ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

«ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΚΛΕΙΣΤΑ ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ»

Φεβρουάριος 2009

-ΟΜΑΔΑ Β-

1ο ΘΕΜΑ

(3,0 Μονάδες)

α) Εξετάζουμε ροή γύρω από επίπεδη πλάκα . Η ροή είναι ασυμπίεστη, μόνιμη, η πίεση σταθερή και οι εξωτερικές δυνάμεις αμελητέες.

Πάνω από την πλάκα σχηματίζεται οριακή στιβάδα πάχους *Δ*. (Όπως αναφέρθηκε στην παράδοση το πάχος της οριακής στιβάδας αυξάνει από τα ανάντη στα κατάντη).

Θεωρούμε ότι ο άξονας των *x* συμπίπτει με την επιφάνεια της πλάκας, ο άξονας των y είναι κάθετος στην επιφάνεια της πλάκας. Όλες οι μεταβολές κατά την διεύθυνση *z* είναι αμελητέες.

Στο εξωτερικό της οριακής στιβάδας το πεδίο ταχυτήτων είναι μονοδιάστατο, ομοιόμορφο και παράλληλο προς των άξονα της πλάκας, ισχύουν δηλαδή οι σχέσεις $u_x = U_\infty$, $u_y = u_z = 0$, όπου ο όρος U_∞ (ταχύτητα μακριά από την πλάκα) είναι ανεξάρτητος από τον χώρο και τον χρόνο.

Στο εσωτερικό οριακής στιβάδας της η ροή είναι δισδιάστατη και ισχύουν οι σχέσεις: $u_x >> u_y$ και $\frac{\partial}{\partial x} << \frac{\partial}{\partial y}$.

Για τον υπολογισμό της ροής στο εσωτερικό της (στρωτής) οριακής στιβάδας μπορούμε να πάρουμε υπόψη μας τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

Α) Για $y = 0$, $u_x = 0$, $u_y = 0$

Β) Για $y = \Delta$, $u_x = U_\infty$, $u_y = 0$.

Γ) Επίσης για $y = \Delta$ έχω την σχέση: $\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$

α1) **Για την περίπτωση που εξετάζουμε, γράψτε την εξίσωση Navier-Stokes για την συνιστώσα κατά *x* στην πιο απλή δυνατή μορφή**.

β) Μετά από αρκετούς υπολογισμούς προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$\rho\int_0^{\Delta}\left(\frac{\partial[u_x(U_\infty - u_x)]}{\partial x}\right)\partial y + \rho\left[u_y(U_\infty - u_x)\right]_{y=0}^{y=\Delta} = -\mu\left[\frac{\partial u_x}{\partial y}\right]_{y=o}^{y=\Delta} \qquad \text{(I)}$$

(*Οι όροι μέσα στις αγκύλες αντιστοιχούν στην κλασσική σύμβαση η οποία χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος*:

$$\int_a^b f(x)dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)).$$

β1)Γράψτε την εξίσωση (I) στη πιο απλή δυνατή μορφή. Αιτιολογείστε όλες τις απλοποιήσεις που κάνετε.

γ) Μία μέθοδος για τον υπολογισμό του πάχους της οριακής στιβάδας είναι η χρήση της αρχής της ομοιότητας , να γίνει δηλαδή η υπόθεση ότι:

$$\frac{u_x}{U_\infty} = f\left(\frac{y}{\Delta}\right) = f(\eta) \qquad \text{(II)}$$

όπου η νέα μεταβλητή η έχει οριστεί από την σχέση $\eta = \frac{y}{\Delta}$. Η παραπάνω εξίσωση (II) ισχύει μόνο στο εσωτερικό της οριακής στιβάδας.

γ1) Γράψτε τις οριακές συνθήκες για τη συνάρτηση *f(η)* οι οποίες αντιστοιχούν στις οριακές συνθήκες Α), Β) και Γ).

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

1. Εξίσωση Navier-Stokes κατά την συνιστώσα *x* για την περίπτωση ασυμπίεστης ροής

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right) = \rho f_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)$$

u_x , u_y , u_z είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά τις διευθύνσεις x,y,z αντίστοιχα. P είναι το πεδίο πίεσης, ρ είναι η πυκνότητα, μ είναι το δυναμικό ιξώδες, t είναι ο χρόνος. $\vec{f}$ είναι το πεδίο των εξωτερικών δυνάμεων.

2. Εξίσωση συνέχειας-διατήρησης της μάζας,για την περίπτωση αδιάστατης ροής

Η εξίσωση της συνέχειας, για την περίπτωση αδιάστατης ροής μπορεί να γραφεί με την παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial(u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0$$