ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

«ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΚΛΕΙΣΤΑ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ»

ΟΜΑΔΑ Α

1η άσκηση

(2 Μονάδες)

Θεωρώ ροή γύρω από επίπεδη πλάκα . Η ροή είναι ασυμπίεστη και η πίεση σταθερή. Πάνω από την πλάκας σχηματίζεται οριακή στιβάδα παχους *Δ*. Στο εσωτερικό της οριακής στιβάδας της η ροή είναι δισδιάστατη και ισχύει:

$u_x >> u_y$ και $\frac{\partial}{\partial x} << \frac{\partial}{\partial y}$

Η εξίσωση Navier-Stokes γύρω από δισδιάστατη επίπεδη πλάκα γράφεται:

$$-\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = -\rho \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \qquad (1)$$

ενώ έξω από την οριακή στιβάδα το πεδίο ταχύτητας είναι σταθερό με μία μόνο συνιστώσα: $u_x = U_\infty = const$

Η εξίσωση της συνέχειας γράφεται:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

κατά συνέπεια:

$$\rho(U_\infty - u_x)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho(U_\infty - u_x)\frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

Παίρνοντας υπόψη σας τα παραπάνω, μπορείτε να υποδείξετε ποιες από τις παρακάτω μαθηματικές εκφράσεις είναι σωστές:

A1) $\rho(u_y - 2u_x)\frac{\partial u_x}{\partial x} - \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \rho(u_y - u_x)\frac{\partial u_y}{\partial y} = -\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial^2 y}$

A2) $\rho(U_\infty - 2u_x)\frac{\partial u_x}{\partial x} - \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \rho(U_\infty - u_x)\frac{\partial u_y}{\partial y} = -\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial^2 y}$

$$\text{A3)}\quad \rho\left(u_y - 2u_x\right)\frac{\partial u_x}{\partial x} - \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \rho\left(u_y - u_x\right)\frac{\partial u_y}{\partial y} = -\mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial^2 y}$$

$$\text{B1)}\quad \rho\left[\frac{\partial(U_\infty u_x)}{\partial x} - \frac{\partial(u_x u_x)}{\partial x}\right] + \rho\left[u_y \frac{\partial(U_\infty - u_x)}{\partial y} + (U_\infty - u_x)\frac{\partial u_y}{\partial y}\right] = -\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial^2 y}$$

$$\text{B2)}\quad \rho\left[\frac{\partial(U_y u_x)}{\partial x} - \frac{\partial(u_x u_x)}{\partial x}\right] + \rho\left[u_y \frac{\partial(U_\infty - u_x)}{\partial y} + (U_y - u_x)\frac{\partial u_y}{\partial y}\right] = -\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial^2 y}$$

$$\text{B3)}\quad \rho\left[\frac{\partial(U_\infty u_x)}{\partial x} - \frac{\partial(u_x u_x)}{\partial x}\right] + \rho\left[u_y \frac{\partial(U_\infty - u_x)}{\partial y} + (U_\infty - u_y)\frac{\partial u_y}{\partial y}\right] = -\mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial^2 y}$$

$$\Gamma 1)\quad \rho\left[\frac{\partial[u_x(u_y - u_x)]}{\partial x}\right] + \rho\left[\frac{\partial[u_y(U_\infty - u_x)]}{\partial y}\right] = -\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial^2 y}$$

$$\Gamma 2)\quad \rho\left[\frac{\partial[u_x(U_\infty - u_x)]}{\partial x}\right] + \rho\left[\frac{\partial[u_y(U_\infty - u_x)]}{\partial y}\right] = -\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial^2 y}$$

$$\Gamma 3)\quad \rho\left[\frac{\partial[u_x(u_y - u_x)]}{\partial x}\right] + \rho\left[\frac{\partial[u_y(U_\infty - u_x)]}{\partial y}\right] = -\mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial^2 y}$$

Αιτιολογείστε σύντομα τις απαντήσεις σας!

<u>2η άσκηση</u>

(2 Μονάδες)

Εξετάζουμε μία μόνιμη ασυμπίεστη ροή ενός νευτώνειου ρευστού μεταξύ δύο επίπεδων παράλληλων πλακών, οι οποίες είναι ακίνητες. Η απόσταση μεταξύ των πλακών ορίζεται σαν h . Το πλάτος των πλακών είναι ίσο με B.

Οι ταχύτητες είναι αρκετά μικρές ώστε οι δυνάμεις αδρανείας να θεωρούνται αμελητέες.

Οι εξωτερικές δυνάμεις $\vec{f}$ θεωρούνται αμελητέες.

Η ροή είναι παράλληλη στον άξονα των x. Οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τους άξονες y και z (v και w) είναι μηδενικές.

Η πίεση και στα δύο άκρα της πλάκας θεωρείται γνωστή.

Το πλάτος της πλάκας κατά την διεύθυνση z είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με το ύψος h. Κατά συνέπεια οι μεταβολές κατά την διεύθυνση z θεωρούνται αμελητέες

<u>Ερωτήσεις</u>

2α) Γράψτε τις οριακές συνθήκες για τη μεταβλητή u (συνιστώσα της ταχύτητας κατά την διεύθυνση x):

2αα) Για $y=0$ (στο σημείο επαφής του ρευστού με την κάτω πλάκα)
2αβ Για $y=h$ (στο σημείο επαφής του ρευστού με την πάνω πλάκα)

2β) Σε ποια απλοποιημένη μορφή μπορούν να γραφούν οι εξισώσεις Navier-Stokes και η εξίσωση της συνέχειας για το συγκεκριμένο πρόβλημα;

Οι μόνοι όροι για τους οποίους μία αιτιολογία είναι απαραίτητη, είναι οι εξής:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ και $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ οι οποίοι εμφανίζονται στην εξίσωση:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

εάν ένας ή περισσότεροι από τους όρους αυτούς δεν είναι δυνατόν να θεωρηθεί /(θεωρηθούν) αμελητέος (αμελητέοι), δεν είναι απαραίτητο να δοθεί κάποια σχετική αιτιολογία

2γ) Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;

2γα-Η πίεση P είναι συνάρτηση μόνο του x.
2γβ-Η πίεση P είναι συνάρτηση μόνο του y.
2γγ-Η συνιστώσα της ταχύτητας u είναι συνάρτηση μόνο του x.
2γδ- Η συνιστώσα της ταχύτητας u είναι συνάρτηση μόνο του y.

Αιτιολογείστε τις απαντήσεις σας παίρνοντας υπόψη σας την απάντηση σας στην ερώτηση 2β)

3η άσκηση

(1 Μονάδα)

Μία τυπική μεθοδολογία προσομοίωσης της ροής για την περίπτωση της τύρβης είναι η εισαγωγή «μέσων» μεγεθών, τα οποία για την περίπτωση της μακροσκοπικά μόνιμης ροής ορίζονται από την σχέση:

$$< q > = \frac{1}{T}\int_0^T q \quad dt \,, \tag{3.1}$$

όπου το q μπορεί να είναι μία από τις συνιστώσες της ταχύτητας (u, v,w), p η πίεση p ενώ t ο χρόνος. Το χρονικό διάστημα T πρέπει να εκλεγεί κατάλληλα για να προκύψει μία ικανοποιητική και χωρίς διακυμάνσεις μέση τιμή.

Κατά συνέπεια τα («στιγμιαία») μεγέθη της εξίσωσης Navier-Stokes, μπορούν να εκφραστούν με την σχέση:

$$q = < q > + q'$$

όπου q' διαταραχή (ή απόκλιση) του στιγμιαίου μεγέθους q ως προς την μέση τιμή του $<q>$.

Κατά την γνώμη σας ποιο εύρος τιμών παίρνει το μέγεθος $< q' >$ το οποίο ορίζεται από την σχέση:

$$< q' > = \frac{1}{T}\int_0^T q' \quad dt \;\; ;$$

Αιτιολογείστε αναλυτικά την απάντηση σας.