# ΘΑΛΗΣ – Πανεπιστήμιο Πειραιά
# Μεθοδολογικές προσεγγίσεις για τη μελέτη της ευστάθειας σε προβλήματα λήψης αποφάσεων με πολλαπλά κριτήρια

## Δ10– Ανάπτυξη μέτρων αξιολόγησης μέτρων ευστάθειας σε προβλήματα πολυστοχικού προγραμματισμού

## Π10 – Τεχνική έκθεση (Ανάπτυξη μέτρων αξιολόγησης μέτρων ευστάθειας σε προβλήματα πολυστοχικού προγραμματισμού)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

# Στοιχεία παραδοτέου

**Δράση:** Δ10 – Ανάπτυξη μέτρων αξιολόγησης μέτρων ευστάθειας σε προβλήματα πολυστοχικού προγραμματισμού

**Τίτλος παραδοτέου:** Π10 – Τεχνική έκθεση (Ανάπτυξη μέτρων αξιολόγησης μέτρων ευστάθειας σε προβλήματα πολυστοχικού προγραμματισμού)

**Τύπος παραδοτέου:** S - PU

**Έκδοση:** 02

**Ημερομηνία:** 28 Φεβρουαρίου 2013

**Υπεύθυνος σύνταξης:** Καθηγητής Ιωάννης Ψαρράς

**Ομάδα σύνταξης:** Αναπληρωτής Καθηγητής Δημήτριος Ασκούνης

Επίκουρος Καθηγητής Γεώργιος Μαυρωτάς

Δρ. Χάρης Δούκας

Δρ. Παναγιώτης Ξυδώνας

Ελευθέριος Σίσκος, MSc.

Professor Jose Figueira

# Περιεχόμενα

# 1. Εισαγωγή

Η ανάλυση ευστάθειας που θα εξετάσουμε εστιάζεται σε προβλήματα πολυστοχικού προγραμματισμού ή αλλιώς Πολυκριτηριακού Μαθηματικού Προγραμματισμού (ΠΚΜΠ) με συνεχείς μεταβλητές (Πολυκριτηριακός Γραμμικός Προγραμματισμός – ΠΚΓΠ), με ακέραιες μεταβλητές (Πολυκριτηριακός Ακέραιος Προγραμματισμός-ΠΚΑΠ) ή και συνδυασμό των δύο (Πολυκριτηριακός Μικρός Ακέραιος Προγραμματισμός-ΠΚΜΑΠ). Οι τεχνικές που θα αναπτυχθούν μπορούν να εφαρμοσθούν αυτούσιες και σε προβλήματα με μη γραμμικές συναρτήσεις.

Με τον όρο **ευστάθεια** στον Μαθηματικό Προγραμματισμό εννοούμε το κατά πόσο είναι ευαίσθητη η βέλτιστη λύση σε μεταβολές των παραμέτρων του προβλήματος, όπως έχει ήδη αναλυθεί στο παραδοτέο Π9. Η έννοια δηλαδή της ευστάθειας είναι συνυφασμένη με την έννοια της αβεβαιότητας ως προς τις παραμέτρους του προβλήματος. Η ερευνητική δουλειά για την μελέτη της ευστάθειας σε προβλήματα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης στρέφεται προς δύο κατευθύνσεις: (1) την ευστάθεια του μετώπου Pareto (Pareto front) και (2) την ευστάθεια μια συγκεκριμένης κατά Pareto βέλτιστης λύσης. Τόσο για το μέτωπο Pareto, όσο και για μια συγκεκριμένη Pareto βέλτιστη λύση θα αναπτύξουμε μέτρα αξιολόγησης της ευστάθειας. Και στις δύο περιπτώσεις η αβεβαιότητα για τις παραμέτρους του μοντέλου θα εκφράζεται είτε με τη βοήθεια κατανομών πιθανότητας (στοχαστική προσέγγιση) είτε με σενάρια (κριτήριο minimax regret). Για τις επόμενες παραγράφους θα θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα πολυκριτηριακού προγραμματισμού:

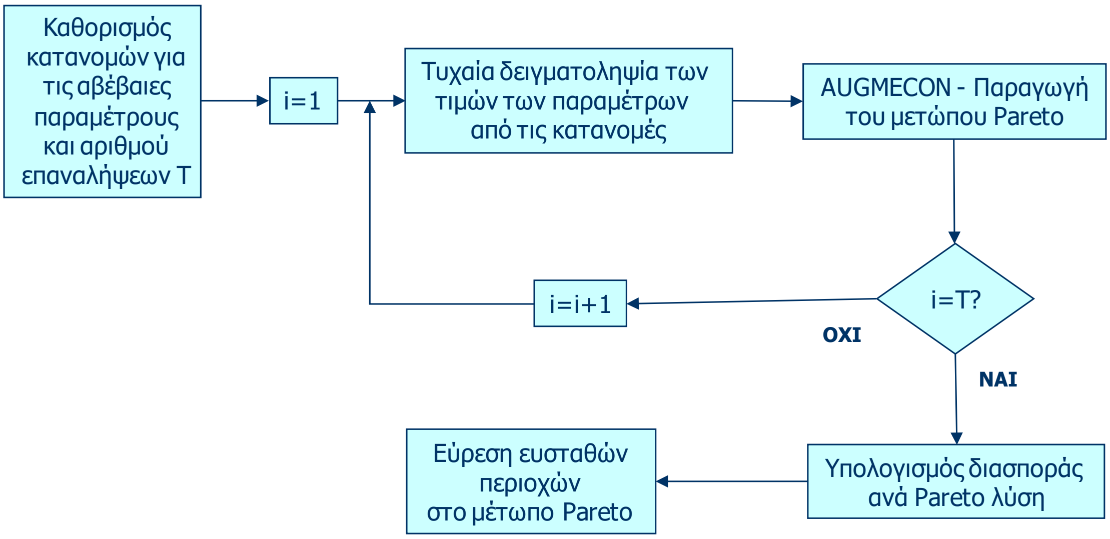
$$\begin{aligned} &\max c_1 x \\ &\max c_2 x \\ &\ldots \\ &\max c_p x \\ &st \\ &x \in F \end{aligned} \tag{1}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε *p* αντικειμενικές συναρτήσεις προς μεγιστοποίηση και *F* είναι το εφικτό χωρίο που μπορεί να είναι συνεχές ή/και διακριτό.

# 2. Ευστάθεια του μετώπου Pareto

## 2.1 Στοχαστική προσέγγιση

Η αβεβαιότητα στις παραμέτρους είναι στοχαστικής φύσεως δηλαδή ποσοτικοποιείται με την μορφή **κατανομών πιθανότητας**. Χρησιμοποιείται συνδυασμός Πολυκριτηριακής Βελτιστοποίησης και **Monte Carlo** simulation (Vose, 1996; 2006). Η διαδικασία είναι η εξής: Καταρχήν ορίζεται ο τύπος και οι παράμετροι των συναρτήσεων κατανομής πιθανότητας που εκφράζουν τις αβέβαιες παραμέτρους (συντελεστές αντικειμενικών συναρτήσεων). Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την τεχνική Monte Carlo γίνεται δειγματοληψία για τους συντελεστές των αντικειμενικών συναρτήσεων και παράγεται το Pareto front με την μέθοδο **Augmecon** (Mavrotas, 2009). Αυτό επαναλαμβάνεται πολλές φορές με αποτέλεσμα να λαμβάνουμε όχι ένα αλλά πολλά μέτωπα Pareto. Το διάγραμμα ροής της διαδικασίας φαίνεται στο Σχήμα 1.



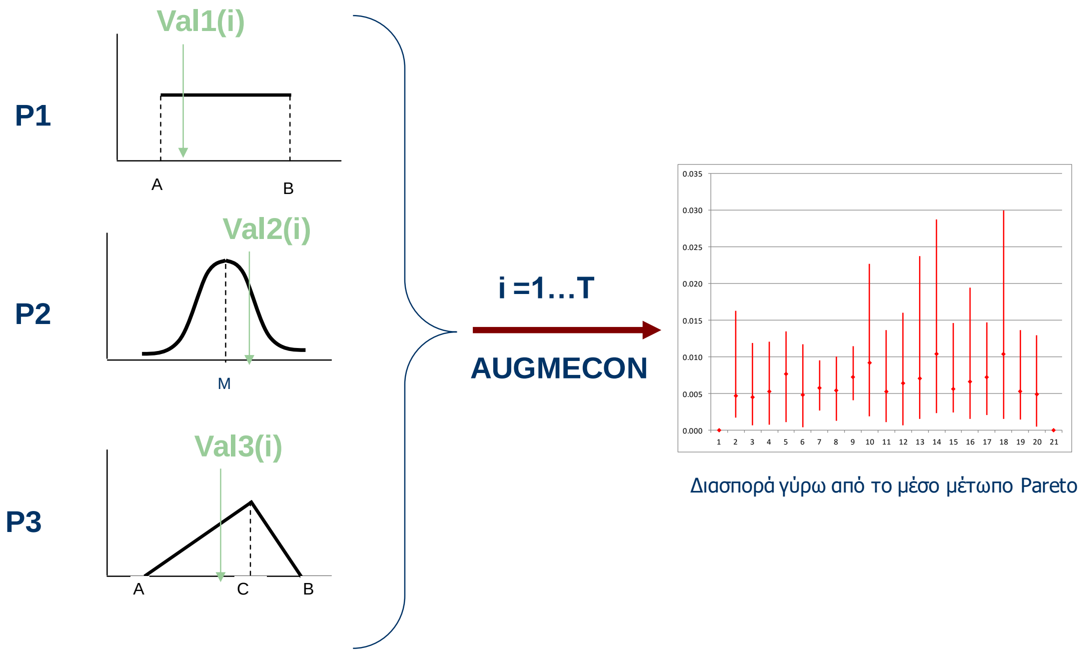

**Σχήμα 1: Διάγραμμα ροής της διαδικασίας**

Το πρόβλημα που επιλύεται σε κάθε επανάληψη της τεχνικής Monte Carlo είναι το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} &\max c_1^{(i)} x \\ &\max c_2^{(i)} x \\ &\ldots \\ &\max c_P^{(i)} x \\ &st \\ &x \in F \end{aligned} \qquad (2)$$

Όπου $c_p^{(i)}$ είναι ο συντελεστής της αντικειμενικής συνάρτησης $p$ στην i- επανάληψη Monte Carlo.

Στη συνέχεια από το σύνολο των μετώπων Pareto μπορούμε να υπολογίσουμε ένα «μέσο» μέτωπο Pareto ως το πιο αντιπροσωπευτικό λαμβάνοντας τους μέσους όρους ανά σημείο του μετώπου Pareto. Στη συνέχεια σε κάθε μέτωπο Pareto και για κάθε Pareto βέλτιστη λύση υπολογίζουμε την απόστασή της από την αντίστοιχη Pareto βέλτιστη λύση του αντιπροσωπευτικού μετώπου Pareto. Με τον τρόπο αυτό υπολογίζουμε τη διασπορά για κάθε Pareto βέλτιστη λύση γύρω από την αντίστοιχη λύση του αντιπροσωπευτικού μετώπου Pareto. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να δούμε την ευστάθεια του Pareto front αναγνωρίζοντας περιοχές με μεγαλύτερη και μικρότερη διασπορά. Η ευστάθεια λοιπόν του μετώπου Pareto εκφράζεται με την διασπορά γύρω από το «αντιπροσωπευτικό μέτωπο Pareto». Σχηματικά η διαδικασία φαίνεται στο Σχήμα 2.




**Σχήμα 2: Σχηματική παράσταση της διαδικασίας**

Είναι χαρακτηριστικό ότι με τη μέθοδο Augmecon μπορούμε να πάρουμε όσο πυκνό πλέγμα θέλουμε για το μέτωπο Pareto ενώ με τη νέα έκδοση της μεθόδου Augmecon (Augmecon2, Mavrotas and Florios, 2013) μπορούμε να παράγουμε το πλήρες μέτωπο Pareto σε προβλήματα Πολυκριτηριακού Ακέραιου Προγραμματισμού.

Εφαρμογή της συγκεκριμένης προσέγγισης αποτελεί η εργασία που έγινε δεκτή και θα παρουσιαστεί στο διεθνές επιστημονικό συνέδριο επιχειρησιακής έρευνας Euro 2013 (http://euro2013.org/ ) με τίτλο "*Incorporating Energy and Environmental Corporate Responsibility in capital budgeting. A multiobjective approach*".

## 2.2 Προσέγγιση minimax regret (με σενάρια)

Πολλές φορές η ευστάθεια εκφράζεται με το κριτήριο **minimax regret** δηλαδή επιδιώκεται η λύση που στην χειρότερη περίπτωση απέχει όσον το δυνατό λιγότερο από την βέλτιστη λύση του σεναρίου. Οι Kouvelis & Yu μάλιστα, στο βιβλίο τους *Robust Discrete Optimization and its Applications* (1997) εισάγουν την έννοια του «ευσταθούς προγραμματισμού» θεωρώντας ότι είναι αυτός που επιδιώκει την επίτευξη της minimax regret λύσης η οποία αποτελεί μια ορθολογική επιλογή του αποφασίζοντα σε συνθήκες αβεβαιότητας.

### 2.2.1 Το κριτήριο minimax regret

Η λογική του κριτηρίου minimax regret εισήχθη από τον Savage (1954). Η προσέγγιση minimax regret αποβλέπει ουσιαστικά στην ελαχιστοποίηση της μέγιστης απώλειας σε σχέση με το βέλτιστο του κάθε σεναρίου. Αποσκοπεί στην εξεύρεση μιας λύσης η οποία θα προσφέρει στον αποφασίζοντα ένα ικανοποιητικό επίπεδο, όσο το δυνατόν πλησιέστερα προς την βέλτιστη λύση οποιαδήποτε και αν είναι η κατάσταση στο μέλλον. Η απόφαση αυτή λαμβάνεται πριν γίνουν γνωστές οι καταστάσεις του μέλλοντος.

Στον μαθηματικό προγραμματισμό, το minimax regret κριτήριο εφαρμόζεται συνήθως σε προβλήματα με ασαφείς (fuzzy, interval) συντελεστές στην αντικειμενική συνάρτηση, επιδιώκοντας ευσταθή (robust) αποτελέσματα ( βλ. παράδειγμα Inuigushi και Sakawa, 1995; Mausser και Laguna, 1999; Kazakci et al., 2006). Με τον όρο «ευσταθή» εννοούμε αποτελέσματα τα οποία θα εξαρτώνται όσο το δυνατόν λιγότερο από την μελλοντική αβεβαιότητα.

Η εφαρμογή του minimax regret κριτηρίου στα προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού, τα οποία χαρακτηρίζονται από μία αβεβαιότητα σε ορισμένες από τις παραμέτρους τους, μπορεί να εφαρμοστεί με διάφορους τρόπους. Αρκετές προσεγγίσεις οδηγούν στην διακριτοποίηση του συνήθως συνεχούς συνόλου των αβέβαιων παραμέτρων (Mausser και Laguna, 1999; Loulou και Kanudia, 1999) προκειμένου να δημιουργήσουν διαφορετικά σενάρια. Κατά συνέπεια, αυτά τα σενάρια μπορούν να ενσωματωθούν σε μοντέλα μαθηματικού προγραμματισμού χρησιμοποιώντας διαφορετικές μεταβλητές απόφασης και περιορισμούς που θα συνδέονται με κατάλληλες δυαδικές και γενικές μεταβλητές. Στην παρούσα εργασία προσαρμόζουμε την προσέγγιση των Kouvelis & Yu (1997) η οποία χρησιμοποιείται για μονοκριτηριακά προβλήματα στην περίπτωση των πολυκριτηριακών προβλημάτων προκειμένου να βρούμε ευσταθείς Pareto βέλτιστες λύσεις.

### 2.2.2 Εφαρμογή στον Πολυκριτηριακό προγραμματισμό

Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε κατανομές πιθανότητας αλλά **σενάρια** για τις διάφορες παραμέτρους. Σύμφωνα με του Kouvelis & Yu (1997) η λύση minimax regret σε ένα μονοκριτηριακό πρόβλημα μεγιστοποίησης μπορεί να υπολογισθεί λύνοντας το ακόλουθο πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού:

$$\begin{aligned} & z_{MMR} = \min y \\ & st \\ & c^s x \geq (y+1) z^s \quad s \in S \\ & x \in F \end{aligned} \tag{3}$$

Όπου $S$ είναι το σύνολο των σεναρίων, $c^s$ οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης με βάση το σενάριο $s$ και $z^s$ η βέλτιστη λύση για το σενάριο $s$. Λύνοντας το πρόβλημα αυτό για αντιπροσωπευτικά σημεία του μετώπου Pareto μπορούμε να έχουμε τις minimax regret Pareto λύσεις που θα απαρτίζουν το ευσταθές μέτωπο Pareto με βάση τα δεδομένα σενάρια. Έτσι θα διακρίνουμε τις περιοχές μεγαλύτερης και μικρότερης ευστάθειας στο Pareto front.

Οι διάφορες λύσεις στο μέτωπο Pareto θα χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένους συντελεστές βαρύτητας και θα παράγονται λύνοντας το ακόλουθο πρόβλημα:

$$\begin{aligned} & \max z = \sum_{p=1}^{P} w_p \times \frac{c_p x - f_{p,\min}}{f_{p,\max} - f_{p,\min}} \\ & st \\ & x \in F \end{aligned} \tag{4}$$

όπου $f_{p,min}$ και $f_{p,max}$ είναι το ελάχιστο και το μέγιστο της $p$ αντικειμενικής συνάρτησης για το εφικτό χωρίο $F$ που λαμβάνονται συνήθως από τον πίνακα ($p \times p$) με τις λύσεις μεμονωμένης βελτιστοποίησης των αντικειμενικών συναρτήσεων (payoff table). Μεταβάλλοντας τα βάρη $w_p$ λαμβανουμε και διαφορετικές Pareto βέλτιστες λύσεις. Διακριτοποιούμε το σύνολο των βαρών σε G συνδυασμούς ($w^g_1, w^g_2, \ldots, w^g_p$) όπου $g=1..G$ με:

$$\sum_{p=1}^{P} w_p^g = 1, \quad w_p^g > 0 \tag{5}$$

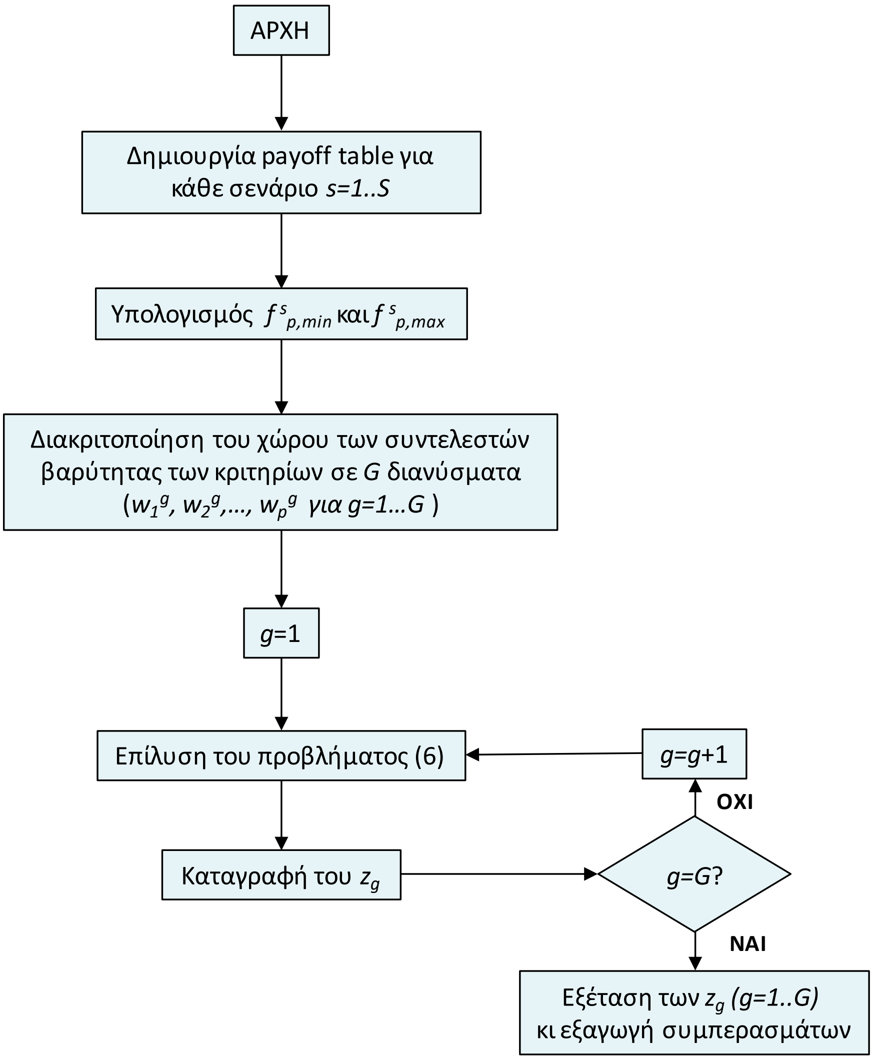
και λαμβάνουμε ουσιαστικά $G$ διανύσματα βαρών που αντιστοιχούν σε $G' \leq G$ Pareto βέλτιστες λύσεις.

Όταν λοιπόν έχουμε $S$ σενάρια για τους συντελεστές των αντικειμενικών συναρτήσεων και $G$ συνδυασμούς βαρών μπορούμε για κάθε συνδυασμό βαρών $g=1..G$ να λύνουμε ένα πρόβλημα minimax regret συνδυάζοντας τα μοντέλα (3) και (4). τύπου (4). Το πρόβλημα που θα επιλύεται για κάθε συνδυασμό βαρών $g=1..G$ που αντιστοιχούν σε κάποιο σημείο του Pareto front θα είναι το ακόλουθο:

$$
\begin{aligned}
& z_g = \min y_g \\
& st \\
& \sum_{p=1}^{P} w_p^g \times \frac{c_p^s x - f_{p,\min}^s}{f_{p,\max}^s - f_{p,\min}^s} \geq (y_g + 1) z_g^s \quad s \in S \\
& x \in F
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Όπου $f^s_{p,min}$ και $f^s_{p,max}$ είναι το ελάχιστο και το μέγιστο της *p* αντικειμενικής συνάρτησης για το εφικτό χωρίο *F* με βάση το σενάριο *s* για τους συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης. $z_g^s$ είναι η βέλτιστη τιμή που παίρνει το σταθμισμένο άθροισμα των αντικειμενικών συναρτήσεων με βάση τους συντελεστές βαρύτητας $w_p^g$ και για το σενάριο *s* των συντελεστών των αντικειμενικών συναρτήσεων. Το παραπάνω πρόβλημα λύνεται για κάθε *g* συνδυασμό των βαρών (*g=1..G*) και ανάλογα με την τιμή που παίρνει το $z_g$ συμπεραίνουμε ποιες είναι οι ευσταθείς και ποιες οι ασταθείς περιοχές του μετώπου Pareto. Όσο μικρότερο το $z_g$ τόσο πιο ευσταθής είναι η συγκεκριμένη περιοχή του μετώπου Pareto. Η πυκνότητα του πλέγματος των κατά Pareto βέλτιστων λύσεων καθορίζεται από το G. Το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου φαίνεται στο Σχήμα 3 στην επόμενη σελίδα.

Εφαρμογή της συγκεκριμένης προσέγγισης αποτελεί η εργασία που έγινε δεκτή και θα παρουσιαστεί στο διεθνές επιστημονικό συνέδριο επιχειρησιακής έρευνας Euro 2013 (http://euro2013.org/ ) με τίτλο “ Building a robust efficient frontier in portfolio selection under different future scenarios”.




**Σχήμα 3: Σχηματική παράσταση της διαδικασίας minimax regret**

# 3. Ευστάθεια μιας Pareto βέλτιστης λύσης

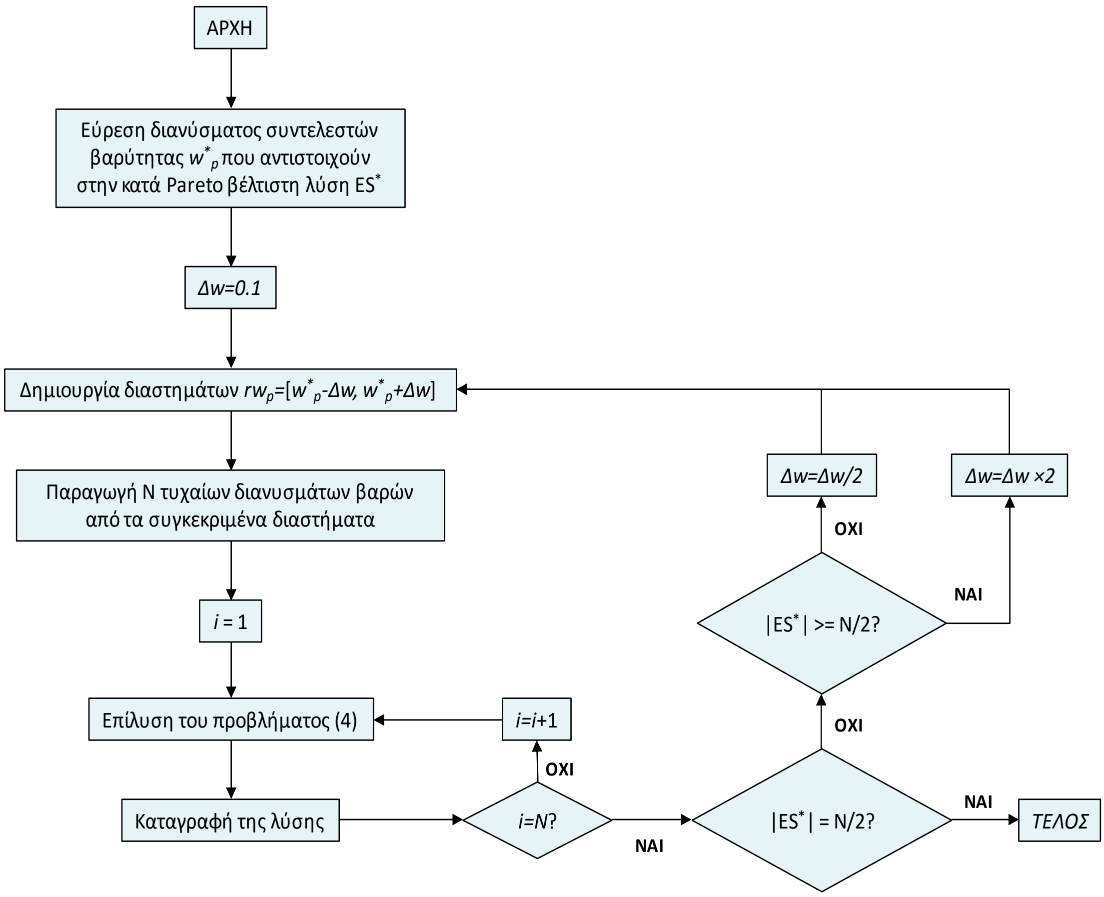
Όταν η αβεβαιότητα υπάρχει στους **συντελεστές βαρύτητας** (βάρη) των αντικειμενικών συναρτήσεων τότε θεωρούμε ότι η ευστάθεια αφορά τις συγκεκριμένες Pareto βέλτιστες λύσεις που προκύπτουν ως λύση του scalarization προβλήματος. Τότε δεν μιλάμε για μέτωπο Pareto αλλά για προτιμότερη Pareto λύση (most preferred Pareto solution). Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα εξετάσουμε την αβεβαιότητα που ενσωματώνεται στο μοντέλο με την μορφή κατανομών πιθανότητας για τους συντελεστές βαρύτητας.

## 3.1 Γενικό μέτρο ευστάθειας μιας Pareto βέλτιστης λύσης

Στον πολυκριτηριακό προγραμματισμό μια κατά Pareto βέλτιστη λύση αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα συντελεστών βαρύτητας. Με την λογική αυτή και η προτιμότερη λύση που έχει επιλεχθεί από τον αποφασίζοντα σε κάποιο πρόβλημα πολυκριτηριακού προγραμματισμού αντιστοιχεί σε κάποιο διάνυσμα συντελεστών βαρύτητας. Με την προτεινόμενη μέθοδο αποτίμησης της ευστάθειας μια Pareto βέλτιστης λύσης υποστηρίζεται ότι όσο περισσότερο μπορούμε να κινηθούμε γύρω από τις συγκεκριμένες τιμές των συντελεστών βαρύτητας και η επιλεχθείσα λύση παραμένει η καλύτερη, τόσο πιο ευσταθής θεωρείται η συγκεκριμένη επιλογή. Με βάση αυτήν την λογική μπορούμε να εξετάσουμε την ευστάθεια μιας Pareto βέλτιστης λύσης και να υπολογίσουμε ένα μέτρο ευστάθειας της λύσης αυτής όπως περιγράφεται στη συνέχεια.

Το πρώτο βήμα είναι να αντιστοιχίσουμε την συγκεκριμένη Pareto βέλτιστη λύση σε συγκεκριμένο διάνυσμα συντελεστών βαρύτητας $w^*_p = (w^*_1, w^*_2, \ldots, w^*_P)$ με βάση το μοντέλο (4). Στη συνέχεια, γύρω από τα στοιχεία του $w^*_p$ θεωρούμε συμμετρικά διαστήματα συντελεστών βαρύτητας ίδιου εύρους για όλα τα κριτήρια-αντικειμενικές συναρτήσεις. Στη συνέχεια κάνουμε τυχαία δειγματοληψία των συντελεστών βαρύτητας από τα διαστήματα αυτά και παράγουμε τις αντίστοιχες Pareto βέλτιστες λύσεις με μια διαδικασία προσομοίωσης Monte Carlo - βελτιστοποίησης. Οι κατά Pareto βέλτιστες λύσεις που λαμβάνουμε από τις N επαναλήψεις Monte Carlo δείχνουν μας δίνουν πληροφορίες για την ευστάθεια της προτιμότερης λύσης. Το πόσες φορές συναντάται η αρχική προτιμότερη λύση στις λύσεις αυτές είναι ενδεικτικό της ευστάθειας της. Αν δηλαδή στις επαναλήψεις αυτές δεσπόζει ως προκύπτουσα λύση η αρχική προτιμότερη λύση τότε μπορούμε να διευρύνουμε κι άλλο τα διαστήματα των συντελεστών βαρύτητας για να βρούμε την μέγιστη περιοχή ευστάθειας. Αν όχι, τότε πρέπει να συρρικνώσουμε τα διαστήματα μεταβολής. Ως σημείο αναφοράς για το τι σημαίνει «δεσπόζει» η αρχική προτιμότερη λύση ορίζουμε το να προκύπτει τουλάχιστον από το 50% των επαναλήψεων Monte Carlo. Με αυτόν τον επαναληπτικό τρόπο διεύρυνσης συρρίκνωσης των διαστημάτων μεταβολής, μπορούμε να υπολογίσουμε με σχετική ακρίβεια την μέγιστη περιοχή ευστάθειας μιας Pareto βέλτιστης λύσης. Συγκεκριμένα όταν φτάσουμε σε ένα εύρος των συντελεστών βαρύτητας όπου από τις N συνολικά λύσεις που θα πάρουμε (N= οι επαναλήψεις Monte Carlo) η συγκεκριμένη

Pareto βέλτιστη λύση εμφανίζεται ως βέλτιστη σε <50% των επαναλήψεων (majority rule – χάνει την «πλειοψηφία») τότε θεωρούμε ότι αυτή είναι και η μέγιστη περιοχή ευστάθειας. Το εύρος των συντελεστών βαρύτητας της αντικειμενικής συνάρτησης p το ορίζουμε ως $rw_p$. Ο αλγόριθμος της διαδικασίας παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.




**Σχήμα 4: Σχηματική παράσταση του αλγορίθμου υπολογισμού της ευστάθειας μιας Pareto βέλτιστης λύσης**

Όπως είναι εύκολα αντιληπτό η απόλυτα μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η ευστάθεια για μια Pareto βέλτιστη λύση είναι όταν για $w_p \in [0,1]$ προκύπτει η ίδια λύση (→ ideal solution). Άρα για $P$ κριτήρια το μέγιστο εύρος διακύμανσης των συντελεστών βαρύτητας είναι $P$. Ως μέτρο ευστάθειας (RM) μιας Pareto βέλτιστης λύσης ορίζουμε το άθροισμα των του εύρους των διαστημάτων μεταβολής που προέκυψαν από την παραπάνω διαδικασία προς $P$.

$$RM = \frac{\sum_{p=1}^{P} rw_p}{P}$$

Όπου $rw_p$ είναι το μέγιστο εύρος μεταβολής για τον p- συντελεστή βαρύτητας έτσι ώστε το 50% των επαναλήψεων της μεθόδου Monte Carlo να μας δίνει την αρχική Pareto βέλτιστη λύση.

Να σημειωθεί ότι η κατανομή που παίρνουμε για τη προσομοίωση Monte Carlo προτείνεται σύμφωνα με τον Ralph Steuer να είναι 50% uniform – 50% weibull (Steuer, 1989, κεφ. 11.8 – Set discretization).

Για προβλήματα Πολυκριτηριακού Ακέραιου Προγραμματισμού (Multi-Objective Integer Programming -MOIP), όπως το πρόβλημα της επιλογής χαρτοφυλακίου έργων (project portfolio selection) η διαδικασία αυτή είναι σαφής, καθότι το τι σημαίνει «ίδια λύση» είναι προφανές. Για προβλήματα όμως που έχουμε και συνεχείς μεταβλητές (Πολυκριτηριακός Γραμμικός και Μικτός Ακέραιος Προγραμματισμός - MOLP και MOMILP) πρέπει να οριστεί τι σημαίνει η «ίδια λύση» καθότι μπορεί να μεταβάλλονται κατά πολύ λίγο οι μεταβλητές απόφασης (δεν θα είναι δηλ. 0 ή 1). Τότε μπορούμε να ορίσουμε τι σημαίνει «ίδια λύση» με το να εισάγουμε ένα κατώφλι, να μην αποκλίνει π.χ. πάνω από α% στις αντικειμενικές συναρτήσεις με π.χ. α=1%).

Εφαρμογή της συγκεκριμένης προσέγγισης αποτελεί η εργασία που έγινε δεκτή και θα παρουσιαστεί στο διεθνές επιστημονικό συνέδριο επιχειρησιακής έρευνας Euro 2013 (http://euro2013.org/ ) με τίτλο “Multi-objective project portfolio selection: Assessing the robustness of selected portfolios”.

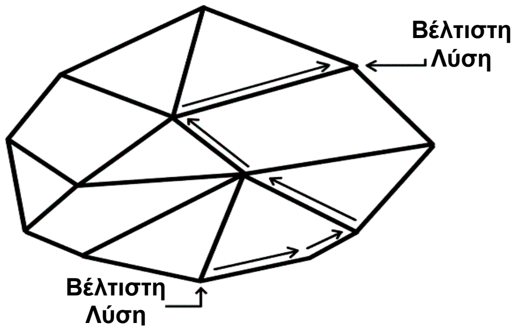
## 3.2 Ανάλυση ευστάθειας στις προτιμήσεις του αποφασίζοντα

Στη συγκεκριμένη προσέγγιση εξετάζουμε την ευστάθεια των προτιμησιακών δεδομένων που εξάγουμε από τον αποφασίζοντα και το βαθμό στον οποίο θα επηρεάσουν τις τελικές Pareto λύσεις.

Μεγάλος αριθμός πολυκριτηριακών μέθοδων απαιτούν από τον αποφασίζοντα την a priori έκφραση της προτίμησης του, σε δεδομένα του πολυκριτηριακού μοντέλου όπως τα βάρη των αντικειμενικών συναρτήσεων όπως η μέθοδος σταθμισμένων βαρών (weighted sums), ο συναινετικός προγραμματισμός (Zeleny, 1982), ο προγραμματισμός στόχων (goal programming) κ.α. Όμως, ανάλογα με τη μέθοδο προσδιορισμού τους και το διάλογο που θα διενεργηθεί υπάρχει η περίπτωση της μη μονοσήμαντης εξαγωγής τους από αυτόν, γεγονός που μπορεί να προκαλέσει αστάθεια των τελικών λύσεων.

Μια τέτοια μέθοδος προσδιορισμού της σημαντικότητας των αντικειμενικών συναρτήσεων (κριτηρίων) είναι η οι διμερείς/τριμερείς κλπ συγκρίσεις των βαρών που χρησιμοποιούνται κατά κόρον από τους αναλυτές. Όμως, επειδή το σύστημα των ανισοτήτων που συντίθεται από αυτές τις συγκρίσεις δεν λύνεται μονοσήμαντα αλλά συνθέτει ένα πολύεδρο στο χώρο των κριτηρίων, κρίνεται αναγκαία η εξέτασή του για τον έλεγχο της ευστάθειας των λύσεων που θα εξαχθούν και κατά πόσο ικανοποιούν τον αποφασίζοντα.

Στόχος είναι η οριοθέτηση του υπερπολυέδρου που δημιουργείται και ο έλεγχος του βαθμού που επηρεάζει το Pareto front η μετάβαση από ένα σημείο του υπερπολυέδρου σε ένα άλλο, (η χρήση ενός πιθανού set βαρών των αντικειμενικών συναρτήσεων ως προς ένα άλλο). Στα πλαίσια του ερευνητικού αυτού έργου, θα επιχειρήσουμε να εντοπίσουμε και να καταγράψουμε όλες τις κορυφές του υπερπολυέδρου των βαρών με χρήση του αλγορίθμου λαβυρίνθου Manas-Nedoma ώστε να καταγράψουμε το μέγεθος της διαφοροποίησής τους μεταξύ τους και να επιτύχουμε μια ικανή αποτελεσματική οπτικοποίησή του. Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε σε πραγματικά προβλήματα πολυστοχικού προγραμματισμού το βαθμό που θα επηρεάζονται οι Pareto λύσεις από τη μετάβαση από ένα set βαρών (κορυφή του υπερπολυέδρου) σε ένα άλλο.




**Σχήμα 5: Αναπαράσταση υπερπολυέδρου και μετάβαση από κορυφή σε κορυφή του**

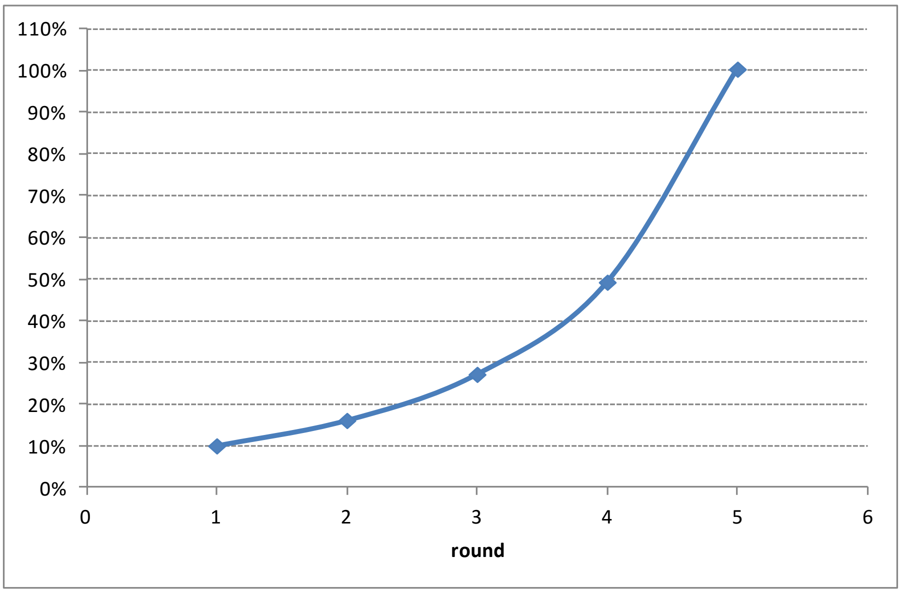
Σε δεύτερο στάδιο, με τη χρήση αλγορίθμων τυχαίας δειγματοληψίας βαρών μέσα από το υπερπολύεδρο και προσομοιώσεων Monte Carlo (βλ. παραπάνω), θα επιχειρήσουμε να αποκτήσουμε μια στατιστική απεικόνιση των βέλτιστων λύσεων που θα προκύπτουν σε πραγματικά προβλήματα και θα αποφασίζουμε για την ευστάθεια τους ή μη με δείκτες όπως το μέτρο ευστάθειας (RM) που παρουσιάστηκε παραπάνω. Στην περίπτωση που το μοντέλο θα κρίνεται ασταθές, θα επαναδιενεργείται διάλογος με τον αποφασίζοντα για την εξαγωγή επιπλέον συγκρίσεων μεταξύ των βαρών για τον περιορισμού του όγκου του υπερπολυέδρου που σχηματίζουν.

Εφαρμογή της συγκεκριμένης προσέγγισης αποτελεί η εργασία που έγινε δεκτή και παρουσιάστηκε στο 12ο Ειδικό Συνέδριο Ελληνικής Εταιρίας Επιχειρησιακών Ερευνών - 9η Συνάντηση Πολυκριτήριας Ανάλυσης Αποφάσεων, που διεξήχθη στις 11-13 Οκτωβρίου 2012 στην Καβάλα, με τίτλο “Robust compromise programming of industrial scheduling jobs with variable criteria priorities ”. Η συγκεκριμένη εργασία αφορά σε ένα πραγματικό πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού τεσσάρων κριτηρίων, για γραμμή παραγωγής αυτοκινήτων.

## 3.3 Η ευστάθεια στο πρόβλημα της επιλογής επενδυτικών σχεδίων

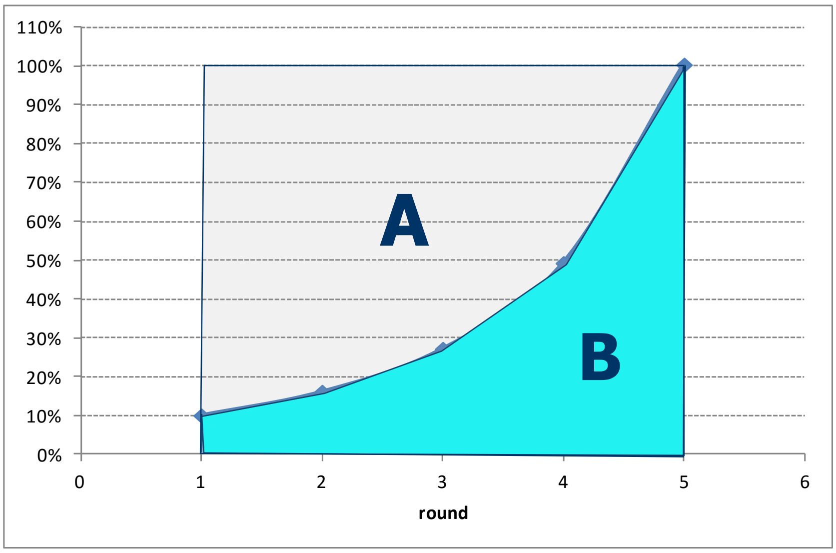
Ειδικά για το πρόβλημα της επιλογής χαρτοφυλακίου έργων (Project Portfolio Selection) μπορούμε να ορίσουμε την ευστάθεια με διαφορετικό τρόπο. Να εκτιμήσουμε όχι μόνο την ευστάθεια του τελικού χαρτοφυλακίου αλλά και τον βαθμό εμπιστοσύνης της συμμετοχής κάθε έργου σε αυτό. Η διαδικασία ονομάζεται Iterative Trichotomic Approach (Mavrotas & Pechak, 2013) και ουσιαστικά χωρίζει τα έργα σε “Green”, “Red”, “Grey”. Τα green projects είναι αυτά που σίγουρα συμμετέχουν στο τελικό portfolio, τα red projects αυτά που σίγουρα δεν συμμετέχουν και τα grey projects αυτά που χρειάζονται περαιτέρω εξέταση. Βασικός σκοπός της μεθόδου ITA είναι, ακολουθώντας μια επαναληπτική διαδικασία, να καταταχτούν όλα τα έργα ως “Green” ή “Red”.

Στο συγκεκριμένο έργο θα προταθεί κι ένας συντελεστής ευστάθειας για το τελικό portfolio με βάση των αριθμό των έργων που εντάσσεται στο τελικό χαρτοφυλάκιο σε κάθε γύρο της μεθόδου ITA. Συγκεκριμένα η λογικής είναι ότι κατασκευάζεται η αθροιστική καμπύλη συμμετοχής στο τελικό χαρτοφυλάκιο όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.




**Σχήμα 5: Αθροιστική καμπύλη συμμετοχής έργων στο τελικό χαρτοφυλάκιο**

Στον κάθετο άξονα είναι το ποσοστό των έργων που υπάρχουν στο τελικό χαρτοφυλάκιο και στον οριζόντιο άξονα ο αντίστοιχος γύρος. Το μέτρο ευστάθειας του τελικού χαρτοφυλακίου ορίζεται ως το εμβαδό κάτω από την αθροιστική καμπύλη συμμετοχής (Β) ως προς το εμβαδό της μέγιστης ευστάθειας (Α).




**Σχήμα 6: Εμβαδό κάτω από την αθροιστική καμπύλη συμμετοχής έργων στο τελικό χαρτοφυλάκιο (Β) και εμβαδό μέγιστης ευστάθειας (Α)**

Το μέτρο ευστάθειας RM εμβαδό κάτω από την καμπύλη αυτή με βάση τους ακόλουθους τύπους:

$$RM = [\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 + a_3}{2} + ... + \frac{a_{n-1} + a_n}{2}] / (n-1)$$

$$RM = [\frac{a_1}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} a_i + \frac{a_n}{2}] / (n-1) = [\frac{a_1}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} a_i + \frac{1}{2}] / (n-1)$$

Όπου τα $a_i$ είναι οι αντίστοιχες τεταγμένες των σημείων καμπής και n ο αριθμός των γύρων. Για παράδειγμα στο συγκεκριμένο σχήμα υπολογίζεται

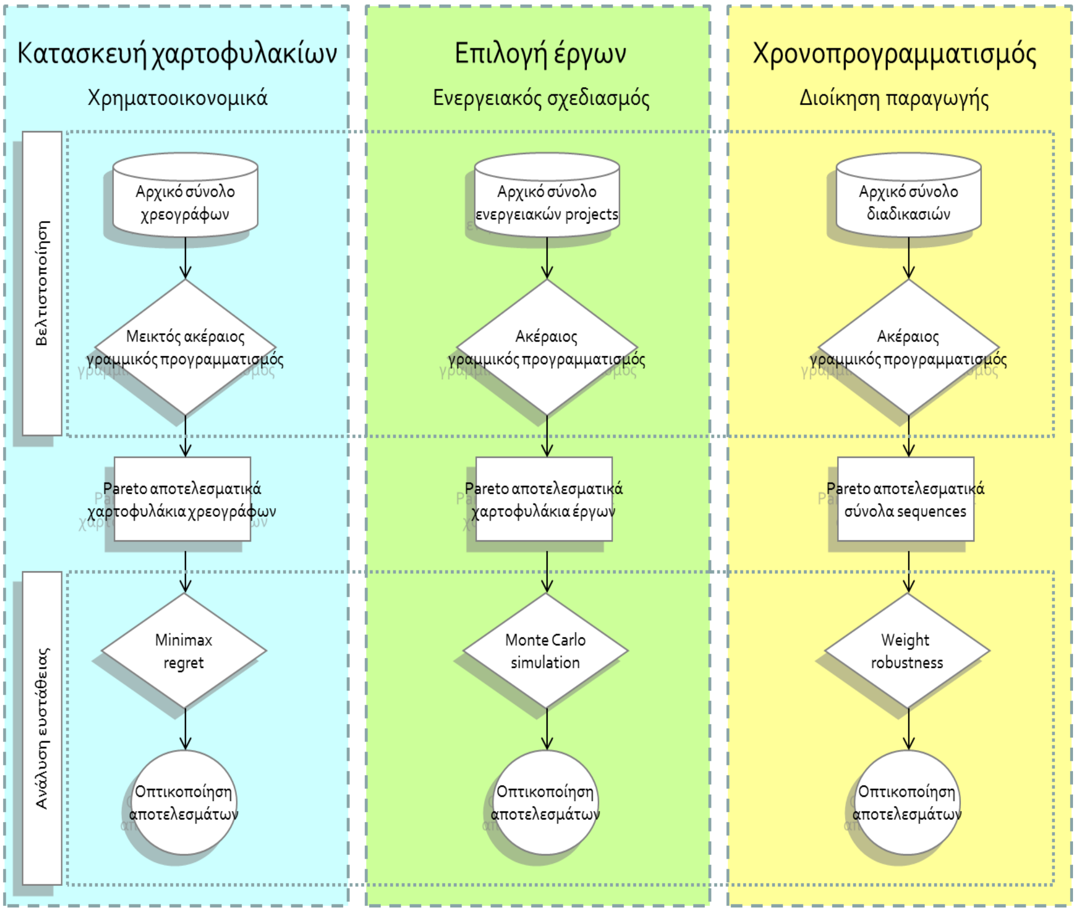
$$RM = [\frac{a_1}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} a_i + \frac{1}{2}] / (n-1) = \frac{\frac{0.1}{2} + 0.16 + 0.27 + 0.49 + \frac{1}{2}}{4} = 0.3675$$

Εφαρμογή της συγκεκριμένης προσέγγισης αποτελεί η εργασία που έγινε δεκτή και θα παρουσιαστεί στο διεθνές επιστημονικό συνέδριο επιχειρησιακής έρευνας σε στρατιωτικά θέματα AMIMS 2013 (http://www.sse.gr/files/programma%20synedrioy.pdf) με τον τίτλο "Combining mathematical programming and Monte Carlo simulation to deal with uncertainty in project portfolio selection ".

# 4. Εφαρμογές

Η εφαρμογή των μέτρων ευστάθειας που αναλύθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους, θα πραγματοποιηθεί σε τρία διακριτά πεδία εφαρμογών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7. Οι περιοχές αυτές εστιάζουν στους τομείς των χρηματοοικονομικών, του ενεργειακού σχεδιασμού (energy planning) και της διοίκησης παραγωγής (production management).

Πιο συγκεκριμένα, θα εξετασθούν τα προβλήματα της κατασκευής χαρτοφυλακίων (portfolio construction), της επιλογής επενδυτικών έργων (project selection) και του χρονοπρογραμματισμού διαδικασιών (production scheduling). Η μεθοδολογία ανάλυσης των προβλημάτων αυτών συνίσταται σε δυο στάδια: α) το στάδιο της βελτιστοποίησης, και β) το στάδιο του ελέγχου της ευστάθειας. Μέσω της πρώτης φάσης παράγεται σύνολο κατά των Pareto άριστων αποτελεσματικών λύσεων, ενώ μέσω της δεύτερης φάσης υλοποιείται ο έλεγχος της ευστάθειας, ο οποίος θα συνοδεύεται από την οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων, όπου αυτό είναι εφικτό.




**Σχήμα 7: Τα πεδία εφαρμογής των μέτρων ευστάθειας**

Επισημαίνεται τέλος ότι, τα μέτρα ευστάθειας που κατά περίπτωση θα χρησιμοποιηθούν, βασίζονται στο κριτήριο minimax (κατασκευή χαρτοφυλακίων), στην τεχνική της προσομοίωσης Monte Carlo (ενεργειακός σχεδιασμός) και στην ανάλυση των βαρών των αντικειμενικών συναρτήσεων (χρονοπρογραμματισμός διαδικασιών). Η δε μαθηματική διατύπωση των προβλημάτων, αφορά σε μοντελοποίηση, είτε ακέραιου (integer linear programming-ILP), είτε μεικτού-ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού (mixed integer programming-MILP).

# Βιβλιογραφία

Inuiguchi M, Sakawa M. Minimax regret solution to linear programming problems with an interval objective function. European Journal of Operational Research 1995;86; 526-536.

Kazakci AO, Rozakis S and Vanderpooten D. Energy supply in France: a min-max regret approach. Journal of the Operations Research Society 2006; available online doi: 10.1057/palgrave.jors.2602284

Kouvelis P, Yu G. Robust Discrete Optimization and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

Loulou R and Kanudia A. Minimax regret strategies for greenhouse gas abatement: methodology and application. Operations Research Letters 1999; 25; 219-230

Mausser HE, Laguna M. Minimising the maximum relative regret for linear programmes with interval objective function coefficients. Journal of Operational Research Society 1999; 50; 1063-1070.

Mavrotas G, Florios K. An improved version of the augmented ε-constraint method (AUGMECON2) for finding the exact Pareto set in Multi-Objective Integer Programming problems, approved for publication in Advanced Mathematics and Computation, 2013

Mavrotas G, Pechak, O. The trichotomic approach for dealing with uncertainty in project portfolio selection: combining MCDA, mathematical programming and Monte Carlo simulation Internationa Journal of Multicriteria Decision Making 2013, 3(1), 79-96

Savage LJ. The Foundations of Statistics. Wiley: New York; 1954.

Steuer RE. Multiple Criteria Optimization-Theory, Computation and Application (2nd ed). Krieger, Malabar FL, 1989.

Vose D. Quantitative Risk Analysis: A guide to Monte Carlo Simulation Modeling, Wiley, 1996

Vose D. Risk Analysis: A Quantitative Guide. 2nd edition. John Willey and sons, 2006

Zeleny M. Multiple Criteria Decision Making. McGraw-Hill, New York, 1982