

# ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

## «ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΚΛΕΙΣΤΑ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ»

### -ΟΜΑΔΑ Α

#### 1<sup>η</sup> Άσκηση

(3 Μονάδες)

Εξετάζοντας τις δυνάμεις που ασκούνται σε έναν στοιχειώδη όγκο ρευστού  $V(t)$ , και παίρνοντας υπόψη μας τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα (διατήρηση της ορμής), αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} (\rho \vec{U} dV) = \iiint_{V(t)} (\rho \vec{f} + \text{div} \sigma_{ij}) dV \quad (A)$$

όπου:

$\vec{U}$ : το πεδίο των ταχυτήτων

$\rho$ : Η πυκνότητα του ρευστού

$\vec{f}$ : Οι εξωτερικές δυνάμεις οι οποίες εξασκούνται

$\sigma_{ij}$ : Ο τανυστής των τάσεων

(Η εξίσωση (A) θεωρείται δεδομένη και δεν χρειάζεται να αποδειχθεί. Η εξίσωση αυτή ισχύει για τις περιπτώσεις μη ασυμπίεστης και ασυμπίεστης ροής, για νευτώνεια και μη νευτώνεια ρευστά.)

Με βάση την (A) αποδείξτε ότι

$$1\alpha) \iiint_{V(t)} \left( \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} - \rho \vec{f} - \text{div} \sigma_{ij} \right) dV = 0$$

$$1\beta) \left( \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} - \rho \vec{f} - \text{div} \sigma_{ij} \right) = 0$$

1γ) Σε ποιόν από τους όρους της 3β) περιέχονται οι μη γραμμικοί (ως προς την ταχύτητα) όροι αδρανείας; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Για την απόδειξη της (1α) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα μεταφοράς Reynolds (θέτοντας  $\Phi = \rho \vec{U}$ ), την εξίσωση της συνέχειας, αλλά και την προφανή

$$\text{σχέση: } \frac{D(\rho \vec{U})}{Dt} = \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \vec{U} \frac{D\rho}{Dt}.$$

Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος.  
Εξέταση Ρευστομηχανικής. Φεβρουάριος 2005  
. Ασκήσεις με κλειστά βιβλία. Ομάδα Α.

Αιτιολογείστε αναλυτικά τα βήματα που κάνετε για την απόδειξη, αναφέροντας ενδεχομένως σε ποια παράγραφο του συνοδευτικού φυλλαδίου αναφέρονται τα θεωρήματα τα οποία χρησιμοποιείτε

## 2<sup>ο</sup> ΘΕΜΑ (1 Μονάδα)

Μία τυπική μεθοδολογία προσομοίωσης της ροής για την περίπτωση της τύρβης είναι η εισαγωγή «μέσων» μεγεθών, τα οποία για την περίπτωση της μακροσκοπικά μόνιμης ροής ορίζονται από την σχέση:

$$\langle q \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T q \, dt, \quad (2.1)$$

όπου το  $q$  μπορεί να είναι μία από τις συνιστώσες της ταχύτητας ( $u, v, w$ ), ή η πίεση  $p$  ενώ  $t$  ο χρόνος. Το χρονικό διάστημα  $T$  πρέπει να εκλεγεί κατάλληλα για να προκύψει μία ικανοποιητική και χωρίς διακυμάνσεις μέση τιμή.

Κατά συνέπεια τα («στιγμιαία») μεγέθη της εξίσωσης Navier-Stokes, μπορούν να εκφραστούν με την σχέση:

$$q = \langle q \rangle + q'$$

όπου  $q'$  διαταραχή (ή απόκλιση) του στιγμιαίου μεγέθους  $q$  ως προς την μέση τιμή του  $\langle q \rangle$ .

Κατά την γνώμη σας ποιο εύρος τιμών παίρνει το μέγεθος  $\langle q' \rangle$  το οποίο ορίζεται από την σχέση:

$$\langle q' \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T q' \, dt ;$$

Αιτιολογείστε αναλυτικά την απάντησή σας.

## 3<sup>ο</sup> Θέμα (2 Μονάδες)

Υποθέτουμε ότι έχουμε μία άπειρη επίπεδη πλάκα εμβαπτισμένη  $\sigma'$  έναν άπειρο χώρο ρευστού.

Αρχικά η πλάκα και το ρευστό είναι ακίνητα.

Στο χρονικό σημείο  $t=0$  η πλάκα αρχίζει και κινείται με σταθερή ταχύτητα  $U$  πάνω στο επίπεδο της. Λόγω της συνθήκης μη ολίσθησης το ρευστό αρχίζει να κινείται.

Οι ταχύτητες είναι αρκετά μικρές ώστε οι δυνάμεις αδρανείας να θεωρούνται αμελητέες. Η ροή είναι ασυμπίεστη.

Οι εξωτερικές δυνάμεις  $\vec{f}$  θεωρούνται αμελητέες.

Η ροή είναι παράλληλη στον άξονα των  $x$ . Οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τους άξονες  $y$  και  $z$  ( $v$  και  $w$ ) είναι μηδενικές.

Το πεδίο της πίεσης μπορεί να θεωρηθεί παντού σταθερό και όλες οι παράγωγοι της πίεσης ίσες με το μηδέν.

Λόγω της γεωμετρίας του προβλήματος οι μεταβολές κατά την διεύθυνση  $z$  θεωρούνται μηδενικές.

### Ερωτήσεις

α) Γράψτε τις αρχικές συνθήκες για τη μεταβλητή  $u$  ( συνιστώσα της ταχύτητας κατά την διεύθυνση  $x$  )

β) Γράψτε τις οριακές συνθήκες για τη μεταβλητή  $u$  για  $y=0$  (στο σημείο επαφής του ρευστού με την πλάκα). Δεδομένου ότι το πεδίο ροής μπορεί να θεωρηθεί ημιάπειρο, ποια δεύτερη οριακή συνθήκη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε;

γ) Σε ποια απλοποιημένη μορφή μπορούν να μετατραπούν οι εξισώσεις Navier-Stokes και η εξίσωση της συνέχειας για το συγκεκριμένο πρόβλημα;

Οι μόνοι όροι για τους οποίους μία αιτιολογία είναι απαραίτητη, είναι οι όροι:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  και  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  οι οποίοι εμφανίζονται στην εξίσωση:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

εάν ένας ή περισσότεροι από τους όρους αυτούς δεν είναι δυνατόν να θεωρηθεί //(θεωρηθούν) αμελητέος (αμελητέοι), δεν είναι απαραίτητο να δοθεί κάποια σχετική αιτιολογία

δ) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής;

δα- Η συνιστώσα της ταχύτητας  $u$  είναι συνάρτηση μόνο του  $x$ .

δβ- Η συνιστώσα της ταχύτητας  $u$  είναι συνάρτηση είναι συνάρτηση μόνο του  $y$ .

Αιτιολογείστε τις απαντήσεις σας παίρνοντας υπόψη σας την απάντηση σας στην ερώτηση γ)