

# «ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΚΛΕΙΣΤΑ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ»-ΟΜΑΔΑ Α

## 1<sup>ο</sup> Θέμα

(1.25 Μονάδες)

1) Εξετάζουμε μία μόνιμη ασυμπίεστη ροή ενός νευτώνειου ρευστού μεταξύ δύο επίπεδων παράλληλων πλακών, οι οποίες είναι ακίνητες. Η απόσταση μεταξύ των πλακών ορίζεται σαν  $h$ .

Οι ταχύτητες είναι αρκετά μικρές ώστε οι δυνάμεις αδρανείας να θεωρούνται αμελητέες.

Οι εξωτερικές δυνάμεις  $\vec{f}$  θεωρούνται αμελητέες.

Η ροή είναι παράλληλη στον άξονα των  $x$ . Οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τους άξονες  $y$  και  $z$  ( $v$  και  $w$ ) είναι μηδενικές.

Η πίεση και στα δύο άκρα της πλάκας θεωρείται γνωστή.

Το πλάτος της πλάκας κατά την διεύθυνση  $z$  είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με το ύψος  $h$ . Κατά συνέπεια οι μεταβολές κατά την διεύθυνση  $z$  θεωρούνται αμελητέες.

### Ερωτήσεις

1α) Γράψτε τις οριακές συνθήκες για τη μεταβλητή  $u$  (συνιστώσα της ταχύτητας κατά την διεύθυνση  $x$ ):

1αα) Για  $y=0$  (στο σημείο επαφής του ρευστού με την κάτω πλάκα)

1αβ) Για  $y=h$  (στο σημείο επαφής του ρευστού με την πάνω πλάκα)

1β) Σε ποια απλοποιημένη μορφή μπορούν να γραφούν οι εξισώσεις Navier-Stokes και η εξίσωση της συνέχειας για το συγκεκριμένο πρόβλημα;

1γ) Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;

1γα) Η πίεση  $p$  είναι συνάρτηση μόνο του  $x$ .

1γβ) Η πίεση  $p$  είναι συνάρτηση μόνο του  $y$ .

1γγ) Η συνιστώσα της ταχύτητας  $u$  είναι συνάρτηση μόνο του  $x$ .

1γδ) Η συνιστώσα της ταχύτητας  $u$  είναι συνάρτηση μόνο του  $y$ .

Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας παίρνοντας υπόψη σας την απάντησή σας στην ερώτηση 1β)

1δ) Τι θα άλλαζε στο φυσικό πρόβλημα και στη μέθοδο επίλυσης αν αντί για τις πιέσεις στα άκρα του αγωγού σας δινόταν η διαφορά της πίεσης;

**2<sup>ο</sup> Θέμα**  
(4.25 Μονάδες)

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα ρευστό βρίσκεται ανάμεσα σε δύο παράλληλες πλάκες. Η απόσταση ανάμεσα στις δύο πλάκες είναι  $h$ .

Αρχικά η πλάκα και το ρευστό είναι ακίνητα.

Στο χρονικό σημείο  $t=0$  η μία πλάκα αρχίζει και κινείται με σταθερή ταχύτητα  $U$  πάνω στο επίπεδο της. Λόγω της συνθήκης μη ολίσθησης το ρευστό αρχίζει να κινείται. Η δεύτερη πλάκα παραμένει ακίνητη

Οι ταχύτητες είναι αρκετά μικρές ώστε οι δυνάμεις αδρανείας να θεωρούνται αμελητέες. Η ροή είναι ασυμπίεστη.

Οι εξωτερικές δυνάμεις  $\vec{f}$  θεωρούνται αμελητέες.

Η ροή είναι παράλληλη στον άξονα των  $x$ . Οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τους άξονες  $y$  και  $z$  ( $v$  και  $w$ ) είναι μηδενικές.

Το πεδίο της πίεσης μπορεί να θεωρηθεί παντού σταθερό και όλες οι παράγωγοι της πίεσης ίσες με το μηδέν.

Λόγω της γεωμετρίας του προβλήματος οι μεταβολές κατά την διεύθυνση  $z$  θεωρούνται μηδενικές.

**Ερωτήσεις**

α) Γράψτε τις αρχικές συνθήκες για τη μεταβλητή  $u$  ( συνιστώσα της ταχύτητας κατά την διεύθυνση  $x$  )

β) Γράψτε τις οριακές συνθήκες για τη μεταβλητή  $u$  για  $y=0$  (στο σημείο επαφής του ρευστού με την πλάκα η οποία τίθεται σε κίνηση και για  $y=h$  (σημείο επαφής με την πλάκα η οποία μένει ακίνητη).

γ) Σε ποια απλοποιημένη μορφή μπορούν να μετατραπούν οι εξισώσεις Navier-Stokes και η εξίσωση της συνέχειας για το συγκεκριμένο πρόβλημα;

δ) Για να επιλύσουμε το πρόβλημα που εξετάζουμε εισάγουμε τη μεταβλητή

$$\varphi(y,t) = \left(1 - \frac{y}{h}\right)U - u$$

δ1) Γράψτε τις αρχικές συνθήκες για τη συνάρτηση  $\varphi$  (Πάρτε υπόψη σας την απάντησή σας στην ερώτηση α)

δ2) Γράψτε τις οριακές συνθήκες για τη συνάρτηση  $\varphi$  (Πάρτε υπόψη σας την απάντησή σας στην ερώτηση β)

δ3) Γράψτε την διαφορική εξίσωση για την συνάρτηση  $\varphi$  (Πάρτε υπόψη σας την απάντησή σας στην ερώτηση γ)

ε) Έστω η συνάρτηση  $f(y,t,n) = \exp\left(-n^2\pi^2\frac{yt}{h^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right)$ , όπου n ένας θετικός ακέραιος αριθμός

Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς:

ε1) Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (πάρτε υπόψη σας την απάντηση σας στην ερώτηση δ1)  
ε2) Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες για την συνάρτηση φ (πάρτε υπόψη σας την απάντηση σας στην ερώτηση δ2)

ε3) Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί μόνο τη μία από τις δύο οριακές συνθήκες για την συνάρτηση φ (πάρτε υπόψη σας την απάντηση σας στην ερώτηση δ2)

ε4) Η συνάρτηση αυτή αποτελεί μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης για την φ (πάρτε υπόψη σας την απάντηση σας στην ερώτηση δ3)

Αιτιολογείστε σύντομα τις απαντήσεις σας

Z) Ύστερα από (αρκετές) πράξεις βρίσκουμε ότι η συνιστώσα της ταχύτητας που μας ενδιαφέρει περιγράφεται από την εξίσωση:

$$u(y,t) = U\left(1 - \frac{y}{h}\right) - \frac{2U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-n^2\pi^2\frac{yt}{h^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right) \quad (ZZ)$$

Παίρνοντας υπόψη σας την εξίσωση αυτή απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις

ζ1) Υπό ποιές συνθήκες η ροή που εξετάζουμε είναι δυνατόν να θεωρηθεί μόνιμη;  
ζ2) Ποια μορφή έχει η  $u(y,t)$  όταν η ροή είναι μόνιμη;