσε ο ποδηλάτης στο χρονικό διάστημα των 5 ωρών;

<u>Απάντηση</u>: (α) $\int_0^5 \upsilon(t)dt$, β) $\int_0^5 |\upsilon(t)|dt$).

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Τα βήματα της διδασκαλίας του κεφαλαίου αυτού θα μπορούσαν να ακολουθήσουν την κάτωθι σειρά:

Παράγουσα

Ορισμός παράγουσας συνάρτησης-Ύπαρξη παράγουσας συνάρτησης	Προσδιορισμός του συνόλου των παραγουσών συνάρτησης	Παρουσίαση παραγουσών βασικών και σύνθετων συναρτήσεων

Ορισμένο ολοκλήρωμα

Έννοια ολοκληρώματος - Επέκταση ορισμού	Ορισμός του εμβαδού	Ιδιότητες ολοκληρώματος - Σχέση Chasles

Το Θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης

Εφαρμογές στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων	Εφαρμογές σε απλά προβλήματα φυσικών, κοινωνικών και άλλων επιστημών

Εφαρμογές του ολοκληρώματος

Εμβαδόν επιπέδου χωρίου

<u>Παράγουσα</u>

Αναλυτικότερα, όσον αφορά την παράγουσα συνάρτησης:

- Να δοθεί έμφαση στην παρουσίαση προβλημάτων τα οποία απαιτούν πορεία αντίστροφη της παραγώγισης, ώστε να προκύψει η σημασία της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας μιας συνάρτησης. Τα προβλήματα αυτά να απαιτούν παράγουσες συναρτήσεων των οποίων ο τύπος να ζητείται να δοθεί στη συνέχεια.
- Να επισημανθεί ότι δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις παράγουσα, αλλά κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.
- Να δοθεί έμφαση στην πρόταση με την οποία προσδιορίζεται το σύνολο των παραγουσών μιας συνάρτησης, ώστε να αναδειχθεί στη συνέχεια ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος.
- Να δοθεί πίνακας παραγουσών γνωστών απλών, αλλά και σύνθετων συναρτήσεων. Ειδικότερα, για τις σύνθετες συναρτήσεις αν $f(x)=h(g(x))\cdot g'(x)$ και H μια παράγουσα της h, τότε οι παράγουσες F της f είναι της μορφής $F(x)=H(g(x))+c$, με $c\in\mathbf{R}$ σταθερά, σε κάθε διάστημα στο οποίο οι παραστάσεις έχουν νόημα.

<u>Ορισμένο ολοκλήρωμα</u>

Κατά τη διδασκαλία του ορισμένου ολοκληρώματος προτείνεται να αναφερθεί η χρήση της μεθόδου εξάντλησης από τον Αρχιμήδη για τον υπολογισμό του εμβαδού του παραβολικού χωρίου και στη συνέχεια να παρουσιασθεί ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος συνάρτησης f από το a στο β, όπου f συνεχής στο διάστημα $[a,\beta]$ και να δοθεί ο συμβολισμός του $\int_a^\beta f(x)dx$. Να γενικευθεί ορισμός συμπεριλαμβάνοντας τις περιπτώσεις εναλλαγής των ορίων ολοκλήρωσης και των ίσων ορίων ολοκλήρωσης. Επίσης, να τονισθεί ότι στο $\int_a^\beta f(x)dx$ η συνάρτηση f πρέπει να ορίζεται στο διάστημα $[a,\beta]$ και επιπλέον να είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Για παράδειγμα η συνάρτηση με τύπο $F(x)=\ln|x|$ είναι μια από τις παράγουσες της $f(x)=\frac{1}{x}$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ στα οποία ορίζεται, αλλά δεν ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x)dx$ όταν $a=-1$ και $\beta=2$.

Να παρουσιασθεί η περίπτωση συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[a,\beta]$ με **μη αρνητικές** τιμές η οποία μπορεί να οδηγήσει μαζί με τα προηγούμενα ως φυσική συνέπεια στον ορισμού του εμβαδού χωρίου που προκύπτει από συνεχή συνάρτηση σε διάστημα· συνδέοντας, με τον τρόπο αυτό, την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος με αυτήν του εμβαδού. Εδώ, βέβαια, απαιτείται να τονισθεί η σημασία του προσήμου της συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$ για τον υπολογισμό του εμβαδού $E(\Omega)$ του χωρίου Ω, το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα xx' και τις κατακόρυφες ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Ουσιαστικά, να τονισθεί ότι το εμβαδόν δίνεται από τον τύπο $E(\Omega)=\int_a^\beta f(x)dx$ με τις **προϋποθέσεις** ότι είναι $f(x)\geq 0$ και $\alpha<\beta$. Ειδικά για το εμβαδόν χωρίου, περισσότερα και πολυπλοκότερα επ' αυτού προτείνεται να διδαχθούν οι μαθητές στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου, αφού μέχρι τότε θα έχουν διδαχθεί περισσότερα για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.

Η ενότητα προτείνεται να ολοκληρωθεί με τη διδασκαλία των ιδιοτήτων του ορισμένου ολοκληρώματος (γραμμικότητα του ορισμένου ολοκληρώματος) και της σχέσεως Chasles,.

Το Θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης

Στην ενότητα αυτή, παρουσιάζεται το θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης. Συγκεκριμένα, δίνεται ο τύπος $\int_\alpha^\beta f(x)dx=G(\beta)-G(\alpha)$, όπου G μια παράγουσα της συνεχούς στο $[a,\beta]$ συνάρτησης f και γίνεται χρήση του τύπου για τον υπολογισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων. Επιπλέον, με το θεώρημα αυτό προτείνεται να επιλυθούν ασκήσεις ή προβλήματα με δεδομένο το ρυθμό μεταβολής, οποίος θα συνιστά συνεχή συνάρτηση σε διάστημα $[a,\beta]$ και τη τιμή ενός μεγέθους για κάποιο σημείο του $[a,\beta]$, με ζητούμενο την τιμή του μεγέθους για κάποιο άλλο σημείο του $[a,\beta]$.

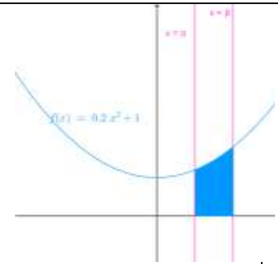
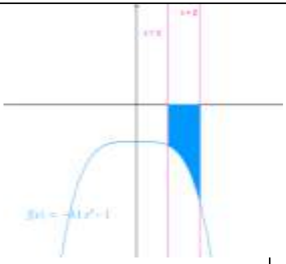
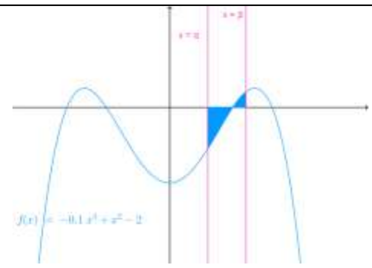
Εφαρμογές του ολοκληρώματος

Η τελευταία ενότητα του κεφαλαίου αφιερώνεται σε εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος σχετικών, κυρίως, με τον υπολογισμό επιπέδων χωρίων, τα οποία ορίζονται, είτε από τη γραφική παράσταση συνεχούς συνάρτησης με θετικές και αρνητικές τιμές στο $[a,\beta]$, τον οριζόντιο άξονα και τις κατακόρυφες $x=a$ και $x=\beta$, είτε μεταξύ δύο γραφικών παραστάσεων συνεχών συναρτήσεων στο $[a,\beta]$.

Προτείνεται, επίσης, να τονισθεί στους τους μαθητές ότι

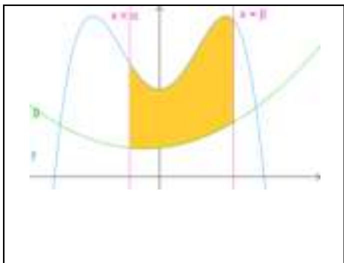
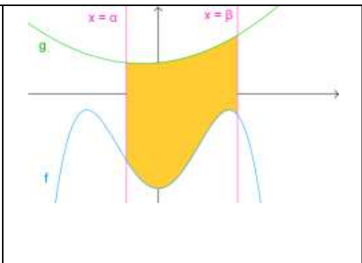
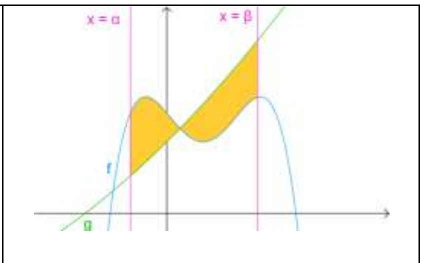
- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα xx' και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ προσδιορίζεται από τον τύπο:

$$E(\Omega)=\int_{a}^{\beta}|\,f(x)|dx \qquad (\alpha<\beta)$$

		
$E(\Omega)=\int_{a}^{\beta} f(x)dx$	$E(\Omega)=\int_{a}^{\beta} -f(x)dx$	$E(\Omega)=\int_{a}^{\gamma} -f(x)dx+\int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx=\int_{a}^{\beta}|\,f(x)|dx$

- Αν f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω το οποίο περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ προσδιορίζεται από τον τύπο:

$$E(\Omega)=\int_{a}^{\beta}|\,f(x)-g(x)|dx \qquad (\alpha<\beta)$$

		
$E(\Omega)=\int_{a}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$	$E(\Omega)=\int_{a}^{\beta}(g(x)-f(x))dx$	$E(\Omega)=\int_{a}^{\beta}|\,f(x)-g(x)|dx$

Βέβαια, οι εφαρμογές, προτείνεται να περιγράφουν πραγματικές καταστάσεις στα πλαίσια του δυνατού.

Μπορούν τα ψηφιακά μέσα να υποστηρίξουν τη διδασκαλία του ολοκληρωτικού λογισμού

Γενικά, ενδείκνυται η χρήση των ΤΠΕ στη διδασκαλία του κεφαλαίου. Συγκεκριμένα, ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος προτείνεται να διδαχθεί με χρήση εκπαιδευτικού λογισμικού (π.χ., Sketchpad, Geogebra) και κατάλληλα διαμορφωμένου αρχείου. Στο αρχείο, ο τύπος της συνεχούς σε διάστημα συνάρτησης να αλλάζει διαδραστικά, όπως επίσης, και τα μήκη και οι τετμημένες των σημείων στη βάση των ορθογωνίων, οι οποίες ορίζουν τα ύψη των ορθογωνίων που συνιστούν το ζητούμενο χωρίο (κατά Riemann). Παράλληλα να εμφανίζεται και η τιμή του αθροίσματος των εμβαδών των ορθογωνίων. Οι μαθητές διερευνώντας, μπορούν να οικοδομήσουν τη νέα γνώση καταλήγοντας διαισθητικά στο συμπέρασμα ότι το όριο του αθροίσματος των εμβαδών των ορθογωνίων υπάρχει.

Ομοίως, η γραμμικότητα, η μονοτονία, η σχέση του Chasles και το θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης (του ολοκληρωτικού λογισμού) προτείνεται να διδαχθούν με κατάλληλα διαμορφωμένα αρχεία εκπαιδευτικών λογισμικών, καθόσον δεν προβλέπονται αποδείξεις. Και τούτο διότι, με το εκπαιδευτικό λογισμικό, χάρις των πολλαπλών αναπαραστάσεων που προσφέρει, επιτυγχάνεται αμεσότερα η ανάπτυξη της διαίσθησης των μαθητών προς τη ζητούμενη κατεύθυνση.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Apostol, T. M. (1962). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*. Αθήνα: Ατλαντίς.

Bunt, L. N.H., Jones, P. S. & Bedient J. D. (1981). *Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών* (Α. Φερεντίνου-Νικολακοπούλου, μετάφραση). Αθήνα: Γ. Α. Πνευματικός.

Davis, D. M. (2007). *Η Φύση και η Δύναμη των Μαθηματικών*. (Δ. Καραγιαννάκης & Μ. Μαγειρόπουλος, μετάφραση). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. (Πρωτότυπη έκδοση, 1993).

Heath, T. L. (2001). *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών.* Τόμος ΙΙ. Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.. (Πρωτότυπη έκδοση, 1921).

Κοντογιάννης, Δ. & Ντζιαχρήστος, Β. (2003). *Βασικές έννοιες της Γεωμετρίας*. (4η έκδ.) Αθήνα.

Ξεπαπαδέας, Α. & Γιαννίκος, Ι. (2007). *Μαθηματικές Μέθοδοι στα Οικονομικά. Θεωρία και εφαρμογές*, τ. Α΄. Εκδόσεις: Gutenberg.

Β΄ μέρος (Πιθανότητες και Στατιστική)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ $1^{ο}$: Συνδυαστική

Εισαγωγή

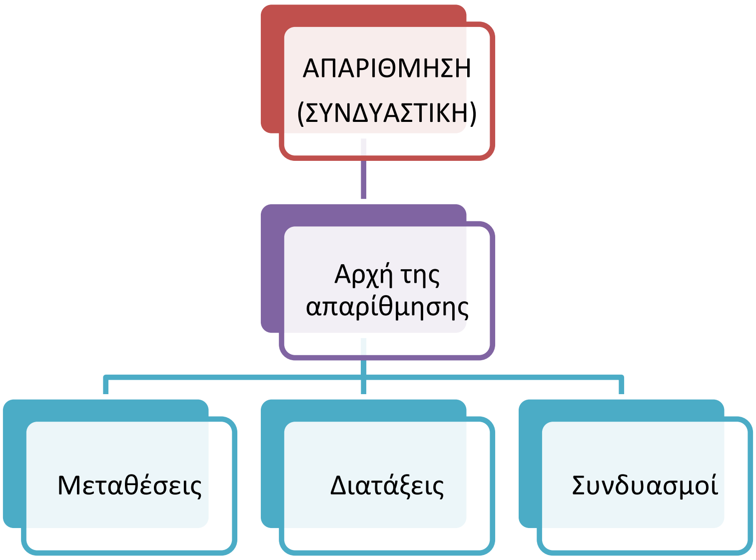
Φαίνεται ότι ίχνη δραστηριοτήτων σχετικών με την απαρίθμηση συνδυασμών βρίσκουμε σε κείμενα αρχαίων πολιτισμών. Το αρχαιότερο ίσως κείμενο με περιεχόμενο σχετικό με συνδυαστικούς υπολογισμούς βρίσκεται στο πάπυρο του Rhind (1650 π.χ) πρόβλημα 79. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα αναφέρεται μία απογραφή στην οποία καταγράφονται 7 σπίτια, κάθε σπίτι είχε 7 γάτες, κάθε γάτα έφαγε 7 ποντίκια κάθε ποντίκι είχε φάει 7 σπόρους σταριού και από κάθε σπόρο σταριού είχαν παραχθεί 7 hekat (μονάδα μέτρησης). Είναι χαρακτηριστική η πληροφορία που αναφέρεται από τον Biggs (1979) ότι σε Ινδικά κείμενα του $6^{ου}$ π.χ αιώνα συναντάμε μία προσπάθεια απαρίθμησης των συνδυασμών 6 διαφορετικών γεύσεων ανά δύο ή ανά τρεις ή ανά τέσσερις. Ο Smith (1953) αναφέρει ότι την ιδέα των μεταθέσεων συναντάμε σε Ινδικά κείμενα του $2^{ου}$ π.χ αιώνα, με τα οποία γινόταν απαρίθμηση των τρόπων με τους οποίους μπορούν να συνδυαστούν μουσικές φράσεις. Ο Smith επιπλέον αναφέρει ότι πρώιμες αναφορές κατά τον Μεσαίωνα συναντώνται στα κείμενα του Rabbi ben Ezra (1140 μ.χ), στα οποία επιχειρεί να υπολογίσει τους συνδυασμούς του πλανήτη Κρόνου με τους άλλους πλανήτες. Ο εν λόγω ποιητής, μαθηματικός και ερευνητής γνώριζε τρόπους υπολογισμού των 7 αντικειμένων ανά δύο. Το 1494 έχουμε το πρώτο τυπωμένο κείμενο που αναφέρεται στις μεταθέσεις αντικειμένων, είναι το έργο του Pacioli «Suma».

	Μία πρώιμη τεχνολογική εφαρμογή των κανόνων της Συνδυαστικής κατά τον $16^{ο}$ αιώνα μ.χ βρίσκουμε σε κείμενα των Cardano και Buteo σχετικά με την κατασκευή κλειδαριών οι οποίες μπορούν να ανοίξουν μόνο αν κάποιος γνωρίζει τον συνδυασμό κάποιων γραναζιών τους.

Κατά τον $17^{ο}$ αιώνα μ.χ συνεχίστηκε η ανάπτυξη της Συνδυαστικής και ο Herigone (1634) δίνει για πρώτη φορά τον γενικό τύπο που υπολογίζει τους συνδυασμούς ν αντικειμένων ανά κ δηλαδή το $\binom{\nu}{\kappa}$. Την ίδια περίπου περίοδο ο Pascal έδειξε τη σχέση μεταξύ των συντελεστών του διωνυμικού αναπτύγματος και των Συνδυαστικών μοντέλων. Τέλος, το περιεχόμενο της Συνδυαστικής, έτσι όπως το γνωρίζουμε και το διδάσκουμε σήμερα, διαμορφώθηκε από τον Jacques Bernoulli στο έργο του «Ars Conjectandi», στο οποίο έργο για πρώτη φορά χρησιμοποιείται ο όρος «permutations» (μεταθέσεις). Οι Pascal και Wallis είναι οι πρώτοι που χρησιμοποίησαν τον όρο «combinations» (συνδυασμοί).

Τι περιέχει το κεφάλαιο της Συνδυαστικής και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Στο κεφάλαιο της Συνδυαστικής αναλύονται τρία βασικά μοντέλα απαρίθμησης: οι μεταθέσεις, οι διατάξεις και οι συνδυασμοί. Τα τρία αυτά μοντέλα στηρίζονται σε μία βασική αρχή απαρίθμησης των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου, σύμφωνα με την οποία κάθε απαρίθμηση των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω προσθέσεων ή / και πολλαπλασιασμών.



Όσον αφορά τη σύνδεση του κεφαλαίου αυτού με ύλη που έχει διδαχτεί σε προηγούμενες τάξεις επισημαίνουμε ότι σε ελάχιστες περιπτώσεις οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή με θέματα που απαιτούν δραστηριότητες απαρίθμησης.
Στο Γυμνάσιο οι μαθητές έχουν ασχοληθεί με το τρίγωνο του Pascal ενώ σε προηγούμενες τάξεις του Λυκείου έχουν χρησιμοποιήσει δενδροδιαγράμματα για την περιγραφή της εξέλιξης μιας διαδικασίας.
Στο μάθημα της Γεωμετρίας συναντάμε θέματα που απαιτούν συνδυαστική σκέψη όπως για παράδειγμα:
1) Από μία περιοχή 4 ευθείες οδοί, έτσι ώστε ανά δύο να διασταυρώνονται και ανά 3 να μη διέρχονται από το ίδιο σημείο. Η τροχαία για να διευκολύνει την κίνηση θέλει να τοποθετήσει έναν τροχονόμο σε κάθε διασταύρωση. Πόσοι τροχονόμοι χρειάζονται; Να εξεταστεί το πρόβλημα για ν δρόμους (ν≥2).

2) Να βρείτε το πλήθος των διαγωνίων κυρτού νιγώνου σαν συνάρτηση του πλήθους των πλευρών του (ν≥3)

Οι προαπαιτούμενες γνώσεις για το κεφάλαιο της Συνδυαστικής είναι ελάχιστες και αυτό παρουσιάζει ιδιαίτερο διδακτικό ενδιαφέρον.

Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο της Συνδυαστικής;

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να επισημανθεί ότι: ο τρόπος με τον οποίο δύο πολύ απλές λογικές παραδοχές (προσθετική, πολλαπλασιαστική), για την απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου, αναπτύχθηκαν σε τέτοιο σημείο, ώστε σήμερα τα μοντέλα που δημιουργήθηκαν να είναι ιδιαίτερα σύνθετα και ικανά να λύσουν απαιτητικά προβλήματα απαρίθμησης.

Επιπλέον σημαντικοί κλάδοι και περιοχές των Μαθηματικών συνδέονται με την ανάπτυξη της Συνδυαστικής ιδιαίτερα καθώς η περιοχή των Πιθανοτήτων χρησιμοποιεί κατ εξοχήν τα Συνδυαστικά μοντέλα.

Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο της Συνδυαστικής;

Η Συνδυαστική δεν προϋποθέτει εξειδικευμένες γνώσεις από άλλες Μαθηματικές περιοχές, αλλά χωρίς υπερβολή, θα μπορούσαμε να πούμε ότι αναπτύσσεται πάνω σε δύο απλές λογικές παραδοχές.

C. Αν ένα σύνολο προκύπτει από την ένωση ξένων μεταξύ τους συνόλων τότε το πλήθος των στοιχείων του μπορεί να υπολογιστεί αν προσθέσουμε τα πλήθη των στοιχείων των συνόλων αυτών.
D. Αν μία διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ν διακριτές φάσεις και η πρώτη φάση πραγματοποιείται με κ_1 τρόπους η δεύτερη φάση πραγματοποιείται με κ_2 τρόπους ...η νιοστή φάση μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_ν τρόπους, τότε όλη η διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot \kappa_3 \cdot \ldots . \cdot \kappa_\nu$ διαφορετικούς τρόπους.
Οι δύο αυτοί απλοί λογικοί συλλογισμοί αποτελούν και τις δύο βασικές αρχές (προσθετική, πολλαπλασιαστική) πάνω στις οποίες θα στηθούν τα Συνδυαστικά μοντέλα, με τα οποία θα ασχοληθούμε στο κεφάλαιο αυτό.

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

7) Τι είναι ένα δενδροδιάγραμμα και ποια η χρησιμότητά του;
8) Πότε κάνουμε απαρίθμηση με την προσθετική αρχή και πότε με την πολλαπλασιαστική;
9) Πότε και πως εφαρμόζουμε το μοντέλο των μεταθέσεων σε ένα πρόβλημα απαρίθμησης;
10) Πότε και πως υπολογίζουμε τις διατάξεις κ στοιχείων από τα ν στοιχεία ενός συνόλου;
11) Πότε και πως υπολογίζουμε τους συνδυασμούς κ στοιχείων από ένα σύνολο ν στοιχείων;

Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Αυτό που θα πρέπει να παραμείνει στους μαθητές ως διδακτικό ίζημα είναι η δυνατότητα:

Να μπορούν με τυπικό ή άτυπο τρόπο να υπολογίζουν το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου.

Συγκεκριμένα:

1) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να δημιουργούν ένα δενδροδιάγραμμα, από το οποίο θα μπορούν να διακρίνουν τις φάσεις εξέλιξης μιας διαδικασίας. Η σημασία του δενδροδιαγράμματος έγκειται στο ότι αυτό θα αποτελέσει τη γέφυρα μετάβασης των μαθητών στα 3 μοντέλα απαρίθμησης. (Στόχοι ΠΣ 1.1.1)

2) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να διακρίνουν, σε απλά προβλήματα, αν ο υπολογισμός του πλήθους των στοιχείων ενός συνόλου προκύπτει άμεσα προσθετικά ή προκύπτει πολλαπλασιαστικά. (Στόχοι ΠΣ 1.1.2, 1.1.3)

Προτεινόμενη δραστηριότητα:

Σε μία πόλη οι μαθητές τις ελεύθερες ώρες τους, εκτός των άλλων, μπορούν να ασχοληθούν με Κλασικό Αθλητισμό και με την Τέχνη. Σχετικά με τις Κλασικές Αθλητικές δραστηριότητες μπορούν να επιλέξουν άλματα, ρίψεις, δρόμους ταχύτητας και δρόμους αντοχής. Σχετικά με την Τέχνη μπορούν να επιλέξουν εικαστικά, μουσική και χορό. Επιπλέον για κάθε μία από τις επιλογές της Τέχνη θα πρέπει να επιλέξουν κλασική ή σύγχρονη. Πόσες επιλογές έχει ένας μαθητής για τον Κλασικό Αθλητισμό και πόσες για την Τέχνη;

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση:

Με την εν λόγω δραστηριότητα επιδιώκεται οι μαθητές να διακρίνουν τη διαφορά της απαρίθμησης των επιλογών του Κλασικού Αθλητισμού από την απαρίθμηση των επιλογών της Τέχνης. Στην επιλογή Κλασικού Αθλητισμού ο μαθητής έχει να επιλέξει από ξένα μεταξύ τους μονοσύνολα. Στην δεύτερη περίπτωση, θα πρέπει να συζητηθεί με τους μαθητές το γεγονός ότι η επιλογή του τομέα Τέχνη ολοκληρώνεται σε δύο φάσεις, στην Α΄ φάση υπάρχουν 3 επιλογές και στη Β΄ φάση υπάρχουν 2 επιλογές οπότε υπάρχουν συνολικά 3×2 επιλογές. Το σημαντικό τελικά είναι να συνδέσουν οι μαθητές την προσθετική μέθοδο με ξένα μεταξύ τους μονοσύνολα, ενώ στην πολλαπλασιαστική μας ενδιαφέρει η απαρίθμηση όλων των υποσυνόλων με δύο τουλάχιστον στοιχεία το κάθε ένα.

3) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να διακρίνουν σε ένα πρόβλημα απαρίθμησης μεταθέσεων ότι το κατάλληλο μοντέλο είναι οι μεταθέσεις και να το εφαρμόζουν.
(Στόχοι ΠΣ 1.2.1)
Προτεινόμενη δραστηριότητα

Με πόσους τρόπους 4 αθλητές Α, Β, Γ, Δ, άγνωστης δυναμικότητας, μπορεί να τερματίσουν σε έναν αγώνα δρόμου; Αν ζητούμε με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η τριάδα από τους 4 που θα ανέβει στο βάθρο σε τι διαφέρει τώρα το πρόβλημα από το προηγούμενο;

4) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να διακρίνουν σε ένα πρόβλημα απαρίθμησης διατάξεων κ στοιχείων από ένα σύνολο με ν στοιχεία ότι το κατάλληλο μοντέλο είναι οι διατάξεις των ν ανά κ και να το εφαρμόζουν. (Στόχοι ΠΣ 1.2.2)
Προτεινόμενη δραστηριότητα

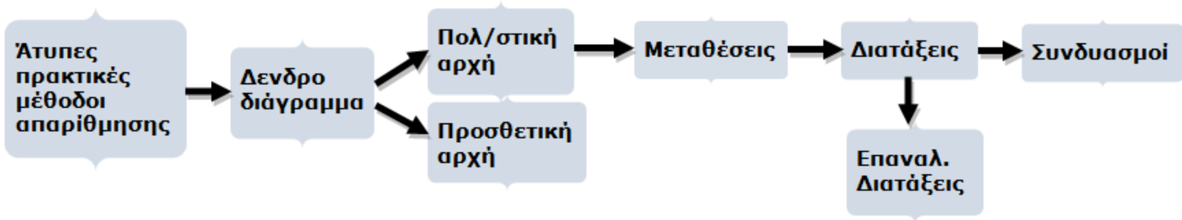
Το πενταμελές συμβούλιο ενός τμήματος θέλει να εκλέξει πρόεδρο, αντιπρόεδρο και ταμία. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

12) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να διακρίνουν σε ένα πρόβλημα απαρίθμησης συνδυασμών κ στοιχείων από ένα σύνολο με ν στοιχεία ότι το κατάλληλο μοντέλο είναι οι συνδυασμοί των ν ανά κ και να το εφαρμόζουν. (Στόχοι ΠΣ 1.2.3)

Οδηγίες για την διδασκαλία του κεφαλαίου

Ας έρθουμε τώρα στη διδακτική μεθοδολογία. Όσα αναφέρονται στη συνέχεια είναι προτεινόμενα ώστε ο διδάσκων να διαθέτει μία οργανωμένη πρόταση διδασκαλίας.

Κατά αρχήν, καλό θα είναι ο διδάσκων να διαθέτει μία γενική εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η διδασκαλία του κεφαλαίου όπως η παρακάτω.



Με βάση το διάγραμμα:

9) Αρχικά προτείνεται να δοθεί ένα απλό πρόβλημα απαρίθμησης, το οποίο μπορεί να επιλυθεί μέσα από νοερούς υπολογισμούς.
Προτεινόμενη δραστηριότητα;

Πόσους διαφορετικούς 3ψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία μπορούμε να κατασκευάσουμε από τα ψηφία 1,3, 5; Να καταγράψετε από νου όλους τους δυνατούς συνδυασμούς.

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση:

Εδώ είναι σημαντικό να συζητηθεί στην τάξη ένας τρόπος οργάνωσης της κατασκευής των διατεταγμένων τριάδων όπως για παράδειγμα πρώτα οι τριάδες με πρώτο ψηφίο το 1, μετά οι τριάδες με πρώτο ψηφίο το 2 και τέλος οι τριάδες με πρώτο ψηφίο το 3.

10) Όταν το πρόβλημα γίνει περισσότερο πολύπλοκο ο διδάσκων βρίσκει την ευκαιρία να προτείνει στους μαθητές να οργανώσουν την αρίθμηση με ένα δενδροδιάγραμμα. Με τον τρόπο αυτό γίνεται η μετάβαση από τις άτυπες ανοργάνωτες μεθόδους στην πρώτη οργανωμένη μέθοδο απαρίθμησης.
Προτεινόμενη δραστηριότητα:

Να κατασκευάσετε ένα δενδροδιάγραμμα με το οποίο θα απαντήσετε στο προηγούμενο ερώτημα. Με βάση το δενδροδιάγραμμα περιγράψτε έναν απλούστερο αριθμητικό, άμεσο τρόπο υπολογισμού των δυνατών τριψήφιων.

11) Η δομή του δενδροδιαγράμματος μπορεί να αποτελέσει το διαισθητικό πέρασμα στην πολλαπλασιαστική μέθοδο και στο σημείο αυτό να γίνει η διάκριση μεταξύ της πολλαπλασιαστικής μεθόδου απαρίθμησης από την προσθετική. Η πολλαπλασιαστική αρχή μπορεί τώρα να γίνει η βάση πάνω στην οποία θα στηριχτεί η δημιουργία του πρώτου τυπικού μοντέλου απαρίθμησης, των μεταθέσεων. Θα πρέπει να τονιστεί ότι είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να αφιερωθεί χρόνος για την διερεύνηση των ιδιοτήτων των συμβόλων, τα οποία θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές στην εξέλιξη της διδασκαλίας και των άλλων μοντέλων ιδιαίτερα δε του ν!. Η κατάκτηση της σημασίας και της χρήσης των συμβόλων από τους μαθητές θα τους επιτρέψει να χειρίζονται με ευχέρεια το τυπικό μέρος της επίλυσης ενός προβλήματος απαρίθμησης.
Προτεινόμενη δραστηριότητα:

α) Αν συμβολίσουμε $3!=1\cdot 2\cdot 3$, $4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$ κ.λ.π να γράψετε με τη βοήθεια του συγκεκριμένου συμβολισμού το πλήθος των 6ψήφιων αριθμών με διαφορετικά ψηφία που μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα ψηφία 1,2,3,4,5,6.

β) Υπάρχει ν ϵ Ν ώστε ν!=100;

γ) Να βρείτε το αριθμητικό αποτέλεσμα της παράστασης $\frac{10!\times 19!}{9!\times 20!}$ χωρίς να χρησιμοποιήσετε χαρτί και στυλό.

12) Με κατάλληλη αναδιατύπωση του αρχικού προβλήματος που είχε θέσει ο διδάσκων, ως εισαγωγή στη διδασκαλία των μεταθέσεων, μπορεί να γίνει το πέρασμα στο επόμενο μοντέλο των διατάξεων ν στοιχείων ανά κ. Η εκ νέου αναδιατύπωση του προβλήματος θα οδηγήσει στην δημιουργία του μοντέλου των επαναληπτικών διατάξεων.
Προτεινόμενη δραστηριότητα:

α) Αν με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 ήθελα να φτιάξω τετραψήφιους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία πόσους θα μπορούσα να κατασκευάσω;

β) Αν για τους παραπάνω τετραψήφιους δεν θέσω τον περιορισμό να έχουν διαφορετικά ψηφία, πόσους μπορώ να κατασκευάσω;

13) Τέλος με ένα κατάλληλο πρόβλημα (Δες δραστηριότητες Σ10, Σ11 του ΠΣ) μπορεί να γίνει διάκριση μεταξύ διατάξεων και συνδυασμών και να δημιουργηθεί το μοντέλο της απαρίθμησης συνδυασμών (υποσυνόλων) ν στοιχείων ανά κ.
Προτεινόμενη δραστηριότητα:

Ζητώ από κάποιον να πει στην τύχη 3 αριθμούς από το 1 μέχρι και το 5. Πόσες διαφορετικές τριάδες μπορεί να πει;

14) Όταν πλέον έχει ολοκληρωθεί η διδασκαλία των συνδυαστικών μοντέλων ο διδάσκων θα μπορούσε να προτείνει στους μαθητές να εφαρμόσουν τα εν λόγω μοντέλα στην εύρεση των συντελεστών του δυωνυμικού αναπτύγματος $(α+β)^ν$ μέσα από μία επαγωγική διαδικασία. Η μετάβαση από τις δυνάμεις $(α+β)^2$, $(α+β)^3$, $(α+β)^4$ θα μπορούσε να οδηγήσει τους μαθητές στον εντοπισμό του κανόνα με τον οποίο δημιουργούνται οι συντελεστές.

Τέλος μέσα από κατάλληλους συνδυαστικούς συλλογισμούς θα μπορούσε να συνδεθεί ο συντελεστής του κ όρου του αναπτύγματος με τους συνδυασμούς $\binom{\nu}{\kappa}$. (Coolidge 1949)

Ποια σημεία θα πρέπει να προσέξει ιδιαίτερα ο διδάσκων;

---

5) Η χρήση του δενδροδιαγράμματος δεν θα πρέπει να υποτιμάται ή και να παραλείπεται καθώς πάνω σε αυτό θα στηριχτεί η μετάβαση στα τυπικά μοντέλα απαρίθμησης. Επιπλέον δεν θα πρέπει να γίνει υπερβολική χρήση της μεθόδου αυτής αλλά ένα ή δύο ενδεικτικά παραδείγματα.

6) Εκτός από προβλήματα τα οποία λύνονται με βάση τους τύπους καλό θα είναι να δίνονται και προβλήματα στα οποία είναι αναγκαία συνθετότερη συνδυαστική σκέψη.
Προτεινόμενη δραστηριότητα 1:

Πόσα διαφορετικά λεκτικά μορφώματα μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα γράμματα της λέξης ¨θάλασσα¨;

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση:

Εδώ θα πρέπει η κατασκευή του μορφώματος να γίνει σε φάσεις καθώς διαθέτει επανάληψη του α 3 φορές και επανάληψη του σ 2 φορές. Για παράδειγμα θα μπορούσε να υποδειχτεί από τον διδάσκοντα να διακρίνουν οι μαθητές 3 φάσεις. Στην πρώτη φάση επιλέγουν 3 θέσεις από τις 7 και τοποθετούν το α με $\binom{7}{3}$ τρόπους. Στη δεύτερη επιλέγουν 2 θέσεις από τις 4 που έχουν απομείνει και τοποθετούν τα σ με $\binom{4}{2}$ και στην τρίτη φάση τοποθετούν τα 2 εναπομείναντα γράμματα με 2! τρόπους (μεταθέσεις 2 στοιχείων).

Προτεινόμενη δραστηριότητα 2:

Διαθέτετε ένα σύνολο με 3 στοιχεία. Πόσα υποσύνολα του συνόλου αυτού μπορείτε να κατασκευάσετε; Αν το σύνολο είχε 4 στοιχεία πόσα θα ήταν τα υποσύνολα; Αν είχε 5 στοιχεία πόσα θα ήταν τα υποσύνολα; Μπορείτε να γενικεύσετε ώστε να υπολογίζετε άμεσα το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου με ν στοιχεία;

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση:

Μία στρατηγική υπολογισμού είναι να γίνει μία εμπειρική μεν αλλά συστηματική καταγραφή των υποσυνόλων σε σύνολα που περιέχουν μικρό αριθμό στοιχείων π.χ 3, 4, 5 και για αυτά να γίνει υπολογισμός του πλήθους των υποσυνόλων αθροιστικά μέσω πρόσθεσης των συνδυασμών. Μία άλλη στρατηγική είναι να θεωρήσουμε ότι για ένα σύνολο Σ των π.χ 5 στοιχείων ζητούμε το πλήθος των πεντάδων όπου κάθε στοιχείο μπορεί να είναι ένα από τα γράμματα Α ή Δ (ανήκει ή δεν ανήκει στο Σ). Προκύπτει τελικά ότι για κάθε στοιχείο μιας πεντάδας έχουμε 2 επιλογές και επομένως η κατασκευή της πεντάδας αυτής μπορεί να γίνει με 2^5 τρόπους. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχουν 2^5 υποσύνολα του συνόλου Σ. Η γενίκευση είναι στη συνέχεια πολύ απλή.

7) Η υπερβολική ενασχόληση με θέματα που δεν σχετίζονται με προβλήματα απαρίθμησης αλλά απαιτούν σύνθετους χειρισμούς των συμβόλων και των τύπων, σε καθαρά αλγεβρικό πλαίσιο, δεν ενδείκνυται.

8) Η βασική δυσκολία των μαθητών αναμένεται να είναι η διάκριση και επιλογή του κατάλληλου μοντέλου ή της κατάλληλης στρατηγικής στην επίλυση ενός σύνθετου προβλήματος απαρίθμησης. Για την αντιμετώπιση των δυσκολιών αυτών καλό θα είναι ο διδάσκων να προτείνει τη λύση προβλημάτων που να διαθέτουν ανάλογες δομές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιων προβλημάτων είναι η εύρεση του πλήθους των χειραψιών ν ατόμων και η εύρεση του πλήθους των ευθειών που ορίζουν ν σημεία μη συνευθειακά ανά τρία.

Το κεφάλαιο της Συνδυαστικής είναι διδακτικά απαραίτητο για τον υπολογισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου με τον κλασσικό ορισμό σε ένα πείραμα τύχης. Αυτήν τη γενική προσέγγιση θα πρέπει κατά κύριο λόγο να υιοθετεί ο εκπαιδευτικός κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου.

Μπορούν τα ψηφιακά μέσα να υποστηρίξουν τη διδασκαλία της Συνδυαστικής;

Η χρήση ψηφιακών μέσων μόνο ως παιγνιώδης ολιγόλεπτη απασχόληση θα μπορούσε να ενσωματωθεί στη διδασκαλία. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο στόχος της διδασκαλίας του κεφαλαίου δεν είναι ο υπολογισμός μέσω αριθμητικών πράξεων, αλλά η εμπέδωση των μοντέλων και των στρατηγικών απαρίθμησης.

Ο παρακάτω ιστότοπος:
http://www.mathsisfun.com/combinatorics/combinations-permutations-calculator.html μπορεί να υποδειχθεί στους μαθητές, ώστε να τον επισκεφθούν εθελοντικά και να πειραματιστούν για λίγο με τις λειτουργίες και τις δυνατότητές του.

Βιβλιογραφία

1) N. L. BIGGS (1979): THE ROOTS OF COMBINATORICS Historia Mathematica 6 p.p 109-136

2) J. L. Coolidge (1949): The Story of the Binomial Theorem, by, *The American Mathematical Monthly* 56:3 pp. 147–157

ΚΕΦΑΛΑΙΑ 2^o & 3^o: Πιθανότητες – Κατανομές

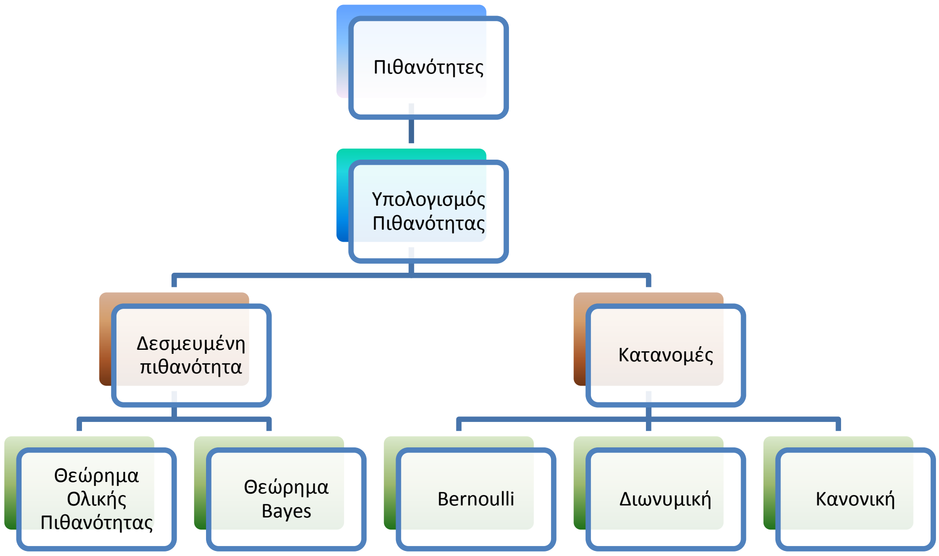
Εισαγωγή

Η Θεία Κωμωδία του Δάντη αναφέρει "παιχνίδι της τύχης" που παίζεται με τρία ζάρια και ποίημα του ψευδο-Οβίδιου του 13ου αι. απαριθμεί τους 56 διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούν να πέσουν τα ζάρια (Mankiewicz, 2002). Η ιστορία, όμως, των τυχερών παιχνιδιών είχε ήδη ξεκινήσει πολύ γρηγορότερα. Οι Δάρας και Σύψας (2010) αναφέρουν ότι ανασκαφές που έγιναν στις πυραμίδες της Αιγύπτου έφεραν στο φώς αστραγάλους προβάτων των οποίων οι τέσσερες πλευρές στις οποίες μπορούσαν να στηριχθούν, παρίσταναν τους αριθμούς 4, 3, 1 και 6 και τα οποία πιθανολογείται ότι είχαν κατασκευασθεί στην αρχαία Αίγυπτο από το 3000 π.χ. Το παιχνίδι αυτό με τους αστραγάλους ήταν γνωστό σε Έλληνες και Ρωμαίους (Χαραλαμπίδης, 2002), και πιστεύεται ότι οι Έλληνες κατασκεύασαν τα γνωστά μας ζάρια, με λείανση των καμπύλων επιφανειών και τα οποία αποκαλούσαν "τέσσερα" (Δάρας & Σύψας, 2010, σ. 4), ίσως από το σύνολο των ακμών κάθε έδρας. Πέραν όμως από τα τυχερά παιχνίδια αλλά και αυτής της πρόβλεψης του μέλλοντος με σκοπό να επηρεάσουν το πεπρωμένο, η ιστορία έχει καταδείξει ότι οι έννοιες της τύχης και της τυχαιότητας συνδέθηκαν και σε άλλους τομείς των ανθρώπινων δραστηριοτήτων. Ενδεικτικά, στην Αθηναϊκή πολιτεία, επί ισχύος της νομοθεσίας του Δράκοντα (624 ή 621 π.Χ.) και του Σόλωνα (639-559 π.Χ.), η επιλογή των αρχόντων διεξάγονταν με κλήρο. Επίσης, ο Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.) ασχολήθηκε με θέματα Πιθανοτήτων προσδιορίζοντας την έννοια του τυχαίου, χωρίς όμως να του προσδίδει επιστημονική υφή, ενώ, εν γένει οι αρχαίοι Έλληνες δεν είχαν προχωρήσει στη διαπίστωση της δυνατότητας ποσοτικοποίησης της πραγματοποίησης μελλοντικών γεγονότων (Δάρας και Σύψας,2010). Η διαδρομή προς τη δημιουργία της θεωρίας των Πιθανοτήτων και η εξέλιξή της μέχρι σήμερα είναι μακρά,[28] αλλά θεμελιωτές της θεωρούνται οι 1623-1662)και Pierre de Fermat (1601-1665). Οι και Fermat χάραξαν τις θεμελιώδεις αρχές του κλάδου μέσα από πυκνή και ενδιαφέρουσα αλληλογραφία το 1654 στην προσπάθειά τους να επιλύσουν ένα πρόβλημα κυβοπαιξίας που έθεσε ο Γάλλος ευγενής Chevalier de Mere στον (Apostol, 1962; Bell, 1998; Mankiewicz, 2002). Η θεωρία ξεκίνησε με αφορμή ένα τυχερό παιχνίδι και η δημοσίευση της θεωρίας από τον Christiaan Huygens (1629-1695), ο οποίος έλαβε γνώση της αλληλογραφίας των και Fermat, προκάλεσε λόγω του θέματος το γενικό ενδιαφέρον, όμως, ο (1749-1827) έδειξε ότι η θεωρία θα μπορούσε να επεκταθεί σε πολλά επιστημονικά και πρακτικά προβλήματα (Apostol, 1962). Η θεωρία Πιθανοτήτων, όπως εξελίχθηκε στη συνέχεια εμπλέκεται στη Στατιστική στη Θεωρία Σφαλμάτων, και τα Οικονομικά μαθηματικά με εφαρμογές, εν γένει, από την κβαντική θεωρία ως την επιστημολογία (Apostol, 1962; Bell, 1998).

Τι περιέχει το κεφάλαιο των πιθανοτήτων και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

Το κεφάλαιο των πιθανοτήτων αναφέρεται σε επιλεγμένα μοντέλα υπολογισμού της πιθανότητας ενός ενδεχομένου. Συγκεκριμένα, περιλαμβάνει την δεσμευμένη πιθανότητα και αναφέρεται στην έννοια της κατανομής μέσω της έννοιας της διακριτής ή της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής. Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται η δομή του κεφαλαίου σε σχέση με το περιεχόμενό του.

[28] Ο σύνδεσμος οδηγεί σε χρονολόγιο Πιθανοτήτων και Στατιστικής του Department of Mathematical Sciences, του Πανεπιστημίου του Texas στο El Paso:http://www.math.utep.edu/Faculty/mleung/probabilityandstatistics/chronologypage1.html



Σε προηγούμενη τάξη του Λυκείου οι μαθητές γνώρισαν τις πρώτες, τις βασικές έννοιες θεωρίας πιθανοτήτων. Διαπίστωσαν ότι είναι πολύ σημαντικό να μπορούν να βρίσκουν το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου αφού αυτό προϋποθέτει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας. Οι γνώσεις που απέκτησαν εκεί οι μαθητές είναι αρκετές για να υπολογίσουν πιθανότητες ενδεχομένων σε απλά πειράματα τύχης. Για να το πετύχουν αυτό αρκεί η χρήση του δενδροδιαγράμματος ή της απλής, άμεσης καταγραφής των απλών ενδεχομένων. Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές που έχουν επιλέξει τον προσανατολισμό των θετικών σπουδών, θα κληθούν να λύσουν προβλήματα περισσότερο σύνθετα και επομένως ο μαθηματικός εξοπλισμός τους θα πρέπει να είναι ανάλογος. Η δεσμευμένη πιθανότητα είναι η αφετηρία στην εισαγωγή των νέων εννοιών και από την επέκταση των εφαρμογών της έννοιας αυτής θα προκύψουν δύο ιδιαίτερα σημαντικές προτάσεις, το θεώρημα της ολικής πιθανότητας και το θεώρημα του Bayes. Ο γενικός ορισμός της πιθανότητας θα δώσει το περίγραμμα μέσα στο οποίο θα κινηθεί η μελέτη της έννοιας της πιθανότητας και θα προετοιμάσει το εννοιολογικό πλαίσιο στο οποίο θα οριστούν νέες έννοιες. Δύο πολύ σημαντικές νέες έννοιες είναι αυτή της τυχαίας μεταβλητής και η έννοια της συνάρτησης πιθανότητας με τα μέτρα της αναμενόμενης ή μέσης τιμής και της διακύμανσης ή της διασποράς. Τέλος θα μελετηθούν η κατανομή Bernoulli, η διωνυμική κατανομή και η κανονική κατανομή καθώς οι δύο πρώτες αντιπροσωπεύουν τις διακριτές τυχαίες μεταβλητές και η άλλη τις συνεχείς. Το κεφάλαιο θα ολοκληρωθεί με την προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής από την κανονική κατανομή.

Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο των Πιθανοτήτων;

Η διάσταση της εφαρμογής και η πολιτιστική – κοινωνική διάσταση είναι δυο απο τις διαστάσεις των Μαθηματικών που χαρακτηρίζουν ιδιαίτερα το περιεχόμενο του κεφαλαίου των πιθανοτήτων.
Η προσπάθεια των ανθρώπων να προβλέπουν το μέλλον έχει την ίδια ηλικία με την ανθρώπινη φύση. Αυτή η προσπάθεια, ακολούθησε είτε τη διαδρομή των μεταφυσικών, αστρολογικών και γενικά μη επιστημονικών προσεγγίσεων, είτε τη διαδρομή της επιστημονικής μελέτης και δημιουργίας Μαθηματικών μοντέλων πρόβλεψης.
Στην πρώτη διαδρομή λέμε ότι το μέλλον εξαρτάται από τη μοίρα, στη δεύτερη διαδρομή το μέλλον εξαρτάται από νόμους, κανονικότητες και στατιστικές διακυμάνσεις (Μόδης 1995).
Στο παρόν κεφάλαιο, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να διαπιστώσουν τη σημασία του υπολογισμού μιας πιθανότητας στη λήψη κάποιας απόφασης. Να γνωρίσουν τη σημασία των πιθανοθεωρητικών μεθόδων στην ανάπτυξη της επιστήμης (Βιολογία, Φυσική, Μετεωρολογία), της οικονομίας

(προβλέψεις ανάκαμψης, ύφεσης, επιλογή επενδύσεων), της Ιατρικής (προσδόκιμο ζωής, αναμενόμενη εξάπλωση ασθενειών). Αυτό όμως που κατεξοχήν αναδεικνύει την ιδιαίτερη σημασία του κεφαλαίου των Πιθανοτήτων, είναι το γεγονός ότι οι μαθητές εισάγονται σταδιακά σε έναν άλλο χώρο και τρόπο σκέψης, στο στοχαστικό. Ο στοχαστικός γραμματισμός, ο οποίος ολοκληρώνεται με το κεφάλαιο της Στατιστικής, αποτελεί μία ανάγκη της σύγχρονης αντίληψης για την Μαθηματική παιδεία καθώς σηματοδοτεί την αναγνώριση της αξίας μη αιτιοκρατικών προσεγγίσεων των γεγονότων του κόσμου. Αναγνωρίζει το γεγονός της αβεβαιότητας και της μεταβλητότητας στην συλλογή δεδομένων και επιτρέπει στους ανθρώπους να παίρνουν αποφάσεις υπό το φως της αβεβαιότητας. (Cockcroft, 1982).

Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο των Πιθανοτήτων;

Το κεφάλαιο των Πιθανοτήτων στην Γ΄ Λυκείου στην ουσία οδηγεί τους μαθητές από τις απλές, σχεδόν εμπειρικές αριθμητικές μεθόδους υπολογισμού μιας πιθανότητας σε ένα χώρο όπου τα σύνθετα προβλήματα απαιτούν μία περισσότερο αναπτυγμένη στρατηγική και νέα Μαθηματικά εργαλεία. Συγκεκριμένα:

Α) Οι δύο νέες σημαντικές έννοιες πάνω στις οποίες στηρίζεται η περαιτέρω Μαθηματικοποίηση του χώρου των Πιθανοτήτων είναι η τυχαία μεταβλητή και η κατανομή πιθανότητας. Τυχαία μεταβλητή Χ είναι μία συνάρτηση η οποία σε κάθε στοιχείο α_i του δειγματικού χώρου Ω αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό $X(\alpha_i)$. Κατανομή πιθανοτήτων είναι το σύνολο των ζευγών (x_i, p_i) όπου x_i είναι τιμή της μεταβλητής Χ και το p_i ανήκει στο διάστημα[0, 1]. Ο ορισμός πλέον αφορά όχι μόνο σε δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα ενδεχόμενα αλλά και σε χώρους με μη ισοπίθανα ενδεχόμενα.

Β) Ο γενικός (αξιωματικός) ορισμός της πιθανότητας επιχειρεί να μεταφέρει τις απλές διαισθητικές παραδοχές του κλασικού ορισμού (που έχει διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις) στον τυπικό, αφηρημένο χώρο της Μαθηματικής αυστηρότητας. Η κλίμακα μέτρησης πιθανοτήτων είναι από το 0 μέχρι το 1.

Γ) Οι πρόσθετες πληροφορίες άλλοτε μεταβάλλουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου και άλλοτε όχι.

Δ)Αν σε ένα πείραμα τύχης τα δυνατά αποτελέσματα είναι δύο (επιτυχία, αποτυχία) τότε κατατάσσουμε το πείραμα στις δοκιμές Bernoulli. Η πιθανότητα να έχουμε x επιτυχίες σε ν ανεξάρτητες δοκιμές με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p $P(X=x)$ αποτελεί τη συνάρτηση πιθανότητας μιας κατανομής που λέγεται διωνυμική.

Ε) Το ιστόγραμμα της κανονικής κατανομής έχει κωδωνοειδή μορφή και η κανονικοποίηση της κατανομής αυτής μας επιτρέπει να υπολογίζουμε πιθανότητες με χρήση έτοιμων πινάκων.

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

---

1) Σε ποια περίπτωση ένα πείραμα χαρακτηρίζεται πείραμα τύχης ;
2) Πως μπορούμε να εκφράσουμε ένα σύνθετο ενδεχόμενο με τη γλώσσα των συνόλων;
3) Ποιοι είναι οι 3 ορισμοί της πιθανότητας ενός ενδεχομένου και ποιες είναι οι διαφορές και οι ομοιότητες των ορισμών αυτών;
4) Ποια είναι η σημασία του νόμου των μεγάλων αριθμών;
5) Πως αξιοποιούνται τα μοντέλα της συνδυαστικής στον υπολογισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου;
6) Ποιες είναι οι βασικές σχέσεις στον λογισμό των πιθανοτήτων;
7) Σε τι διαφέρει η έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας από την απλή και ποια είναι η σημασία της κατά τον έλεγχο της στοχαστικής ανεξαρτησίας δύο ενδεχομένων;

8) Πότε χρησιμοποιούμε το θεώρημα της ολικής πιθανότητας και πότε το θεώρημα Bayes;
9) Τι είναι η τυχαία μεταβλητή και ποια τα είδη της; Πως ορίζεται η κατανομή πιθανότητας και η συνάρτηση πιθανότητας στις τυχαίες διακριτές μεταβλητές;
10) Σε ποια πειράματα τύχης χρησιμοποιούμε την κατανομή Bernoulli και πως συνδέεται αυτή με τη διωνυμική κατανομή;
11) Ποια είναι η σημασία της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής πιθανότητας και πως αξιοποιείται σε πειράματα τύχης στα οποία η τυχαία μεταβλητή είναι διακριτή;
12) Ποια είναι η χρησιμότητα της αναμενόμενης τιμής και της διασποράς μιας τυχαίας μεταβλητής;
13) Σε τι διαφέρει η τυχαία διακριτή μεταβλητή από τη συνεχή και πως ορίζονται τα χαρακτηριστικά μεγέθη της τελευταίας; (συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της πιθανότητας, η μέση τιμή και η διασπορά)
14) Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της κανονικής κατανομής και πως και για ποιον λόγο μετασχηματίζουμε την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ στην $N(0, 1)$;
15) Ποια είναι η σημασία των παραμέτρων μ και σ της κανονικής κατανομής σε καταστάσεις των οποίων τα αριθμητικά δεδομένα ακολουθούν την κανονική κατανομή;

Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Μ1) Τα θεμέλια της στοχαστικής σκέψης είναι οι βασικές, οι πρωταρχικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων τις οποίες οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν σε υψηλότερο επίπεδο από αυτό που διδάχτηκαν στην Α΄ τάξη. Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να αξιοποιήσουν τις βασικές γνώσεις της Συνδυαστικής ώστε να μπορούν να υπολογίζουν ορισμένα βασικά μεγέθη όπως το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου, του ενδεχομένου, του συμπληρωματικού ενδεχομένου. (Δραστηριότητα Δ1).

Μ2) Επιπλέον θα πρέπει να μπορούν να μεταφράσουν τα ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης στην τυπική γλώσσα των συνόλων και να τα παριστούν με διαγράμματα (στόχοι 2.1.1 και 2.1.2)
(Δραστηριότητα Δ2)

Μ3) Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν την ανάγκη η οποία οδήγησε τη μαθηματική κοινότητα να κατασκευάσει, με πρωτεργάτη τον Kolmogorov, τον γενικό (αξιωματικό) ορισμό της πιθανότητας. Επιπλέον θα πρέπει να μπορούν να αναγνωρίζουν τις ομοιότητες και τις διαφορές του με τον κλασικό ορισμό. (Στόχοι ΠΣ 2.2.1 και 2.2.3)
(Δραστηριότητα Δ3)

Μ4) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να συνδέσουν την έννοια της σχετικής συχνότητας με τον πειραματικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου ως όριο της σχετικής συχνότητας όταν ν→
(ν το πλήθος των παρατηρήσεων). (Στόχος 2.2.3)
(Δραστηριότητα Δ4)

Μ5) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να επιλέγουν τον κατάλληλο συνδυασμό των μοντέλων της Συνδυαστικής που έχουν διδαχτεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, ώστε να υπολογίζουν με τον κλασικό ορισμό την πιθανότητα ενός ενδεχομένου. (Στόχος 2.2.2)
(Δραστηριότητα Δ5)

Μ6) Οι μαθητές έχουν διδαχτεί στην Α΄ τάξη στοιχειώδεις κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων. Μέσα από μία σύντομη επανάληψη των συγκεκριμένων κανόνων οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να υπολογίσουν πιθανότητες σύνθετων ενδεχομένων ή να συσχετίζουν πιθανότητες σύνθετων ενδεχομένων όπως $P(A \cup B')$ (Στόχος 2.3.1). Κατάλληλα διατυπωμένα προβλήματα θα μπορούσαν να υποστηρίξουν τη διδασκαλία σε αυτό το σημείο. (Δραστηριότητα Δ6)

Μ7) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να αναγνωρίζουν σε ένα πείραμα τύχης τα ενδεχόμενα που είναι στοχαστικά εξαρτημένα και σε αυτή την περίπτωση να υπολογίζουν την πιθανότητά τους. (Στόχος 2.4.1)
(Δραστηριότητα Δ7)

Μ8) Οι μαθητές θα πρέπει να κατανοήσουν τη σημασία του θεωρήματος της ολικής πιθανότητας όταν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης μπορεί να θεωρηθεί ως ένωση δύο ξένων ενδεχομένων. Εδώ το σημαντικό είναι να μπορούν οι μαθητές να διακρίνουν την στενή σχέση, αλλά και την διαφορετική χρηστική αξία του θεωρήματος του Bayes με το θεώρημα της ολικής πιθανότητας. Στην ουσία θα πρέπει να γνωρίζουν ότι το θεώρημα Bayes συσχετίζει πιθανότητες της μορφής $P(A|B)$ με πιθανότητες της μορφής $P(B|A)$. (Στόχοι 2.4.4 και 2.4.5) (Δραστηριότητα Δ8)

Μ9) Οι μαθητές θα πρέπει να αναγνωρίσουν στον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής την πρόθεση των Μαθηματικών να ξεπεράσουν τα στενά εμπειρικά πλαίσια του κλασικού ορισμού και να δομηθεί ο χώρος των πιθανοτήτων με αυστηρά Μαθηματικό τρόπο. Αυτό που θα πρέπει να υπογραμμιστεί είναι ότι όλες οι νέες έννοιες που εισάγονται στην Γ΄ Λυκείου για τον χώρο των Πιθανοτήτων έχουν στόχο την επέκταση της μελέτης πειραμάτων τύχης στα οποία τα στοιχειώδη ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα. Επιπλέον θα πρέπει να γνωρίζουν ότι η τυχαία μεταβλητή είναι συνάρτηση με την οποία σε ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου αντιστοιχούμε πραγματικούς αριθμούς. Τέλος θα πρέπει να γνωρίζουν ότι η συνάρτηση πιθανότητας είναι αυτή που σε κάθε τιμή της τυχαίας μεταβλητής αντιστοιχεί την πιθανότητά της. (Στόχοι 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3)
(Δραστηριότητα Δ9)

Μ10) Οι μαθητές θα πρέπει καταρχήν να μπορούν να διακρίνουν την κατανομή Bernoulli από την διωνυμική κατανομή καθώς και τις συναρτήσεις πιθανοτήτων των δύο κατανομών. Επιπλέον θα πρέπει να είναι ικανοί να αξιοποιήσουν την διωνυμική κατανομή και την αναμενόμενη τιμή σε πειράματα τύχης που μπορεί να θεωρηθούν δοκιμές Bernoulli. (Στόχοι 3.3.1 – 3.3.6)
(Δραστηριότητα Δ10)

Μ11) Οι μαθητές μέσα από ένα πρόβλημα που συνδέεται με την διωνυμική κατανομή θα πρέπει να κατασκευάσουν την αθροιστική συνάρτηση κατανομής ώστε να κατανοήσουν τη σημασία και τη χρησιμότητα της συγκεκριμένης έννοιας.
(Δραστηριότητα Δ9)

Μ12) Οι μαθητές θα πρέπει σε ρεαλιστικά προβλήματα να αξιοποιούν την έννοια της τυπικής απόκλισης μιας τυχαίας μεταβλητής Χ, σε συνδυασμό με την αναμενόμενη τιμή της, ώστε να μπορούν να εντοπίζουν αναμενόμενα διαστήματα στα οποία υλοποιείται ή όχι ένα προσδοκώμενο αποτέλεσμα.
(Δραστηριότητα Δ11)

Μ13) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να διακρίνουν αν μία τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής ή διακριτή και στην περίπτωση της συνεχούς να συνδέσουν και να υπολογίζουν την πιθανότητα με το

εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και πάνω από τον οριζόντιο άξονα.
(Δραστηριότητα Δ12)

Μ14) Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν τη σημασία του μετασχηματισμού της $N(\mu, \sigma^2)$ στην $N(0,1)$. Επιπλέον θα πρέπει να μπορούν να αξιοποιούν πίνακες ώστε να υπολογίζουν πιθανότητες ενδεχομένων όταν η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής είναι η κανονική.
(Δραστηριότητα Δ13)

Μ15) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να υπολογίσουν βασικές παραμέτρους της κανονικής κατανομής σε ένα πραγματικό πρόβλημα με ρεαλιστικά αριθμητικά δεδομένα και να αξιοποιούν τη σημασία τους στο συγκεκριμένο πρόβλημα.
(Δραστηριότητα Δ14)

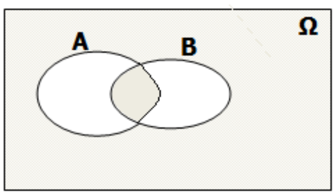
Προτεινόμενες δραστηριότητες.

Δ1) Από όλους τους τριψήφιους θετικούς ακεραίους αριθμούς με διαφορετικά ψηφία που μπορούμε να δημιουργήσουμε με τα ψηφία 2, 3, 5, 7, 8 επιλέγουμε έναν στην τύχη.

α) Πόσα στοιχεία έχει ο δειγματικός χώρος;

β) Αν Α το ενδεχόμενο ο αριθμός που επιλέξαμε να είναι ζυγός να βρεθεί το πλήθος των στοιχείων του Α και του Α΄.

Δ2) Να συμπληρωθούν τα κελιά του πίνακα

Φυσική γλώσσα	**Συμβολική γλώσσα συνόλων**	**Διαγράμματα**
Συμβαίνουν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α, Β ή δεν συμβαίνει κανένα.		
	$(A\text{-}B)\cup(B\text{-}A)$	
		 Το γραμμοσκιασμένο ενδεχόμενο.

Δ3) Να γίνει μία μικρή ιστορική αναδρομή της εξέλιξης του ορισμού των πιθανοτήτων με αφετηρία το Laplace, ο οποίος συστηματοποίησε το λογισμό των πιθανοτήτων με βάση τον κλασικό ορισμό. Θα πρέπει να τονιστεί ότι ο κλασικός ορισμός αναφέρεται σε ισοπίθανα ενδεχόμενα. Στη συνέχεια να γίνει αναφορά στην προσέγγιση της έννοιας της πιθανότητας μέσω της σχετικής συχνότητας ν επαναλήψεων ενός πειράματος τύχης (πειραματικός ορισμός) για πολύ μεγάλο ν (νόμος των μεγάλων αριθμών). Τέλος να γίνει σύντομη αναφορά στην γενικευμένη πιθανότητα, η οποία πολλές φορές αναφέρεται και ως αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας.

Δ4) Να αναφερθούν από τον διδάσκοντα τα αποτελέσματα μεγάλου πλήθους πειραμάτων των Hodges και Lehman (Κουνιάς, Μωυσιάδης 1995) Στα συγκεκριμένα πειράματα υλοποιήθηκαν 5000 ρίψεις ενός ζαριού χωρισμένες σε 20 ομάδες των 250 ρίψεων η κάθε μία. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η σχετική συχνότητα της εμφάνισης του 1 ή του 2 σε κάθε μία από τις 20 ομάδες ρίψεων ήταν μεταξύ 0,276 και 0,372 ενώ η κλασική πιθανότητα είναι $\frac{2}{6}=0,333$.

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5182?locale=el

http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/5196?locale=el

Δ5) Ένα κλασικό και ιδιαίτερα ενδιαφέρον θέμα διαπραγμάτευσης με τους μαθητές είναι το πρόβλημα της σύμπτωσης γενεθλίων. Συγκεκριμένα ο διδάσκων μπορεί να δημιουργήσει κατάλληλη κινητοποίηση στους μαθητές υλοποιώντας την παρακάτω δραστηριότητα: Επιλέγει, δήθεν μετά από κάποια περίσκεψη, έξι μαθητές και τους ανακοινώνει ότι μεταξύ τους υπάρχουν δύο που έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα. Επειδή τις περισσότερες φορές η συγκεκριμένη πρόβλεψη είναι επιτυχής οι μαθητές διερωτούνται πως είναι δυνατόν να το γνωρίζει αυτό ο διδάσκων. Στο σημείο αυτό ζητά από τους μαθητές να διατυπώσουν και να λύσουν το αντίστοιχο πρόβλημα κάνοντας χρήση συνδυαστικών μοντέλων.

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση: Θα πρέπει να γίνει διαπραγμάτευση με τους μαθητές ώστε να επιλεγεί η βέλτιστη στρατηγική για τον υπολογισμό της ζητούμενης πιθανότητας. Αν Α το ενδεχόμενο να έχουν γεννηθεί όλοι οι μαθητές σε διαφορετικούς μήνες τότε ζητάμε την πιθανότητας $1-P(A)=1-\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{12^6}=0,78$. Στη συνέχεια θα ήταν χρήσιμο να συζητηθεί κάθε πόσες επαναλήψεις του πειράματος αναμένουμε αποτυχία.

http://statweb.stanford.edu/~susan/surprise/Birthday.html

Δ6) Σε ένα σχολείο γνωρίζουμε ότι το 40% των μαθητών ασχολείται με τον αθλητισμό αλλά δεν γνωρίζει κάποιο μουσικό όργανο. Το 15% των μαθητών γνωρίζει κάποιο μουσικό όργανο αλλά δεν ασχολείται με τον αθλητισμό. Το 20% των μαθητών δεν γνωρίζει κάποιο μουσικό όργανο ούτε ασχολείται με τον αθλητισμό. Επιλέγουμε στην τύχη έναν μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα να ασχολείται με τον αθλητισμό και συγχρόνως να γνωρίζει κάποιο μουσικό όργανο;

Να υπολογίσετε την ζητούμενη πιθανότητα αφού πρώτα μεταφράσετε τα δεδομένα στην συμβολική γλώσσα των πιθανοτήτων.

Δ7) Η παρακάτω δραστηριότητα θα μπορούσε να αξιοποιηθεί κατά την εισαγωγή της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας.

Σε μία φιλική συγκέντρωση βρέθηκαν 9 άτομα διαφόρων ηλικιών όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

ΟΝΟΜΑ	**ΗΛΙΚΙΑ (έτη)**
Μαρία	21
Βασιλική	26
Γιώργος	30
Κατερίνα	34
Πέτρος	28
Νίκος	40
Αργύρης	24
Άννα	38
Βασίλης	31

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

Η: η ηλικία ενός ατόμου να είναι άνω των 30 ετών.

Α: το άτομο είναι άνδρας

Γ: το άτομο είναι Γυναίκα

Να υπολογίσετε και να συγκρίνετε τις πιθανότητες: Ρ(Η), την πιθανότητα να είναι άνδρας άνω των 30 ετών, την πιθανότητα να είναι γυναίκα άνω των 30 ετών. Να εξηγήσετε τον λόγο για τον οποίο η Ρ(Η) διαφέρει από τις άλλες δύο πιθανότητες.

Δ8) Ένας από τους καθηγητές Μαθηματικών σε κάποιο Λύκειο έβαλε ωριαίο διαγώνισμα σε 2 τμήματα της Β΄ Λυκείου. Συγκέντρωσε 24 γραπτά από το τμήμα Β1 και 26 γραπτά από το τμήμα Β2. Διόρθωσε τα γραπτά και διαπίστωσε ότι το 10% των μαθητών στο Β1 και το 20% των μαθητών στο Β2 βαθμολογήθηκαν κάτω από τη βάση. Τα γραπτά όμως δεν ταξινομήθηκαν κατά τμήμα και βρέθηκαν μέσα στο συρτάρι του καθηγητή ανακατεμένα. Ο καθηγητής παίρνει στην τύχη ένα γραπτό.

α) Ποια είναι η πιθανότητα το γραπτό να έχει βαθμό κάτω από τη βάση;

β) Αν το γραπτό έχει βαθμό κάτω από τη βάση, ποια είναι η πιθανότητα να προέρχεται από το τμήμα Β1;

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση: Εδώ καλό θα είναι το πρώτο ερώτημα να απαντηθεί με χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας θεωρώντας Ω=(Β1)U(Β2) καθώς $(B1)\cap(B2)=\varnothing$

Το δεύτερο ερώτημα είναι απλή εφαρμογή του θεωρήματος Bayes.

Δ9) Δύο φίλοι, ο Α και ο Β, παίζουν το εξής παιγνίδι. Ο Α παίρνει δύο μπάλες, τυχαία χωρίς επανάθεση, από ένα κουτί που περιέχει 10 μπάλες αριθμημένες μία προς μία από το 1 μέχρι και το 10. Αν μία τουλάχιστον από τις μπάλες φέρει αριθμό μεγαλύτερο του 7 κερδίζει ο Α διαφορετικά κερδίζει ο Β. Ποιος από τους δύο έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει;

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση: Η συγκεκριμένη δραστηριότητα θα μπορούσε να αξιοποιηθεί στην εισαγωγή της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής. Ο διδάσκων έχει την ευκαιρία να δείξει στους μαθητές τον τρόπο με τον οποίο καθορίζεται μία τυχαία μεταβλητή ώστε να είναι κατάλληλη για το συγκεκριμένο πρόβλημα και πως αξιοποιείται η έννοια της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής. Αν για παράδειγμα ορίσει ως μεταβλητή Χ τον μεγαλύτερο αριθμό από τις δύο μπάλες τότε οι τιμές της μεταβλητής είναι 2, 3, 4, …..10. Οι πιθανότητες για κάθε ευνοϊκή τιμή της μεταβλητής Χ είναι:

$$P(X=10)=\frac{9}{\binom{10}{2}}=0{,}200,\quad P(X=9)=\frac{8}{\binom{10}{2}}=0{,}177,\quad P(X=8)=\frac{7}{\binom{10}{2}}=0{,}155$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς ο Α έχει ελαφρώς μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει καθώς $P(X>7)\approx0{,}200+0{,}177+0{,}155=0{,}532$. Στο σημείο αυτό είναι ευκαιρία να γίνει αναφορά στην αθροιστική συνάρτηση κατανομής $P(X\leq\kappa)$ η οποία στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα έχει τη μορφή $P(X\leq6)= P(X=1)+ P(X=2)+ P(X=3)+ P(X=4)+ P(X=5)+ P(X=6)$. Τέλος θα ήταν χρήσιμο να συνδεθούν οι $P(X>7)$ και η $P(X\leq6)$ μέσα από τη σχέση
$P(X>7) =1- P(X\leq6)$.
Παρατήρηση: Προφανώς το πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί και χωρίς τον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής κάτι που ίσως επισημάνουν και οι ίδιοι οι μαθητές.

Δ10) Σημαδεύουμε με ένα μικρό μπαλάκι ένα κουτί σε ορισμένη απόσταση. Η πιθανότητα να το πετύχουμε σε μία ρίψη είναι 0,3. Ρίχνουμε το μπαλάκι ώστε να πετύχουμε δύο φορές το κουτί ή να αποτύχουμε 2 φορές οπότε και σταματά το πείραμα.

α) Να ορίσετε τυχαία μεταβλητή Χ η οποία να παίρνει τιμές το πλήθος των ρίψεων στις οποίες σταματά το πείραμα και να βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας στο παραπάνω πείραμα.

β) Να υπολογίσετε την μέση τιμή Ε[Χ]. Πόση θα ήταν αυτή η μέση τιμή αν η επιτυχία και η αποτυχία ήταν ισοπίθανες;

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση: Ο στόχος της δραστηριότητας είναι να εμπλακούν οι μαθητές σε μία διαδικασία κατασκευής μιας απλής συνάρτησης πιθανότητας. Συγκεκριμένα η τυχαία μεταβλητή του πρώτου ερωτήματος παίρνει δύο τιμές Χ=2 και Χ=3 καθώς απαιτούνται 2 ή 3 το πολύ ρίψεις για να ολοκληρωθεί το πείραμα. Η συνάρτηση πιθανότητας καλό θα είναι να τεθεί σε διαπραγμάτευση ώστε να προκύψει ότι αυτή είναι $P[X=2]=(0{,}3)^2+(0{,}7)^2=0{,}58$ και $P[X=3]=1-P[X=2]=0{,}42$.

Η μέση τιμή είναι: E[X]=2·0,58+3·0,42=2,42. Αυτό σημαίνει ότι είναι περισσότερο πιθανό το πείραμα να ολοκληρωθεί σε 2 ρίψεις παρά σε 3. Αν η επιτυχία του στόχου ή η αποτυχία ήταν ισοπίθανες τότε P[X=2]=P[X=3]=0,5 και E[X]=2,5. Στην τελευταία περίπτωση παρατηρούμε ότι η μέση τιμή ισαπέχει κατά κάποιον τρόπο από τις τον αριθμό 2 και 3 και επομένως δεν προκρίνει καμία τιμή της X.

Δ11) Ένας παίκτης σε μία ομάδα μπάσκετ κατά το πρώτο ημίχρονο ενός αγώνα της ομάδας του έχει ποσοστό επιτυχίας 40% στα τρίποντα. Με την προϋπόθεση ότι ο παίκτης θα διατηρήσει σταθερό το ποσοστό των επιτυχιών στα τρίποντα και κατά το δεύτερο ημίχρονο:

α) Να κατασκευάσετε την συνάρτηση πιθανότητας του παίκτη για κ επιτυχίες σε ν σουτ τριών πόντων.

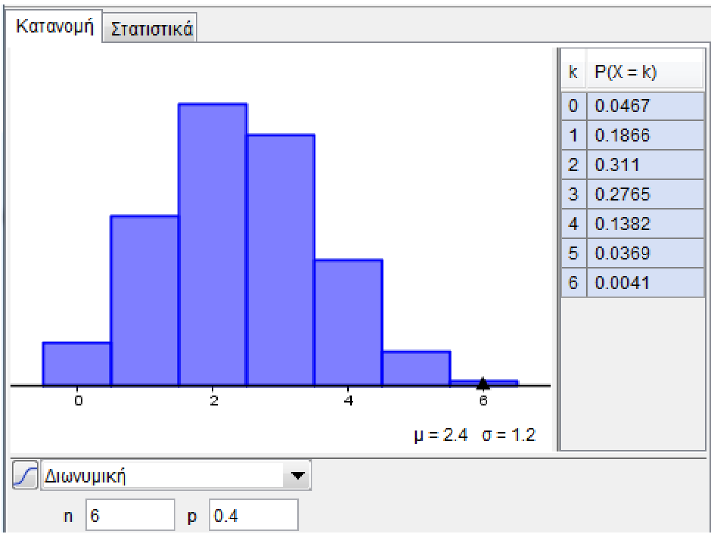
β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα σε 6 σουτ τριών πόντων να έχει τουλάχιστον 3 επιτυχίες.

γ) Για τα 6 σουτ του δευτέρου ερωτήματος να υπολογίσετε την αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής που έχετε ορίσει στο πρώτο ερώτημα και την διασπορά. Ποια είναι η σημασία των δύο αυτών ποσοτήτων για τον συγκεκριμένο παίκτη στον συγκεκριμένο αγώνα;

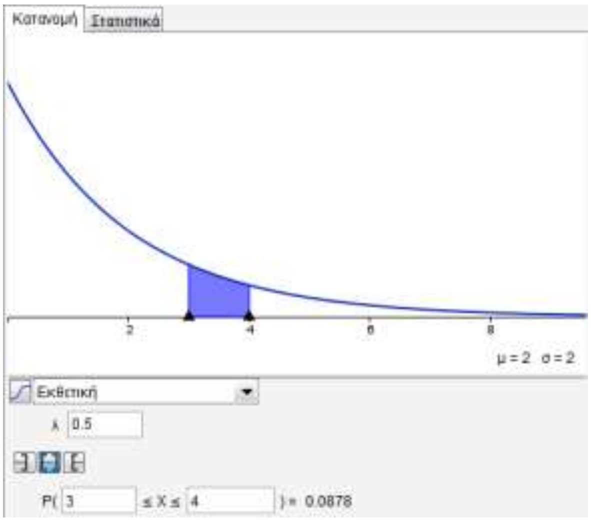
Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση: Η δραστηριότητα αυτή θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως αρχική εφαρμογή για την εμπέδωση της διωνυμικής κατανομής και των μέτρων της.

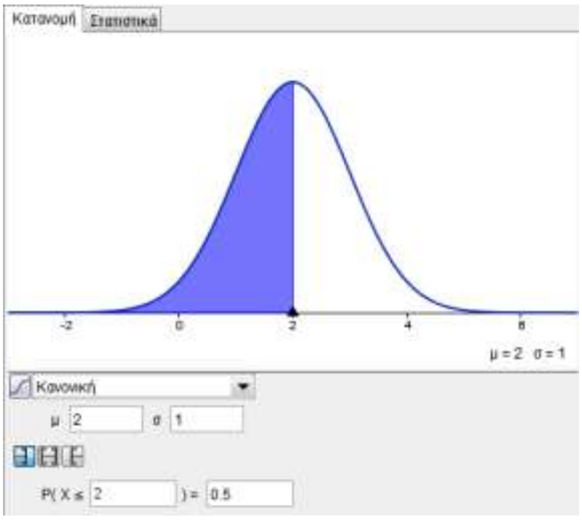
- α) $P(X=\kappa)=\binom{\nu}{\kappa}\cdot 0{,}4^{\kappa}\cdot 0{,}6^{\nu-\kappa}$
- β) Αν X η τυχαία μεταβλητή των επιτυχημένων σουτ τριών πόντων τότε ζητάμε την P(X≥3) η οποίας θα υπολογιστεί ως συμπληρωματική της πιθανότητας να έχει 0 ή 1 ή 2επιτυχημένες βολές $P(X\geq 3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$
- γ) Στο τρίτο ερώτημα η αναμενόμενη τιμή E[X]=6·0,4=2,4 εκφράζει τον προσδοκώμενο αριθμό από επιτυχημένες βολές του παίκτη. Με την τυπική απόκλιση $\sigma=\sqrt{6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}=1{,}2$ θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι ο παίκτης είναι ιδιαίτερα πιθανό να έχει τουλάχιστον 2 επιτυχίες και το πολύ 3 ή μάλλον 4 επιτυχίες.

Τα παραπάνω μπορούν να παρασταθούν συνολικά σε ένα γράφημα και έναν πίνακα ώστε οι μαθητές να έχουν μία πληρέστερη εικόνα των ποσοτήτων που υπολόγισαν αριθμητικά.

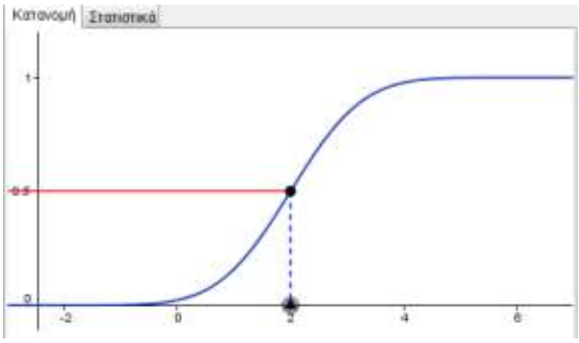


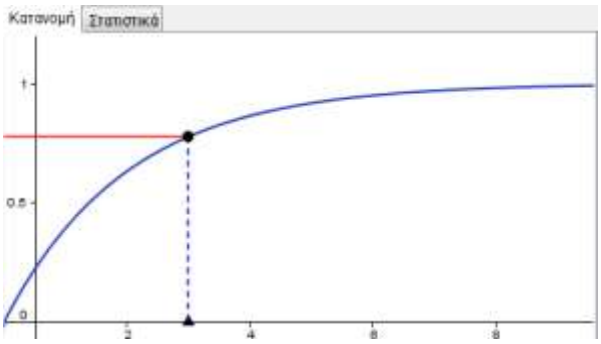
Δ12) Παρατηρήστε τις παρακάτω παραστάσεις κατανομών 2 διαφορετικών συνεχών τυχαίων μεταβλητών. Τι πληροφορίες μπορούμε να αντλήσουμε από το γράφημα και τα αριθμητικά δεδομένα; Σε τι διαφέρουν οι δύο κατανομές; Τι το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό έχει η δεύτερη κατανομή;



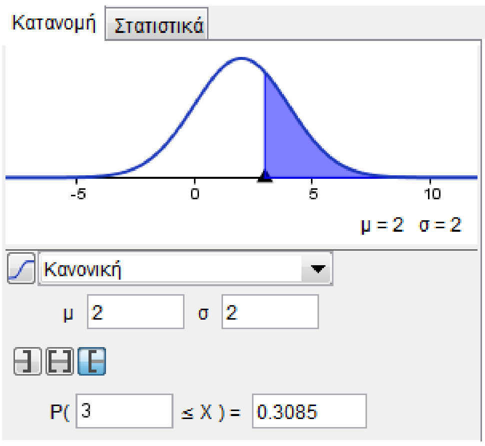


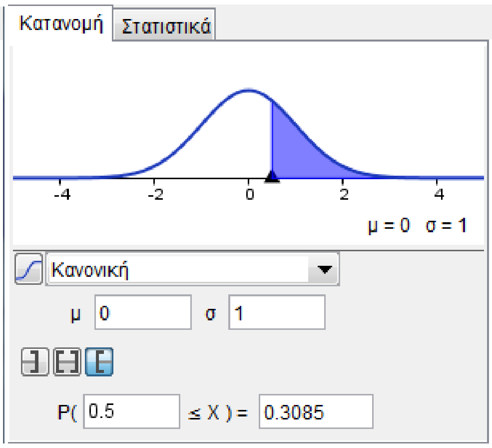
Από τα παρακάτω γραφήματα αθροιστικών κατανομών ποιο αντιστοιχεί στην πρώτη (αριστερή εικόνα) και ποιο στην δεύτερη (δεξιά εικόνα) κατανομή;





Δ13) Με βάση τα παρακάτω διαγράμματα να συγκρίνετε την P(X≥3), όταν η κατανομή της X είναι η N(2, 4), με την P(X≥0.5) όταν η κατανομή είναι η N(0, 1).

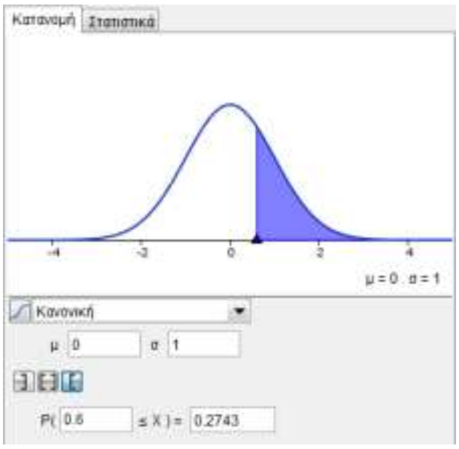




Σημείωση: Εδώ προτείνεται να υποδειχτεί από τον διδάσκοντα να εφαρμόσουν οι μαθητές στην κατανομή N(2, 4) τον μετασχηματισμό Z=(X-μ)/σ στην τιμή X=3.

Δ14) Ο Στέφανος είναι μαθητής Λυκείου στον θετικό προσανατολισμό και έχει παρατηρήσει ότι ξοδεύει κατά μέσο όρο μ= 20 € την εβδομάδα. Όταν διδάχτηκε το κεφάλαιο των πιθανοτήτων, και ειδικά την κανονική κατανομή, υπέθεσε ότι τα έξοδά του ακολουθούν κανονική κατανομή και πρόσεξε ότι θα ήταν ρεαλιστικό να θεωρήσει ότι η τυπική απόκλιση είναι σ=5 €. Για την επόμενη εβδομάδα το μέγιστο ποσό που μπορεί να εξασφαλίσει είναι 23 €. Ποια είναι η πιθανότητα να μην μπορεί να ανταποκριθεί στα έξοδα της συγκεκριμένης εβδομάδας;

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση: Κατ αρχήν θα πρέπει να γίνει μετάφραση του προβλήματος στο χώρο των πιθανοτήτων και της κανονικής κατανομής. Μία προτεινόμενη μετάφραση είναι και η εξής: Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η P(X>23) όταν η τυχαία μεταβλητή X των εβδομαδιαίων εξόδων του ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(20, 5^2)$. Ο μετασχηματισμός της μεταβλητής X σε Z=(X-20)/5 και του 23 σε (23-20)/5 =0,6 θα μετασχηματίσει την ζητούμενη πιθανότητα στην P(Z>0,6) =0,2743 καθώς η μεταβλητή Z ακολουθεί την κανονική κατανομή N(0,1).



Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου.

Ας έρθουμε τώρα στη διδακτική μεθοδολογία. Όσα αναφέρονται στη συνέχεια είναι προτεινόμενα ώστε ο διδάσκων να διαθέτει μία οργανωμένη πρόταση διδασκαλίας.

Κατά αρχήν καλό θα είναι ο διδάσκων να διαθέτει μία γενική εικόνα-όπως η παρακάτω- για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η διδασκαλία του κεφαλαίου.

Σε πρώτη φάση ο διδάσκων θα κάνει μία γενική επανάληψη των μεθόδων υπολογισμού του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης. Επιπλέον θα κάνει επανάληψη βασικών εννοιών που σχετίζονται με τον χώρο των Πιθανοτήτων μέσα στα πλαίσια του κλασικού ορισμού. Η φάση αυτή θα μπορούσαμε να πούμε ότι εστιάζει κυρίως σε δραστηριότητες που έχουν στόχο την ανάπτυξη δεξιοτήτων μετάφρασης μεταξύ διαφορετικών πλαισίων. Οι δεξιότητες αυτές θα βοηθήσουν τους μαθητές να χειρίζονται απλές παραστάσεις όπως $A \cap B'$ μέσω διαγραμμάτων. Να σημειωθεί και να τονιστεί ότι θα πρέπει να αποφεύγονται δραστηριότητες που απαιτούν σύνθετη αλγεβρική διαχείριση πολύπλοκων παραστάσεων συνόλων.

Σε δεύτερη φάση ο διδάσκων θα αναφερθεί στον κλασικό θεωρητικό ορισμό της πιθανότητας και στον ορισμό της πειραματικής πιθανότητας. Η διάκριση των δύο ορισμών είναι σημαντική και θα πρέπει να γίνει μέσω συγκεκριμένων παραδειγμάτων. Στο σημείο αυτό θα μπορούσε ο διδάσκων να ζητήσει από τους μαθητές, ιδιαίτερα από αυτούς που έχουν δυνατότητα πρόσβασης σε Η/Υ στο σπίτι τους, να μελετήσουν και παρουσιάσουν ένα παράδειγμα στο οποίο ο υπολογισμός των δύο πιθανοτήτων θα ήταν εφικτός.

Στη συνέχεια θα ακολουθήσει η αξιοποίηση των Συνδυαστικών μοντέλων, ιδιαίτερα δε της πολλαπλασιαστικής αρχής, στον υπολογισμό μιας πιθανότητας με τη βοήθεια του κλασικού ορισμού. Στην φάση αυτή δίνονται ένα η δύο προβλήματα υπολογισμού πιθανότητας με τον κλασσικό ορισμό τα οποία προέρχονται, αν είναι δυνατόν, από τον κόσμο της εμπειρίας των μαθητών. Κατά τον υπολογισμό των ευνοϊκών και των συνολικών περιπτώσεων καλό θα είναι να απαιτείται η χρήση συνδυασμών, μεταθέσεων και πολλαπλασιαστικής αρχής. Για παράδειγμα το πρόβλημα με το ασανσέρ που προτείνεται στο πρόγραμμα σπουδών (Δ10) είναι αρκετά ενδιαφέρον και προσφέρει την ευκαιρία στον διδάσκοντα να δώσει ένα ανάλογο πρόβλημα π.χ ένα πρόβλημα κατασκευής τριψήφιων αριθμών από 5 διαφορετικά μη μηδενικά ψηφία, και να ζητήσει από τους μαθητές να το λύσουν ανάλογα.

Κατά την **τρίτη φάση** θα γίνει η διδασκαλία της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας μέσα από κατάλληλα απλά παραδείγματα. Καλό θα είναι να αποσαφηνιστεί η έννοια της στοχαστικής ανεξαρτησίας ενδεχομένων μέσω της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας. Η εισαγωγή της έννοιας της δεσμευμένης πιθανότητας θα πρέπει να γίνει με ένα πρόβλημα όπως αυτό που προτείνεται στον παρόντα οδηγό στη δραστηριότητα Δ7.

Η διδασκαλία της δεσμευμένης πιθανότητας θα κλείσει με την διδασκαλία του θεωρήματος της ολικής πιθανότητας για δύο ενδεχόμενα και θα ολοκληρωθεί με το θεώρημα του Bayes. Εδώ ο διδάσκων είναι χρήσιμο να κάνει μία αρχική επεξεργασία του θεωρήματος ολικής πιθανότητας και αφού καταλήξει στον τύπο του θεωρήματος Bayes να τον εφαρμόσει σε ένα απλό αλλά χαρακτηριστικό παράδειγμα όπως αυτό που προτείνεται στον παρόντα οδηγό (Δ8).

Στην επόμενη **τέταρτη φάση** γίνεται η ανάλυση του γενικού ορισμού της πιθανότητας και η ανάλυση της ανάγκης που οδήγησε τη μαθηματική κοινότητα να κατασκευάσει τον συγκεκριμένο ορισμό. Ο ορισμός της τυχαίας μεταβλητής θα πρέπει να δοθεί μέσα από κατάλληλα παραδείγματα, τα οποία θα αναδεικνύουν το νόημα και τη χρησιμότητα της έννοιας. Για παράδειγμα η εισαγωγή της εν λόγω έννοιας θα μπορούσε να γίνει μέσα από την δραστηριότητα Δ9 του παρόντος οδηγού όπου και αναλύεται η διδακτική προσέγγιση της δραστηριότητας.

Στην **πέμπτη φάση** θα γίνει η διδασκαλία της έννοιας της κατανομής. Το παράδειγμα του νομίσματος και των επιτυχιών σε ένα ανάλογο πρόβλημα μπορεί να αποτελέσει την αφετηρία της διδασκαλίας της έννοιας της κατανομής και στη συνέχεια της κατανομής Bernoulli. Ακολούθως θα πρέπει να αποσαφηνιστεί η διαφορά της κατανομής Bernoulli από την διωνυμική κατανομή. Τέλος, θα πρέπει να τονιστεί η χρησιμότητα της αθροιστικής κατανομής μέσα από κατάλληλα διατυπωμένα ερωτήματα της μορφής : «Να υπολογίσετε την πιθανότητα τουλάχιστον 5 επιτυχιών σε 8 ρίψεις ……….»

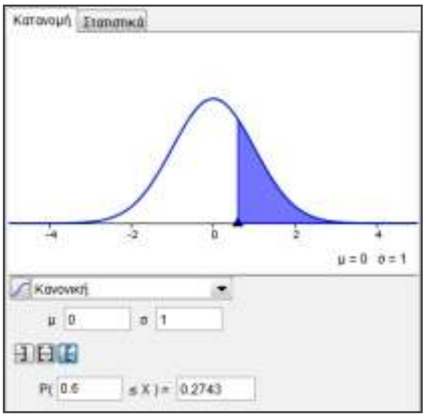
Στην **πέμπτη φάση** υλοποιείται η διδασκαλία της έννοιας της συνεχούς μεταβλητής και της κανονικής κατανομής. Αφού τονιστεί η ιδιαίτερη σημασία της κατανομής αυτής θα πρέπει να αποσαφηνιστούν οι σημασίες των όρων μέση τιμή και τυπική απόκλιση στην εν λόγω κατανομή. Θα τονιστεί η ανάγκη κανονικοποίησης της κατανομής και μέσα από απλά παραδείγματα και χρήση κατάλληλων πινάκων θα υπολογιστούν πιθανότητες σε κατανομές που αναφέρονται σε συγκεκριμένα προβλήματα. Λόγω της ιδιαίτερης σημασίας της εν λόγω κατανομής καλό θα είναι ο διδάσκων να οργανώσει τη διδασκαλία του με τρόπο παραστατικό κάτι που μπορεί να υλοποιηθεί μέσα από την αξιοποίηση της τεχνολογίας. Αν αυτό είναι ανέφικτο θα πρέπει τουλάχιστον να παρουσιάσει στους μαθητές φωτοτυπημένες εικόνες πάνω σε φύλλα εργασίας τα οποία θα εμπλέκουν τους μαθητές σε κατάλληλες δραστηριότητες. Ας δούμε πως μπορεί να υλοποιηθεί η δραστηριότητα Δ14 του παρόντος οδηγού μέσω ενός φύλλου εργασίας.

Φύλλο εργασίας

Ερώτημα 1: Να ορίσετε κατάλληλη τυχαία μεταβλητή για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Ποια κανονική κατανομή Ν (μ, σ^2) ακολουθεί η εν λόγω μεταβλητή; Πως θα συμβολίσετε τη ζητούμενη πιθανότητα;

Ερώτημα 2: Ποιος μετασχηματισμός είναι απαραίτητος για να μπορεί να υπολογιστεί η εν λόγω πιθανότητα με τη βοήθεια πινάκων; Να υλοποιήσετε τον εν λόγω μετασχηματισμό.

Ερώτημα 3: Με βάση την παρακάτω εικόνα να απαντήσετε στο ερώτημα του προβλήματος.



Ποια σημεία θα πρέπει να προσέξει ιδιαίτερα ο διδάσκων;

1) Ο γενικός ορισμός της πιθανότητας συνήθως χαρακτηρίζεται ως αξιωματικός ορισμός σε πολλά βιβλία. Καλό θα είναι να αποφεύγεται ο χαρακτηρισμός του ορισμού αυτού ως «αξιωματικός» και να υπογραμμίζεται στους μαθητές ότι ο ορισμός αυτός δεν είναι τίποτε περισσότερο από μία γενίκευση του κλασικού ορισμού.

2) Είναι χρήσιμο να τονισθεί ότι η πιθανότητα χωρίς δέσμευση αναφέρεται στο σύνολο των ενδεχομένων του δειγματικού χώρου οπότε ο υπολογισμός της γίνεται μέσω ενός κλάσματος με μεγαλύτερο παρονομαστή από αυτόν που αντιστοιχεί στην δεσμευμένη. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η πιθανότητα χωρίς δέσμευση να είναι μικρότερη από τη δεσμευμένη πιθανότητα.

3) Το θεώρημα του Bayes στην ουσία μας επιτρέπει να απαντάμε σε ερωτήματα τα οποία θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως αντιστροφή των ερωτημάτων στα οποία μπορούμε να απαντήσουμε μέσω της δεσμευμένης πιθανότητας, και σαν τέτοιο θα πρέπει να χρησιμοποιείται κατά την διδασκαλία.

4) Αναμένεται να υπάρξει κάποια δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής ιδιαίτερα δε στην επιλογή κατάλληλης τυχαίας μεταβλητής σε ένα σύνθετο πρόβλημα υπολογισμού πιθανότητας.

5) Είναι απαραίτητο οι μαθητές να έχουν μία σαφή εικόνα για τις διαφορές μεταξύ της τυχαίας μεταβλητής που η κατανομή της χαρακτηρίζεται ως κατανομή Bernoulli και της τυχαίας μεταβλητής που χαρακτηρίζεται ως διωνυμική. Στην πρώτη περίπτωση η τυχαία μεταβλητή παίρνει τιμές μόνο τις 0 και 1 η δε συνάρτηση πιθανότητας αυτής της τυχαίας μεταβλητής

είναι $P(X=x)=\begin{cases} p, & \text{αν } x=1 \\ 1-p, & \text{αν } x=0 \end{cases} \quad 0\le p\le 1$

Μία άλλη ισοδύναμη έκφραση της συγκεκριμένης συνάρτησης πιθανότητας είναι και η

$P(X=x)=p^x\cdot(1-p)^{1-x}$. Στην περίπτωση της κατανομής Bernoulli η τυχαία μεταβλητή παίρνει τιμές 0, 1, 2, 3, ……, ν η δε συνάρτηση πιθανότητας είναι η $P(X=x)=\binom{\nu}{x}\cdot p^x\cdot(1-p)^{\nu-x} \quad 0\le p\le 1$.

6) Αν η συνεχής τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή τότε οι πιθανότητες $P(X\le\kappa)$ ή $P(X\ge\kappa)$ ή $P(\kappa\le X\le\lambda)$ κ.λ.π υπολογίζονται μέσω του αντίστοιχου εμβαδού μεταξύ της καμπύλης της γραφικής παράστασης της $f(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ και του άξονα x΄x.

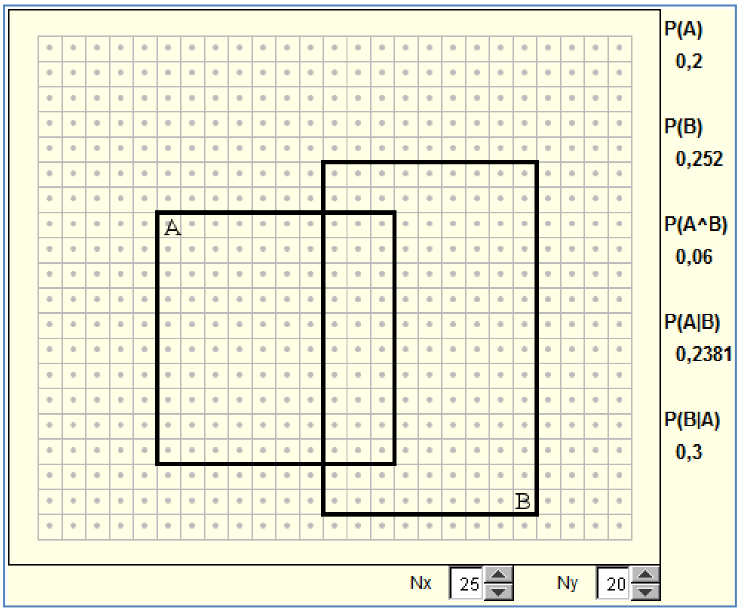
Αξιοποίηση της Τεχνολογίας στην διδασκαλία του κεφαλαίου.

Αρχικά θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η χρήση της τεχνολογίας έχει προστιθέμενη αξία αν επιτρέπει πειραματισμό και διερεύνηση σε συνδυασμό με πολλαπλές αναπαραστάσεις της έννοιας που θέλουμε να διδάξουμε.

Ας δούμε 2 παραδείγματα:

1) Στην ιστοσελίδα:
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Probability/ConditionalProbability.shtml

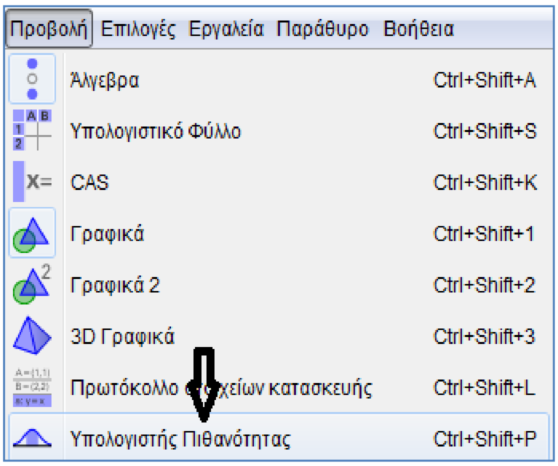
υπάρχει μία μικροεφαρμογή (applet) στο οποίο οι μαθητές και ο διδάσκων έχουν τη δυνατότητα να διερευνήσουν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται οι πιθανότητες P(A), P(B), P(A∩B), P(A|B), P(B|A). Τα A, B είναι ενδεχόμενα που παριστάνονται μέσα σε ένα Γεωμετρικό, δυναμικά μεταβαλλόμενο περιβάλλον.

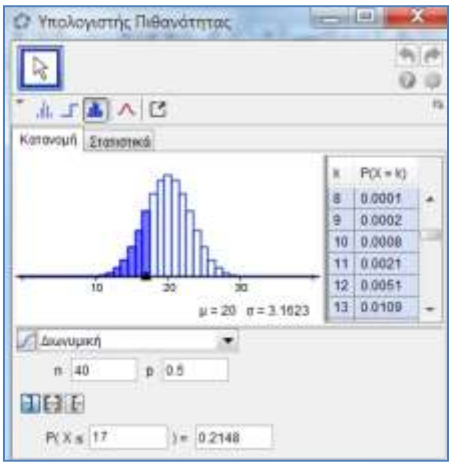


Τα N_x και N_y δημιουργούν τον χώρο Ω ($N_x \cdot N_y$ τελείες) μέσα στον οποίο μπορούμε δυναμικά να αλλάζουμε τα ενδεχόμενα (υποσύνολα) A και B. Στην διπλανή στήλη εμφανίζονται όλες οι πιθανότητες των ενδεχομένων που μας ενδιαφέρουν. Ενδεικτικά ερωτήματα που μπορούμε να θέσουμε στους μαθητές είναι τα παρακάτω:

- Να δημιουργήσετε έναν δειγματικό χώρο Ω με N(Ω)=25×20. Τα ενδεχόμενα A και B με P(A)=0,2 και P(B)=0,252 και P(A∩B)=0,06. Να συγκρίνετε τα P(B|A) που προκύπτουν από το γράφημα με αυτό που προκύπτει από τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας και αυτό που προβάλλεται στην οθόνη.
- Να πειραματιστείτε με άλλα ενδεχόμενα ιδιαίτερα με στοχαστικά ανεξάρτητα και με ενδεχόμενα στα οποία το ένα είναι υποσύνολο του άλλου.

2) Ένα ιδιαίτερα χρήσιμο και συγχρόνως ελεύθερο λογισμικό κατάλληλο για τη διδασκαλία των Πιθανοτήτων είναι το Geogebra. Οι πλέον πρόσφατες εκδόσεις δίνουν τη δυνατότητα επιλογής ενός υπολογιστή πιθανότητας με τον οποίο μπορούμε να εμπλέξουμε τους μαθητές σε δραστηριότητες υπολογισμού Πιθανοτήτων διακριτών αλλά και συνεχών τυχαίων μεταβλητών.





Αφού οι μαθητές εξοικειωθούν με το συγκεκριμένο περιβάλλον μπορούμε να ζητήσουμε, κατά την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων, να καταφεύγουν στον υπολογιστή πιθανότητας και με βάση τα γραφήματα και τα αριθμητικά δεδομένα να κάνουν υπολογισμούς. Επιπλέον θα μπορούσε να ζητηθεί να μεταφράσουν οι μαθητές τα γραφήματα, να αντλήσουν επιπλέον πληροφορίες και να πειραματιστούν αλλάζοντας τα δεδομένα του προβλήματος.

Βιβλιογραφία

1) Apostol, T. M. (1962). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*. Αθήνα: Ατλαντίς.
2) Bell, E. T. (2000). *Οι Μαθηματικοί*. (Μ. Μαγειρόπουλος, μετάφραση). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.. (Πρωτότυπη έκδοση, 1971).
3) Cockcroft, W. (1982). *The Cockcroft Report: Mathematics counts.* http://www.educationengland.org.uk/documents/cockcroft/

4) Mankiewicz, R. (2002). *Η Ιστορία των Μαθηματικών*.(Λ. Καρατζάςμετάφ.).Εκδόσεις: Αλεξάνδρεια.

5) Sheldon Ross (2011). *Βασικές αρχές θεωρίας Πιθανοτήτων*. Εκδόσεις Κλειδάριθμος.

6) Δάρας, Τ. Ι. & Σύψας, Π.Θ.(2010). *Πιθανότητες και Στατιστική: Θεωρία και Εφαρμογές.*Εκδόσεις:ΖΗΤΗ.

7) Κουνιάς. Σ, Μωυσιάδης. Χ (1995): *Θεωρία Πιθανοτήτων Ι*. Εκδόσεις Ζήτη.

8) Μόδης Θεόδωρος (1995). *ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ. Προσεγγίζοντας επιστημονικά τα προμηνύματα του αύριο*. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης. Ηράκλειο.

9) Χαραλαμπίδης, Χ. (2002). Ιστορική Ανασκόπηση των Πιθανοτήτων. Στο *19ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας-Τα μαθηματικά Διαχρονικός Παράγοντας Πολιτισμού*, σ. 35-62. Τελευταία ανάσυρση 10-01-2015: http://www.hms.gr/apothema/?s=se&i=732

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{o} : Στατιστική

Εισαγωγή

Τα ίχνη των δραστηριοτήτων που σχετίζονται με την Στατιστική είναι ιδιαίτερα αναγνωρίσιμα στις απογραφές των πληθυσμών, όπως για παράδειγμα της Ρωμαϊκής αυτοκρατορίας. Μία από τις πλέον διάσημες απογραφές ήταν και η απογραφή (8 π.Χ.) που διέταξε ο Αύγουστος Οκταβιανός προς το τέλος της θητείας του. Η απογραφή αυτή επειδή ήταν η *"πρώτη"* που γινόταν στους Ιουδαίους διήρκεσε πολύ χρόνο και την έφερε εις πέρας, σύμφωνα και με τον Τερτυλλιανό, ο διάδοχος του στην ηγεμονία της Συρίας, ο Σέντιος Σατουρνίνος. Η εν λόγω απογραφή ήταν η πρώτη που πραγματοποιήθηκε στην περιοχή της Ιουδαίας και είναι αυτή που αναφέρεται στην Καινή Διαθήκη . Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι η ετυμολογία του όρου ¨Στατιστική¨ ανάγεται στη λατινική λέξη status η οποία σημαίνει ¨κατάσταση¨.

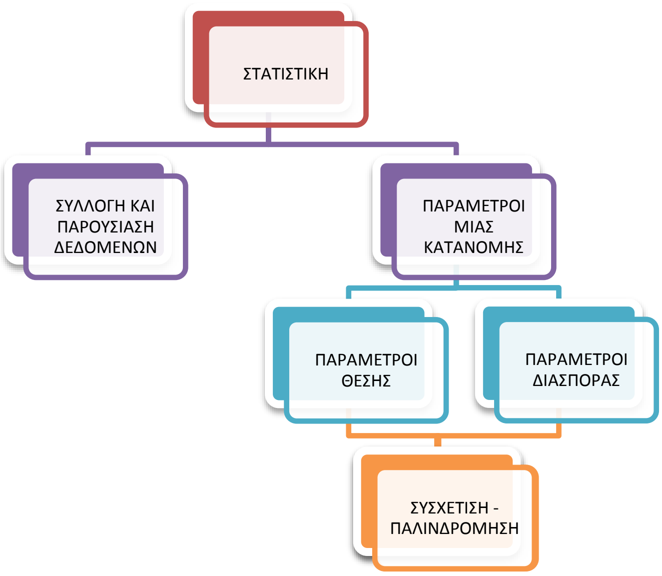
Η σύγχρονη ιστορία της Στατιστικής θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι έχει τον 17^{o} αιώνα αφετηρία τις δραστηριότητες που θα μπορούσαν να ενταχθούν στο χώρο της Στατιστικής¨. Είναι χαρακτηριστικές οι εργασίες του John Graunt ο οποίος πρώτος μελέτησε συστηματικά και μέσω ποσοτικών δεδομένων την ανθρώπινη θνησιμότητα. Μελετώντας δεδομένα 50 ετών στην περιοχή του Λονδίνου εντόπισε ότι οι θάνατοι από εγκληματικές ενέργειες ήταν απειροελάχιστοι σε σχέση με άλλες αιτίες. Επιπλέον μελέτησε τον αριθμό και το γένος των βρεφών και εντόπισε, για πρώτη ίσως φορά με ακρίβεια, ότι οι γεννήσεις αγοριών ήταν περισσότερες από αυτές των κοριτσιών. Η καινοτομία στις μελέτες του John Graunt δεν ήταν η μελέτη των καταλόγων που είχε στη διάθεσή του αλλά η συστηματική μελέτη και η χρήση Μαθηματικών για εξαγωγή συμπερασμάτων.

Θα ήταν παράλειψη αν δεν αναφερόμαστε στις ανάλογες εργασίες και μελέτες του Edmund Halley, του γνωστού αστρονόμου. Εκτός των άλλων ο Halley ενδιαφέρθηκε και αυτός για θέματα σχετικά με τη διάρκεια της ανθρώπινης ζωής στην περιοχή του στο Breslau της Πολωνίας. Με βάση τα δεδομένα των καταλόγων της πολιτείας του κατασκεύασε πίνακες όπου για πρώτη φορά έγινε εμφανής η κατανομή των ζώντων ανθρώπων σε σχέση με τα έτη ζωής. Αυτό που πρέπει να επισημανθεί για τον Graunt και τον Halley είναι ότι και οι δύο στις μελέτες τους έκαναν χρήση πολύ απλών Μαθηματικών σε επίπεδο σχεδόν αριθμητικής.

Η επόμενη αναφορά μας ανήκει στον Γάλλο Μαθηματικό Adrien-Marie Legendre ή Le Gendre. Ο Legendre κατά τον 18^{o} αιώνα ενδιαφέρθηκε για τον βέλτιστο αριθμό μετρήσεων που θα πρέπει να γίνουν σε ποσά που πρόκειται να μελετηθούν ώστε να ελαχιστοποιηθεί το σφάλμα στη συμπερασματολογία μας. Ήταν ο Μαθηματικός που επινόησε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων με την οποία επιχείρησε να υπολογίσει τις τροχιές κομητών. Η συγκεκριμένη μέθοδος περιγράφεται και εφαρμόζεται σε μία ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα εργασία του Le Gendre με τίτλο «Νέα μέθοδος για τον υπολογισμό της τροχιάς των κομητών» η οποία μέθοδος έγινε ταχύτατα αποδεκτή από την επιστημονική κοινότητα. Θα ολοκληρώσουμε τη μικρή αυτή περιήγηση στην εξέλιξη της Στατιστικής τους 3 τελευταίους αιώνες με τον Άγγλο Karl Pearson οποίος έζησε το δεύτερο μισό του $19^{ου}$ και το πρώτο μισό του $20^{ου}$ αιώνα. Την εποχή που έζησε ο Pearson το βασικό πρόβλημα που απασχολούσε τους Μαθηματικούς ήταν η αποσαφήνιση του τι σημαίνει ότι το σύνολο των σημειακά παριστάμενων δεδομένων είναι κοντά σε μία καμπύλη. Εκτός από αυτό οι ασχολούμενοι με την Στατιστική θα έπρεπε να τεκμηριώσουν με κάποιο τρόπο ότι η καμπύλη που έχουν προσαρμόσει πάνω στα σημεία των δεδομένων τους είναι η βέλτιστη. Ο Pearson, ως καθηγητής της Γεωμετρίας, επινόησε κριτήρια και μεθόδους ελέγχου της καμπύλης προσαρμογής οι οποίες αποτελούν μερικές από τις πιο πρόσφατες ιδέες πάνω στις οποίες αναπτύσσεται η Στατιστική. (Tabak 2011).

Τι περιέχει το κεφάλαιο της Στατιστικής και πως αυτό το περιεχόμενο συνδέεται με προγενέστερο σχετικό;

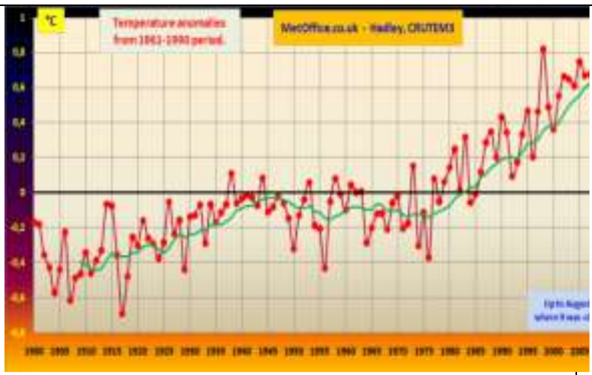
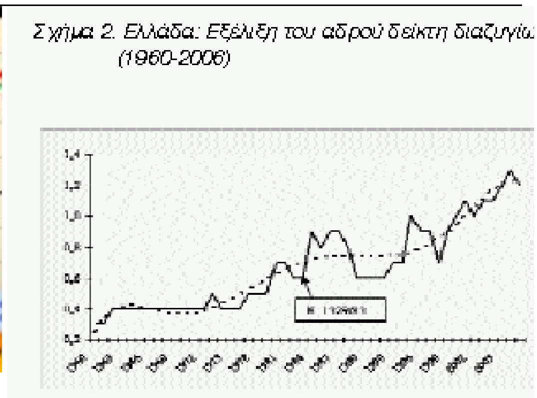
Το κεφάλαιο της Στατιστικής αναφέρεται αρχικά σε βασικές έννοιες και εργαλεία οργάνωσης, επεξεργασίας και παράστασης δεδομένων από έναν πληθυσμό. Οι μαθητές έχουν γνωρίσει σε προηγούμενη τάξη τις προϋποθέσεις για μία αμερόληπτη συλλογή δεδομένων, τις μεθόδους πινακοποίησης και γραφικής παράστασης αυτών καθώς και τα μέτρα θέσης και διασποράς των δεδομένων. Αφετηρία των διδακτικών μας επιλογών είναι η ικανοποιητική γνώση των παραπάνω ώστε να μπορούν οι μαθητές να παρακολουθήσουν τις νέες έννοιες και τα νέα περισσότερο σύνθετα εργαλεία μελέτης των δεδομένων. Οι νέες έννοιες που θα γνωρίσουν αναφέρονται σε μεθόδους μελέτης του βαθμού συσχέτισης δύο ομάδων δεδομένων, δηλαδή δύο μεταβλητών. Αρχικά να αναφέρουμε τον συντελεστή συσχέτισης Pearson μέσω του οποίου μπορούμε να εκτιμήσουμε τον βαθμό συσχέτισης δύο μεταβλητών. Η ερμηνεία της τιμής του συγκεκριμένου συντελεστή έχει ιδιαίτερη σημασία για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τη σχέση των δύο μεταβλητών. Στη συνέχεια θα γίνει μελέτη και αξιοποίηση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων στην κατασκευή της ευθείας παλινδρόμησης του ¨νέφους¨ των ζευγών των τιμών δύο μεταβλητών. Ο απώτερος στόχος της διδασκαλίας των παραπάνω εννοιών είναι η αξιοποίησή τους στην οργάνωση και εκτίμηση δεδομένων μιας πραγματικής κατάστασης και όχι απλά η επεξεργασία μέσα στο καθαρά Μαθηματικό πλαίσιο. Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται η δομή του κεφαλαίου σε σχέση με το περιεχόμενό του.



Γιατί είναι σημαντικό το κεφάλαιο της Στατιστικής;

Η προστιθέμενη αξία του κεφαλαίου της Στατιστικής έχει δύο όψεις, την επιστημολογική και την καθαρά διδακτική – παιδαγωγική. Η επιστημολογική πτυχή είναι αυτή που αναφέρεται σε μία μη ντετερμινιστική προσέγγιση των φαινομένων. Συγκεκριμένα η γνώση που κατακτούσαν οι μαθητές στο σχολικό περιβάλλον, ιδιαίτερα στα μαθήματα των θετικών επιστημών, είχε αιτιοκρατικό χαρακτήρα, δηλαδή η εύρεση ενός μοντέλου των φαινομένων αρκούσε για να μπορούμε με βεβαιότητα να καθορίσουμε επακριβώς το αποτέλεσμα μιας διεργασίας στο φαινόμενο. Στο κεφάλαιο της Στατιστικής οι μαθητές εισάγονται σταδιακά σε έναν άλλο χώρο και τρόπο σκέψης, στον στοχαστικό. Ο στοχαστικός γραμματισμός, ο οποίος ολοκληρώνεται με το κεφάλαιο της Στατιστικής, αποτελεί μία ανάγκη της σύγχρονης αντίληψης για την Μαθηματική παιδεία καθώς σηματοδοτεί την αναγνώριση της αξίας μη αιτιοκρατικών προσεγγίσεων των γεγονότων του κόσμου. Αναγνωρίζει το γεγονός της αβεβαιότητας και της μεταβλητότητας στην συλλογή δεδομένων και επιτρέπει στους ανθρώπους να παίρνουν αποφάσεις υπό το φως της αβεβαιότητας. (Cockcroft, W. 1982).

Σχετικά με την παιδαγωγική – διδακτική αξία θα πρέπει να αναφέρουμε ότι το κεφάλαιο της Στατιστικής κατ εξοχήν αναφέρεται σε θέματα της καθημερινής εμπειρίας των μαθητών οι οποίοι βιώνουν την παρουσία των στατιστικών διαγραμμάτων, των στατιστικών όρων και συμπερασμάτων καθημερινά. Τα προεκλογικά γκάλοπ, οι οικονομικές αναλύσεις, οι επιστημονικές ανακοινώσεις, οι κοινωνικές μελέτες, τα μετεωρολογικά και γεωλογικά δελτία είναι γεμάτα από όρους και παραστάσεις της στατιστικής.

	
Τι συμπεραίνουμε για την πορεία της θερμοκρασίας της γης;	*Τι συμπεραίνουμε για την πορεία των διαζυγίων στην Ελλάδα;*

Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να αναγνωρίσουν τη σημασία της συστηματικής μελέτης στατιστικών δεδομένων στη λήψη κάποιας απόφασης. Να γνωρίσουν τη σημασία των στατιστικών μεθόδων στην κοινωνική επιστήμη, στη μετεωρολογία, στην Ιατρική (προσδόκιμο ζωής, αναμενόμενη εξάπλωση ασθενειών) και αλλού.

Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο της Στατιστικής;

Κατ αρχήν θα προσδιορίσουμε με ένα παράδειγμα τη διαφορά της θεματικής περιοχής της Στατιστικής από την περιοχή των Πιθανοτήτων. Έχω μόλις τραβήξει και κρατώ στο χέρι μου έναν αριθμό από σφαιρίδια μέσα από ένα κουτί που περιέχει διαφόρων ειδών σφαιρίδια.

	Το βασικό πρόβλημα που προσπαθούμε να λύσουμε με τα μοντέλα των πιθανοτήτων είναι: Γνωρίζοντας το περιεχόμενο του κουτιού τι μπορεί να περιέχει το χέρι μου;

	Το βασικό πρόβλημα που προσπαθούμε να λύσουμε με τα μοντέλα της Στατιστικής είναι: Γνωρίζοντας το περιεχόμενο του χεριού μου τι μπορεί να περιέχει το κουτί;

Το κεφάλαιο της Στατιστικής στην Γ΄ Λυκείου στην ουσία οδηγεί τον μαθητή από τις απλές, σχεδόν εμπειρικές αριθμητικές μεθόδους οργάνωσης των δεδομένων σε έναν χώρο όπου τα σύνθετα προβλήματα απαιτούν μία περισσότερο αναπτυγμένη στρατηγική και νέα Μαθηματικά εργαλεία. Συγκεκριμένα:

Α) Τα βασικά στάδια μιας στατιστικής μελέτης είναι ο σχεδιασμός, η συλλογή και η οργάνωση των δεδομένων σε πίνακες, η παράσταση των δεδομένων, ο υπολογισμός και η ερμηνεία κατάλληλων δεικτών και παραμέτρων.

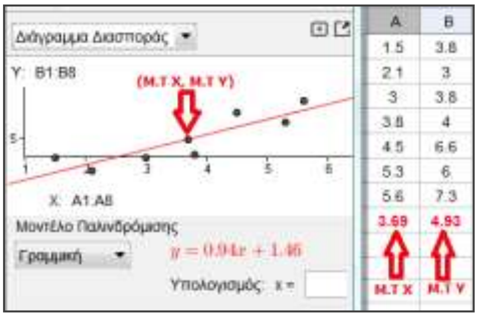
Β) Τα μέτρα θέσης, ιδιαίτερα δε η μέση τιμή, μας επιτρέπουν να συγκρίνουμε σε κάποιο βαθμό ομοειδείς έρευνες. Ο μέσος όρος θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι βρίσκεται στο ¨κέντρο βάρους¨ των μετρήσεων.

Γ) Οι παράμετροι διασποράς μας πληροφορούν για τον τρόπο με τον οποίο είναι κατανεμημένες γύρω από τη μέση τιμή οι μετρήσεις μας, δηλαδή τον βαθμό διασποράς τους.

Δ) Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση είναι ιδιαίτερα χρήσιμες γιατί λαμβάνουν υπ όψιν όλες τις μετρήσεις

Ε) Η παλινδρόμηση προσδιορίζει τη σχέση εξάρτησης των μεταβλητών ενώ ο συντελεστής συσχέτισης Pearson δίνει ένα μέτρο του μεγέθους της γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών. (Καραγεώργος 2001)

ΣΤ) Η ευθεία της γραμμικής παλινδρόμησης της Y ως προς την X αποδεικνύεται ότι περνά πάντα από το σημείο που παίζει, κατά κάποιον τρόπο, τον ρόλο το κέντρο βάρους του ¨νέφους¨ των σημείων του γραφήματος της κατανομής των μεταβλητών X και Y. Το σημείο αυτό είναι το $(\bar{x}, \bar{y})$.



<u>Μία ενδιαφέρουσα παρατήρηση</u>: Ο τύπος του συντελεστή συσχέτισης Pearson παραπέμπει σε ένα γενικευμένο ορισμό μιας ποσότητας που ορίζεται μέσω των συντεταγμένων δύο διανυσμάτων στο ν διάστατο χώρο και φέρει το όνομα ¨συνημίτονο¨.

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-\bar{y})^2}}$$

Το ένα διάνυσμα έχει συντεταγμένες τις αποκλίσεις των τιμών της Χ από τη μέση τιμή της και το άλλο διάνυσμα έχει συντεταγμένες τις αποκλίσεις των τιμών της Υ από τη μέση τιμή της. Ο τύπος αυτός στο δισδιάστατο χώρο συμπίπτει με το συνημίτονο της γωνίας δύο διανυσμάτων του επιπέδου.

Σε ποια ερωτήματα θα πρέπει να μπορούν να απαντούν οι μαθητές;

---

1) Πως οργανώνουμε Στατιστικά δεδομένα και ποιοι είναι οι βασικοί τρόποι παράστασης των δεδομένων.

2) Ποια είναι τα μέτρα θέσης μιας κατανομής και ποια είναι η λειτουργία τους;

3) Ποια είναι τα μέτρα διασποράς μιας κατανομής και ποια είναι η λειτουργία τους;

4) Ποια είναι η σημασία του συντελεστή συσχέτισης (Pearson) δύο μεταβλητών;

5) Ποιος είναι ο στόχος του υπολογισμού της ευθείας παλινδρόμησης;

Ποια μαθησιακά αποτελέσματα αναμένουμε μετά τη διδασκαλία του κεφαλαίου;

Ο σκοπός του κεφαλαίου είναι να αποκτήσουν οι μαθητές τις βάσεις αυτού που χαρακτηρίζεται ως Στατιστικός γραμματισμός ο οποίος διαφέρει από τον Στοχαστικό γραμματισμό. Οι μαθητές θα πρέπει σταδιακά να μεταβούν από τις άτυπες διαισθητικές προσεγγίσεις των φαινομένων στην κριτική στάση απέναντι σε αυτά μέσω των Στατιστικών εργαλείων μέχρι και την Μαθηματική Στατιστική ανάλυση που αποτελεί το τελικό στάδιο του Στατιστικού γραμματισμού. (Watson 2006)

Μ1) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να υπολογίζουν μέτρα θέσης και διασποράς και κυρίως να μπορούν να περιγράφουν τη σημασία της αριθμητικής τιμή τους μέσα στο σύνολο των δεδομένων. (Στόχοι ΠΣ 4.1.1) (Δραστηριότητα Δ1).

Μ2) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να αποφαίνονται για το είδος και τον βαθμό συσχέτισης δύο μεταβλητών όταν έχουν παραστήσει τα ζεύγη τιμών τους σε διάγραμμα. (Στόχοι ΠΣ 5.1.1 και 5.1.2) (Δραστηριότητα Δ2)

Μ3) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να υπολογίζουν το βαθμό συσχέτισης δύο μεταβλητών και να αποφαίνονται για τη σημασία του αριθμητικού αποτελέσματος του μέτρου συσχέτισης στο συγκεκριμένο περιβάλλον των δεδομένων που διαθέτει.
(Στόχοι ΠΣ 5.2.1)
(Δραστηριότητα Δ3)

Μ4) Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να μέσω της ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης να κάνουν εκτιμήσεις για τιμές της μεταβλητής Y όταν η μεταβλητή X πάρει τιμές οι οποίες δεν ανήκουν στο σύνολο των δεδομένων που διαθέτουν. (Στόχοι ΠΣ 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3)
(Δραστηριότητα Δ4)

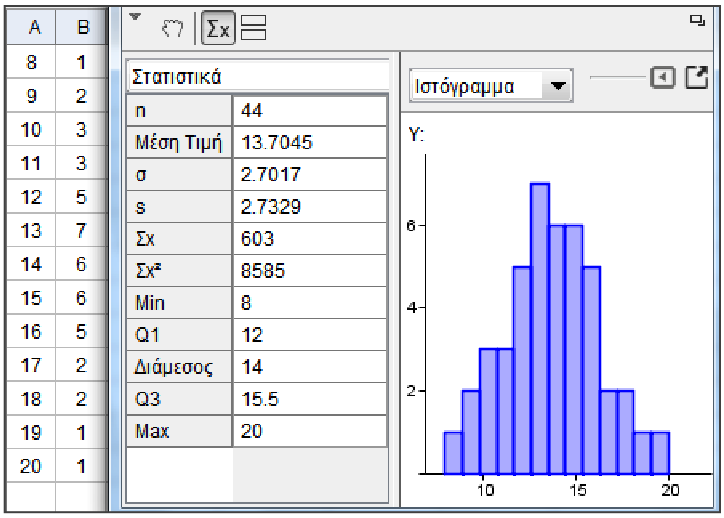
Προτεινόμενες δραστηριότητες.

Δ1) Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι βαθμοί στα Μαθηματικά στα δύο τμήματα της Β΄ τάξης κάποιου Λυκείου.

Βαθμός	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Συχνότητα	1	2	3	3	5	7	6	6	5	2	2	1	1

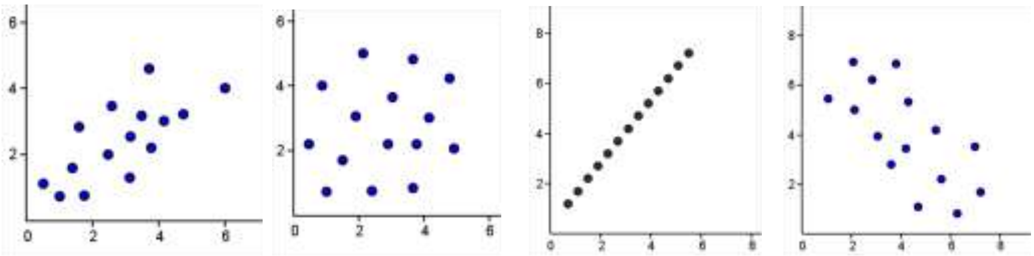
Να βρείτε μέτρα θέσης και διασποράς και να εξηγήσετε τη σημασία τους για τους μαθητές της Β΄ τάξης του εν λόγω Λυκείου.

Προτεινόμενη διδακτική πορεία: Οι μαθητές αφού υπολογίσουν τη μέση τιμή και τη διάμεσο στη συνέχεια υπολογίζουν τη διασπορά και την τυπική απόκλιση. Αν ο διδάσκων κρίνει ότι δεν ενδείκνυται για τους μαθητές που διαθέτει στην τάξη να εμπλακούν με εκτέλεση πράξεων μπορεί να δώσει έτοιμα τα απαραίτητα μέτρα καθώς και μία παράσταση των δεδομένων (π.χ ιστόγραμμα)



Με βάση τα παραπάνω στοιχεία ζητά από τους μαθητές να εξάγουν κάποια συμπεράσματα σχετικά με την κατανομή των βαθμών. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μικρή διαφορά μεταξύ διαμέσου και μέσης τιμής γεγονός που θα πρέπει να συνδυαστεί και με τη μορφή του ιστογράμματος.

Δ2) Με βάση τα παρακάτω διαγράμματα διασποράς να εκτιμήσετε την ύπαρξη, το βαθμό και το είδος συσχέτισης των μεταβλητών Χ και Υ από τις τιμές των οποίων έχουν δημιουργηθεί.



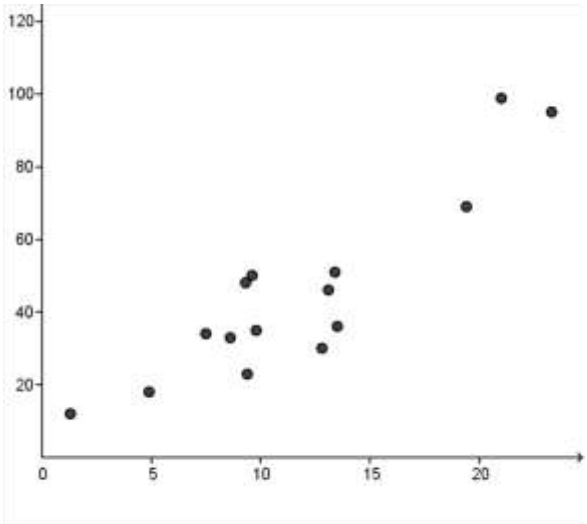
Προτεινόμενη διδακτική πορεία: Εδώ ο διδάσκων θα μπορούσε να διαπραγματευτεί με τους μαθητές τις ενδεχόμενες τιμές που θα μπορούσε να έχει ο συντελεστής συσχέτισης (π.χ 1, 0,71, -0,72, 0,92 κ.λ.π) σε κάθε ένα από τα διαγράμματα διασποράς.

Δ3) Η δραστηριότητα αυτή είναι προτεινόμενη στο πρόγραμμα σπουδών με αριθμό 29.

Χώρα	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο
Πλήθος οχημάτων (x) σε εκατομμύρια	8,6	13,4	12,8	9,3	1,3	9,4	13,1	4,9	13,5	9,6	7,5	9,8	23,3	21	19,4
Αριθμός ατυχημάτων (y) σε εκατοντάδες	33	51	30	48	12	23	46	18	36	50	34	35	95	99	69

Τα ερωτήματα αφορούν στην κατασκευή του διαγράμματος διασποράς, στον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης και στην ερμηνεία του μέσα στα πλαίσια της μελέτης της συσχέτισης του πλήθους των οχημάτων με το πλήθος των ατυχημάτων σε διάφορες χώρες.

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση: Η κατασκευή του διαγράμματος διασποράς είναι τεχνικά δύσκολη αν δεν διαθέτει η αίθουσα κάποιον υπολογιστή. Ένας τρόπος διδακτικής διαχείρισης είναι να δοθεί έτοιμο το διάγραμμα διασποράς και πάνω σε αυτό να γίνει η αρχική διαπραγμάτευση.



Εδώ είναι οπτικά εμφανής η θετική σημαντική συσχέτιση των δύο μεταβλητών. Στη συνέχεια θα γίνει ο υπολογισμός του συντελεστή συσχέτισης. Οι απαραίτητες παράμετροι που θα πρέπει να υπολογιστούν είναι οι s_x, s_y, s_{xy}. Οι συγκεκριμένες παράμετροι είναι ιδιαίτερα επίπονο να υπολογιστούν χωρίς τη χρήση κάποιων ψηφιακών μέσων (τουλάχιστον υπολογιστή τσέπης).

Μέση Τιμή Χ	11.7933
Μέση Τιμή Ψ	45.2667
Sx	5.9175
Sy	25.4038
r	
ρ	
Sxx	490.2293
Syy	9034.9333
Sxy	1907.6267

Από τα δεδομένα προκύπτει ότι r=0,9064 κάτι που υποδηλώνει ότι η συσχέτιση των δύο μεταβλητών είναι ιδιαίτερα ισχυρή και μάλιστα θετική.

Δ4) Η δραστηριότητα αυτή είναι προτεινόμενη στο πρόγραμμα σπουδών με αριθμό 30.

Ένα ερευνητικό Πανεπιστημιακό ιατρικό εργαστήριο έχει στόχο να ελέγξει, με την μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια, την κατάσταση της υγείας των ατόμων. Για το σκοπό αυτό έχει δημιουργήσει μία σειρά εξετάσεων των οποίων ο μέσος όρος των αριθμητικών αποτελεσμάτων είναι η μεταβλητή Χ. Για να εκτιμήσει την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων των εξετάσεων η ερευνητική ομάδα μελέτησε μία σειρά από δείκτες ποιότητας υγείας όπως η αντοχή στο περπάτημα και μερικούς άλλους δείκτες ο μέσος όρος των οποίων είναι η μεταβλητή Υ. Οι ασθενείς που εξετάστηκαν και μελετήθηκαν ήταν 10 και οι τιμές των δύο μεταβλητών Χ και Υ καταγράφονται στον παρακάτω πίνακα.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	4.7	4,8	4,7	3,9	4,5	6,2	6,0	5,2	4,7	4,3
Y	3,1	2,3	3,0	1,9	2,5	3,7	3,4	2,6	2,8	1,6

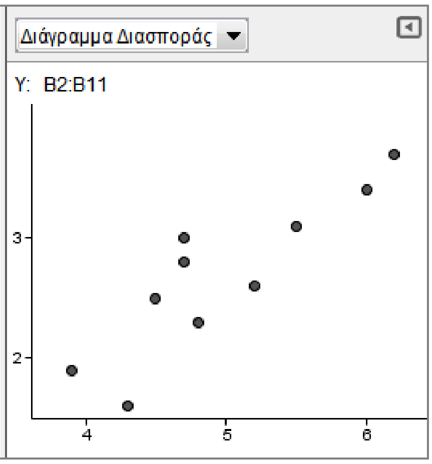
Τα ερωτήματα που τίθενται είναι η εκτίμηση της ποιότητας ζωής ενός ασθενούς με βαθμό 5 στις αρχικές εξετάσεις και η μεταβολή του δείκτη ποιότητας υγείας Υ αν ο δείκτης Χ αυξηθεί κατά 1.

Προτεινόμενη διδακτική προσέγγιση: Θα πρέπει να γίνει διαπραγμάτευση με τους μαθητές ώστε να επιλεγεί η πορεία οργάνωσης και επεξεργασίας των δεδομένων. Συγκεκριμένα θα πρέπει οι μαθητές να επιλέξουν τις παραμέτρους που θα πρέπει να υπολογίσουν και τους τύπους που θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν.

Στη συνέχεια καλό θα είναι να κατασκευαστεί το διάγραμμα διασποράς και με βάση αυτό να γίνουν εκτιμήσεις για τη συσχέτιση των δύο μεταβλητών.

	A	B
1	X	Y
2	5.5	3.1
3	4.8	2.3
4	4.7	3
5	3.9	1.9
6	4.5	2.5
7	6.2	3.7
8	6	3.4
9	5.2	2.6
10	4.7	2.8
11	4.3	1.6
12		

Στατιστικά	
Μέση Τιμή Χ	4.98
Μέση Τιμή Ψ	2.69
Sx	0.73756
Sy	0.65055
r	0.87717
ρ	0.85106
Sxx	4.89600
Syy	3.80899
Sxy	3.78799
R^2	0.76942
SSE	0.87825



Ο διδάσκων θα πρέπει να επιλέξει τρόπους υπολογισμού των παραμέτρων ανάλογα με τα μέσα που διαθέτει.

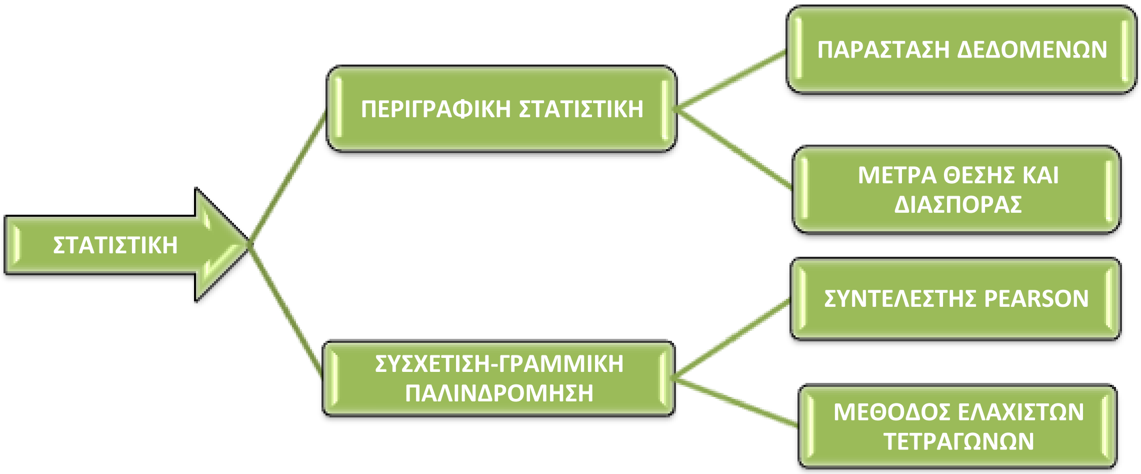
Στη συνέχεια καλό θα είναι να γίνει διαπραγμάτευση για τη σημασία της κατασκευής της ευθείας παλινδρόμησης y=α+βx μέσω της οποίας θα γίνουν εκτιμήσεις για τιμές της μεταβλητής Y οι οποίες δεν βρίσκονται στον πίνακα. Οι υπολογισμοί θα δώσουν α=-1,16 και β=0,77. Με βάση τις τιμές αυτές μπορεί να γίνει η εκτίμηση της τιμής της Y όταν X=5.

Τέλος από την ευθεία της παλινδρόμησης y=α+βx προκύπτει ότι η αύξηση κατά 1 του x θα φέρει μία μεταβολή στο εκτιμούμενο y κατά β δηλαδή κατά 0,77.

Οδηγίες για τη διδασκαλία του κεφαλαίου

Ας έρθουμε τώρα στη διδακτική μεθοδολογία. Όσα αναφέρονται στη συνέχεια είναι προτεινόμενα ώστε ο διδάσκων να διαθέτει μία οργανωμένη πρόταση διδασκαλίας.

Κατά αρχήν καλό θα είναι ο διδάσκων να διαθέτει μία γενική εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί η διδασκαλία του κεφαλαίου όπως η παρακάτω.



Σε πρώτη φάση ο διδάσκων θα πρέπει να κάνει μία γενική επανάληψη των εννοιών που σχετίζονται με την περιγραφική Στατιστική. Με κατάλληλα επιλεγμένα παραδείγματα οι μαθητές θα πρέπει να εμπλακούν σε δραστηριότητες:

α) Οργάνωσης δεδομένων με υπολογισμό βασικών στοιχείων (σχετικές συχνότητες, αθροιστικές σχετικές συχνότητες κ.λ.π) σε πινακοποιημένα δεδομένα.

β) Παράσταση δεδομένων με βασικές μέθοδοι παράστασης όπως τα ιστογράμματα, ραβδογράμματα, τα κυκλικά διαγράμματα.
γ) Υπολογισμός μέτρων θέσης και διασποράς (μέση τιμή, διάμεσος, επικρατούσα τιμή, εύρος, διασπορά, τυπική απόκλιση).
Σε κάθε περίπτωση τα μέτρα θέσης και διασποράς θα πρέπει να ερμηνεύονται μέσα στα πλαίσια των δεδομένων στα οποία αναφέρονται.
δ) Το πέρασμα στη συσχέτιση δύο μεταβλητών θα πρέπει να γίνει μέσα από τη διάκριση της επεξεργασίας μίας μεταβλητής X από την ανάγκη συσχέτισης των τιμών δύο μεταβλητών X και Y.
Αρχικά θα πρέπει να επιλεγεί ένα κατάλληλο πρόβλημα από την οικονομία ή την εκπαίδευση με δεδομένα που θα έχει επιλέξει ο διδάσκων από κάποια ψηφιακή βάση του διαδικτύου ή από εισαγωγικές εφαρμογές που έχει στη διάθεσή του από σημειώσεις ή σχολικό εγχειρίδιο. Ο συντελεστής Pearson θα αποτελέσει το βασικό εργαλείο συσχέτισης δύο μεταβλητών.
Ο διδάσκων θα πρέπει να εκτιμήσει τον βαθμό εμπλοκής των μαθητών με πράξεις ιδιαίτερα όταν τα αριθμητικά δεδομένα είναι πολλά. Μία λύση είναι προφανώς να δίνει έτοιμα τα στατιστικά στοιχεία που προκύπτουν από εφαρμογή τύπων αλλά αυτό θα πρέπει να γίνεται με μέτρο ώστε να μη χαθεί παντελώς κάθε έννοια υπολογιστικής δεξιότητας. Τέλος θα πρέπει τα αποτελέσματα της συσχέτισης δύο μεταβλητών μέσα από τον συντελεστή Pearson να ερμηνεύονται στα πλαίσια των δεδομένων στα οποία αναφέρονται.
Κατά τη διδασκαλία της γραμμικής παλινδρόμησης θα πρέπει να τονιστεί ότι ο στόχος όλων αυτών των υπολογισμών είναι η βέλτιστη προσέγγιση τιμών μιας μεταβλητής οι οποίες δεν υπάρχουν στα δεδομένα μας.
Τέλος θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η τεχνολογία θα μπορούσε να υποστηρίξει ουσιαστικά τη διδασκαλία και χωρίς υπερβολή σε ορισμένες περιπτώσεις είναι σχεδόν απαραίτητη, ιδιαίτερα όταν το πλήθος των τιμών των μεταβλητών είναι μεγάλο.

Ποια σημεία θα πρέπει να προσέξει ιδιαίτερα ο διδάσκων;

---

1) Τα προβλήματα με τα οποία θα εμπλακούν οι μαθητές θα πρέπει να είναι πραγματικά, να αναφέρονται σε καταστάσεις οι οποίες αφορούν γενικές και όχι εξειδικευμένες γνώσεις των μαθητών.
2) Μικρός αριθμός δεδομένων (π.χ 4-5) ακυρώνει το νόημα της Στατιστικής καθώς είναι άστοχο να θεωρούμε ότι μπορούμε να αποφανθούμε για κάποιον ευμεγέθη πληθυσμό μελετώντας 4 – 5 περιπτώσεις.
3) Η εξίσωση της ευθείας παλινδρόμησης y=β+αx μας δίνει την εξάρτηση της μεταβλητής Y πάνω στην ανεξάρτητη μεταβλητή X. Σε αρκετές περιπτώσεις στατιστικών δεδομένων δύο μεταβλητών προς συσχέτιση έχει ενδιαφέρον και η μελέτη της εξάρτησης της μεταβλητής X πάνω στην Y. Στην περίπτωση αυτή χρειάζεται εξ αρχής υπολογισμός των νέων β και α καθώς είναι σφάλμα να θεωρηθεί ότι η νέα ευθεία είναι συμμετρική της προηγούμενης ως προς την ευθεία y=x.
4) Η κλίμακα των μετρήσεων σε κάθε μία από τις δύο μεταβλητές X, Y που πρόκειται να συσχετίσουμε θα πρέπει να είναι ίσων διαστημάτων.
5) Ενδιαφέρον παρουσιάζει η συσχέτιση δύο μεταβλητών όταν το διάγραμμα διασποράς έχει τη μορφή κάποιας έλλειψης η οποία είναι κεκλιμένη. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει πρώτα να κατασκευάζεται το διάγραμμα διασποράς και στη συνέχεια να κρίνεται αν έχει νόημα η συσχέτιση των τιμών των δύο μεταβλητών X και Y. (Φ. Κολυβά, Ε. Μπόρα 1995).
6) Αν επιχειρήσουμε να συσχετίσουμε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές π.χ τα από τροχαία και ο αριθμός γεννήσεων στην ίδια περιοχή τα αριθμητικά δεδομένα, αποκομμένα από το πραγματικό πλαίσιο στο οποίο ανήκουν, θα μπορούσαν να δώσουν κάποιο βαθμό συσχέτισης. Βλέπουμε δηλαδή ότι δύο άσχετα μεταξύ τους γεγονότα μπορεί να φανούν ότι έχουν κάποια σχέση. Με αυτό αναδεικνύεται η ανάγκη οι επιχειρούμενες συσχετίσεις να έχουν πραγματικό νόημα και να μην είναι αυθαίρετες.

Αξιοποίηση της Τεχνολογίας στην διδασκαλία του κεφαλαίου.

Αρχικά θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η χρήση της τεχνολογίας έχει προστιθέμενη αξία αν επιτρέπει πειραματισμό και διερεύνηση σε συνδυασμό με πολλαπλές αναπαραστάσεις της έννοιας που θέλουμε να διδάξουμε.

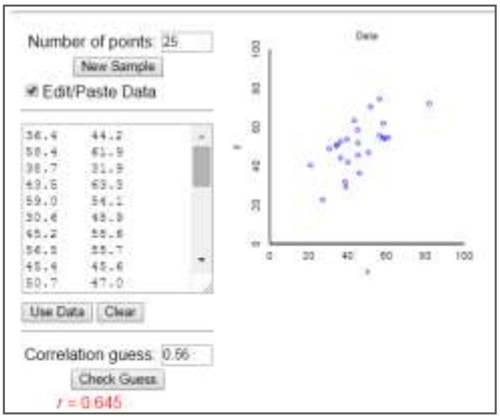
Ας δούμε 2 βασικές επιλογές που έχουμε για αξιοποίηση των ψηφιακών μέσων.

1) Το διαδίκτυο

Στο διαδίκτυο μπορούμε να επισκεφτούμε ιστότοπους οι οποίοι παρέχουν τη δυνατότητα να πειραματιστούν οι μαθητές με συγκεκριμένες μικροεφαρμογές applets.

http://www.rossmanchance.com/applets/RegShuffle.htm

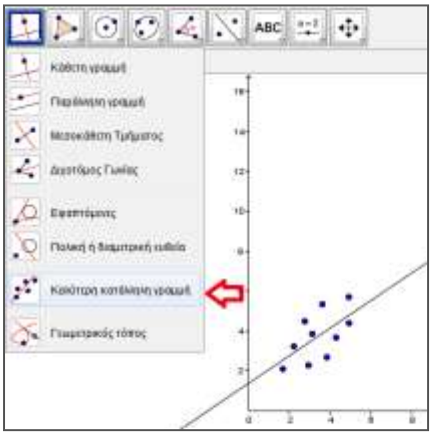
http://www.rossmanchance.com/applets/GuessCorrelation.html



Είναι σημαντικό να μπορούν οι μαθητές να αλλάζουν αριθμητικά δεδομένα και να μελετούν τις αλλαγές στα στατιστικά και στο διάγραμμα διασποράς. Οι μικροεφαρμογές στο διαδίκτυο έχουν το πλεονέκτημα ότι βρίσκονται στη διάθεση του χρήστη οποιαδήποτε στιγμή του χρειάζονται. Τα δύο βασικά μειονεκτήματα είναι ότι μπορεί να καταργηθεί ο ιστότοπος που το φιλοξενεί και ότι τις περισσότερες φορές είναι προκαθορισμένα και δεν μπορούμε να τα μετασχηματίσουμε.

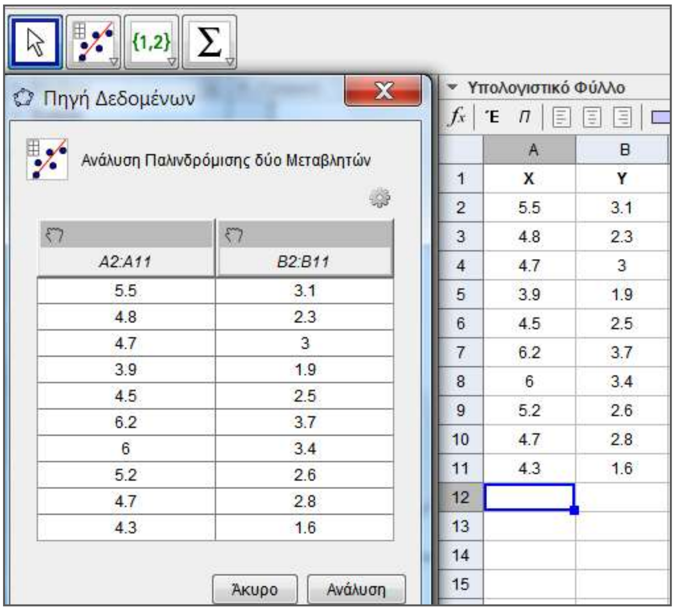
2) Το λογισμικό Geogebra

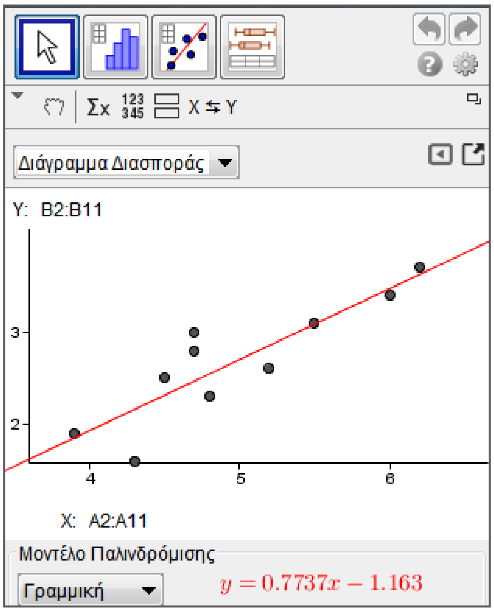
Με το λογισμικό Geogebra μπορούμε να δημιουργήσουμε κατάλληλες εφαρμογές για διερεύνηση και πολλαπλές αναπαραστάσεις των στατιστικών δεδομένων.



Ο απλούστερος τρόπος είναι να δημιουργήσουμε ένα σύνολο τυχαίων σημείων στην επιφάνεια εργασίας και να ζητήσουμε από το λογισμικό να υπολογίσει και κατασκευάσει την ευθεία βέλτιστης προσαρμογής.
Εδώ έχει ενδιαφέρον να σύρουν οι μαθητές τα σημεία και να μελετούν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η ευθεία.

Το λογισμικό όμως διαθέτει και ένα ιδιαίτερο περιβάλλον μέσα στο οποίο μπορεί ο χρήστης να κάνει στατιστικές μελέτες αρκετά προχωρημένες, πάντα στα πλαίσια των διδακτικών αναγκών του Λυκείου.





Όταν ζητηθεί από το λογισμικό να κάνει ανάλυση εμφανίζεται το διάγραμμα διασποράς και η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης με την εξίσωσή της.

.

Ερωτήματα και δραστηριότητες που θα μπορούσαν να τεθούν στους μαθητές είναι η μεταφορά στο λογιστικό φύλλο δεδομένων που έχουν επιλέξει από κάποια βάση δεδομένων και η μελέτη του βαθμού συσχέτισης των μεταβλητών με χρήση των εργαλείων του λογισμικού.

Βιβλιογραφία.

Καραγεώργος Δημήτρης 2001 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ. Περιγραφική και επαγωγική. Εκδόσεις Σαββάλας.

Κολυβά – Μαχαίρα. Φ, Μπόρα – Σέντα. Ε 1995: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ. Θεωρία, Εφαρμογές. Εκδόσεις Ζήτη.
Tabak John 2011Probability and statistics: the science of uncertainty **Revised Edition** New York
Watson Jane (2006) Statistical Literacy at school. Lawrence Erlbaum Associates Publishers. London.