

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

«ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΚΛΕΙΣΤΑ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ»-

ΟΜΑΔΑ Β

1^η Άσκηση (1 Μονάδα)

Εξετάζουμε την ασυμπίεστη μόνιμη, ροή η οποία σχηματίζεται γύρω από ακίνητη επίπεδη πλάκα ημιάπειρου μήκους.

Η αρχή τη πλάκας αυτής συμπίπτει με την αρχή του άξονα των x .

Ονομάζω τις συνιστώσες της ταχύτητας κατά των άξονα των x , u_x και κατά των άξονα των y , (ο οποίος είναι κάθετος στην πλάκα) u_y .

Ανάντη («εμπρός») από την πλάκα το πεδίο ροής είναι σταθερό, και ισχύουν οι σχέσεις: $u_x = U_\infty$, $u_y = 0$ (Η U_∞ είναι σταθερά ανεξάρτητη από τον χώρο και τον χρόνο). Η διεύθυνση του πεδίου ροής ανάντη της πλάκας, και ο άξονας των x είναι παράλληλοι.

Παίρνοντας υπόψη μου τόσο την εξίσωση της συνέχειας αλλά και την εξίσωση Navier Stokes κατά τον άξονα των x προκύπτει η σχέση:

$$\rho \int_0^{\Delta} \left(\frac{\partial [u_x (U_\infty - u_x)]}{\partial x} \right) \partial y + \rho [u_y (U_\infty - u_x)]_0^{\Delta} = -\mu \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} \right]_0^{\Delta} \quad (1.1)$$

(Στην εξίσωση (1.1) χρησιμοποιούμε την κλασική σύμβαση ότι οι τιμές πίσω (πάνω και κάτω) από τις τετράγωνες αγκύλες, αντιπροσωπεύουν όρια της ολοκλήρωσης:

$$\text{Π.χ. δίνεται η σχέση: } I = \int_a^b x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Το σύμβολο Δ συμβολίζει το πάχος της οριακής στιβάδας, δηλαδή την απόσταση την πλάκα κατά την οποία το στερεό σώμα επηρεάζει την ροή.

Παίρνοντας υπόψη σας τις οριακές συνθήκες :

A) Για $y \geq \Delta$, η επίπεδη πλάκα δεν επηρεάζει το πεδίο ροής, δηλαδή ισχύουν σχέσεις $u_x = U_\infty$, $u_y = 0$,

B) Στο σημείο στο οποίο η ροή έρχεται σε επαφή με την επιφάνεια πλάκας ($y = 0$), ισχύουν οι συνθήκες της μη ολίσθησης, δηλαδή στο σημείο αυτό η ταχύτητα του ρευστού είναι ταυτόσημη με την ταχύτητα του ρευστού με το οποίο έρχεται σε επαφή

Γράψτε την (1.1) στην πιο απλή δυνατή μορφή, αιτιολογώντας όλες τις απλοποιήσεις τις οποίες κάνετε.

2^η άσκηση (1,5 Μονάδες)

Για την μελέτη της ροής η οποία παρουσιάστηκε στην προηγούμενη άσκηση (ασυμπίεστη μόνιμη ροή η οποία σχηματίζεται γύρω από ακίνητη επίπεδη πλάκα ημιάπειρου μήκους), έχει προταθεί η εισαγωγή της συνάρτησης $f(\eta)$, η οποία ορίζεται από την σχέση:

$$f(\eta) = \frac{u_x}{U_\infty}, \text{ όπου } \eta = \frac{y}{\Delta}$$

α) Παίρνοντας υπόψη σας τις οριακές συνθήκες που είχαμε ορίσει προηγουμένως, γράψτε τις οριακές συνθήκες για την συνάρτηση $f(\eta)$, δηλαδή τα τιμές τις οποίες παίρνει η συνάρτηση αυτή για $\eta=0$ και $\eta=1$.

β) Ποιες από τις παρακάτω προτεινόμενες συναρτήσεις ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες που ορίστηκαν προηγουμένως:

β1) $f(\eta) = \eta / 2$

β2) $f(\eta) = \eta$

β3) $f(\eta) = 2\eta^2 - 2\eta$

β4) $f(\eta) = 2\eta^2 - \eta$

β5) $f(\eta) = \eta^2 - 2\eta$

β6) $f(\eta) = \frac{1}{2}\eta^3 + \frac{1}{2}\eta$

β7) $f(\eta) = -\frac{1}{2}\eta^3 + \frac{3}{2}\eta$

β8) $f(\eta) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\eta\right)$

β9) $f(\eta) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi\eta\right)$

β10) $f(\eta) = \cos(\pi\eta)$

3^η άσκηση (2 Μονάδες)

Εξετάζουμε μία μόνιμη ασυμπίεστη ροή ενός νευτώνειου ρευστού μεταξύ δύο επίπεδων παράλληλων πλακών, οι οποίες είναι ακίνητες. Η απόσταση μεταξύ των πλακών ορίζεται σαν h . Το πλάτος των πλακών είναι ίσο με B .

Οι ταχύτητες είναι αρκετά μικρές ώστε οι δυνάμεις αδρανείας να θεωρούνται αμελητέες.

Οι εξωτερικές δυνάμεις \vec{f} θεωρούνται αμελητέες.

Η ροή είναι παράλληλη στον άξονα των x . Οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τους άξονες y και z (v και w) είναι μηδενικές.

Η πίεση και στα δύο άκρα της πλάκας θεωρείται γνωστή.

Το πλάτος της πλάκας κατά την διεύθυνση z είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με το ύψος h . Κατά συνέπεια οι μεταβολές κατά την διεύθυνση z θεωρούνται αμελητέες

Ερωτήσεις

3α) Γράψτε τις οριακές συνθήκες για τη μεταβλητή u (συνιστώσα της ταχύτητας κατά την διεύθυνση x):

3αα) Για $y=0$ (στο σημείο επαφής του ρευστού με την κάτω πλάκα)

3αβ) Για $y=h$ (στο σημείο επαφής του ρευστού με την πάνω πλάκα)

3β) Σε ποια απλοποιημένη μορφή μπορούν να γραφούν οι εξισώσεις Navier-Stokes και η εξίσωση της συνέχειας για το συγκεκριμένο πρόβλημα;

Οι μόνοι όροι για τους οποίους μία αιτιολογία είναι απαραίτητη, είναι οι εξής:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ και $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ οι οποίοι εμφανίζονται στην εξίσωση:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

εάν ένας ή περισσότεροι από τους όρους αυτούς δεν είναι δυνατόν να θεωρηθεί / (θεωρηθούν) αμελητέος (αμελητέοι), δεν είναι απαραίτητο να δοθεί κάποια σχετική αιτιολογία

3γ) Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;

3γα- Η πίεση P είναι συνάρτηση μόνο του x .

3γβ- Η πίεση P είναι συνάρτηση μόνο του y .

3γγ- Η συνιστώσα της ταχύτητας u είναι συνάρτηση μόνο του x .

3γδ- Η συνιστώσα της ταχύτητας u είναι συνάρτηση μόνο του y .

Αιτιολογείστε τις απαντήσεις σας παίρνοντας υπόψη σας την απάντησή σας στην ερώτηση 3β)

4^η άσκηση
(1,5 Μονάδα)

4^α) Στην Ρευστομηχανική, ποιες δύο συνθήκες πρέπει να ισχύουν, σχετικές με τον στοιχειώδη όγκο V στον οποίο εξετάζουμε τους μέσους όρους των μεγεθών που μας ενδιαφέρουν, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση του συνεχούς μέσου; Οι συνθήκες αυτές πληρούνται συχνά στην πράξη;

4β) Παίρνοντας υπόψη σας την αρχή της διατήρησης της μάζας και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Reynolds, προκύπτει η παρακάτω έκφραση (η οποία δεν χρειάζεται να αποδειχθεί):

$$\iiint_{V(t)} \left\{ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{U} \right\} dV = 0 \quad (\text{XX})$$

όπου ρ η πυκνότητα και \vec{U} το πεδίο ταχυτήτων

Η εξίσωση (XX) αναφέρεται σε μία περιγραφή κατά Lagrange. **Υποδείξτε δύο σημεία τα οποία ενισχύουν τον ισχυρισμό αυτό.**

Μετατρέψτε την εξίσωση (XX) στην πιο απλή δυνατή μορφή και χρησιμοποιείστε στην συνέχεια μία περιγραφή κατά Euler.

Αιτιολογείστε αναλυτικά τα βήματα που κάνετε για την απόδειξη, αναφέροντας ενδεχομένως σε ποια παράγραφο του συνοδευτικού φυλλαδίου αναφέρονται τα θεωρήματα τα οποία χρησιμοποιείτε